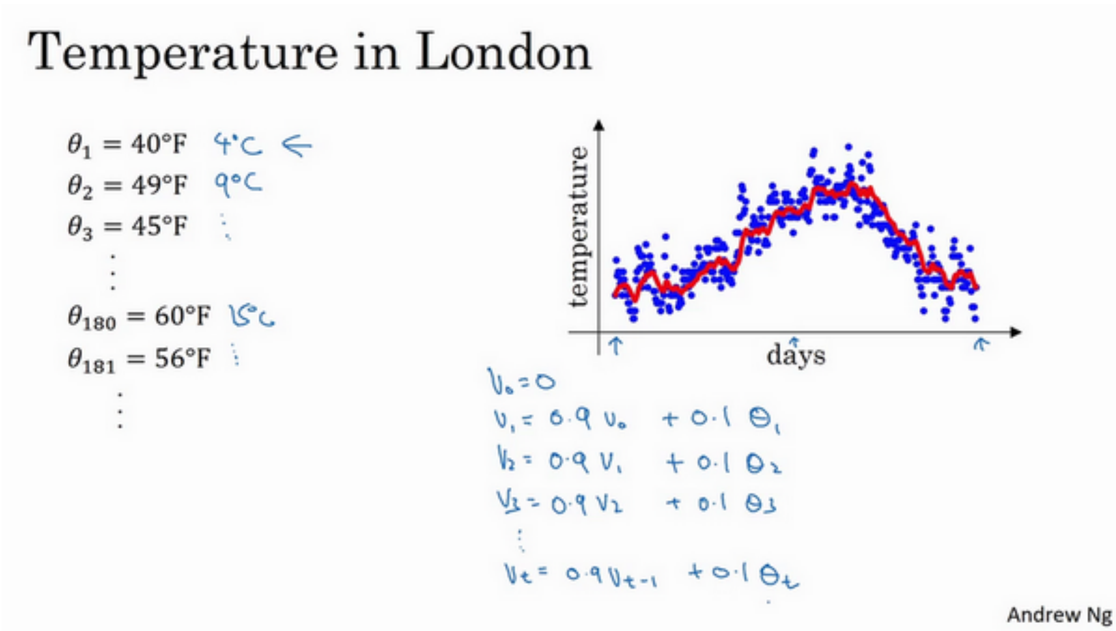
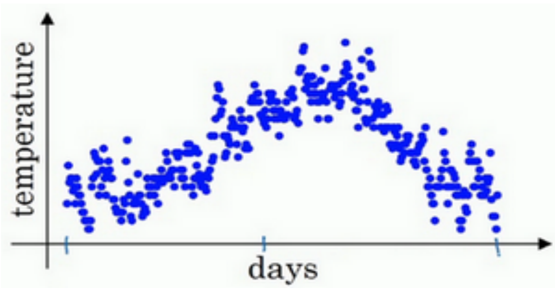
2.3 指数加权平均数（Exponentially weighted averages）

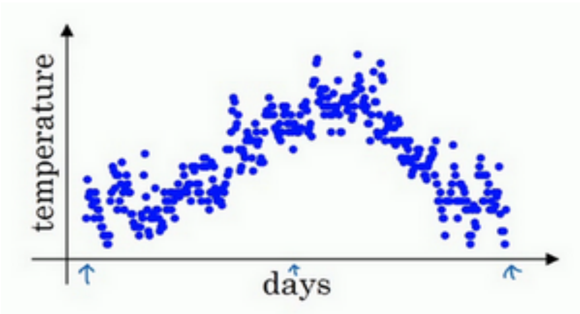
我想向你展示几个优化算法，它们比梯度下降法快，要理解这些算法，你需要用到指数加权平均，在统计中也叫做指数加权移动平均，我们首先讲这个，然后再来讲更复杂的优化算法。



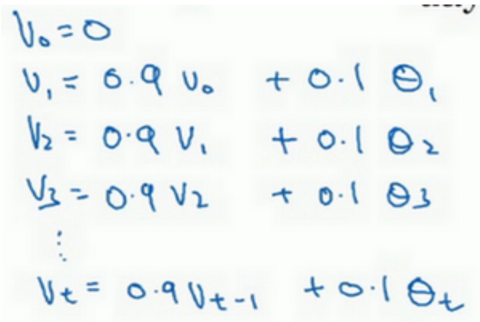
虽然现在我生活在美国，实际上我生于英国伦敦。比如我这儿有去年伦敦的每日温度，所以 1 月 1 号，温度是 40 华氏度，相当于 4 摄氏度。我知道世界上大部分地区使用摄氏度，但是美国使用华氏度。在 1 月 2 号是 9 摄氏度等等。在年中的时候，一年 365 天，年中就是说，大概 180 天的样子，也就是 5 月末，温度是 60 华氏度，也就是 15 摄氏度等等。夏季温度转暖，然后冬季降温。



