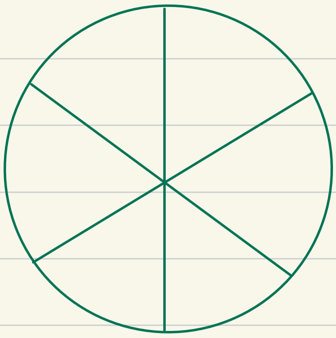
第一次作业

→存在性

1. (10pt) 在一个半径为 1 的圆中任取 7 个点，则其中一定存在两点使得它们之间的距离不大于 L，问 L 最小可以是多少，并证明。



L最小值是1

证明：将圆均分为6等份，

根据抽屉原理，必有两点p_1, p_2落在同一个扇形之内

且 $\max d(p_1, p_2) = 1 \le L$

则L最小为1

2. (15pt) 从 $1, 3, 5, \ldots, 299$ 共 150 个奇数中任选 n 个数，使得其中一定存在两个数满足其中一个整除另一个，问 n 最小可以是多少并证明。

证明：取3作为幂因子，可以1, 5, 7, 11, ……, 295, 299共100个奇数为基数

构造抽屉，每个抽屉中的数字可互相整除。

根据抽屉原理：

则n为101时，一定存在两个数落在同一抽屉，即满足其中一个整除另一个

n最小为101

3. (15pt) 从 $3, 5, \ldots, 299$ 301 共 150 个奇数中任选 n 个数，使得其中一定存在两个数互素，问 n 最小可以是多少并证明。

n最小可以是6

证明：取3为幂因子，以3, 5, 7, 11, 13, 17, ……, 295, 299, 301共101个奇数为基数

构造抽屉，每个抽屉中的数字可互相整除。

其中以3为基数的抽屉中数字最多，共有5个数：3、9、27、81、243

则任取6个数，其中一定存在两个数落在不同的抽屉中，即这两个数互素

故n最小为6

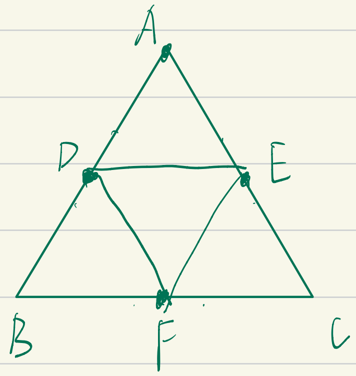
4. (20pt) 考虑一个边长为 1 的等边三角形:

证明在该三角形中任取五个点，则其中存在两点使其距离不大于 1/2;

证明在该三角形中任取十个点，则其中存在两点使其距离不大于 1/3;

确定 m_n，使得在该三角形中任取 m_n 个点，则其中存在两点使其距离不大于 $1/n$.（请让 m_n 尽可能的小，越小得分越高）.

证明:(1) 将等边三角形按如图所示分为 4 等份，其中 D, E, F 分别是三边各自的中点，

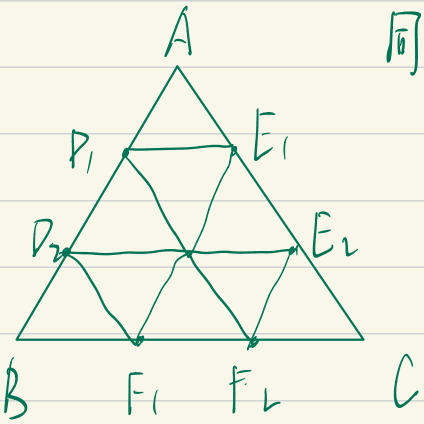


根据抽屉原理可得:

任取五点，一定有 2 点落在同一个小三角形中

此两点距离最大即为小三角形边长 $\frac{1}{2}$,

故一定存在两点，其距离不大于 1/2



同理，以每边三等分点为小三角形顶点，可将 $\triangle ABC$ 等分为 9 等份，

证明过程同上

易知一定存在两点，其距离不大于 $\frac{1}{3}$

(2) 若同上等分，则小三角形边长为 $\frac{1}{n}$ 时，共可得到 n^2 个小三角形

取 $m_n = n^2+1$ 个点可使结论成立

5. (10 pt) $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 为实数且 $\sum_{i=1}^n a_i = A$, $\sum_{i=1}^n b_i = B$. 证明对于任意的整数 $k \in [n]$，存在 $i, j \in [n]$ 使得 $\sum_{\ell=0}^{k-1} a_{i+\ell} b_{j+\ell} \geq \frac{k}{n^2} AB$. ($[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$，$a_{i+\ell} = a_{i+\ell-n}$ 如果 $i+\ell > n$, $b_{j+\ell} = b_{j+\ell-n}$ 如果 $j+\ell > n$).

证明：已知 $\sum_{i=1}^n a_i = A$, $\sum_{i=1}^n b_i = B$ 则 $(\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n b_i) = AB$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^{k-1} a_{i+l} b_{j+l} = \sum_{l=0}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i+l} b_{j+l} \right) = \sum_{l=0}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^n a_{i+l}\right)\left(\sum_{j=1}^n b_{j+l}\right) = \sum_{l=0}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} AB = kAB$$

且 (i,j) 共有 n^2 种，据抽屉原理可得，$\exists (i,j)$ 使得 $\sum_{l=0}^{k-1} a_{i+l} b_{j+l} \geq \frac{kAB}{n^2}$，证毕

6. (15 pt) 构造 n^2 个数的序列，使得其中不存在长度为 $n+1$ 的递增子序列或递减子序列，并证明。

(就是构造 n 个 n 的思想)

将 1 到 n^2 按照如下 $n \times n$ 矩阵排列：

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2 \end{matrix}$$

则所得序列为 $n, n-1, \cdots, 1, 2n, 2n-1, \cdots, n+1, \cdots\cdots, n^2, n^2-1, \cdots, (n-1)n+1$

证明：取原矩阵中一行数字为一组，每组数字均为长度 n 的递减子序列

任何递增子序列都只能从每组中取一个数字，共有 n 组，

故递增子序列的长度最大为 n

而递减子序列只能在同组数字中取到

综上，所得序列不存在长度为 $n+1$ 的递增子序列或递减子序列，证毕。

7. (15 pt) 确定 n，使得在平面上任取 n 个点（这 n 个点无三点共线且互不重合），则其中存在 4 个点构成凸四边形.

