hw6

1. (10pt) 证明域不存在真理想。

等价于证明满射.

10

证明: 记域 G, I 是 G 的理想,

对 $\forall y \in G, x \in I$, 取 $a = yx^{-1} \in G$

则 $ax = yx^{-1} \cdot x = y$

即 G 中任意元素可由 ax 生成, 是满射,

即 $I = G$, 故域不存在真理想。

2. (10pt) 对于环 R，如果对任意 $a \in R$ 有 $a^2 = a$，证明 R 是交换环并且对任意 $a \in R$，有 $2a = 0$.

10

证明: 由题可知 $\begin{cases} (2a)^2 = (a+a)^2 = (a+a)(a+a) = 4a^2 = 4a \\ (2a)^2 = 2a \end{cases}$ $\Rightarrow 4a = 2a$ $\Rightarrow 2a = 0$

对 $\forall a, b \in R$, 又有 $\begin{cases} (ab)^2 = abab = ab \\ (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b = a + b \end{cases}$

则 $ab + ba = 0 \Rightarrow ab = -ba \Rightarrow ba = -ab$

即有 $ab = abab = a(ba)b = -aabb = -a^2b^2 = -ab = ba$

可证得 $ab = ba$

故 R 是交换环, 并对 $\forall a \in R$, 有 $2a = 0$

3. (15pt) 设 I_1 和 I_2 是环 R 的理想，令

15

$$I_1 + I_2 = \{r_1 + r_2 \mid r_1 \in I_1, r_2 \in I_2\},$$

$$I_1 \cdot I_2 = \{\sum_{i=1}^{k} r_{1i} \cdot r_{2i} \mid r_{1i} \in I_1, r_{2i} \in I_2 (1 \le i \le k), k \in \mathbb{N}+\}.$$

证明 $I_1 \cap I_2$, $I_1 + I_2$, $I_1 \cdot I_2$ 都是 R 的理想（注意环 R 未必交换）。

证明: ① 由 hw3 已证结论知:

$I_1 \cap I_2$ 是 R 的加法子群

且对 $\forall x \in I_1 \cap I_2$, $r \in R$, 满足 $rx \in I_1 \cap I_2$, $xr \in I_1 \cap I_2$ 故 $I_1 \cap I_2$ 是 R 的理想

② $\forall x_1 = r_{11} + r_{21}, \; x_2 = r_{12} + r_{22} \in I_1 + I_2$

有 $x_1 + x_2 = (r_{11} + r_{12}) + (r_{21} + r_{22}) = r_1' + r_2' \in I_1 + I_2$

且 $r_1 + r_2$ 的加法逆元为 $r_1^{-1} + r_2^{-1} \in I_1 + I_2$

结合律与单位元同样易于验证

故 $I_1 + I_2$ 是 R 的加法子群

对 $\forall x = r_1 + r_2 \in I, \; r \in R$，有 $rx = r(r_1 + r_2) = rr_1 + rr_2 \in R$

$xr = (r_1 + r_2)r = r_1 r + r_2 r \in R$.

则 $I_1 + I_2$ 是 R 的理想

③ $I_1 \cdot I_2$, $\forall x, y \in I_1 \cdot I_2$ 有 $\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i, & a \in I_1, b \in I_2 \\ y = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i, & c \in I_1, d \in I_2 \end{cases}$

$\Rightarrow x - y = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} (-c_i) d_i = \sum_{i=1}^{m+n} p_i q_i \in I_1 \cdot I_2$

又有 $\forall r \in R, x \in I_1 \cdot I_2$ 有 $\begin{cases} r \cdot x = r \sum_{i=1}^{k} a_i b_i = \sum_{i=1}^{k} (r a_i) b_i \in I_1 \cdot I_2 \\ x \cdot r = (\sum_{i=1}^{k} a_i b_i) r = \sum_{i=1}^{k} a_i (b_i r) \in I_1 \cdot I_2 \end{cases}$

故 $I_1 \cdot I_2$ 是 R 的理想

4. (15pt) 考虑模 6 的剩余系所构成的环 $\langle \mathbb{Z}_6, +, \cdot \rangle$，在其中找出一个元素，它是素元但不是不可约元。

5

答：2.

$\because$ 2 是素数 $\therefore$ 若 $2 \mid ab$，则必有 $2 \mid a$ 或 $2 \mid b$

但 $2 = 2 \times 4 \pmod 6$，其中 2, 4 不是单位，故 2 不是不可约元

5. (15pt) 证明：对于交换环 R，若 R 是整环，则 R 中素元必是不可约元。

15

证明：反证：设 $p = ab$，且 $a \cdot b$ 均不为单位，$p \in R$

已知 p 是素元，则对 $p \mid ab$，有 $p \mid a$ 或 $p \mid b$，不妨设 $p \mid a$，

则 $\exists k \in R$, s.t. $a = kp$，故

$$p = ab = kpb = pkb \Rightarrow p(kb-1) = 0 \quad (*)$$

$\therefore$ 在 $(*)$ 式两边同时左乘 p^{-1} 得

$kb - 1 = 0$ 因为 R 无零因子 故 $kb = 1$

则 b 为单位，矛盾，假设不成立

故证毕.