你用数据作图，可以得到以下结果，起始日在 1 月份，这里是夏季初，这里是年末，相当于 12 月末。



这里是 1 月 1 号，年中接近夏季的时候，随后就是年末的数据，看起来有些杂乱，如果要计算趋势的话，也就是温度的局部平均值，或者说移动平均值。

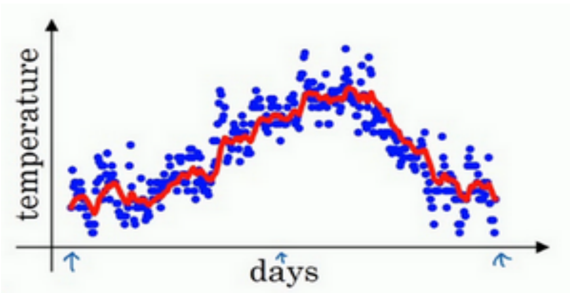


你要做的是，首先使$v_0 = 0$，每天，需要使用 0.9 的加权数之前的数值加上当日温度的 0.1 倍，即$v_1 = 0.9v_0 + 0.1\theta_1$，所以这里是第一天的温度值。

第二天，又可以获得一个加权平均数，0.9 乘以之前的值加上当日的温度 0.1 倍，即$v_2 = 0.9v_1 + 0.1\theta_2$，以此类推。

第二天值加上第三日数据的 0.1，如此往下。大体公式就是某天的v等于前一天v值的 0.9 加上当日温度的 0.1。

如此计算，然后用红线作图的话，便得到这样的结果。



你得到了移动平均值，每日温度的指数加权平均值。

看一下上一张幻灯片里的公式，$v_t = 0.9v_{t-1} + 0.1\theta_t$，我们把 0.9 这个常数变成$\beta$，将之前的 0.1 变成$(1-\beta)$，即$v_t = \beta v_{t-1} + (1-\beta)\theta_t$

$$V_t = \beta V_{t-1} + (1-\beta)\theta_t$$

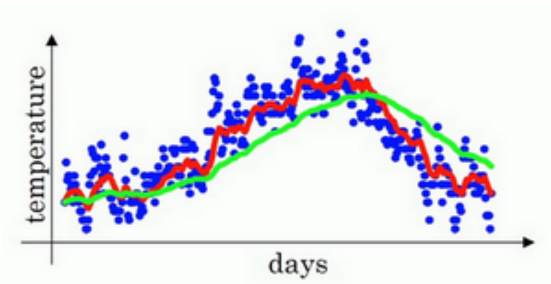
$\beta = 0.9$: ≈ 10 days' temperature

$\beta = 0.98$: ≈ 50 days

V_t as approximately average over $\approx \frac{1}{1-\beta}$ days' temperature.

由于以后我们要考虑的原因，在计算时可视v_t大概是$\frac{1}{(1-\beta)}$的每日温度，如果β是 0.9，你会想，这是十天的平均值，也就是红线部分。

我们来试试别的，将β设置为接近 1 的一个值，比如 0.98，计算$\frac{1}{(1-0.98)} = 50$，这就是粗略平均了一下，过去 50 天的温度，这时作图可以得到绿线。

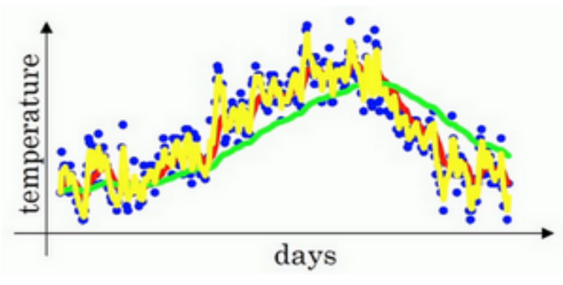


这个高值β要注意几点，你得到的曲线要平坦一些，原因在于你多平均了几天的温度，所以这个曲线，波动更小，更加平坦，缺点是曲线进一步右移，因为现在平均的温度值更多，要平均更多的值，指数加权平均公式在温度变化时，适应地更缓慢一些，所以会出现一定延迟，因为当$\beta = 0.98$，相当于给前一天的值加了太多权重，只有 0.02 的权重给了当日的值，所以温度变化时，温度上下起伏，当β 较大时，指数加权平均值适应地更缓慢一些。

