hw7

1. (15pt) 考虑 100 个顶点的完全图 K_{100}，对它的边进行红蓝染色使得每个顶点有偶数条 (可能为零) 邻边为红色，证明其中有三个顶点，他们红色邻边的数量相同。

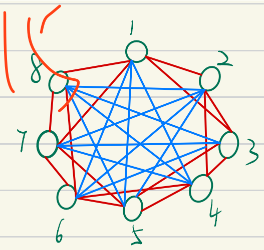
15

设顶点编号为 $1, 2, \cdots, 100$，其中第 i 个顶点的红色邻边数为 r_i，
K_{100} 中每个顶点都有 99 条邻边，则 r_i 可能的取值为 $0, 2, 4, \cdots, 98$ 共 50 个数

反证法：若 K_{100} 红染色后不存在三个红色邻边数量相同的顶点，
则 $0, 2, 4, \cdots, 98$ 这 50 个数每一种都恰好被两个顶点占用，
不妨设 $r_{2k+1} = r_{2k+2} = 2k$，$0 \le k \le 49$.
其中 $r_{99} = r_{100} = 98$，则顶点 100 号仅有 $(99-98=1)$ 条边染成蓝色，剩余边都为红色
但 $r_1 = r_2 = 0$，即顶点 1 号与 2 号均只有蓝色，这与上一条产生矛盾
故证得原结论

2. (15pt) 给出 K_8 的一种红蓝染色方案使得其中既没有红色 K_4 也没有蓝色 K_3。

15



取八个点编号如左图所示
定义距离 $d = |i-j| \bmod 8$
则将所有 $d = 1, 2$ 的边染成红色
剩余边染成蓝色

即为所求的一种方案

3. (20pt) 记 $r(a, b)$ 为最小的正整数 n（如果这样的正整数存在的话）使得对 K_n 进行红蓝染色则其中或者有红色 K_a 或者有蓝色 K_b。
证明 $r(a, b) \le r(a-1, b) + r(a, b-1)$，
证明 $r(a, b) \le \binom{a+b-2}{a-1}$。

20

① 证明：取 $n = r(a-1, b) + r(a, b-1)$ 个顶点的完全图 K_n，并对其边进行红蓝任意染色
下证该图中或者有红色 K_a 或者有蓝色 K_b

若从 n 中取 $r(a-1, b)$ 个顶点有蓝色 K_b 或取 $r(a, b-1)$ 个顶点有红色 K_a，则成立
否则：
在 K_n 中任取一个顶点 v，除去 v 外还剩 $n-1 = r(a-1, b) + r(a, b-1) - 1$ 个顶点
将其按照与 v 连接的边的颜色分为 V_{red}, V_{blue}

则必然满足以下两种情况之一
A $|V_{red}| \ge r(a-1, b)$

B $|V_{blue}| \ge r(a, b-1)$

对于 A 由于 $|V_{red}| \ge r(a-1, b)$ 故 V_{red} 中的顶点构成的完全图中有 K_{a-1}
加入顶点 v，由此可得该完全图中有 K_a
同理可得 B 情况下有 K_b

则证毕

② 数学归纳法：$a=2$ 时，$r(2, b) = 1$，$\binom{2+b-2}{2-1} = b$ 不等式成立
$b=2$ 时 $r(a, 2) = a$，$\binom{a+2-2}{2-1} = a$ 不等式成立
归纳假设：对所有满足 $i+j < a+b$ 的正整数对 (i, j) 不等式 $r(i, j) \le \binom{i+j-2}{i-1}$ 均成立

由 ① 得 $r(a, b) \le r(a-1, b) + r(a, b-1) \le \binom{(a-1)+b-2}{(a-1)-1} + \binom{a+(b-1)-2}{a-1} = \binom{a+b-3}{a-2} + \binom{a+b-3}{a-1} = \binom{a+b-2}{a-1}$

证毕.

