知识点复习框架

空间解析几何
- 向量及其五种运算
- 平面与空间直线
- 二次曲面与旋转曲面
- 空间解析几何综述

多变量函数微分学
- 多元函数的极限与连续性
- 偏导数与全微分
- 可微函数与高阶函数
- 知识整合
  - 多元函数微分法
  - 雅各比行列式
  - 隐函数存在定理
- 方向导数与梯度、散度、旋度
- 曲线的切线与曲面的切平面
- 多元函数的Taylor公式+微分中值定理
- 多元函数的极值与最值

- 多变量函数积分学
  - 重积分
    - 二重积分
      - 十大性质
      - 计算与证明
        - 先x后y
        - 先y后x
        - 奇偶性 → 同时满足被积函数与积分区间的关系
        - 对称性
        - 变量代换
        - 换序
      - 变量代换
    - 三重积分
      - 降维 —
        - 先一后二
        - 先二后一
      - 累次积分
      - 变量代换
        - 球坐标变换
        - 柱坐标变换
    - 重积分
      - 计算与证明：轮换对称性 → 再学习一下这个
      - 应用举例
      - n重积分 — 对1的n重积分就是n重测度
  - 曲线积分
    - 第一类曲线积分
    - 第二类曲线积分
  - 曲面积分
    - 第一类曲面积分
    - 第二类曲面积分

（曲线积分、曲面积分）：
- Green公式
- Gauss公式
- Stokes公式
- 场论与广义Stokes公式

知识梳理 —— 反常积分部分

反常积分和含参变量的积分

- 反常积分 → 类比数项级数
- 含参变量的积分 → 类比函数项级数；本质上也是一种函数构造方式

- 反常积分（重点：收敛判别）
  - 无穷区间上的积分
    - Cauchy 收敛准则 → 绝对收敛与条件收敛
    - 非负函数反常积分的收敛性判定
      - 比较判别法 — 第一类p积分（常用）
      - 比较判别法的极限形式
    - 一般判别法
      - Dirichlet
        - $F(b)=\int_a^b f(x)dx$ 在 $(a,+\infty)$ 有界
        - $g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 单调且趋于0
        - 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛
      - Abel
        - $\int_0^{+\infty} F(x)dx$ 收敛
        - $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调有界
        - $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛
  - ↑ 转化
  - 瑕积分（有限区间无界函数）—— 比较判别法 —— 第二类p积分
- 含参变量的积分
  - 含参变量积分
    - 积分限不依赖于参变量
      - 连续性　由 $f(x,u)\in C(D) \to \varphi(u)\in C[\alpha,\beta]$
      - 可积性　由 $f(x,u)\in C(D) \to \int_\alpha^\beta \varphi(u)du=\int_\alpha^\beta\int_a^b f(x,u)dxdu=\int_a^b\int_\alpha^\beta f(x,u)dudx$
      - 可微性　由 $f(x,u)\in C(D)$ 且 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 存在 $\to \varphi'(u)=\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b f(x,u)dx=\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$
    - 积分限依赖于参变量　$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)du$
      - 连续性　多了
        - $a\le a(u),b(u)\le b$
        - $a(u),b(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续
      - 可微性　多了
        - $a(u),b(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可微
        - $a\le a(u),b(u)\le b$
        - → Lebniz求导公式
  - 含参变量反常积分
    - 一致收敛性
      - Cauchy 准则
      - Weierstrass
      - Dirichlet
      - Abel
    - 性质
      - 连续性 — f连续 + $\varphi(u)$ 一致收敛 → $\varphi(u)$ 连续
      - 可积性 — f连续 + $\varphi(u)$ 一致收敛 → $\varphi(u)$ 积分可交换
      - 可微性 — f和 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 连续，且二者均一致收敛 → 可微
    - 几个重要的积分
      - Dirichlet积分　$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$
      - Laplace积分
        - $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$　$(\beta\ge 0,\ \alpha>0)$
        - $J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}$
      - Fresnel积分　$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$
  - Euler积分
    - Γ函数的性质
    - B函数的性质

知识梳理—Fourier分析部分（这一部分知识极其不熟悉）

- Fourier分析
  - 函数的Fourier级数
    - 周期函数
      - 积分区间变换
      - 周期延拓
      - 偶延拓与奇延拓
      - 三角函数的正交性
    - 周期函数的Fourier级数
      - Fourier系数
      - Dirichlet收敛准则
      - $2\pi/2l$ $\omega=\frac{\pi}{l}$
    - 有限区间上函数的Fourier级数
    - Fourier级数的复数形式
  - 平方平均收敛
    - Bessel不等式
    - Parseval等式
    - 广义Fourier级数
  - Fourier变换
    - Fourier积分 $f(x)\sim\int_0^{+\infty}A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda$

      $A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt,\ B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt$
    - Fourier变换与反变换

      $$\begin{cases}F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\\ f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda\end{cases}$$

1.7 重积分的性质

1. $\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$，等号成立当且仅当 f 在 D 上不变号.

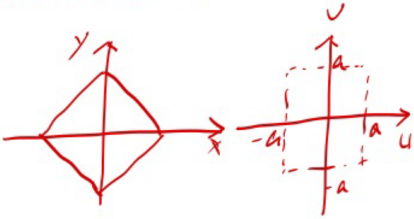
↳ 是之前没关注过的点诶

2. 变量代换，设 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 则 $dxdy = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv$

1. 广义极坐标变换：$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}\mathrm{d}y = ab\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi.$ $\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

2. 柱坐标：$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$ （这也是记忆不深刻的公式）

3. 球坐标：$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$



4. 对于积分区域 $|x|+|y| \leqslant a\ (a>0)$，常有换元 $\begin{cases} u = x+y, \\ v = x-y, \end{cases}$ 得到 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$

补充1：二重积分的积分中值定理：

若：$f(x,y)$ 在有界区域 D 上连续，则 $\exists(\xi,\eta)\in D$ s.t. $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot S(D)$

补充2：重积分的轮换对称性

当 $f(x,y)\in C(D)$，D 为有界闭区域

且 $(x,y)\to(y,x)$ 时 D 不变 / ∂D（D 的边界）不变

则有 $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(y,x)dxdy = \frac{1}{2}\iint_D f(x,y)+f(y,x)\,dxdy$

同理可推广至 n 重

补充3：n 重积分下：

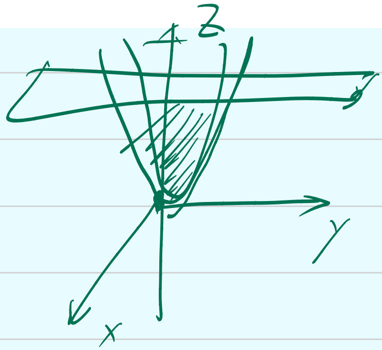
n 维球体积 V 是 S 在 a 向度下的积分 即 $dV = S\,da$ （a 是半径）

n 维球体的体积公式 $(\sqrt{\pi}a)^n / \Gamma(\frac{n}{2}+1)$

重积分相关题目

2. 计算三重积分 $\iiint_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中积分区域 V 由曲面 $z=(x^2+y^2)/2$ 与平面 $z=8$ 围成.

(20年T2)



解2. $\iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$

$$= \int_0^8 dz \iint_{x^2+y^2\le 2z} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$

$$= \int_0^8 dz \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2z}} \cancel{2z}\ r^2\ r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^8 2\pi\cdot 2z^2\,dz$$

$$= 4\pi\cdot \frac{z^3}{3}\Big|_0^8$$

$$= \frac{4\pi}{3}\cdot 8^3 = \cancel{\frac{2048\pi}{3}}\qquad \frac{1024\pi}{3}$$

3. 求积分

$$I=\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}V\,, \tag{2.6.5}$$

其中 V 为椭球 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 内部.