我们可以再换一个值试一试，如果β是另一个极端值，比如说 0.5，根据右边的公式（$\frac{1}{(1-\beta)}$），这是平均了两天的温度。

$\beta = 0.5$: ≈ 2 days

作图运行后得到黄线。



由于仅平均了两天的温度，平均的数据太少，所以得到的曲线有更多的噪声，有可能出现异常值，但是这个曲线能够更快适应温度变化。

所以指数加权平均数经常被使用，再说一次，它在统计学中被称为**指数加权移动平均值**，我们就简称为指数加权平均数。通过调整这个参数（β），或者说后面的算法学习，你会发现这是一个很重要的参数，可以取得稍微不同的效果，往往中间有某个值效果最好，β为中间值时得到的红色曲线，比起绿线和黄线更好地平均了温度。

现在你知道计算指数加权平均数的基本原理，下一个视频中，我们再聊聊它的本质作用。

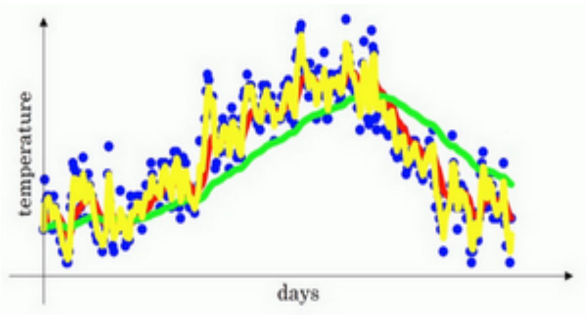
2.4 理解指数加权平均数（Understanding exponentially weighted averages）

上个视频中，我们讲到了指数加权平均数，这是几个优化算法中的关键一环，而这几个优化算法能帮助你训练神经网络。本视频中，我希望进一步探讨算法的本质作用。

回忆一下这个计算指数加权平均数的关键方程。

$$\boldsymbol{v_t = \beta v_{t-1} + (1-\beta)\theta_t}$$

$\beta = 0.9$的时候，得到的结果是红线，如果它更接近于 1，比如 0.98，结果就是绿线，如果β小一点，如果是 0.5，结果就是黄线。



我们进一步地分析，来理解如何计算出每日温度的平均值。

同样的公式，$v_t = \beta v_{t-1} + (1-\beta)\theta_t$

使$\beta = 0.9$，写下相应的几个公式，所以在执行的时候，t从 0 到 1 到 2 到 3，t的值在不断增加，为了更好地分析，我写的时候使得t的值不断减小，然后继续往下写。

$$v_{100} = 0.9v_{99} + 0.1\theta_{100}$$
$$v_{99} = 0.9v_{98} + 0.1\theta_{99}$$
$$v_{98} = 0.9v_{97} + 0.1\theta_{98}$$
$$\ldots$$

首先看第一个公式，理解v_{100}是什么？我们调换一下这两项（$0.9v_{99}0.1\theta_{100}$），$v_{100} = 0.1\theta_{100} + 0.9v_{99}$。

那么v_{99}是什么？我们就代入这个公式（$v_{99} = 0.1\theta_{99} + 0.9v_{98}$），所以：

$v_{100} = 0.1\theta_{100} + 0.9(0.1\theta_{99} + 0.9v_{98})$。

那么v_{98}是什么？你可以用这个公式计算（$v_{98} = 0.1\theta_{98} + 0.9v_{97}$），把公式代进去，所以：

$v_{100} = 0.1\theta_{100} + 0.9(0.1\theta_{99} + 0.9(0.1\theta_{98} + 0.9v_{97}))$。