6. (15pt) 考虑环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. 证明 3 是其中的不可约元但不是素元。

15

证明：取范数 $N(a+b\sqrt{-5}) = a^2+5b^2$，$N(3) = 9$

设 $3 = xy$，则 $N(x)N(y) = 9$

满足的正整数组只有 $(N(x), N(y)) = (1,9)$ 或 $(9,1)$

$$a_x^2 + 5b_x^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1, b = 0，故 x = \pm 1 是单位$$

故3是不可约元

又有 $(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}) = 6 = 2 \times 3$

故 $3 \mid (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$

但 $3 \nmid 1+\sqrt{-5}$，$3 \nmid 1-\sqrt{-5}$

故3不是素元

7. (20pt) 设 R 为含幺交换整环，对于任意 $a \in R$ 且 $a \neq 0$，令 (a) 表示由 a 生成的理想。证明：

(a) a 是素元当且仅当 (a) 是素理想。

(b) 若 R 是主理想整环，则 a 是不可约元当且仅当 (a) 是极大理想。

(c) 若 R 是主理想整环，则 R 中的极大理想必是素理想，进而 R 中的不可约元必是素元。

17

解：(a) a是素元：$a|xy \Rightarrow a|x$ 或 $a|y$

$\langle a\rangle$是素理想，$xy \in \langle a\rangle$ 则 $x \in \langle a\rangle$ 或 $y \in \langle a\rangle$

$\Rightarrow$：$xy \in \langle a\rangle$，则 $\exists r \in R$, s.t. $ar = xy$，即 $a|xy$

由素元定义知 $a|x$ 或 $a|y$

即 $x \in \langle a\rangle$ 或 $y \in \langle a\rangle$

$\Leftarrow$ 设a非素元，且 $\exists\, xy$ s.t. $a|xy$ 但 $a \nmid x$ 且 $a \nmid y$ 时，

$xy \in \langle a\rangle$ 但 $x \notin \langle a\rangle$ 且 $y \notin \langle a\rangle$

则$\langle a\rangle$不是素理想，矛盾。

证毕

(b) $\Rightarrow$：a是不可约元，设$\langle a\rangle$不是极大理想，则 $\exists\, b$, s.t. $\langle a\rangle \subsetneq \langle b\rangle \subsetneq R$

则 $a \in \langle b\rangle \Rightarrow \exists r \in R$ s.t. $a = br$ $\begin{cases} b\text{为单位}, & \langle b\rangle = R \text{ 矛盾} \\ r\text{为单位} & \langle b\rangle = \langle a\rangle \text{ 矛盾} \end{cases}$

故$\Rightarrow$成立

$\Leftarrow$ 反证：设 $a = bc$ 且b, c均不为单位

那么有$\langle a\rangle \subsetneq \langle b\rangle \subsetneq R$，与$\langle a\rangle$是极大理想矛盾，

故$\Leftarrow$成立

c) 设极大理想I不是素理想，则 $\exists\, ab \in I$ 但 $a, b \notin I$

此时 $I + aR$ 是R的理想

$a \notin I$ 故 $I \subsetneq I + aR$，又$\because I$是极大理想 $\Rightarrow \boxed{I + aR = R \text{ 有 } 1 \in aR}$，故 $aR = R \Rightarrow$

a可逆 同理b可逆 由 $ab \in R \Rightarrow a^{-1}ab = b \in I$ 矛盾

故极大理想一定是素理想

8. (20pt) 整环 R 被称作欧式整环：如果存在一个从 R 中元素到非负整数集 $\mathbb{Z}$ 的映射 ϕ，使得

(a) $\phi(a)=0$ 当且仅当 $a=0$。

(b) 对于任意 $a,b\in R$ 且 $b\neq 0$，均有 $q,r\in R$ 使得 $a=bq+r$，并且 $\phi(r)<\phi(b)$.

请给出一个欧式整环的例子，并证明欧式整环一定是主理想环。

① 整数环 $\langle Z,+,\times\rangle$ $\phi: Z\to N$: $\phi(a)=|a|$

由整数带余除法，Z是欧式整环

② 对欧式整环E：

对其中一个理想I，取其中ϕ值最小的元素b

由$b\in I$，$\langle b\rangle\subset I$

$\forall a\in I$，由E定义，$\exists q,r\in E$, s.t. $a=qb+r$, $\phi(r)<\phi(b)$

由$\phi(b)$定义 $\phi(r)=0\Rightarrow r=0$

则 $b|a\Rightarrow a\in\langle b\rangle$

故 $\langle b\rangle=I$ 即任一理想均为主理想 $\Rightarrow E$为PID

100/100