(19年T3)

解：令 $x=ar\sin\theta\cos\varphi$, $y=br\sin\theta\sin\varphi$, $z=cr\cos\theta$

则 $dx\,dy\,dz = abc\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

$$I = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot abc\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= 8abc\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr \overset{r=\sin\theta}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta-\sin^4\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{3\times 1}{4\times 2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}$$

则 $I = 4abc\,\pi\cdot\frac{\pi}{16}$

$$= \frac{abc}{4}\pi^2$$

第一型曲线积分与曲面积分

关键之处:确定参数的具体范围

- 第一型曲线积分
  - 基本算法:参数化变为定积分
    $$\int_L f(x,y,z)\,ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))|r'(t)|\,dt$$
    - 空间曲线
    - 平面曲线
      - 取x
      - 取极坐标参数θ
  - 基本性质补充:对称性 — 积分对称性与曲线对称性一致
  - 做题技巧:分段参数化最后加和

关键在于如何做参数化处理

计算技巧:

① 利用全微分解 $r'(\theta)$ 从而简化运算

② 直线的参数化

解题技巧:

① 利用曲线的对称性+被积函数的奇偶性直接化简函数

② 轮换对称性 常数化

例 94 求 $\int_L (x^2+y)\mathrm{d}s$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=R$ 的交线, $R>0$.

解 因为曲线 L 关于 x, y, z 轮换对称, 所以有

$$\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s,\quad \int_L x\mathrm{d}s=\int_L y\mathrm{d}s=\int_L z\mathrm{d}s.$$

又曲线 L 上的点满足方程 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x+y+z=R$, 则有

$$\int_L (x^2+y)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s+\frac{1}{3}\int_L (x+y+z)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}(R^2+R)\int_L \mathrm{d}s.$$

注意到 L 是一个圆周, 球心到平面 $x+y+z=R$ 的距离为

$$d=\frac{|0+0+0-R|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{R}{\sqrt{3}},$$

则此圆的半径为

$$r=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}R,$$

所以

$$\int_L (x^2+y)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}(R^2+R)\int_L \mathrm{d}s=\frac{1}{3}(R^2+R)\cdot 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}R=\frac{2\sqrt{6}}{9}\pi R^2(R+1).$$

例题1

利用曲线的轮换对称性将所求式子常数化

例题2

例 91 设 L_1 是点 $A(1,2,3)$ 与坐标原点的连接直线段, L_2 是曲面 $x=(y+z)^2$ 与曲面 $\frac{4}{3}x^2+y^2=z^2$ 的交线, 介于坐标原点与 $B\left(1,-\frac{1}{6},\frac{7}{6}\right)$ 之间的一段, $L=L_1\cup L_2$, 求 $\int_L z\mathrm{d}s$.

技巧1: 直线的参数化:

注记 一般地, 求过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 及点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线方程, 可设点 $M(x,y,z)$ 在直线上, 因向量 $\overrightarrow{M_1M}$ 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 平行, 故存在数 t, 使 $\overrightarrow{M_1M}=t\overrightarrow{M_1M_2}$, 写出以上向量关系式对应的坐标形式, 并解出 x,y,z, 可得过点 M_1, M_2 的直线参数方程

$$x=(1-t)x_1+tx_2,\quad y=(1-t)y_1+ty_2,\quad z=(1-t)z_1+tz_2,$$

并且 $t=0$ 对应于点 M_1, $t=1$ 对应于点 M_2, 线段 M_1M_2 对应于 $t\in[0,1]$.

→ 关键在于这种比例参数的表达形式

技巧2: (难点) 如何处理曲面相交得到的曲线 —— 没有固定范式, 全靠经验判断

为找 L_2 的参数方程, 令 $y+z=t, t\geqslant 0$, 由 $x=(y+z)^2$, 得 $x=t^2$; 由 $\frac{4}{3}x^2+y^2=z^2$, 得

$$\frac{4}{3}x^2=(z+y)(z-y),\quad 即\quad \frac{4}{3}t^4=t(z-y),$$

则有

$$z-y=\frac{4}{3}t^3.$$

从而得 L_2 的参数方程

$$x=t^2,\quad y=\frac{1}{2}\left(t-\frac{4}{3}t^3\right),\quad z=\frac{1}{2}\left(t+\frac{4}{3}t^3\right),\quad t\in[0,1],$$

$$\int_{L_2} z\mathrm{d}s=\int_0^1\frac{1}{2}\left(t+\frac{4}{3}t^3\right)\sqrt{(2t)^2+\left[\frac{1}{2}(1-4t^2)\right]^2+\left[\frac{1}{2}(1+4t^2)\right]^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(t+\frac{4}{3}t^3\right)(1+4t^2)\mathrm{d}t=\frac{49}{72}\sqrt{2}.$$

所以

$$\int_L z\mathrm{d}s=\int_{L_1}z\mathrm{d}s+\int_{L_2}z\mathrm{d}s=\frac{3}{2}\sqrt{14}+\frac{49}{72}\sqrt{2}.$$

这是本题给出的方法

敏锐地注意到平方差关系

!: 注意根据题目条件得到参数范围

例题3

思考题 计算曲线积分 $\int_L(x^2+x\cos x)\mathrm{d}s$, 其中 L 是单位圆周 $x^2+y^2=1$. (答案: π)

解: ∵ $x\cos x$ 关于 x 是奇函数, 且 L 关于 y 轴对称

则 $\int_L x\cos x\,ds=0$

又根据 L 的轮换对称性得

$\int_L x^2 ds=\int_L y^2 ds=\frac{1}{2}\int_L x^2+y^2 ds=\frac{1}{2}\int_L ds=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi$

得 $\int_L(x^2+x\cos x)ds=\int_L x^2 ds=\pi$

第一型曲面积分

- 计算方法：转为二重积分
  - 处理积分曲面
    - 参数化 → 球坐标/柱坐标 — 再代入曲面方程化简消去一个参数
    - 显式表达式 — 使用投影法 → 如何求解投影
    - 隐式表达式（利用隐函数存在定理）
  - 代入原积分式进行计算即可
- 常用性质
  - 奇偶性质
  - 轮换对称性
- 计算要点：参数范围的确定

例. 曲面面积的计算

例 95 计算圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被圆柱面 $y^2+z^2=a^2$ 所割下的部分的面积.

分析 被割下的曲面上下、左右及前后对称, 其总面积等于第一卦限部分 S_1 面积的 8 倍, 下面只需要计算 S_1 的面积. ①利用对称性简化运算

解 解法 1 (参数法) 第一卦限内那部分曲面 S_1 的参数方程为 切割 就是限制积分区域范围

$$x=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta,\quad z=z,\quad (\theta,z)\in D,$$ （参数化）

$$D=\left\{(\theta,z)\mid 0\leqslant z\leqslant a\cos\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$ 据条件得到积分变量的范围.

计算得

$$E=|\boldsymbol{r}'_\theta|^2=a^2,\quad G=|\boldsymbol{r}'_z|^2=1,\quad F=\boldsymbol{r}'_\theta\cdot\boldsymbol{r}'_z=0,\quad \sqrt{EG-F^2}=a,$$

故有

$$S=8\iint\limits_{S_1}\mathrm{d}S=8\iint\limits_{D}\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}a\mathrm{d}z=8a^2.$$ 转为二重积分

→ 参数范围

解法 2 (投影法) 第一卦限部分曲面 S_1 在 Oyz 平面上的投影区域 D 为

$$D: y^2+z^2\leqslant a^2,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0,$$

曲面方程为 $x=\sqrt{a^2-y^2}$, 且曲面与投影区域一一对应, 故曲面面积

$$S=8\iint\limits_{S_1}\mathrm{d}S=8\iint\limits_{D}\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\iint\limits_{D}\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=8\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}z=8a^2.$$

投影法计算显式曲面的面积

例 96 设 S 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 与平面 $z=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$ 所围区域 V 的全表面, 求 S 的面积.

解 由平面 $z=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$ 与 z 轴的交点为 $(0,0,\sqrt{2})$ 可知, V 是由上半锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面所围的区域, 其全表面为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上的部分 S_1 与平面 $z=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$ 上的部分 S_2 的并.