以此类推，如果你把这些括号都展开，

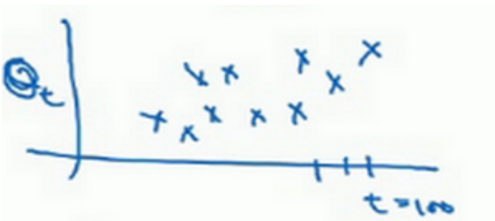
$$v_{100} = 0.1\theta_{100} + 0.1 \times 0.9\theta_{99} + 0.1 \times (0.9)^2\theta_{98} + 0.1 \times (0.9)^3\theta_{97} + 0.1 \times (0.9)^4\theta_{96} + \cdots$$

...

$$V_{100} = 0.1\,\theta_{100} + 0.9\,\cancel{V_{99}}\,(0.1\,\theta_{99} + 0.9\,\boxed{\cancel{V_{98}}})\qquad 0.1\,\theta_{98} + 0.9\,v_{97}$$

$$= 0.1\,\theta_{100} + 0.1 \times 0.9 \cdot \theta_{99} + 0.1\,(0.9)^2\,\theta_{98} + 0.1\,(0.9)^3\,\theta_{97} + 0.1\,(0.9)^4\,\theta_{96} + \cdots$$

所以这是一个加和并平均，100 号数据，也就是当日温度。我们分析v_{100}的组成，也就是在一年第 100 天计算的数据，但是这个是总和，包括 100 号数据，99 号数据，97 号数据等等。画图的一个办法是，假设我们有一些日期的温度，所以这是数据，这是t，所以 100 号数据有个数值，99 号数据有个数值，98 号数据等等，t为 100，99，98 等等，这就是数日的温度数值。

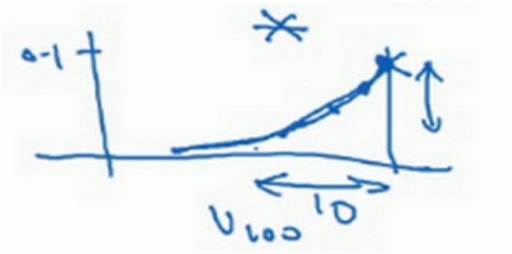


然后我们构建一个指数衰减函数，从 0.1 开始，到0.1×0.9，到$0.1 \times (0.9)^2$，以此类推，所以就有了这个指数衰减函数。

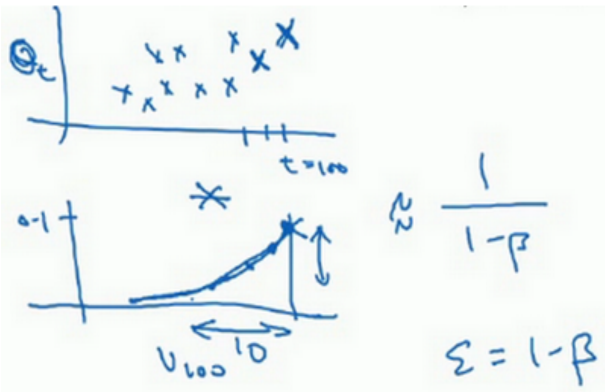
计算v_{100}是通过，把两个函数对应的元素，然后求和，用这个数值 100 号数据值乘以 0.1，99 号数据值乘以 0.1 乘以$(0.9)^2$，这是第二项，以此类推，所以选取的是每日温度，将其与指数衰减函数相乘，然后求和，就得到了v_{100}。

结果是，稍后我们详细讲解，不过所有的这些系数（$0.10.1 \times 0.90.1 \times (0.9)^2 0.1 \times (0.9)^3 \ldots$），相加起来为 1 或者逼近 1，我们称之为偏差修正，下个视频会涉及。

最后也许你会问，到底需要平均多少天的温度。实际上$(0.9)^{10}$大约为 0.35，这大约是$\frac{1}{e}$，**e 是自然算法的基础之一。**大体上说，如果有$1-\varepsilon$，在这个例子中，$\varepsilon = 0.1$，所以$1-\varepsilon = 0.9$，$(1-\varepsilon)^{(\frac{1}{\varepsilon})}$约等于$\frac{1}{e}$，大约是 0.34，0.35，换句话说，10 天后，曲线的高度下降到$\frac{1}{3}$，相当于在峰值的$\frac{1}{e}$。



又因此当$\beta = 0.9$的时候，我们说仿佛你在计算一个指数加权平均数，只关注了过去 10 天的温度，因为 10 天后，权重下降到不到当日权重的三分之一。

