1. (15pt) 证明下列群 G 是交换群

(a) 对群 G 中任意元素 a，有 $a^2 = e$.

(b) 对群 G 中任意元素 a, b，有 $(a * b)^2 = a^2 * b^2$.

要证：$\forall a, b \in G$，有 $a*b = b*a$

证明：(a) 对 $\forall a \in G$，有 $a^2 = e$，即 $a^{-1} = a$

则有 $\forall a, b \in G$，$aba^{-1}b^{-1} = (ab)(ab) = e$

两侧同时右乘 ba 则有

$ab = ba$ 证毕

(b) 由题可知，$\forall a, b \in G$，有：

$a*b*a*b = a*a*b*b$

左侧同乘 a^{-1}，右侧同乘 b^{-1}，得：

$b*a = a*b$

证毕

2. (15pt) 对于任意群 G 中的元素 a，如果存在 r 使得 r 是满足 $a^r = e$ 的最小正整数，则称元素 a 的阶是 r，否则称 a 是无穷阶的。群中的两个元素称作是同阶的如果它们的阶一样（或者是相同的正整数，或者同为无穷阶），证明:

(a) 对任意 $a \in G$，a 与它的逆 a^{-1} 同阶.

(b) 对任意 $a, b \in G$，$a * b$ 与 $b * a$ 同阶.

① a 的阶为 r

证明：(a) 已知 $a*a^{-1} = e$ 且 $a^r = e$ 要证 $(a^{-1})^r = e$

则 $(a^{-1})^r = e*(a^{-1})^r = a^r*(a^{-1})^r$

$= a^{r-1}*(a*a^{-1})*(a^{-1})^{r-1} = a^{r-1}*(a^{-1})^{r-1}$

$= a*a^{-1} = e$

即证得 $(a^{-1})^r = e$

② a 是无穷阶的

反证，若 (a^{-1}) 不是无穷阶的，则 $\exists r$，s.t. $(a^{-1})^r = e$，

$a^r = e*a^r = (a^{-1})^r*a^r = a^{-1}*a = e$ 则与 a 是无穷阶矛盾

故可证明 (a^{-1}) 是无穷阶的。

(2) ① $(a*b)^r = e$ 要证 $(b*a)^r = e$

$(a*b)^r = a*(b*a)^{r-1}*b = e$

则 $(b*a)^{r+1} = b*(a*b)^r*a = b*e*a = b*a = b*a*e$

$(b*a)[(b*a)^r - e] = 0$

由 a, b 的任意性可知：

$(b*a)^r - e = 0$ 则 $(b*a)^r = e$

② $(a*b)$ 是无穷阶的，

则由反证法易得 $(b*a)$ 也是无穷阶的 (同①过程)

故证毕

3. (20pt) 设 H, K 为群 G 的子群，

(a) 证明 $H \cap K$ 也是 G 的子群。

(b) 若 G 为有限群，$|G|/|H| = m$, $|G|/|K| = n$，证明 $|G|/|H \cap K| \le mn$.

(c) 给出反例说明 $H \cup K$ 未必是 G 的子群。

(d) 证明 $H \cup K$ 是 G 的子群当且仅当 $H \subseteq K$ 或 $K \subseteq H$.

(a) 证明：∵ H, K 为群 G 的子群

∴ $H, K \subseteq G$,

设 $M = H \cap K$, $\forall a, b, c \in M$,

① 封闭性　$a*b \in H$, $a*b \in K$, 则 $a*b \in M$

② 结合律　$(a*b)*c = a*(b*c)$ 在 K, H 都成立，则在 M 成立

③ 单位元　e 是 G 的单位元，则 $e \in H$, $e \in K \Rightarrow e \in M$

④ 逆元　可验证满足

且 $M \subseteq G$，故 $H \cap K$ 是 G 的子群

(b) 易得 $H \cap K$ 为 H 的子群，由拉格朗日定理有：

$p|H \cap K| = |H|$，则由 $|G| = m|H| = n|K| = mp|H \cap K|$

即证 $mp \le mn$　即证 $p \le n$

?没做出来

(c) 设 G 为整数的加法群

$K = 2G$, $H = 3G$，则 H, K 均为 G 的加法子群

4, 9 均为 $H \cup K$ 中的元素

但 $4+9=13$ 不在 $H \cup K$ 中，不满足封闭性，故 $H \cup K$ 不是 G 的子群

(d) ① 证 "$\Leftarrow$"：

不妨设 $H \subseteq K$，则 $H \cup K = K$，∵ K 为 G 的子群

∴ $H \cup K$ 为 G 的子群。

② 证 "$\Rightarrow$"：反证法：设 $H \cup K$ 为 G 的子群且既不满足 $H \subseteq K$ 也不满足 $K \subseteq H$

则存在元素 $a \in K - H$, $b \in H - K$　由 $H \cup K$ 的封闭性知，有 $a*b \in H \cup K$

不妨设 $a*b \in H$，则有　$a = a*b*b^{-1} \in H$，与 $a \in K - H$ 矛盾，故 $K - H$ 与 $H - K$ 至少有一个为空集，矛盾，故证毕。