下面求这两部分曲面在 Oxy 平面上的投影区域. 联立锥面方程与平面方程, 消去 z, 得交线方程为 $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$, 因而 S_1 与 S_2 在 Oxy 平面上的投影区域为椭圆盘

注意这里的投影法是联立消去z求得曲线方程

$$D:\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{y^2}{4}\leqslant 1,$$

且 S_1 及 S_2 都为显式方程, 分别计算这两部分曲面的面积

显式曲面转为二重积分时

积分区域即投影面积

$z=f(x,y)$

$$\Delta S_1=\iint_{S_1}\mathrm{d}S=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\cdot\pi\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2=8\pi.$$

$$\Delta S_2=\iint_{S_2}\mathrm{d}S=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\pi\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2=4\sqrt{3}\pi.$$

故曲面 S 的面积 $\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2=(8+4\sqrt{3})\pi$.

注记 易验证锥面 $z=\alpha\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=ax+by+c$ 的面积元素都是 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的常数倍.

例 97 计算下列曲面的面积:

(1) $(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=1$; (2) $(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2xy\ (a>0)$.

解 (1) 易见曲面上下、左右及前后对称, 曲面的面积等于它在第一卦限部分曲面 S_1 面积的 8 倍. S_1 在 Oxy 平面上的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$, 曲面的柱坐标方程 $r^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=1$, 所对应的参数表示为 $r^{\frac{1}{3}}=\sin\varphi, z^{\frac{1}{3}}=\cos\varphi$, 故 S_1 的参数方程为

$$x=\sin^3\varphi\cos\theta,\quad y=\sin^3\varphi\sin\theta,\quad z=\cos^3\varphi,\quad (\theta,\varphi)\in D,$$
$$D=\left\{(\theta,\varphi)|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

计算得

$$\boldsymbol{r}'_\theta=(-\sin^3\varphi\sin\theta,\ \sin^3\varphi\cos\theta,\ 0),$$
$$\boldsymbol{r}'_\varphi=(3\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\theta,\ 3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta,\ -3\cos^2\varphi\sin\varphi),$$

从而

$$E=|\boldsymbol{r}'_\theta|^2=\sin^6\varphi,\quad G=|\boldsymbol{r}'_\varphi|^2=9\sin^2\varphi\cos^2\varphi,\quad F=\boldsymbol{r}'_\theta\cdot\boldsymbol{r}'_\varphi=0,$$
$$\sqrt{EG-F^2}=3\sin^4\varphi\cos\varphi,$$

①对称性化简
②Oxy区域投影一个[illegible]
③参数化
进行了两步参数化
从而将参数减省到两个

故

$$S=8\iint\limits_{S_1}\mathrm{d}S=8\iint\limits_{D}\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin^4\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{12}{5}\pi.$$

(2) 由曲面方程知 $xy\geqslant 0$, 即曲面位于一、三、五、七卦限, 且上下对称, 关于原点对称, 曲面面积等于它在第一卦限部分曲面 S_1 面积的 4 倍. 以下用两种方法计算 S_1 的面积.

①依然是利用对称性化简
(可以化简的，不要怀疑！哭了)

解法 1 (参数法) 由球坐标变换

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta\ (r\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi),$$

曲面方程化为 $r=a\sin\theta\sqrt{\sin 2\varphi}$, 则 S_1 的参数方程为

$$x=a\sin^2\theta\cos\varphi\sqrt{\sin 2\varphi},\quad y=a\sin^2\theta\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi},$$
$$z=a\sin\theta\cos\theta\sqrt{\sin 2\varphi},\quad (\theta,\varphi)\in D,$$
$$D=\left\{(\theta,\varphi)|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

也进行了两次参数化
使参数减省到两个
(球坐标变换)

计算得

$$\boldsymbol{r}'_\theta=(a\sin 2\theta\cos\varphi\sqrt{\sin 2\varphi},\ a\sin 2\theta\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi},\ a\cos 2\theta\sqrt{\sin 2\varphi}),$$
$$\boldsymbol{r}'_\varphi=\left(\frac{a\sin^2\theta\cos 3\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}},\ \frac{a\sin^2\theta\sin 3\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}},\ \frac{a\sin\theta\cos\theta\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\right),$$

从而

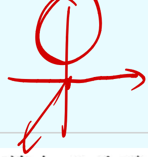
$$E=|\boldsymbol{r}'_\theta|^2=a^2\sin 2\varphi,\quad F=\boldsymbol{r}'_\theta\cdot\boldsymbol{r}'_\varphi=a^2\sin\theta\cos\theta\cos 2\varphi,$$
$$G=|\boldsymbol{r}'_\varphi|^2=\frac{a^2}{\sin 2\varphi}(\sin^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2 2\varphi),\quad \sqrt{EG-F^2}=a^2\sin^2\theta,$$

故

$$S=4\iint\limits_{S_1}\mathrm{d}S=4\iint\limits_{D}\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\pi^2a^2.$$

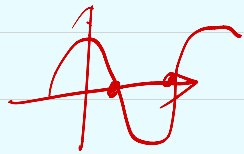
后续就是计算了
投影法太麻烦 弃之不用

4



关于x轴和y轴对称

例 98 计算曲面积分 $\iint\limits_S x^2 \mathrm{d}S$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=2z$.



球坐标变换 $x=r\sin\theta\cos\varphi$ $\quad y=r\sin\theta\sin\varphi$ $\quad z=r\cos\theta$

代入球面有: $r^2=2r\cos\theta \Rightarrow r=2\cos\theta>0$

则 $x=\sin2\theta\cos\varphi$ $\quad y=\sin2\theta\sin\varphi$ $\quad z=2\cos^2\theta$

$x=2\cos\theta\sin\theta\cos\varphi$

$y=2\cos\theta\sin\theta\sin\varphi$

$z=2\cos^2\theta$

$D: \{(\theta,\varphi) \mid 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\varphi\le2\pi\}$

注意这里参数范围的确定是一个重点

$r'_\theta=(2\cos2\theta\cos\varphi, 2\cos2\theta\sin\varphi, -2\sin2\theta)$

$r'_\varphi=(-\sin2\theta\sin\varphi, \sin2\theta\cos\varphi, 0)$

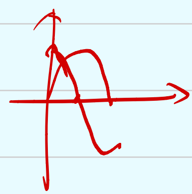
$E=4$

$G=(r'_\varphi)^2=(\sin2\theta)^2=4\sin^2\theta\cos^2\theta$

$F=r'_\theta\cdot r'_\varphi=0$

$\sqrt{EG-F^2}=4\sin\theta\cos\theta=2\sin2\theta$

$$\iint_S x^2 dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(\sin2\theta)^3\cos^2\varphi\, d\theta d\varphi$$



$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}}16\sin^3\theta\cos^3\theta\cdot d\theta$$

$$=\pi\times2\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin2\theta)^3 d\theta$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\sin t^3\, d\theta$$

$$=2\pi\times\frac{2}{3}\times1=\frac{4}{3}\pi$$

例 99 求下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_S (x^4-y^4+y^2z^2-x^2z^2+1)\mathrm{d}S$, 其中 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截下的部分.

上半部分

(2) $\iint\limits_S \dfrac{\sqrt{|x|}+y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}\mathrm{d}S$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

0. 轮换对称性

(3) $\iint\limits_S (ax+by+cy^2+|xyz|)\mathrm{d}S$, 其中 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 截下的部分.

对称性+轮换对称性 柱坐标系

柱面参数化 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=r$ $\quad 0\le r\le 2\cos\theta$ $\quad$ θ范围呢

$r\le 2\cos\theta$ (确定参数范围)

$\vec{r}_r=(\cos\theta,\sin\theta,1)$ $\quad E=2$ $\quad F=0$ $\quad$ 正确

$\vec{r}_\theta=(-r\sin\theta,r\cos\theta,0)$ $\quad G=r^2$

$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{2}r$

则 $0\le r\le 2\cos\theta$ $\quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ $\quad$ 进而计算

例 100 求 $\iint\limits_S |y|\mathrm{d}S$, 其中 S 是柱面 $x^2+y^2=x$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所截下的部分曲面.