（请让 n 尽可能的小，越小得分越高）.

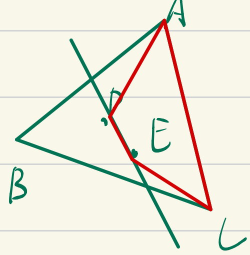
$n=5$。

证明：记将5个点可能构成凸包的情况分为三类：

① 5个点构成凸五边形，则其中任意4个点即可构成凸四边形

② 4个点构成凸四边形，另一点位于该四边形中间

③ 3个点构成三角形，另两点位于三角形中间



由于无三点共线，故连接DE会交三角形于两边，则可构成凸四边形

综上，证毕。

8. (20pt) 证明在平面上任取 $\binom{2k-4}{k-2}+1$ 个点（这些点无三点共线且互不重合），总能找到其中 k 个点构成凸 k 边形。

（你能找到比 $\binom{2k-4}{k-2}+1$ 更小的数使得上述成立么？）

证明：即要证取 $C_{2k-4}^{k-2}+1$ 个点，总能找到k个点构成凸k边形

建立平面直角坐标系，使得这些点的横坐标各不相同，

分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_{C_{2k-4}^{k-2}+1},y_{C_{2k-4}^{k-2}+1})$

记作点列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{C_{2k-4}^{k-2}+1}$，

令 $f(a_i,a_j)=\dfrac{y_j-y_i}{x_j-x_i}$，即过 a_i,a_j 两点的直线的斜率

若n个点，$f(a_1,a_2)<f(a_2,a_3)<f(a_3,a_4)<\cdots<f(a_{n-1},a_n)$

则这n个点构成长度为n的下凸链

同样 若 $f(a_1,a_2)>f(a_2,a_3)>f(a_3,a_4)>\cdots>f(a_{n-1},a_n)$

则这n个点构成长度为n的上凸链

若可构成上凸链/下凸链，则这n个点可构成凸n边形

则转为证明：取 $C_{p+q}^{p}+1$ 个点，存在 $p+2$ 个点的上凸链或 $q+2$ 的下凸点，

下用归纳证明法：

①基数这样取对吗 $p=1$ 时，取 $C_{1+q}^{1}+1=q+2$ 个点，存在3个点构成上凸链显然成立

若 $(p,q-1)$ 和 $(p-1,q)$ 时分别存在 $q+1$ 个点的下凸链和 $p+1$ 个点的上凸链，假设 (p,q) 时不存在 $p+1$ 个点的上凸链或 $q+1$ 个点的下凸链

下证明其矛盾：

从 $C_{p+q}^{p}+1$ 个点中，取出横坐标最小的 $C_{p+q-1}^{p-1}+1$ 个点，

则其中一定有 $p+1$ 个点的上凸链，选择最靠右的点的横坐标最小的一条链

记作 $x_{1,1}, x_{1,2}, \cdots, x_{1,p+1}$，将 $x_{1,p+1}$ 从整个点集中去掉，记为操作A

重复操作A，即可得到 $x_{2,1}, x_{2,2}, \cdots, x_{2,p+1}$，……，链 $x_{C_{p+q-1}^{p}+1,1}$，$x_{C_{p+q-1}^{p}+1,2}, \cdots, x_{C_{p+q-1}^{p}+1,p+1}$，并去掉 $x_{2,p+1}$，$x_{3,p+1}, \cdots, x_{C_{p+q-1}^{p}+1,p+1}$，

此时仅剩 $C_{p+q}^{p}+1-(C_{p+q-1}^{p}+1)=C_{p+q-1}^{p-1}$ 个点，无法进行操作A，

去掉的点构成 $C_{p+q-1}^{p}+1$ 个点的点列，即 $C_{p+q-1}^{q-1}+1$ 个点，

故这些点中必然存在 $q+1$ 个点构成下凸链，将其记作

$y_1, y_2, \cdots, y_{q+1}$

不妨设 $y_1=x_{i,p+1}$，则有序列

$x_{i,1}, x_{i,2}\cdots, x_{i,p}, x_{i,p+1}(y_1), y_2, y_3, \cdots, y_{q+1}$

由操作A知这 $p+q+1$ 个数各不相同，且前 $p+1$ 个数构成上凸链，后 $q+1$ 个数构成下凸链，若 $x_{i,p}, x_{i,p+1}, y_2$ 构成上凸链，则 $x_{i,1}, x_{i,2}, \cdots, x_{i,p}, x_{i,p+1}, y_2$ 构成长度为 $p+2$ 的上凸链，矛盾；若 $x_{i,p}, y_1, y_2$ 构成下凸链，则 $x_{i,p}, y_1, y_2, \cdots, y_{q+1}$ 构成长度为 $q+2$ 的下凸链，矛盾。综上，假设错误，则归纳成立。

原命题成立。