4. (10pt) 若群 G 的阶 $|G|$ 为素数，证明 G 是循环群。

证明：已知 $|G|=r$，r 为素数，

设 $\forall a\in G$，由 a 生成的循环子群记为 H，$|H|=m$

由拉格朗日定理知 $m\mid r$，$\because r$ 为素数 $\therefore m=1$ 或 $m=r$

由 a 的任意性，当 $a\neq e$，$\therefore m\neq 1$，则 $m=r$

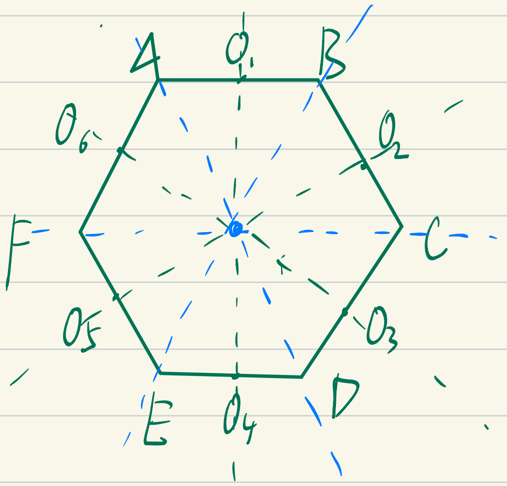
故有 $G=H$，即 $G=\langle a\rangle$

故证得 G 为循环群。

5. (10pt) 若群 G 的阶 $|G|$ 为 pq，其中 p 和 q 均为素数且 $(p<q)$，证明 G 至多包含一个 q 阶子群。

?

6. (10pt) 考虑正六边形经中心旋转或轴对称翻转后保持绝对位置不变的 12 种顶点置换，证明这些置换构成群。



解：这12种顶点置换为：

绕中心旋转 $60°$、$120°$、$180°$、$240°$、$300°$、$360°$

沿轴 AD、BE、CF、O_1O_4、O_2O_5、O_3O_6 对称翻转

记该集合为 G

① 封闭性：对 $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in G$，

易知 $\alpha_1 * \alpha_2$ 即对正六边形再执行以上的任意两种变换

其绝对位置仍不变。

② 结合律：

这些变换都是正六边形到自身的函数，函数的复合满足结合律

③ 单位元：

e = 绕中心旋转 $360°$，执行该变换后得到原图形

④ 逆元：

绕中心旋转 $m°$ 的逆元是绕中心旋转 $(360-m)°$

沿轴对称翻转的逆元是其本身

综上可得，这些置换构成群。

7. (15pt) 证明任意群 G 都同构于一个置换群。

证明：考虑对 $\forall g, x \in G$，$L_g(x) = gx$

① 单射：对 $\forall x, y \in G$，若 $L_g(x) = L_g(y)$ 即 $gx = gy$，同时左乘 g^{-1}，即 $x = y$

② 满射，对 $\forall y \in G$，取 $x = g^{-1}y$，则 $L_g(x) = g(g^{-1}y) = y$

故 L_g 是将 $G \to G$ 的置换变换

取 $G' = \{L_g : \forall g \in G\}$，则知 G' 是一个置换群

定义 $\varphi: G \to G'$，$\varphi(g) = L_g$

下证 G 与 G' 同构：

对 $\forall g, h \in G$

$$(\varphi(g) * \varphi(h))(x) = L_g(L_h(x)) = ghx$$

$$\varphi(gh)(x) = L_{gh}(x) = ghx$$

即 $\varphi(g) * \varphi(h) = \varphi(gh)$，故 G 与 G' 同构，证毕

8. (10pt) 求出与 n 阶循环群同构的置换群。

解：取 S_n 中的 n-轮换 σ：

$\sigma(1)=2,\ \sigma(2)=3,\ \cdots,\ \sigma(n)=1$

则由 σ 生成群 $\{\sigma^0, \sigma^1, \ldots, \sigma^{n-1}\}$，易知 $\sigma^n=\sigma^0=e$，

则该置换群为一个 n 阶循环群，

由于 $\forall n$ 阶循环群都同构于 $\langle Z_n, +\rangle$

故该置换群与任意 n 阶循环群都同构，证毕

9. (15pt) 考虑有限群 G 在有限集合 X 上的作用。对 $x \in X$，令

$$O_x = \{z \in X \mid \exists g \in G \text{ s.t. } g(x) = z\}$$

为 x 所在的轨道，令

$$S_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$$

为 x 的固定子群。对 $a \in G$，令

$$C_a = \{z \in X \mid a(z) = z\}.$$

(a) 对任意 $x, y \in X$，考虑它们的轨道 O_x 及，证明 $O_x = O_y$ 或 $O_x \cap O_y = \emptyset$.

(b) 证明 $\sum_{z\in X} |S_z| = \sum_{g\in G} |C_g|$。

(c) 令 k 表示该群作用的不同的轨道的数目，证明

$$k = \sum_{z\in X} \frac{1}{|O_z|} = \frac{\sum_{g\in G} |C_g|}{|G|}.$$

证明：(a) 设 $O_x \cap O_y \neq \phi$，则 $\exists z \in O_x \cap O_y$, s.t. $\exists g, h \in G$，有

$g(x) = z = h(y)$，同时左乘 g^{-1}，有：

$x = g^{-1}(z) = g^{-1}h(y)$，即 $x \in O_y$

对 $\forall \omega \in O_x$，有 $\omega = u(x) = u(g^{-1}h(y)) = ug^{-1}h(y)$，

则 $\omega \in O_y$，故 $O_x \subset O_y$

同理 $O_y \subset O_x$

故知 $O_x = O_y$　即证得 $O_x = O_y$ 或 $O_x \cap O_y = \phi$

(b) 构造集合 $A: \{(g, z) \in G \times X \mid g(z) = z\}$

则固定 x 数 $\sum_{z\in X} |S_z| = |A|$

固定 g 数 $\sum_{g\in G} |C_g| = |A|$　则 $\sum_{z\in X} |S_z| = \sum_{g\in G} |C_g|$