解法 2 (参数法) 取 Oxy 平面上以 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 为极点, 极轴与 x 轴同向的极坐标, 极角 θ 为一个参数, 竖坐标 z 为另一个参数, 则 S 可表示为参数形式

★注意这种参数化方法

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta,\quad y=\frac{1}{2}\sin\theta,\quad z=z,$$

$$\mathrm{d}S=|\boldsymbol{r}'_\theta\times\boldsymbol{r}'_z|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

取xy的极坐标系+竖坐标
重点是参数范围的确定

还是选择这个过程更保险些

因曲面 S 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 内, 故

$$-\sqrt{1-x^2-y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2},$$

即知 S 的参数 (θ,z) 的变化范围为

$$D:-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\leqslant z\leqslant\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}},\quad -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

为啥是 $[-\pi,\pi]$ (应该是根据后面的计算过程得到)

故

$$\begin{aligned}\iint\limits_S|y|\mathrm{d}S&=\iint\limits_D\frac{1}{2}|\sin\theta|\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin\theta|\mathrm{d}\theta\int_{-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}^{\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin\theta|\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos t\mathrm{d}t=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

→其实就是两次参数化

注记 题中曲面 S(被球面所截下的那部分柱面) 还可用参数表示为

$$x=\cos^2\theta,\quad y=\cos\theta\sin\theta,\quad z=z,$$

$$-|\sin\theta|\leqslant z\leqslant|\sin\theta|,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

→超出理解范围了

面积微元 $\mathrm{d}S=\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$, 读者可自行计算.

第二型曲线积分与Green公式

1. 计算第二型曲线积分
- 利用点乘 转为第一型曲线积分
- 参数化 转为定积分
- Green公式 转为二重积分
  - 补线法 — 闭曲线
  - 挖洞法 — 去除奇点
- Stokes公式 → 化空间曲线积分为曲面积分

2. Green公式应用 —— 与微分学相结合

3. 常用公式

$$\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right) + C.$$

空间曲线的第二型积分

空间封闭曲线的二型积分

↓

使用stokes公式最自然

例 106 求曲线积分 $\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$, 其中 L 是 $x+y=2$ 与 $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$ 的交线, 从原点看去是逆时针方向.

解 在曲线 L 所满足的方程组中消去 y 并化简得 $2(x-1)^2+z^2=2$, 由此可知 L 在 Ozx 平面上的投影曲线是椭圆

$$\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2+(x-1)^2=1.$$

注意到坐标原点 O 在平面 $x+y=2$ 的 $y\to-\infty$ 一侧, 故知从 O 点看曲线是逆时针方向的, 相当于从 y 轴正方向看曲线是顺时针方向的. 这样可得曲线 L 的参数方程为

$$z=\sqrt{2}\cos t,\quad x-1=\sin t,\quad y=2-x=1-\sin t,\quad t\in[0,2\pi],$$

且其方向为参数减少方向, 故

$$\begin{aligned}&\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z\\&=\int_{2\pi}^{0}[(1-\sin t)\cos t+\sqrt{2}\cos t\cdot(-\cos t)+(1+\sin t)\cdot(-\sqrt{2}\sin t)]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}(\cos^2 t+\sin^2 t)\mathrm{d}t+0=2\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

解题思路1：投影降维 → 参数化 → 转为定积分

注意点：曲线方向的确定：投影时要站在垂直轴的正方向上看

参数增加方向/参数减少方向

解题思路2：stokes公式 → 转为 $\begin{cases}\text{第一类曲线积分}\\\text{第二类曲线积分}\end{cases}$

框是一致的

Green公式具体应用

例 112 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D_1: x^2+y^2\leqslant 1$ 上有二阶连续偏导数且 $f''_{xx}+f''_{yy}=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, 求证

$$\iint\limits_{D_1}(xf'_x+yf'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}.$$

(2008 年中国科大 “多变量微积分” 期末试题)

证明 由二重积分的极坐标变换

$$\iint\limits_{D_1}(xf'_x+yf'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(f'_x\rho\cos\theta+f'_y\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}(f'_x\rho\cos\theta+f'_y\rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

把对 θ 的定积分看作是第二型曲线积分参数化算法下的算式, 则上式等于

$$\int_0^1\left[\oint_{L_\rho}(\overset{P}{-f'_y\mathrm{d}x}+\overset{Q}{f'_x\mathrm{d}y})\right]\rho\mathrm{d}\rho,$$

其中, $L_\rho: x^2+y^2=\rho^2$ 是正向圆周, 再由格林公式, 得

$$\iint\limits_{D_1}(xf'_x+yf'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\iint\limits_{D_\rho}(f''_{xx}+f''_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\rho\mathrm{d}\rho\quad(\text{其中}D_\rho: x^2+y^2\leqslant\rho^2)$$

$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}$

$$=\int_0^1\left(\iint\limits_{D_\rho}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r\right)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^1\pi(1-\mathrm{e}^{-\rho^2})\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}.$$

？有点吓人，上强度了，可以暂时先放一放吧。

好耶，竟然看懂了？大进步 → 只能说思路还是太清奇了。

3.曲面积分

(4) 计算

$$\iint_{\Omega}(x+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{2.1.5}$$

其中 Ω 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，方向取上侧.

解 考虑正向曲面 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant R^2,\ z=0\}$，其方向沿 z 轴正方向，那么 $\Omega+D^-$ 构成方向向外的闭曲面，由 Gauss 定理，

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega+D^-}(x+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&3\iiint_{0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\pi R^3.\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

另一方面，

$$\iint_{D}(x+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\pi R^2, \tag{2.1.7}$$

因此

$$\text{原式}=\iint_{\Omega+D+D^-}(x+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi R^3+3\pi R^2. \tag{2.1.8}$$

易错点：特别注意符号与方向!!（最好按照标准答案的形式写）

Fourier级数考察题型（基本结束）

一、基本计算题

1. 有限区间上的函数对应的Fourier级数展开式

①说明开拓方式

②说明原函数与新函数的连续性

③计算傅式系数

④Dirichlet说明收敛性质，求得和函数

2. 利用Fourier级数求解数项级数的值

①取特殊值

②Parseval等式 $\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx$ [注意区间的平移性质]

tips：计算技巧（级数求和的换序/积分的换序分离）

3. 求解定义在$(-\infty,+\infty)$上函数的Fourier变换与逆变换

$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx$ $\Rightarrow$ $F(\lambda)=2\int_0^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx$ $F(\lambda)=2\int_0^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx$

$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$

反演公式由Dirichlet判别法直接得结果

例 198 p 是一个正常数, 并设函数 $f_p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2p}, & |x|\leqslant p,\\ 0, & |x|>p.\end{cases}$ 试求 $f_p(x)$ 的傅里叶变换以及傅里叶反演公式. 就是逆变换的意思

解 $f_p(x)$ 是一个偶函数, 其傅里叶变换及逆变换皆是余弦变换 (仅系数不同), 即

$$F_p(\lambda)=2\int_0^{+\infty} f_p(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=2\int_0^{p}\frac{1}{2p}\cos\lambda x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{\sin p\lambda}{p\lambda}, & \lambda\neq 0,\\ 1, & \lambda=0.\end{cases}$$

①注意分段处的瑕点、

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}F_p(\lambda)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin p\lambda}{p\lambda}\cdot\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}f_p(x), & |x|<p,\\ \dfrac{1}{4p}, & |x|=p,\\ 0, & |x|>p.\end{cases}$$

反演公式的收敛是根据 Dirichlet 判别法直接得到的

例 199 已知积分方程

$$\int_0^{+\infty}g(t)\cos xt\mathrm{d}t=\begin{cases}\cos x, & |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

求 $g(x)$.

