1. (25pt) 令 $F=\{f:[m]\to\{x_1,x_2\dots,x_k\}\}$ 为所有 $[m]$ 到 $\{x_1,x_2\dots,x_k\}$ 的映射的集合，对于 $f\in F$，令 $w(f)=\prod_{i\in[m]}f(i)$。令 $\sigma$ 为 $[m]$ 到 $[m]$ 的一个置换，且 $\sigma$ 可表示为如下轮换形式

$$(a_1,a_2,\dots,a_{i_1})(b_1,b_2,\dots,b_{i_2})\dots(c_1,c_2,\dots,c_{i_t}),i_1+i_2+\dots+i_t=m.$$

即 $\sigma(a_1)=a_2$, $\sigma(a_2)=a_3,\dots$, $\sigma(a_{i_1})=a_1$, $\sigma(b_1)=b_2$, $\sigma(b_2)=b_3,\dots$, $\sigma(b_{i_2})=b_1$, $\dots,\sigma(c_1)=c_2$, $\sigma(c_2)=c_3,\dots$, $\sigma(c_{i_t})=c_1$.

(a) 证明，如果 $g\simeq_S f$，则 $w(g)=w(f)$。解释 $\sum_{f\in F}\frac{w(f)}{|O_f|}$ 所表示的组合含义。

(a) 证明: $\because g\simeq_S f$, 则 $\exists\sigma\in S$, s.t. $f(d)=g(\sigma^{-1}(d))$ 即 $g(d)=f(\sigma(d))$

$w(g)=\prod_{i\in[m]}g(i)=\prod_{i\in[m]}f(\sigma(i))=\prod_{j\in[m]}f(j)=w(f)$ (由 $\sigma$ 是 $[m]$ 到 $[m]$ 的置换可得)

$\because$ 当 $g\simeq_S f$ 时, $O_f=O_g$ 且 $w(f)=w(g)$, 记等价类的权值 $w$ 为等价类中映射的权值 $w(f)$

$\sum_{f\in F}\frac{w(f)}{|O_f|}$ 表示 $F$ 在 $S$ 作用下, 所有等价类的权值之和

(b) 对于 $C_\sigma$，令 $w(C_\sigma)=\sum_{f\in C_\sigma}w(f)$，求 $w(C_\sigma)$。(设 $\sigma$ 可表示为如下轮换形式

$$(a_1,a_2,\dots,a_{i_1})(b_1,b_2,\dots,b_{i_2})\dots(c_1,c_2,\dots,c_{i_t}),i_1+i_2+\dots+i_t=m.)$$

$C_\sigma=\{f\in F\mid\sigma\cdot f=f\}$

(b) 解: $f\in C_\sigma$, 则 $\sigma(f)=f$, 即对 $\forall d\in[m]$, $f(d)=f(\sigma(d))$

由 $\sigma$ 的轮换形式定义可知

$f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_{i_1})$

$f(b_1)=f(b_2)=\cdots=f(b_{i_2})$

$\vdots$

$f(c_1)=f(c_2)=\cdots=f(c_{i_t})$

对于 $a$ 轮换, 可以映射到 $X_1$ 到 $X_k$ 中任意值

故 $w_a=X_1^{i_1}+X_2^{i_1}+\cdots+X_k^{i_1}$

其他轮换同理,

由于各轮换独立, 由乘法原理可得

$w(C_\sigma)=\prod_{j=1}^{t}(X_1^{i_j}+X_2^{i_j}+\cdots+X_k^{i_j})$

(c) 证明 $\sum_{f\in F}|Z_f|\cdot w(f)=\sum_{\sigma\in S}w(C_\sigma)$。

证明: $Z_f=\{\sigma\mid\sigma\cdot f=f\}$

| | $f_1$ | $f_2$ | ...... | $f$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_1$ | $h_{11}$ | $h_{12}$ | $\cdots$ | $h_{1k}$ | $B_1$ |
| $\sigma_2$ | $h_{21}$ | $h_{22}$ | $\cdots$ | $h_{2k}$ | $B_2$ |
| $\sigma_3$ | $h_{31}$ | $h_{32}$ | $\cdots$ | $h_{3k}$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\sigma_m$ | $h_{m1}$ | $h_{m2}$ | $\cdots$ | $h_{mk}$ | $B_m$ |
| | $A_1$ | $A_2$ | $\cdots$ | $A_k$ | |

列如左图所示表格, 其中第 $i$ 行第 $j$ 列的元素 $h_{ij}$

若满足 $\sigma_i\cdot f_j=f_j$, 则 $h_{ij}=w(f_j)$

否则等于 $h_{ij}=0$

对每一列求和 $A_j=|Z_f|\cdot w(f_j)$

对每一行求和 $B_i=\sum_{f\in C_\sigma}w(f)=w(C_\sigma)$

由总的求和值相等 $\sum_{j=1}^{k}A_j=\sum_{i=1}^{m}B_i$ 得

$\sum_{f\in F}|Z_f|\cdot w(f)=\sum_{\sigma\in S}w(C_\sigma)$

(d) 考虑多项式 $\frac{\sum_{\sigma\in S} w(C_\sigma)}{|S|}$,解释其含义; 考虑该多项式中 $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_k^{r_k}$, $(r_1+r_2+\ldots+r_k=m)$ 这一项，解释该项对应系数的含义。

