1.数理算法原理

下面给出Lax格式、Lax-Wendroff格式和一阶迎风格式的推导过程和相应的精度、稳定性、相位分析。

要求解的方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

(1) Lax格式
将(1)中的时间项做一阶向前差分，并将$u(x,t)$用$\frac{1}{2}(u(x-1,t)+u(x+1,t))$替换，空间项做中心差分，整理得到：

$$u(x,t+1)=\frac{1}{2}(1-c)u(x+1,t)+\frac{1}{2}(1+c)u(x-1,t)$$

时间项差分为一阶精度，空间项差分为二阶精度，因此该格式是二阶精度的
用Von Neumann方法分析稳定性，得到的放大因子为：

$$G=cosk\Delta x-icsink\Delta x$$

稳定性条件$|G|\leq 1$推出$|c|\leq 1$

(2) Lax-Wendroff格式
将$u(x,t+1)$看作一元函数，对$u(x,t)$做泰勒展开：

$$u(x,t+1)=u(x,t)+\Delta t\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+O(\Delta t^3)$$

由(1)式，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (2.1)$$

上式两边分别对t x求导得到：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

于是有:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2.2)$$

将(2.1) (2.2)两式带入泰勒展开式得到

$$u(x,t+1) = u(x,t) - \Delta t\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta t^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t^3)$$

再对所有空间项用中心差分得到:

$$u(x,t+1) = u(x,t) - \frac{1}{2}c(u(x+1,t) - u(x-1,t)) + \frac{1}{2}c^2(u(x+1,t) - 2u(x,t) + u(x-1$$

由于上面的中心差分是二阶精度的，因此该格式为二阶精度
用Von Neumann方法分析稳定性，得到的放大因子为:

$$G = 1 - c^2(1 - cosk\Delta x) - icsink\Delta x \qquad (2.3)$$

稳定性条件为$|c| \leq 1$
相位与准确解的相对相位之比为:

$$\frac{\Phi}{\Phi_{exact}} = \frac{Arg(G)}{-k\Delta xc}$$

从(2.3)可以得到G的辐角并与准确值比较:

$$Arg(G) = -arctan(\frac{csink\Delta x}{1-c^2(1-cosk\Delta x)})$$

当$|c|<1$时相位主要为落后，当$|c|>1$时相位主要为超前

(3) 一阶迎风格式
将方程(1)的空间项改为一阶精度的向后差分，时间项改为一阶精度的向前差分：

$$\frac{u(x,t+1)-u(x,t)}{\Delta t} + \frac{u(x,t)-u(x-1,t)}{\Delta x} = 0$$

移项得到：

$$u(x,t+1) = u(x,t) - c(u(x,t)-u(x-1,t))$$

空间和时间差分均为一阶，因此该格式为一阶精度
用Von Neumann方法分析稳定性，得到的放大因子为：

$$G = 1 - c(1-cosk\Delta x) - icsink\Delta x$$

稳定性条件为$|c| \leq 1$

2.代码生成和调试

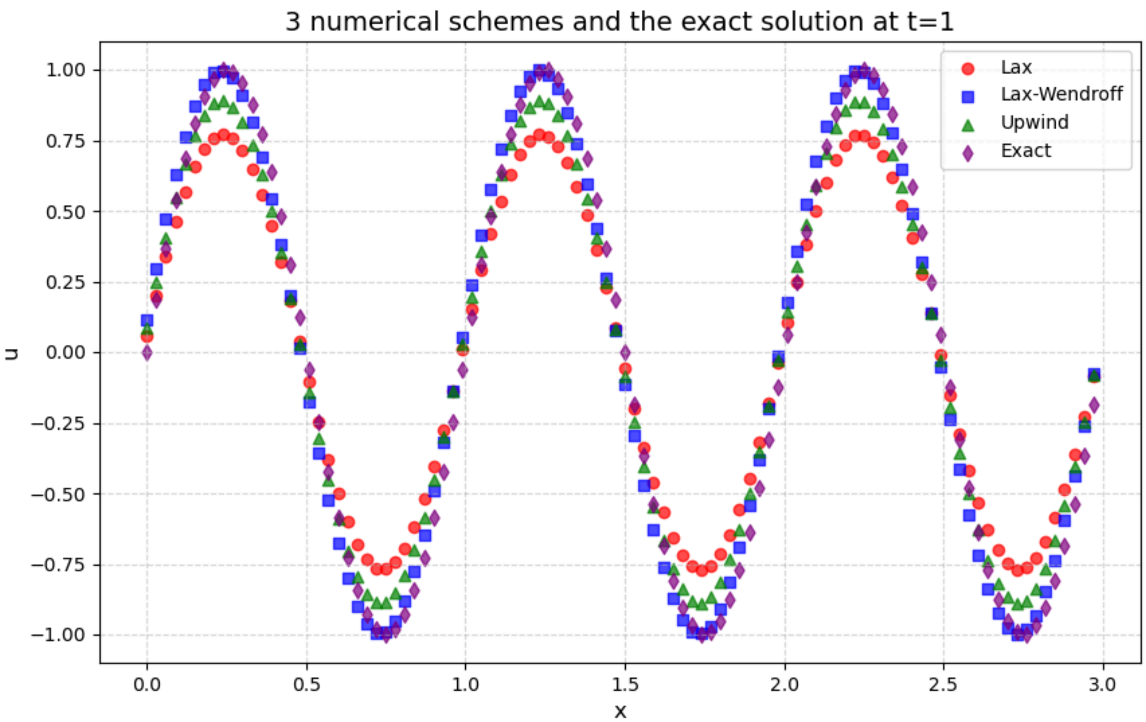
在./src/HW3.cpp中，输入网格数N，CFL数c和模拟时间T，可以得到以上三种格式和精确解在t=T时在给定区间上的解情况