4. (15pt) 考虑连通简单无向图 $G=(V,E)$，令 $\delta=\min_{x\in V}\deg(x)$ 为图 G 中最小的顶点度数，若 $|V|>2\delta$，则 G 包含长至少为 2δ 的 path。

15

解：设 $V_0V_2\cdots V_{i-1}V_iV_{i+1}\cdots V_k$ 为 G 的最长简单路径 P

$\because \deg(V_1)\geq\delta$，$\therefore V_0$ 至少有 δ 个邻点，且这些邻点都在 P 上，记该集合为 $N(V_0)$

这是因为若 V_1 的邻点 V_w 不在 P 上，则存在 $V_1V_2\cdots V_{i-1}V_iV_{i+1}\cdots V_k$ 到 V_w 的路径，与 P 是最长路径矛盾

同理 V_k 至少有 δ 个邻点，且这些邻点都在 P 上，记该集合为 $N(V_k)$

反证法：假设 $k<2\delta$

在 V_0 与 V_i 相连，V_k 与 V_{i-1} 相连的情况下，可构成环 $V_0V_iV_{i+1}\cdots V_kV_{i-1}V_{i-2}\cdots V_1V_0$

由假设条件得 $|V|>2\delta\geq k+1$，

故 G 中必存在一点 w 与环中任意一点 V_m 相连

将环在 V_m 处断开可构造更长路径

这与 P 是最长 Path 矛盾

否则 记 $S=\{i\mid V_i\in N(V_0)\}$，$T=\{i\mid V_{i-1}\in N(V_k)\}$，$i$ 从 $1,2,\cdots,k$ 中取

若 $S\cap T\neq\phi$，则 $\exists\, i$，s.t. $V_i\in N(V_0)$，$V_{i-1}\in N(V_k)$，

故 $S\cap T=\phi$

又由 $|S|\geq\delta$，$|T|\geq\delta$，可知 $k\geq 2\delta$ 与假设条件矛盾

综上可得 $k\geq 2\delta$ 可 G 中包含长至少为 2δ 的 Path

5. (20pt) 一个无向图 $G=(V,E)$ 被称作二部图（bipartite graph）是指 V 可以分成两个不相交的子集 $V_1\cup V_2$ 使得 E 中的每条边均有一个端点属于 V_1，另一个端点属于 V_2。

(a) 证明无向图 G 是二部图等价于 G 中不存在长度为奇数的 cycle.

(b) 若一个二部图 G 含有奇数个顶点,则 G 中不存在 Hamilton cycle。

证明：(a) "⇒" G是二部图，$V=V_a\sqcup V_b$，$V_a\cap V_b=\phi$

取G中回路 $V_1V_2V_3\cdots V_{r-1}V_iV_{i+1}\cdots V_kV_1$，其中$V_1\in V_a$

由二部图定义知 $V_1, V_3,\cdots V_{k-1}\in V_a$

$V_2, V_4,\cdots V_k\in V_b$

则知k为偶数

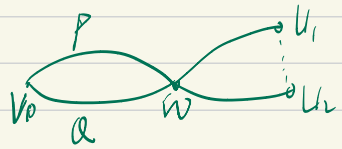
故G中不存在长度为奇数的cycle.

"⇐" 任取G中顶点 $V_0\in V$,

取 $X=\{u\mid u\in V, dist(V_0,u)\text{为偶数}\}$

$Y=\{m\mid m\in V, dist(V_0,m)\text{为奇数}\}$

易得 $X\cap Y=\phi$，$X\cup Y=V$，下用反证法



若$\exists u_1,u_2\in X$, s.t. $(u_1,v)\in E$

取$P(V_0,u_1)$，$Q(V_0,u_2)$分别为V_0到u_1，V_0到u_2的最短路径

w是P与Q的最后一个公共点，将P与Q分为

$P(V_0,w)$，$P(w,u_1)$和$Q(V_0,w)$，$Q(w,u_2)$

其中 $P(V_0,w)=Q(V_0,w)=k$,

否则不妨设$P(V_0,w)>Q(V_0,w)$ 则 $Q(V_0,w)+P(w,u_1)$构成路径比$P(V_0,u_1)$短，与$P(V_0,u_1)$是最短路径矛盾

若u_1u_2之间存在邻边，则$P(w,u_1)$，$Q(w,u_2)$与(u_1,u_2)构成环C

$|C|=|P(w,u_1)|+|Q(w,u_2)|+1$

$=(|P(V_0,u_1)|-|P(V_0,w)|)+(|Q(V_0,u_2)|-|Q(V_0,w)|)+1 = dist(V_0,u_1)+dist(V_0,u_2)-2k+1$