解: 由(c)知 $\sum_{f\in F}|Z_f|\cdot w(f)=\sum_{\sigma\in S} w(C_\sigma)$

又由轨道-稳定化子定理 $|Z_f|=\frac{|S|}{|O_f|}$ 代入上式得

$$\sum_{f\in F}\frac{|S|}{|O_f|}\cdot w(f)=\sum_{\sigma\in S}w(C_\sigma)$$

两边同时除以 $|S|$ 可得

$$\sum_{f\in F}\frac{w(f)}{|O_f|}=\frac{\sum_{\sigma\in S}w(C_\sigma)}{|S|}$$

则知右式的含义为，集合F在置换群S作用下，所有等价类的权值之和

该项系数表示，选择使用 $x_1$ 颜色 $r_1$ 次 $x_2$ 颜色 $r_2$ 次 … $x_k$ 颜色 $r_k$ 次，本质不同的染色方案数

也即 $w(f)=x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k}$ 的映射f所形成的不同轨道的个数.

7

2. (30pt) 将一个正四边形的四个顶点用 $n$ 种颜色染色。问下列情况下各有多少种不同的染色方案。

(a) 至多使用了三种颜色。

(b) 经旋转或翻转能重合的方案视为相同。

(c) 经中心对称（旋转 180 度）或沿对角线对称后能重合的方案视为相同。

!别忘了恒等变换

(d) 经中心对称（旋转 180 度）或沿对角线对称后能重合的方案视为相同，且至多使用了三种颜色。

解: (a) 选用一种颜色 $n$.

两种颜色 $C_n^2(4+C_4^2+4)=7n(n-1)=14\binom{n}{2}$

三种颜色 $C_n^3(3^4-3\times2^4+3)=36\times\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=6n(n-1)(n-2)=36\binom{n}{3}$

则总数为 $n+14\binom{n}{2}+36\binom{n}{3}$

(b) 置换群 $G=\{(1)(2)(3)(4),\ (1,4,3,2)\ (1,3)(2,4),\ (1,2,3,4),\ (1,2)(3,4),\ (1,4)(2,3),\ (1,3)(2)(4),\ (2,4)(1)(3)\}$

第 i 种颜色对应权值 $x_i$

$$\frac{\sum_{\sigma\in G}w(C_\sigma)}{|S|}=\frac{1}{8}\left[(x_1+x_2+\cdots+x_n)^4+2(x_1^4+x_2^4+\cdots+x_n^4)+3(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2+2(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\right]$$

将 $x_i=1$ 代入得方案数为 $\frac{1}{6}(n^4+2n^3+3n^2+2n)$

(c) 置换群 $G''=\{(1)(2)(3)(4),\ (1,3)(2,4),\ (1,3)(2)(4),\ (2,4)(1)(3)\}$ 方案数 $\frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)$

(d) 由于Polya计数无法去重，故无法直接使用，仍然分类讨论

① 恒等变换，由(a)知为 $n+14\binom{n}{2}+36\binom{n}{3}$ ② 旋转 $180^\circ$ $n+2\binom{n}{2}$ ③ 对角线反射 $n+2\times3\binom{n}{2}+6\binom{n}{3}$ 出现两次

由Burnside平均可得

总数为 $\frac{1}{4}\left(4n+28\binom{n}{2}+48\binom{n}{3}\right)=n+7\binom{n}{2}+12\binom{n}{3}$

3. (20pt) 用 $n$ 颗宝石编成一串项链，其中每颗宝石可以用红宝石或蓝宝石，一共有多少种不同的编织方法?

18

解: 项链的对称包括 $n$ 种旋转和 $n$ 种翻转

$|G| = 2n$

旋转 $k$ 格 $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 产生 $\gcd(n,k)$ 个长度为 $n/\gcd(n,k)$ 的循环

在循环指数中贡献为 $a_{n/\gcd(n,k)}^{\gcd(n,k)}$

把所有旋转加起来 $\sum_{k=0}^{n-1} a_{n/\gcd(n,k)}^{\gcd(n,k)}$

翻转部分: $n$ 为奇数

对应项 $a_1 a_2^{(n-1)/2}$

循环指数 $Z(G) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{n/\gcd(n,k)}^{\gcd(n,k)} + n a_1 a_2^{(n-1)/2}\right)$

$n$ 为偶数

轴过两宝石之间 $a_2^{n/2}$

轴过两宝石 $a_1^2 a_2^{(n-2)/2}$

循环指数 $Z(G) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{n/\gcd(n,k)}^{\gcd(n,k)} + \frac{n}{2} a_1^2 a_2^{(n-2)/2} + \frac{n}{2} a_2^{n/2}\right)$