分析 方程中的广义积分与余弦变换及逆变换公式相差一个系数, 当凑成余弦变换时, 则 $g(x)$ 便是像原函数; 当凑成余弦逆变换公式时, 则 $g(x)$ 为已知函数的傅里叶变换, 即像函数.

解 解法 1 由已知令

$$F(x)=2\int_0^{+\infty}g(t)\cos xt\mathrm{d}t=\begin{cases}2\cos x, & |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

则 $F(x)$ 为 $g(t)$ 的余弦变换, $g(t)$ 便是像原函数, 故

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}F(\lambda)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda=\frac{2\cos\frac{\pi}{2}x}{\pi(1-x^2)}.$$

解法 2 由已知令

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}g(t)\cos xt\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\cos x, & |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

则 $g(t)$ 为 $f(x)$ 的余弦变换, 故

$$g(\lambda)=2\int_0^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos\lambda x\mathrm{d}x=\frac{2\cos\frac{\pi}{2}\lambda}{\pi(1-\lambda^2)}.$$

即

$$g(x)=\frac{2\cos\frac{\pi}{2}x}{\pi(1-x^2)}.$$

反常积分常考题型（基本结束）

1. 判断广义积分的敛散性 ↔ 特别注意对参数的分类讨论

   ① 判断端点处是否为瑕点，若是则分段讨论

   ② 选择合适的判别法

   对于比较判别法
   - 某点处：泰勒展开 → 转为多项式/常数 → 得到比较等价式 → 判断收敛
   - 无穷处：极限判别

2. 计算瑕积分的值

3. 含参常义积分求解
   - 极限
   - 导数　易错：Leibniz 求导公式，下限代入时注意负号
   - 积分

注记　若直接求 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ 有困难，常采用以下两种方法：

(1) 先求 $\varphi'(u)$，由含参变量常义积分的微分性质即先求 $\int_a^b f'_u(x,u)\mathrm{d}x$，然后再对 u 积分，即利用 $\varphi(u)=\varphi(u_0)+\int_{u_0}^u \varphi'(t)\mathrm{d}t$，求出 $\varphi(u)$.

(2) 因 $f(x,u)$ 表示为积分形式，从而将 $\varphi(u)$ 表示为累次积分，由含参变量常义积分的积分性质再交换积分次序求 $\varphi(u)$.

涉及构造 → （此处是一个难点）　[综合难度较大]

4. 反例型证明题

5. 含参变量广义积分
   - ① 研究敛散性
     - 逐点收敛
     - 一致收敛与非一致收敛
     - 内闭一致收敛
   - ② 计算
   - ③ 应用

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \mathrm{d}x$;

关键点：对 $x \to 0^+$ 时瑕点+敛散性的判断

先对 α 分类 → 再对 α 限制（两部分都要做到）

(3) $x=0$ 为瑕点. 又因为

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4}} \ln\sin x = 0,$$

故当正数 x 充分小时 $|x^{\frac{1}{4}}\ln\sin x| < 1$, 即

$$\frac{|\ln\sin x|}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}},$$

而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{4}}}$ 收敛, 故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛, 所以原积分绝对收敛.

关键点：自变量趋于0时用

$x^\alpha \ln x = 0 \ (x\to 0)$ 这一误

$\frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \ (x \to +\infty)$ 这是两种不同思维

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \mathrm{d}x}{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{1-x}}$.

关键点：瑕点可能有多个，都要考虑到

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}\mathrm{d}x$;

计算易错点：幂函数的次幂 该题是 $x^{\frac{2}{3}}$ 极易写错

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(2) 令 $\frac{1}{x}=t$, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

注意对于右边的积分, 0 不是瑕点, $\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ 是黎曼积分. 对 $\forall A>1$, $\int_1^A \sin t\mathrm{d}t$ 有界, $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 在 $[1,+\infty)$ 单调减且 $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}=0$, 故由狄利克雷判别法, 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ 收敛. 另外, 当 $t \geqslant 1$ 时,

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \geqslant \int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right).$$

由 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ 发散及 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ 收敛, 知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ 发散, 则 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ 发散, 故原积分条件收敛.

关键点：① 积分换元处理 $\sin\frac{1}{x}$

② 分区间讨论

③ 对 $|\sin t| \to \sin^2 t$ 的条件收敛处理

（条件收敛常用手段）

例 181 设 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上非负单调递减的函数，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同敛散. 由此证明积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x,\quad \int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x\ln x}\mathrm{d}x$$

发散.

学习知识点1：$\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,dx$ 发散

学习知识点2：$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$

$=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x$

$=\int_2^{+\infty}\frac{1}{u}du$ 发散

证明 因 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上非负单调递减的函数，故可令 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b\geqslant 0$. 当 $b>0$ 时，对 $\forall B\in(a,+\infty)$ 有

$$\int_a^B f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^B f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x \geqslant \int_a^B b\sin^2 x\mathrm{d}x,$$

上式中令 $B\to+\infty$，即知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同发散.

当 $b=0$ 时，

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x,$$

对 $\forall A>a$, $\int_a^A \cos 2x\mathrm{d}x$ 有界，$f(x)$ 单调，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，由狄利克雷判别法知 $\int_a^{+\infty} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同敛散.

例如，因为 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$, $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ 发散，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x\ln x}\mathrm{d}x$ 也发散.

例 182 计算瑕积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x$ 的值.

学习思路：并不正面硬刚做点 而选择用化归的思路

解 由积分的线性变换计算得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\mathrm{d}t+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\mathrm{d}t+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I,\end{aligned}$$

所以得 $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

(1) 设 $y(x)=\int_x^{x^2}\sin(x-t)^2\mathrm{d}t$, 求 $y'(x)$.

计算易错 ① 求原函数 — 换元之前先观察下是否能直接求解

② 带平方项千万不要去平方

含参积分的求解 → 学习积分技巧与已知点取值技巧

解 (1) 记

$$F(u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+u^2\cos^2x)\mathrm{d}x.$$

由于 $\ln(a^2\sin^2x+u^2\cos^2x)$ 及其关于 u 的偏导数 $\dfrac{2u\cos^2x}{a^2\sin^2x+u^2\cos^2x}$ 都在区域

$$D:0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\quad u>0$$

上连续, 由含参变量常义积分的求导性质, 当 $u>0$ 时, 有

$$\begin{aligned}F'(u)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2u\cos^2x}{a^2\sin^2x+u^2\cos^2x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2u}{a^2\tan^2x+u^2}\mathrm{d}x\quad(\text{令}\,t=\tan x)\\&=\int_0^{+\infty}\frac{2u}{(a^2t^2+u^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t\\&=\frac{2u}{u^2-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{a^2}{a^2t^2+u^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{u+a}.\end{aligned}$$

多项式类 → 先拆分再积分

→ 这里应该就是用多项式的拆分法

故

对 u 积分

$$F(b)-F(a)=\int_a^bF'(u)\mathrm{d}u=\pi\int_a^b\frac{1}{u+a}\mathrm{d}u=\pi\ln(b+a)-\pi\ln(2a).$$

a点的函数值是已知的

又 $F(a)=\pi\ln a$, 故所求的积分为 $F(b)=\pi\ln\dfrac{a+b}{2}$.

完完全全的好题+难题

(2) 记 $F(u)=\int_0^{\pi}\ln(1-2u\cos x+u^2)\mathrm{d}x$, 则 $F(0)=0$.

