1.数理算法原理

流体的热传导方程：

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \nabla^2 T = 0$$

最终达到稳态时$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$，因此在二维条件下原方程化为：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} = 0$$

其中温度分布$T = T(x, y)$（温度单位：K，长度单位：cm）
边界条件为：

$$T(x, 0) = T(0, y) = T(15, y) = 293.15$$

$$T(x, 12) = 373.15$$

$$0 \leq x \leq 15, 0 \leq y \leq 12$$

要用迭代法求解以上方程，可以先用五点差分格式进行离散：

$$\frac{T(i+1, j) - 2T(i, j) + T(i-1, j)}{\Delta x^2} + \frac{T(i, j+1) - 2T(i, j) + T(i, j-1)}{\Delta y^2} = 0$$

整理得：

$$T(i, j) = \frac{\Delta y^2 (T(i+1, j) + T(i-1, j)) + \Delta x^2 (T(i, j+1) + T(i, j-1))}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

假设采用均匀网格，即$\Delta x = \Delta y$,则上式写为：

$$T(i,j)=\frac{T(i+1,j)+T(i-1,j)+T(i,j+1)+T(i,j-1)}{4}$$

Gauss-Seidel迭代法为:

$$T^{k+1}(i,j)=\frac{T^{k}(i+1,j)+T^{k+1}(i-1,j)+T^{k}(i,j+1)+T^{k+1}(i,j-1)}{4}$$

松弛法要求：$T^{k+1}(i,j)=T^{k}(i,j)+\omega\Delta T$，这里$\omega$是松弛因子
下面计算ΔT：

$$\Delta T=T^{k+1}(i,j)-T^{k}(i,j)=\frac{T^{k}(i+1,j)+T^{k+1}(i-1,j)+T^{k}(i,j+1)+T^{k+1}(i,j-1)}{4}$$

带入原方程并整理得到：

$$T^{k+1}(i,j)=(1-\omega)T^{k}(i,j)+\frac{\omega}{4}[T^{k+1}(i-1,j)+T^{k+1}(i,j-1)+T^{k}(i+1,j)+T^{k}(i,j+$$

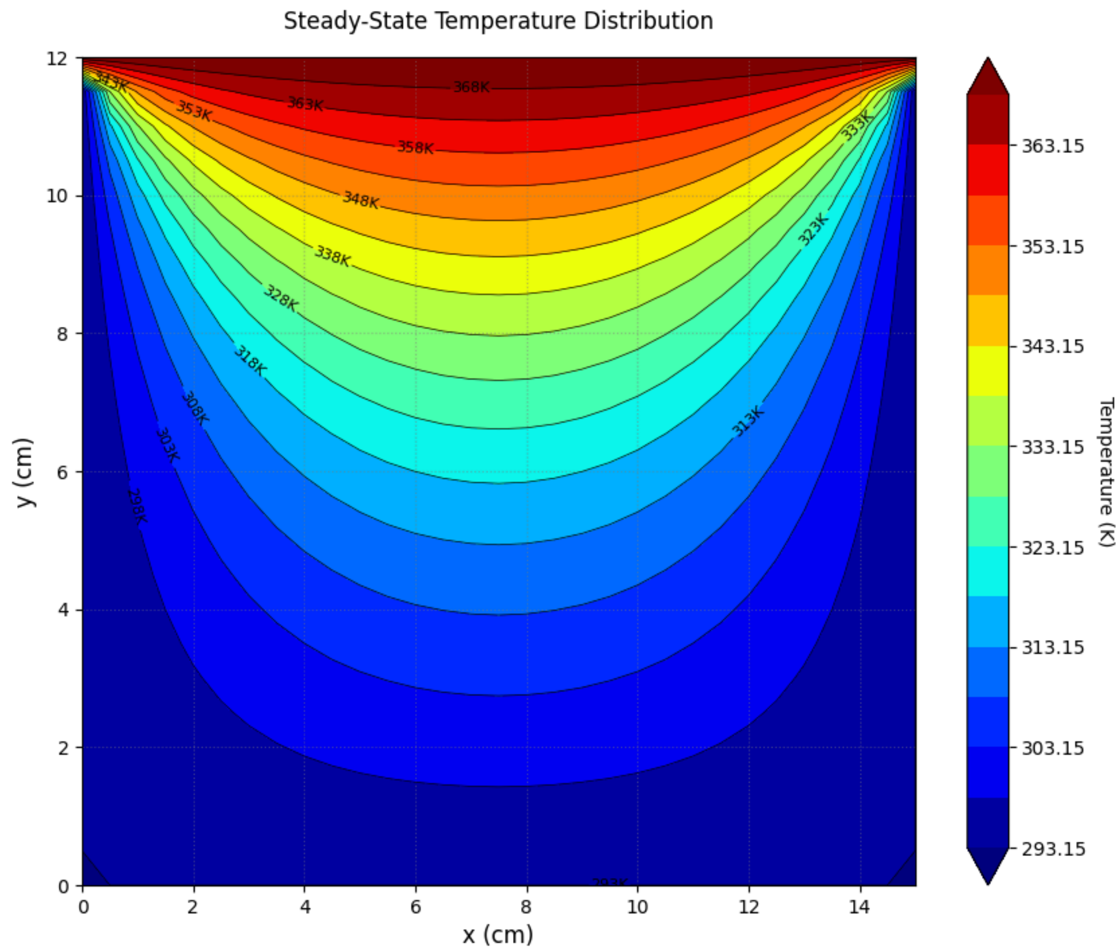
这就是松弛法的迭代公式，终止条件为$max|T^{k+1}-T^{k}|<\epsilon$，下面取$\epsilon=10^{-5}$求解本问题。