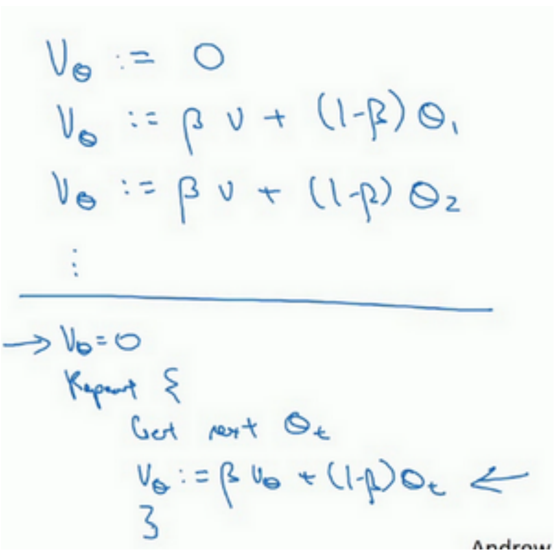


相反，如果，那么 0.98 需要多少次方才能达到这么小的数值？$(0.98)^{50}$大约等于$\frac{1}{e}$，所以前 50 天这个数值比$\frac{1}{e}$大，数值会快速衰减，所以本质上这是一个下降幅度很大的函数，你可以看作平均了 50 天的温度。因为在例子中，要代入等式的左边，$\varepsilon = 0.02$，所以$\frac{1}{\varepsilon}$为 50，我们由此得到公式，我们平均了大约$\frac{1}{(1-\beta)}$天的温度，这里ε代替了$1-\beta$，也就是说根据一些常数，你能大概知道能够平均多少日的温度，不过这只是思考的大致方向，并不是正式的数学证明。

$$
\begin{aligned}
v_0 &= 0 \\
v_1 &= \beta v_0 + (1-\beta)\,\theta_1 \\
v_2 &= \beta v_1 + (1-\beta)\,\theta_2 \\
v_3 &= \beta v_2 + (1-\beta)\,\theta_3 \\
&\ \ \dots
\end{aligned}
$$

最后讲讲如何在实际中执行，还记得吗？我们一开始将v_0设置为 0，然后计算第一天v_1，然后v_2，以此类推。

现在解释一下算法，可以将v_0，v_1，v_2等等写成明确的变量，不过在实际中执行的话，你要做的是，一开始将v初始化为 0，然后在第一天使$v := \beta v + (1-\beta)\theta_1$，然后第二天，更新$v$值，$v := \beta v + (1-\beta)\theta_2$，以此类推，有些人会把$v$加下标，来表示$v$是用来计算数据的指数加权平均数。



再说一次，但是换个说法，$v_\theta = 0$，然后每一天，拿到第t天的数据，把v更新为$v := \beta v_\theta + (1-\beta)\theta_t$。

指数加权平均数公式的好处之一在于，它占用极少内存，电脑内存中只占用一行数字而已，然后把最新数据代入公式，不断覆盖就可以了，正因为这个原因，其效率，它基本上只占用一行代码，计算指数加权平均数也只占用单行数字的存储和内存，当然它并不是最好的，也不是最精准的计算平均数的方法。如果你要计算移动窗，你直接算出过去 10 天的总和，过去 50 天的总和，除以 10 和 50 就好，如此往往会得到更好的估测。但缺点是，如果保存所有最近的温度数据，和过去 10 天的总和，必须占用更多的内存，执行更加复杂，计算成本也更加高昂。