被积函数 $\ln(1-2u\cos x+u^2)$ 及其关于 u 的偏导数 $\dfrac{-2\cos x+2u}{1-2u\cos x+u^2}$ 都在区域 $D:0\leqslant x\leqslant\pi,\ -1<u<1$ 上连续, 由含参变量常义积分的求导性质, 有

① 连续性对应积分区间的说明 已知 $|a|\neq1$ 则必不可能是R区间

② 以u为变量构造函数, 不要用a, 因为a是常数

$$\begin{aligned}F'(u)&=\int_0^{\pi}\frac{-2\cos x+2u}{1-2u\cos x+u^2}\mathrm{d}x\quad(\text{令}\,-1<u<1,\ u\neq0)\\&=\frac{1}{u}\int_0^{\pi}\left(1+\frac{u^2-1}{1-2u\cos x+u^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{u}+\frac{u^2-1}{u}\int_0^{\pi}\frac{1}{1-2u\cos x+u^2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

作变换 $t=\tan\dfrac{x}{2}$, 可得

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{1-2u\cos x+u^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}t}{(1+u)^2t^2+(1-u)^2}$$

$$=\frac{2}{1-u^2}\arctan\frac{1+u}{1-u}t\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{1-u^2},$$

因而

基本积分式 $\int\frac{1}{t^2+a^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}+C$

$$F'(u)=0,\quad -1<u<1,\quad u\neq0,$$

$$F'(0)=-2\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=0.$$

因此对所有 $|u|<1$ 都有 $F'(u)=0$. 从而 $F(u)=C$, 由 $F(0)=0$ 得 $C=0$, 即

$$F(a)=0\quad(|a|<1).$$

当 $|a|>1$ 时, $\dfrac{1}{|a|}<1$, 因而

思路积累: 另一部分则是通过构造得到

$$\begin{aligned}F(a)&=\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\ln a^2\left(1-\frac{2}{a}\cos x+\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{d}x\\&=2\pi\ln|a|+\int_0^{\pi}\ln\left(1-\frac{2}{a}\cos x+\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{d}x=2\pi\ln|a|.\end{aligned}$$

注记 当 $|a|=1$ 时, $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x$ 是瑕积分, 并可算得 $F(a)=0$.

③ 积分技巧 {
- 能分离则分离
- 能积则积
- 万能代换将三角式有理化

④ 积分关键: 判断绝对值、开平方等符号细节

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x,\quad |\alpha|<1.$

(3) 记

$$F(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x\quad(-1<\alpha<1).$$

因为

$$\frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}-\frac{\ln(1-\alpha\cos x)}{\cos x}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{1+y\cos x},$$

①理解题意变换为双重积分

且对 $\forall\alpha\in(-1,1)$, 函数 $\dfrac{1}{1+y\cos x}$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times[-\alpha,\alpha]$ 上连续, 所以交换积分次序得

②积分换序

注意有理化的处理

③用到奇偶性

$$\begin{aligned}F(\alpha)&=\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos x}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-y\cos x}{1-y^2\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-y^2\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+(1-y^2)}\quad(u=\tan x)\\&=\pi\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pi\arcsin\alpha.\end{aligned}$$

!此题用万能公式代换
不易得到正确结果

例 186 设 $f(x,y)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, 证明

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\neq\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y.$$

证明 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right),$$

导数式积累

所以

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_{x=0}^{x=1}\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}^{y=1}\right)\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}.$$

从而不等式成立.

注记 由于本题被积函数 $f(x,y)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续, 不满足含参变量常义积分性质, 故积分号不能交换.

!在闭区间上连续

好开心哦，
学数学是最专注时刻了。

含参变量广义积分

一. 证明非一致收敛：基本方法 — 反证法：假定一致收敛，由推导结论得出矛盾，证毕

常用的可由一致收敛推导得到的结论：

① 若函数序列一致收敛，则其一定内闭一致收敛
② 连续性
③ 可积性　　满足连续 + 一致收敛（针对闭区间而言）
④ 可微性　　满足二者均连续 + 一者一致收敛 + 一者内闭一致收敛

二. 证明一致收敛
- Weierstrass
- Dirichlet　　有界　　减 → 0
- Abel　　收敛　　减 + 一致有界

三. 计算含参变量反常积分
① 利用可积性构造
② 利用可微性构造

(2) $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx \ (0 \leqslant \alpha < +\infty)$;

思路：直接积分得到和函数
利用连续性证明

(2) 解法 1 由于

$$\varphi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \begin{cases} 0, & \alpha = 0, \\ 1, & \alpha > 0, \end{cases}$$

在 $\alpha = 0$ 处不连续, 而 $f(x,\alpha) = \alpha e^{-\alpha x}$ 在 $0 \leqslant x < +\infty$, $0 \leqslant \alpha < +\infty$ 中连续, 由一致收敛广义积分的连续性质, 推得 $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$ 在 $0 \leqslant \alpha < +\infty$ 上不一致收敛.

(3) 先分部积分

!学习分部积分的操作方法

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= -\int_0^{+\infty} (1 - e^{-\alpha x})^2 d\frac{1}{x} \\ &= -\frac{1}{x}(1 - e^{-\alpha x})^2 \Big|_0^{+\infty} + 2\alpha \int_0^{+\infty} \frac{(1 - e^{-\alpha x})e^{-\alpha x}}{x} dx \\ &= 2\alpha \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{x} dx \\ &= 2\alpha \int_0^{+\infty} dx \int_\alpha^{2\alpha} e^{-ux} du. \end{aligned}$$

由于 e^{-ux} 在 $0 \leqslant x < +\infty$, $\alpha \leqslant u \leqslant 2\alpha$ $(\alpha > 0)$ 上连续, 且 $\int_0^{+\infty} e^{-ux} dx$ 在 $[\alpha, 2\alpha]$ 上一致收敛, 故上面积分可交换次序, 所以

$$I(\alpha) = 2\alpha \int_\alpha^{2\alpha} du \int_0^{+\infty} e^{-ux} dx = 2\alpha \int_a^{2a} \frac{1}{u} du = 2\alpha \ln 2.$$

含参变量积分的应用

一、几个常用的结论性积分

① Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

② 概率积分 (Possen 积分) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

③ $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha>0, \beta\geq 0)$

$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha>0, \beta>0)$

④ 菲涅尔积分 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

二、欧拉积分及其结论

1. Γ积分

① 定义 $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (x>0)$

② 连续性 $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续

③ 递推公式

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x>0)$$

特别地 $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}$

④ 余元公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x} \quad (0<x<1)$$

2. B函数

① $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \quad (x>0,\ y>0)$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}}\,dz=\int_0^{+\infty}\frac{z^{x-1}}{(1+z)^{x+y}}\,dz$$

② 连续性 $B(x,y)$ 在第一象限内连续

③ 递推公式

$$B(x+1,y)=\frac{x}{x+y}B(x,y),\quad B(x,y+1)=\frac{y}{x+y}B(x,y)$$

$$B(x+1,y+1)=\frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}B(x,y)$$

④ $B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

⑤ 勒让德加倍:

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$B(x,y)=B(y,x)$$

$$B(n,m)=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(n+m-1)!}\quad m,n\in N$$

! 具体应用: 由公式求得广义积分值

具体的积分处理手段:
①分部积分
②三角积分加倍公式

例 189 利用 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x&=-\frac{\sin^4 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{4\sin^3 x\cos x}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos 2x)\sin 2x}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(3) 令 $\tan x=t$, 利用 B 函数的无穷积分表示, 并利用余元公式有

注意将分母幂再次归一化

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^\alpha x\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{1+t^2}\mathrm{d}t\quad(令t^2=u)\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{1+u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\pi}=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}.\end{aligned}$$

方便后续用余元公式

真题薄弱项补缺

一、计算错误（细节决定成败！）

①漏掉常数 π^2 $\frac{1}{4}$ / 系数等误抄错 ！！（计算时不对劲要记得回头是岸呀）

②准确写出公式再代入数值，有效规避错误

③ 余元公式 $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\quad(0<x<1)$ Lebniz 求导公式

④ $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、常用的积分公式【节省时间】

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C \qquad \int\frac{dx}{(\sqrt{x^2+a^2})^3}=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$$

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

三、遗忘的知识点

1. 空间曲线积分的投影方法

核心：投影法将第二型曲线积分 → 定积分

①投影 ②参数化 ③定积分

关键：一代 二换 三定号

$z=z(t)$ 积分区域

2. 势函数相关（场论初步）

①曲面单连通域 D：D 中任意一条简单闭曲线所围成的区域都包含在 D 中

则保守场 = 有势场 = 无旋场 = 梯度场

② 势函数 $\varphi(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P\,dx+Q\,dy+R\,dz$

真题思路积累

莱布尼茨求导法则

(6) 设 $f(x)$ 可微且具有连续的导数，$F(x)=\int_0^x\left[\int_0^t uf(u^2+t^2)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$，求 $F''(x)$.