3.结果讨论和解释

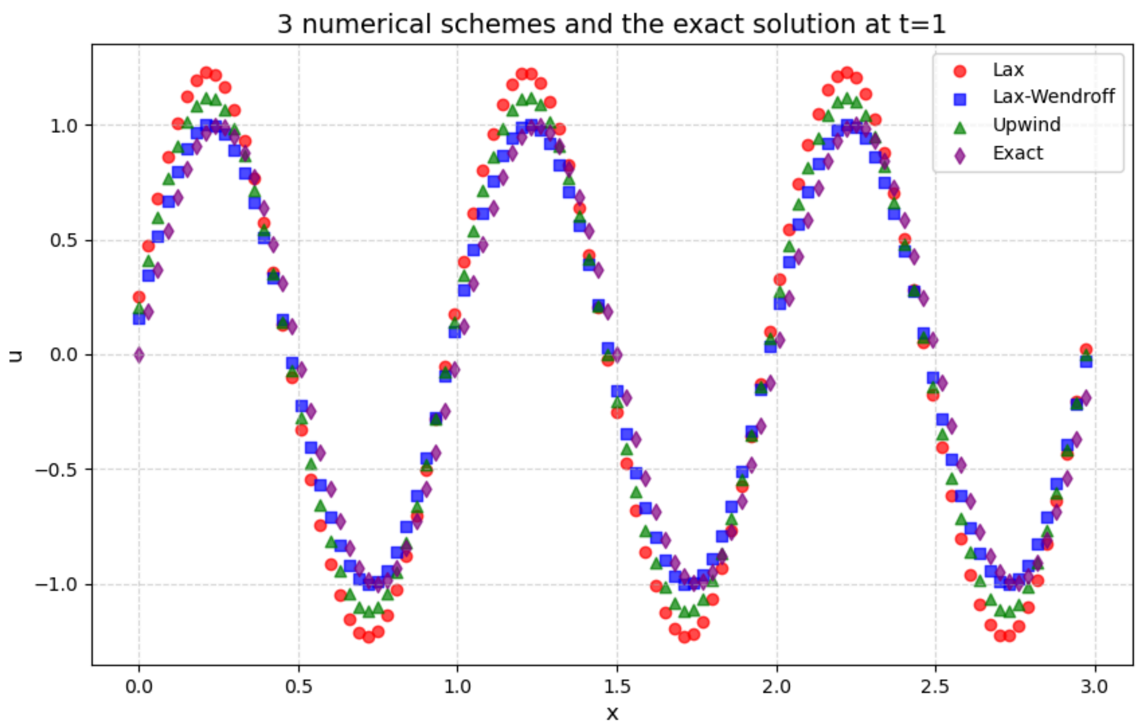
(1) 精度
将三种格式的结果与精确值作差，并与步长（在本程序中为$\frac{3}{N}$）比较，可以发现Lax格式和Lax-Wendroff格式得到的误差大致与步长的平方成正比，而一阶迎风格式得到的误差大致与步长成线性关系，由此可以大致验证上面精度的推导。

(2) 稳定性和相位

改变c=0.8和1.2，将结果绘图如下：



$$c = 0.8$$



$$c = 1.2$$

与精确解比较，可以发现与上面推导的稳定性条件对c的要求符合
观察极值点并与精确解比较，可以发现c=0.8时相位略微滞后，c=1.2时相位明显超前

附录1：AI工具使用声明表

AI工具名称	生成代码	功能
Deepseek R1	第93-105行	将输出自动对齐，用于保证输出结果的可读性

核心代码生成行数占比：100%

附录2：本次commit截图

Commits

main | All users | All time

Commits on Apr 12, 2025

HW3 done
yzyzy23 committed 10 minutes ago — 04ab690

HW3 code done
yzyzy23 committed 6 hours ago — 508d100

Commits on Mar 26, 2025

HW2 final version
yzyzy23 committed 3 weeks ago — 41efb81

Commits on Mar 25, 2025

HW2 final version
yzyzy23 committed 3 weeks ago — c848f85

HW2 done
yzyzy23 committed 3 weeks ago — 845cf32

HW2 done
yzyzy23 committed 3 weeks ago — e967125

HW2 code done
yzyzy23 committed 3 weeks ago — e72997b

add theoretical derivation
yzyzy23 committed 3 weeks ago — 5eebb80

Commits on Mar 24, 2025

add front diff for first order and second order, update README.md
yzyzy23 committed 3 weeks ago — c3c1444

Commits on Mar 18, 2025

build README file
yzyzy23 committed last month — a40c9c1

Initial commit
yzyzy23 authored last month — Verified — d982bd2