

离散数学（2025 秋）作业八

截止日期 1 月 16 日

1. (25pt) 两个矩阵 $A_{m \times n}$ 和 $B_{m \times n}$ 被称作置换相抵是指存在置换矩阵 $P_{m \times m}$ 和 $Q_{n \times n}$ 使得 $A_{m \times n} = P_{m \times m} B_{m \times n} Q_{n \times n}$. 设 $A_{m \times n}$ 为图 $G = (V, E)$ 的关联矩阵, 证明:
 - (a) 两个图同构则它们的关联矩阵是置换相抵的。
 - (b) $A_{m \times n}$ 置换相抵于 $\begin{pmatrix} B_{p \times q} & O_{p \times (n-q)} \\ O_{(m-p) \times q} & C_{(m-p) \times (n-q)} \end{pmatrix}$ 等价于 G 不连通。
 - (c) $\text{rank}(A_{m \times n}) \leq |V| - C$, 其中 C 是 G 中连通分支的个数。
2. (15pt) 设 G 是简单连通平面图, 证明 G 中存在一个点 v 满足其度数 $\deg(v) \leq 5$.
3. (20pt) 设 $G = (V, E)$ 是简单连通图,
 - (a) 证明 G 中 Cycle 的数量为 1 等价于 $|V| = |E|$;
 - (b) 若 $|E| - |V| = k \geq 1$, 证明 G 中存在两点 x, y 使得他们之间至少有 $k + 1$ 条 Path.
4. (25pt) 设图 $G = (V, E)$ 是树, 且 G 含有至少一条边, 图 G 中一条 path 的长度是指这条 path 包含的边的个数. 证明:
 - (a) G 中最长的 path 的两个端点的度数都为 1.
 - (b) G 中所有最长的 path 至少包含一个公共顶点。
 - (c) 设 G 中最长 path 的长度为 $2k - 3$ ($k \geq 3$), 则 G 中含有至少 $|V| - k$ 条长度不小于 k 的 path.
5. (20pt) 考虑连通有向图 $D = (V, E)$.
 - (a) 证明若对于任意 $x \in V$, 都有 $|\deg_D^+(x) - \deg_D^-(x)| \leq 1$, 且任何边 $a \in E$ 均包含在奇数个有向 cycle 中, 则 D 是 Euler 图。

(b) 说明上述命题的逆命题不成立。

6. (15pt) 设图 $G = (V, E)$ 是简单平面图且 $|V| > 2$, 证明 $|E| \leq 3|V| - 6$.