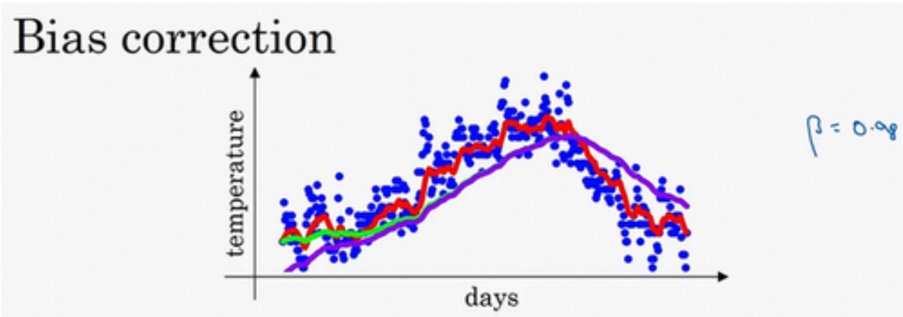
所以在接下来的视频中，我们会计算多个变量的平均值，从计算和内存效率来说，这是

一个有效的方法，所以在机器学习中会经常使用，更不用说只要一行代码，这也是一个优势。

现在你学会了计算指数加权平均数，你还需要知道一个专业概念，叫做偏差修正，下一个视频我们会讲到它，接着你就可以用它构建更好的优化算法，而不是简单直接的梯度下降法。

2.5 指数加权平均的偏差修正（Bias correction in exponentially weighted averages）

你学过了如何计算指数加权平均数，有一个技术名词叫做偏差修正，可以让平均数运算更加准确，来看看它是怎么运行的。

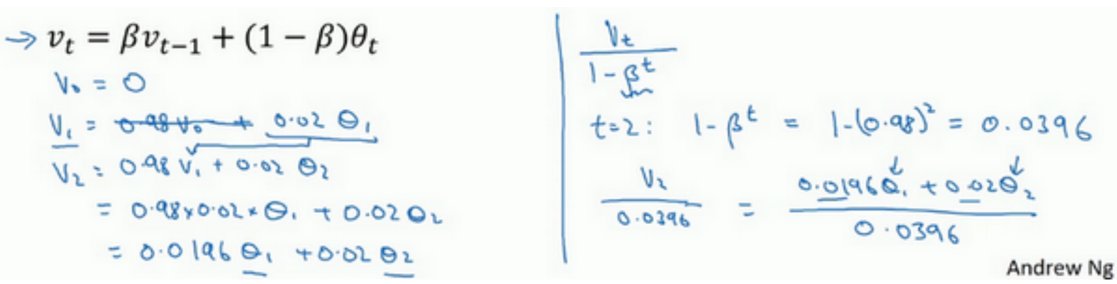


$$v_t = \beta v_{t-1} + (1-\beta)\theta_t$$

在上一个视频中，这个（红色）曲线对应β的值为 0.9，这个（绿色）曲线对应的β=0.98，如果你执行写在这里的公式，在β等于 0.98 的时候，得到的并不是绿色曲线，而是紫色曲线，你可以注意到紫色曲线的起点较低，我们来看看怎么处理。

计算移动平均数的时候，初始化$v_0 = 0$，$v_1 = 0.98v_0 + 0.02\theta_1$，但是$v_0 = 0$，所以这部分没有了（$0.98v_0$），所以$v_1 = 0.02\theta_1$，所以如果一天温度是 40 华氏度，那么$v_1 = 0.02\theta_1 = 0.02 \times 40 = 8$，因此得到的值会小很多，所以第一天温度的估测不准。

$v_2 = 0.98v_1 + 0.02\theta_2$，如果代入$v_1$，然后相乘，所以$v_2 = 0.98 \times 0.02\theta_1 + 0.02\theta_2 = 0.0196\theta_1 + 0.02\theta_2$，假设$\theta_1$和$\theta_2$都是正数，计算后$v_2$要远小于$\theta_1$和$\theta_2$，所以$v_2$不能很好估测出这一年前两天的温度。



有个办法可以修改这一估测，让估测变得更好，更准确，特别是在估测初期，也就是不用v_t，而是用$\frac{v_t}{1-\beta^t}$，t 就是现在的天数。举个具体例子，当$t = 2$时，$1-\beta^t = 1-0.98^2 = 0.0396$，因此对第二天温度的估测变成了$\frac{v_2}{0.0396} = \frac{0.0196\theta_1 + 0.02\theta_2}{0.0396}$，也就是$\theta_1$和$\theta_2$的加权平均数，并去除了偏差。你会发现随着$t$增加，$\beta^t$接近于 0，所以当$t$很大的时候，偏差修正几乎没有作用，

因此当t较大的时候，紫线基本和绿线重合了。不过在开始学习阶段，你才开始预测热身练习，偏差修正可以帮助你更好预测温度，偏差修正可以帮助你使结果从紫线变成绿线。

在机器学习中，在计算指数加权平均数的大部分时候，大家不在乎执行偏差修正，因为大部分人宁愿熬过初始时期，拿到具有偏差的估测，然后继续计算下去。如果你关心初始时期的偏差，在刚开始计算指数加权移动平均数的时候，偏差修正能帮助你在早期获取更好的估测。