解 由题意，

$$F'(x)=\int_0^x uf(u^2+x^2)\,\mathrm{d}u\,, \tag{2.1.11}$$

$$\begin{aligned} F''(x) &= xf(2x^2)+\int_0^x 2xuf'(u^2+x^2)\,\mathrm{d}u \\ &= xf(2x^2)+x\cdot f(u^2+x^2)\Big|_{u=0}^{u=x} = x[2f(2x^2)-f(x^2)]. \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

基本公式：$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx$，$\varphi'(u)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial u}\,dx$ → 对参变量的导数

$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,dx$，$\psi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,dx+f(b(u),u)b'(u)-f(a(u),u)a'(u)$

!变上限积分的求导法则是莱布尼茨公式的特例，但一般不用莱布尼茨公式，是为降低复杂度

6. 设 $P(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在三维空间上有连续偏导数，记上半球面

$$S: z = z_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}, \tag{2.1.29}$$

其方向向上. 若对任意点 (x_0,y_0,z_0) 和 $r>0$，第二型曲面积分为 $\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$，求证：$\partial P/\partial x = 0$.

解 考虑正向曲面 $D = \{(x,y,z)|x^2+y^2 \leqslant R^2,\ z=0\}$，其方向沿 z 轴负方向，那么 $\Omega + D$ 构成方向向外的闭曲面，其包围的区域记为 Ω. 由 Gauss 定理，

$$\iint_{S+D} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_\Omega (P_x + R_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \tag{2.1.30}$$

另一方面，

$$-\iint_D P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant r^2} R(x,y,z_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.1.31}$$

由题意，

$$\iiint_\Omega (P_x + R_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0 + \iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant r^2} R(x,y,z_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.1.32}$$

由积分中值定理，$\exists(\xi_1,\eta_1,\zeta)\in\Omega$ 且 $\exists(\xi_2,\eta_2)\in D$，使得

$$(P_x+R_z)\Big|_{(\xi_1,\eta_1,\zeta)} \cdot \frac{2\pi r^3}{3} = R(\xi_2,\eta_2,z_0)\cdot \pi r^2 \tag{2.1.33}$$

$$\implies \quad R(\xi_2,\eta_2,z_0) = \frac{2r}{3}\,(P_x+R_z)\Big|_{(\xi_1,\eta_1,\zeta)}. \tag{2.1.34}$$

由于 r 的选择任意，令上式两端 $r\to 0^+$. 又因为 R 具有连续偏导数，故 $R(x_0,y_0,z_0)=0$. 注意到 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的选择也是任意的，从而对于 $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$，$R(x,y,z)\equiv 0$. 将其代回上式，可得

$$P_x(\xi_1,\eta_1,\zeta) = 0 \quad \xrightarrow{r\to 0^+} \quad P_x(x_0,y_0,z_0) = 0, \tag{2.1.35}$$

其中已用到 P 具有连续偏导数的条件. 再结合 P_0 的任意性，可知对于 $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$，$P_x(x,y,z)\equiv 0$.

22-23卷子：还是要继续精准把握知识点、

一. 细节部分

①求积分注意定义域 很重要

几个特殊积分的定义域：① Dirichlet $\int_0^{+\infty}$ $\Gamma\int_0^{+\infty}$ $B\int_0^1$ $\int_0^{+\infty}$ (这都和后面的 dx 是对应)

② 遇到曲面积分能用 Gauss 就用，投影法麻烦且易出错，out!

曲线积分中 Stokes 公式的特殊应用 → 做路径的转化

③ 注意瑕点判断，每个步骤都不要跳过

④ 求解极限情况 $\begin{cases}\text{判断瑕点} & 0/0 \quad \infty/\infty \text{ 都可以用洛必达法则} \\ \text{判断有界} & \end{cases}$

⑤ Fourier 级数注意 a_0 与 $\frac{a_0}{2}$，代入时容易出错

⑥ 注意分辨清楚第一型曲线和第二型曲线积分

二. 知识点部分

1. Γ 函数与 B 函数的知识点与结论

2. 含参积分性质(重点理解)

3. 三角函数的正交性

$\{1, \cos\omega x, \sin\omega x, \cos2\omega x, \sin2\omega x, \cdots, \cos n\omega x, \sin n\omega x\}$ 在区间 $[-l, l]$ 正交

即 $\int_{-l}^{l}(\cos n\omega x)^2 dx = \int_{-l}^{l}(\sin n\omega x)^2 dx = 1$

其余任意乘积的积分均为0

思路积累

(3) 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x.$

解 利用 Euler 积分和余元公式，

$$\text{原式} \xlongequal{u=x^n} \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\cdot\frac{u^{1/n-1}}{n}\,\mathrm{d}u = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\Gamma(1-1/n)\sin(\pi/n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Gamma(1-1/n)} = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1.$$

到这一步之后 $\begin{cases}\Gamma(x)\text{ 要求 } x>0\\ \frac{1}{n}\to 0\text{ 但具体值未知}\end{cases}$

(用余元公式加以处理)

路径积分的思路转换

3. (12 分) 求向量场 $\boldsymbol{v}=(y+z)\boldsymbol{i}+(z+x)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}$ 沿曲线

$$L:\boldsymbol{r}(t)=(\cos t,\sin t,t),\quad t\in[0,2\pi]$$

的积分，其中 t 是曲线的正向参数。

解：由Stokes公式知，对∀闭合曲线L_0及其围成的曲面Σ

有 $\oint_L \vec{v}\cdot d\vec{r} = \iint_\Sigma \nabla\times\vec{v}\cdot d\vec{S} = 0$

其中 $\nabla\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = (0,0,0)$

则该向量场中曲线积分与路径无关，起点为$A(1,0,0)$ 终点为$B(1,0,2\pi)$

设L_1为AB线段

则 $\int_L \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_{L_1}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$

$$\xlongequal[dy=0]{dx=0} \int_{L_1} x+y\,dz = \int_0^{2\pi} 1\,dz = 2\pi$$

5. 求向量场 $\boldsymbol{v}=xy^2\boldsymbol{i}+yz^2\boldsymbol{j}+zx^2\boldsymbol{k}$ 在球面 $S: x^2+y^2+z^2=z$ 的积分，曲面 S 的正向是外法向.

解 记闭曲面 S 包围的区域为 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+(z-1/2)^2\leqslant 1/4\}$，由 Gauss 定理，

$$\begin{aligned}\oiint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \iiint_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V\\ &= \iiint_\Omega\left[x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}V\\ &= \iiint_\Omega\left[x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}V+\frac{1}{4}\iint_\Omega\mathrm{d}V\\ &= 4\pi\int_0^{1/2} r^2\cdot r^2\,\mathrm{d}r+\frac{1}{4}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\pi}{15},\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

学习方法：直接在原式的基础上凑出 $z-\frac{1}{2}$

再利用其对称性

$\int_0^{\pi}\sin\theta = 2$

其中第三行已利用 Ω 关于 $(z-1/2)$ 对称的特性.

这是常用的积分方法

思路积累，场论部分

(2) 设 L 是逆时针方向的椭圆 $a^2x^2+b^2y^2=1$, 所围成的区域为 D, 则 D 的面积为 $\sigma(D)=\frac{\pi}{ab}$. 向量场 $\mathbf{v}$ 沿 L 的第二型曲线积分为

$$\oint_L \frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\mathrm{d}y$$
$$=\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=2\sigma(D)=\frac{2\pi}{ab}\neq 0.$$

故, $\mathbf{v}$ 不是区域 $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>0\}$ 上的保守(有势)场.