由定义可知$|C|$为奇数，这与条件矛盾，故X中任意两点之间没有邻边

同理可以证明Y中任意两点之间没有邻边

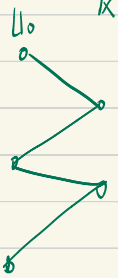
则$\forall e\in E$，其端点必然一个属于X，一个属于Y

即G为二部图

证毕

(b) G是二部图且$|V|$为奇数，不妨设 $V=U\sqcup W$ 满足二部图的分法

反证法：



假设G中存在哈密顿回路，由二部图的定义知任意一条边的端点必然一个在U一个在W

则记该回路中顶点序列为 $U_1W_1U_2W_2\cdots U_nW_nU_1$

则知必有 $|U|=|W|$，$|V|=|U|+|W|$为偶数，这与条件矛盾

所以证得一个二部图$|G|$含有奇数个顶点，则G中不存在Hamilton cycle

6. (15pt) 证明无向图 $G=(V,E)$ 有 Euler circuit 等价于 G 是连通的且 G 可以分解成若干个边不相交的 cycle 的并。

解: ① "⇒" $G=(V,E)$ 有 Euler circuit, 记为 W,

对于 $\forall v\in V$, 若 v 在 W 上出现 k 次, 由于 W 经过了 G 中所有的边

则 $\deg(v)=2k$

当 $k=0$ 时, $\deg(v)=0$, 则 v 为孤立顶点

除去孤立顶点外 G 连通.

由连通性且 $\forall v\in V$, $\deg(v)=2k$, 知 G 不是树

故 G 中 $\exists$ cycle C_0,

考虑 $G_1=G-E(C_0)$, 若 G_1 是无边图, 则 G 是 cycle, 命题成立

否则 G_1 中存在连通分量, 同理 G_1 中 $\exists$ cycle C_1,

以此类推可得 $G_n=G-E(C_0)-E(C_1)-\cdots-E(C_n)$, 其中 G_n 是无边图,

且 $E(C_i)\cap E(C_j)=\phi$, $(0\le i,j\le n,\ i\ne j)$

则 $G=\bigcup_{i=0}^{n} C_i$ 命题成立.

② "⇐" $\because$ G 是连通的,

且 $G=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$, 其中 C_i 与 C_j 是没有公共边的 cycle, $(i\ne j,\ 1\le i,j\le n)$

若 $n=1$, 则 $G=C$, 可知 G 有 Euler circuit

若 $n\ge 2$, 则 $\exists$ C_i, C_j 有公共顶点, 不妨设为 C_1, C_2

$C_1\cup C_2$ 是 circuit,

进一步地, 由图的连通性 $\exists$ C_3, s.t. C_3 与 $C_1\cup C_2$ 有公共顶点,

得 $C_1\cup C_2\cup C_3$ 是 circuit,

类推可得 $G=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ 为 circuit 且包含所有边

即 G 有 Euler circuit.

7. (20pt) 考虑连通有向图 $D=(V,E)$.

(a) 证明若对于任意 $x\in V$，都有 $|\deg_D^+(x)-\deg_D^-(x)|\le 1$，且任何边 $a\in E$ 均包含在奇数个有向 cycle 中，则 D 是 Euler 图。

(b) 说明上述命题的逆命题不成立。

10

证明：(a) 已知：$\forall x\in V$，都有 $|\deg_D^+(x)-\deg_D^-(x)|\le 1$，

令 $N(a)$ 为包含边 a 的有向环的集合，

则 $N(a) \bmod 2 \equiv 1$

要证：$\forall x\in V$，都有 $\deg_D^+(x)=\deg_D^-(x)$

设 C 为有向环的集合，

对于 $\forall x\in V$，$\deg_C^+(x)$ 表示经过 x 的所有有向环对 x 出度的贡献，$E^+(x)$ 表示以 x 为起点的边的集合

$$\deg_C^+(x)=\sum_{a\in E^+(x)}|N(a)|$$

由 $|N(a)|$ 为奇数知 $\deg_C^+(x)\equiv\deg_D^+(x) \bmod 2$

同理可得 $\deg_C^-(x)\equiv\deg_D^-(x) \bmod 2$

根据环的性质可得

$(\deg_C^+(x)-\deg_C^-(x))\equiv 0 \bmod 2$

故 $(\deg_D^+(x)-\deg_D^-(x))\equiv 0 \bmod 2$

由 $|\deg_D^+(x)-\deg_D^-(x)|\le 1$

可得 $\deg_D^+(x)-\deg_D^-(x)=0$

此即 D 是 Euler 图的充要条件，证毕

100/100