颜色代入 $a_k = r^k + b^k \xrightarrow{r=1,b=1} 2$

则 $n$ 为奇数: 方案数为 $\frac{1}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^{\gcd(n,k)} + n\cdot 2^{\frac{n+1}{2}}\right)$

$n$ 为偶数 方案数为 $\frac{1}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^{\gcd(n,k)} + \frac{n}{2} 2^{(n+2)/2} + \frac{n}{2}\cdot 2^{n/2}\right)$

4. (15pt) 求解 $\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})$, $\mu$ 为数论上的莫比乌斯函数。

$$\mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } d = 1 \\ (-1)^k & \text{if } d = p_1p_2\dots p_k \\ 0 & \text{if } d = p_1^{r_1}p_2^{r_2}\dots p_k^{r_k}, \exists p_i > 1 \end{cases}$$

15

解: ① $n=1$ $\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d}) = \mu(1) = 1$

② $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n}$

$\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})$

$= \mu(1) + \sum_{i=1}^{r_1} \mu\left(\frac{n}{p_1^{r_1-i} p_2^{r_2}\cdots p_n^{r_n}}\right) + \sum_{i=1}^{r_2} \mu\left(\frac{n}{p_1^{r_1} p_2^{r_2-i}\cdots p_n^{r_n}}\right) + \cdots + \sum_{i=1}^{r_1}\mu\left(\frac{n}{p_1^{i}}\right) + \cdots + \sum_{i=1}^{r_n}\mu\left(\frac{n}{p_n^{i}}\right) + \cdots + \mu(n)$

$= \sum_{d|n}\mu(d)$

$= 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k}(-1)^k$

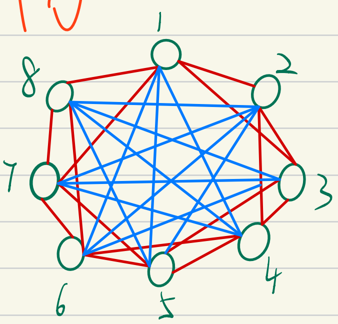
$= (1-1)^k$

$= 0$

则 $\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d}) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n>1 \end{cases}$

5. (10pt) 给出 $K_8$ 的一种红蓝染色方案使得其中既没有红色 $K_4$ 也没有蓝色 $K_3$。

10




取八个点编号如左图所示

定义距离 $d = |i-j| \bmod 8$

则将所有 $d=1,2$ 的边染成红色

剩余边染成蓝色

即为所求的一种方案

6. (20pt) 记 $r(a,b)$ 为最小的正整数 $n$（如果这样的正整数存在的话）使得对 $K_n$ 进行红蓝染色则其中或者有红色 $K_a$ 或者有蓝色 $K_b$。

20

证明 $r(a,b) \le r(a-1,b) + r(a,b-1)$，

证明 $r(a,b) \le \binom{a+b-2}{a-1}$。

① 证明：取 $n = r(a-1,b) + r(a,b-1)$ 个顶点的完全图 $K_n$，并对其边进行红蓝任意染色

下证该图中或者有红色 $K_a$ 或者有蓝色 $K_b$

若从n中取 $r(a-1,b)$ 个顶点有蓝色 $K_b$ 或取 $r(a,b-1)$ 个顶点有红色 $K_a$，则成立

否则：

在 $K_n$ 中任取一个顶点 $v$，除去 $v$ 外还剩 $n-1 = r(a-1,b) + r(a,b-1) - 1$ 个顶点

将其按照与 $v$ 连接的边的颜色分为 $V_{red}$，$V_{blue}$

则必然满足以下两种情况之一

A $|V_{red}| \ge r(a-1,b)$

B $|V_{blue}| \ge r(a,b-1)$

对于A 由于 $|V_{red}| \ge r(a-1,b)$ 故 $V_{red}$ 中的顶点构成的完全图中有 $K_{a-1}$

加入顶点 $v$，由已知可得 该完全图中有 $K_a$

同理可得 B情况下有 $K_b$

则证毕

② 数学归纳法：$a=2$ 时，$r(2,b) = 1$，$\binom{2+b-2}{2-1} = b$ 不等式成立

$b=2$ 时 $r(a,2) = a$，$\binom{a+2-2}{2-1} = a$ 不等式成立

归纳假设：对所有满足 $i+j < a+b$ 的正整数对 $(i,j)$，不等式 $r(i,j) \le \binom{i+j-2}{i-1}$ 均成立

由①得 $r(a,b) \le r(a-1,b) + r(a,b-1) \le \binom{(a-1)+b-2}{(a-1)-1} + \binom{a+(b-1)-2}{a-1} = \binom{a+b-3}{a-2} + \binom{a+b-3}{a-1} = \binom{a+b-2}{a-1}$

证毕

100/100