2.代码生成与调试

用./src/HW4/TemperatureDistribution.cpp进行问题求解，可以自定义松弛因子和步长。同时为了观察收敛速率和松弛因子、步长的关系，可以在输入时开启测试循环，程序将相关数据自动写入相关文件，随后用同一文件夹下的Python程序可以进行画图。

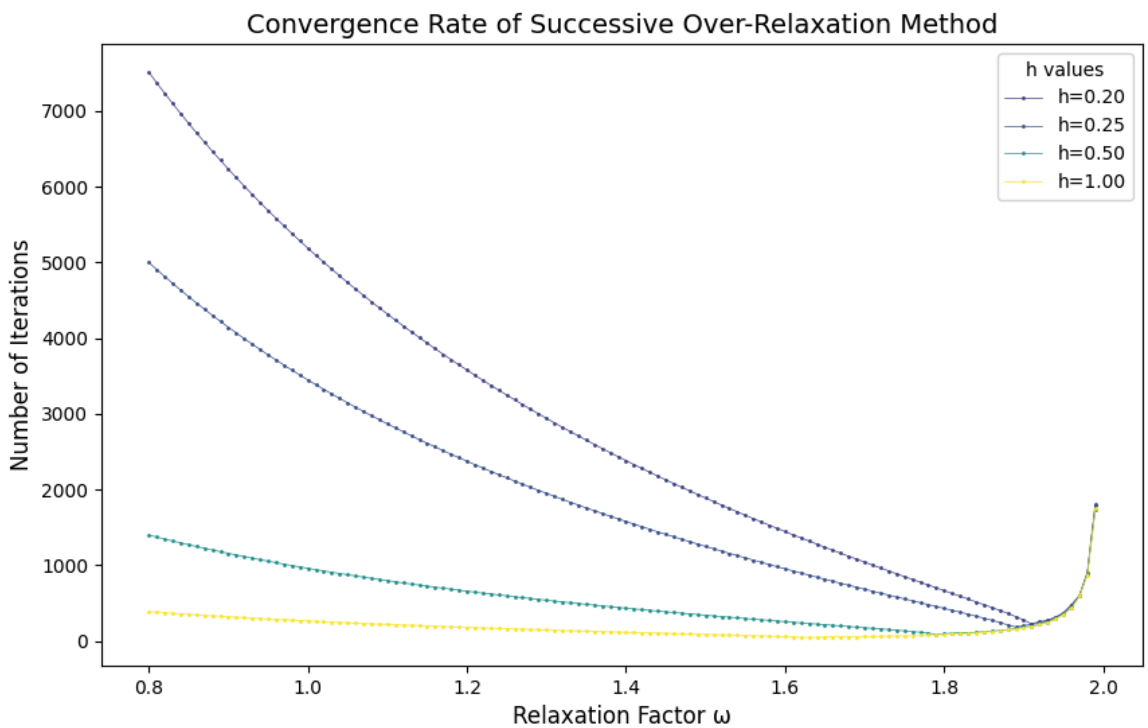
3.结果讨论和物理解释

取松弛因子1.5，步长0.5，求解并画图得到稳态时的温度分布图象如下：



与物理常识相吻合，说明数值模拟成功。

下面为了比较收敛速率，对不同的松弛因子和步长分别求解，并画出总共迭代次数：



这里松弛因子从亚松驰的0.8一直取到超松弛法的2.0，可以从图中很明显看到收敛速率随着松弛因子的增大而先降后升，存在最佳松弛因子。并且最佳松弛因子会随着步长的增大而变小。

附录1：AI工具使用声明表

AI工具名称	生成代码	功能
Deepseek R1	两个Python文件	将结果可视化

核心代码生成行数占比：0%

附录2：本次commit截图