①要先证明有势场
由单连通域+旋度证明
②不是保守场
→积分与路径有关
→构造一个特殊闭路，
证明其环量不为0即可

七. (15分) 证明反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+4x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 并求其值.

解答: 设 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ $(\alpha>0)$. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\sqrt{x}}=0$, 所以存在常数 $C>0$ 使得 $0<\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}<C\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$. 由 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

记 $f(x,\alpha)=\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}$. 则对于 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$, 有

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|=\left|\frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}\right|\leqslant\frac{2}{\alpha_0(1+x^2)}.$$

由此可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛. 于是

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x,\ (\alpha>0).$$

对于 $\alpha>0$ 且 $\alpha\neq1$ 有

$$\begin{aligned}I'(\alpha)&=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha x^2}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x\\&=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\alpha^2x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2x^2}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\alpha}\frac{\pi}{2}\right)\\&=\frac{\pi}{1+\alpha}.\end{aligned}$$

易验证, 对 $\alpha=1$ 也有 $I'(\alpha)=\frac{\pi}{1+\alpha}$. 由于 $I(0)=0$. 故,

$$I(\alpha)=\pi\ln(1+\alpha)\ (\alpha\geqslant0).$$

于是所求反常积分的值为 $\pi\ln3$.

→思路积累：
构造含参变量积分求解
反积分的值

(2) 设 $u(x,y)$ 在圆盘 $D: x^2+y^2 \leqslant \pi$ 上有二阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin(x^2+y^2), \tag{2.4.13}$$

$\boldsymbol{n}$ 为边界圆周 ∂D 的单位外法向，计算曲线积分 $\displaystyle\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s$.

解 参考作业题 11.3.7 的思路，设曲线上某一线元的单位法向为 $\hat{\boldsymbol{n}}=(\cos\beta,\sin\beta)$，则其对应的正向线元

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\hat{\boldsymbol{\tau}}\,\mathrm{d}s=(-\sin\beta,\cos\beta)\,\mathrm{d}s=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y), \tag{2.4.14}$$

从而

$$\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s=(\cos\beta,\sin\beta)\,\mathrm{d}s=(\mathrm{d}y,-\mathrm{d}x), \tag{2.4.15}$$

因此原式可化为

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s&=\oint_{\partial D}\nabla u\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}u_x\,\mathrm{d}y-u_y\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{Green 公式}}\iint_D(u_{xx}+u_{yy})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\xlongequal{\text{极坐标}}2\pi\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=2\pi.\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

思路积累

① 单位法向的处理

→ 转为单位切向

→ 再一步转为积分元

② 梯度求导公式

③ 极坐标完成计算

5. 记 $\boldsymbol{v}=(y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(z^2+x^2)\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$，计算曲线积分

$$I=\oint_L(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\,, \tag{2.4.18}$$

其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与柱面 $x^2+y^2=2x$ 的交线 $(z\geqslant 0)$，从 z 轴的正向看去，L 沿顺时针方向.

用于Stokes　用于投影

解 采用 Stokes 公式可得

$$I=2\iint_S(y-z,z-x,x-y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{2.4.19}$$

其中有向曲面 S 取为球面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 上被 L 包围的区域，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=-\frac{(x-2,y,z)}{2}\,\mathrm{d}S=-\frac{(x-2,y,z(x,y))}{2}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-\frac{(x-2,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{2\sqrt{4-(x-2)^2-y^2}}.\end{aligned} \tag{2.4.20}$$

注意到 S 关于 x,y 对称，因此

$$I=-\iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}\frac{4(z(x,y)-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{4-(x-2)^2-y^2}}=-4\iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-4\pi. \tag{2.4.21}$$

① 有向曲面的选择 并进行Stokes公式

② 投影到xoy平面上 一代二换三定号

③ 最终得结果

7. (1) 求使积分 $\varphi(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛的参数取值范围.

(2) 收敛时，利用 Euler 积分计算 $\varphi(\alpha)$.

(3) 证明：含参变量广义积分 $\varphi(\alpha)$ 在区间 $[-\alpha_0,\alpha_0]$ 上一致收敛 $(0<\alpha_0<1)$.

解 (1) 将积分区域拆分为 $[0,1)$ 和 $[1,+\infty)$ 考虑. 在 $[0,1)$ 内，被积函数 $f(x,\alpha)=x^\alpha/(1+x^2)$ 在 $x\to 0^+$ 时等价于 x^α，而 $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$ 仅在 $\alpha>-1$ 时收敛；在 $[1,+\infty)$ 内，$f(x,\alpha)$ 在 $x\to+\infty$ 时等价于 $1/x^{2-\alpha}$，而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2-\alpha}}$ 仅在 $2-\alpha>1$ 即 $\alpha<1$ 时收敛. 综上，$\varphi(\alpha)$ 收敛时 $\alpha\in(-1,1)$.

注意该种划分方法

& 等价法

八. (8分) 设函数 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有二阶连续偏导数, 并且对任意点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 及任意正数 $r>0$ 有

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = f(P_0), \tag{1}$$

其中 S 是以 P_0 为球心, r 为半径的球面. 求证: f 满足 Laplace 方程

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.$$

证明: 对任意 $r>0$ 取球面 S 的参数方程为

$$x=x_0+r\sin\theta\cos\varphi,\ y=y_0+r\sin\theta\sin\varphi,\ z=z_0+r\cos\theta,$$

其中 $(\theta,\varphi)\in D=[0,\pi]\times[0,2\pi]$. 记

$$P=(x_0+r\sin\theta\cos\varphi, y_0+r\sin\theta\sin\varphi, z_0+r\cos\theta).$$

根据条件 (1), 有

$$\iint_D f(P)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 4\pi f(P_0). \tag{2}$$

这是含参变量 r 的积分. 关于变量 r 求导, 得

$$\iint_D\left(\sin\theta\cos\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(P)+\sin\theta\sin\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(P)+\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(P)\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=0.$$

这等价于

$$\iint_S\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

关键步骤

因为 f 有连续的二阶偏导数, 所以根据 Gauss 公式, 有

$$\iiint_V\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

其中 V 是 S 围成的球体. 根据积分中值定理, 存在 $\xi\in V$ 使得

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)(\xi)=0.$$

令 $r\to 0^+$, 即得

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)(P_0)=0.$$

由于 P_0 是任意的, 故,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.$$

8. 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且对任一点 (x_0,y_0) 为圆心，任意 $r>0$ 为半径的半圆 $L: x=x_0+r\cos\theta,\ y=y_0+r\sin\theta$，恒有

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0, \tag{2.4.32}$$

证明：$P(x,y)=0,\ \partial Q(x,y)/\partial x=0.$

证明. 考虑从 (x_0-r,y_0) 到 (x_0+r,y_0) 的直线段 L_0，记 L 与 L_0 围成的区域为 D，取 L 为正向曲线，则由 Green 公式，

$$\iint_D (Q_x-P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_{L_0+L} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{L_0} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+0=\int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.4.33}$$

利用积分中值定理，$\exists(\xi,\eta)\in D$ 且 $\exists\zeta\in(x_0-r,x_0+r)$，使得

$$(Q_x-P_y)\Big|_{(\xi,\eta)}\cdot\frac{\pi r^2}{2}=P(\zeta,y_0)\cdot 2r \quad\Longrightarrow\quad P(\zeta,y_0)=\frac{\pi}{4}r\,(Q_x-P_y)\Big|_{(\xi,\eta)}. \tag{2.4.34}$$

注意到 P,Q 具有二阶连续偏导数，上式两端分别令 $r\to 0^+$，可得 $P(x_0,y_0)=0$. 再由 (x_0,y_0) 的任意性，可得对 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$，均有 $P(x,y)=0$. 将其代入上式，类似可得

$$Q_x(\xi,\eta)=0 \quad\Longrightarrow\quad Q_x(x_0,y_0)=\lim_{r\to 0^+}Q(\xi,\eta)=0 \quad\Longrightarrow\quad Q_x(x,y)=0. \tag{2.4.35}$$