15

1. (10pt) 用 m 个**不同**的红宝石和 n 个**不同**的蓝宝石编成一串项链（$m > n$），要求任意两颗蓝宝石不能相邻，有多少种不同的编织方法？

(10pt) 用 m 个**相同**的红宝石和 n 个**相同**的蓝宝石编成一串项链（$m > n$），要求任意两颗蓝宝石不能相邻，有多少种不同的编织方法？（此问较困难，可只考虑 $m+n$ 为质数的情况。）

解：① 先排红宝石　有 $m!/m = (m-1)!$

再插入蓝宝石　有 $\binom{m}{n} \cdot n! = \frac{m!}{(m-n)!}$

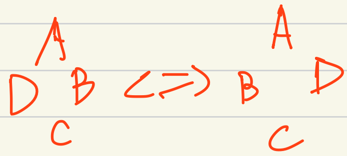
乘法原理　$\frac{(m-1)!\, m!}{(m-n)!}$ 种排法

② 考虑线排列 $\binom{m+1}{n}$

首尾都是蓝宝石 $\binom{m-1}{n-2}$

总的圆排列去重 $\frac{\binom{m+1}{n} - \binom{m-1}{n-2}}{m+n}$ 种　（当 $m+n$ 为质数时）

考虑翻转



10

2. (10pt) 考虑一个凸 n 边形，其任意三条对角线不共点，求全部的对角线之间互相分割为多少线段。

解：问题拆解：设第 i 条对角线上的交点数为 k_i，

其中凸 n 边形共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线，有 $\binom{n}{4}$ 个对角线交点

线段总数 $m = \sum_{i=1}^{\frac{n(n-3)}{2}} 1 + k_i = \frac{n(n-3)}{2} + 2 \cdot \binom{n}{4}$

15

3. (15pt) 考虑方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 17$，该方程满足 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 2$ 的非负整数解有多少个？该方程满足 $x_1 < x_2 < x_3$ 的非负整数解又有多少个？

解：① 设性质 P_1, P_2 分别表示 $0 \le x_2 < 1$, $0 \le x_3 < 2$，S 表示 x_1, x_2, x_3 均非负的整数解的集合

则 $|\bar{A_1} \cap \bar{A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$

其中 $|S| = 18 + 17 + \cdots + 1 = \frac{(18+1)\times 18}{2} = 171$

$|A_1| = 18$　$|A_2| = 35$　$|A_1 \cap A_2| = 2$

则 $|\bar{A_1} \cap \bar{A_2}| = 171 - 18 - 35 + 2 = 120$

② 直接采用计数法

$x_1 = 0$　8 个

$x_1 = 1$　6 个

$x_1 = 2$　5 个

$x_1 = 3$　3 个

$x_1 = 4$　2 个

共有 24 个 满足 $x_1 < x_2 < x_3$ 的非负整数解

4. (10pt) 考虑方程 $x_1+x_2+\ldots+x_n=m$，其中 m,n 均为偶数且 $m>n$：

(a) (5pt) 求该方程非负偶数解（x_i 全为偶数）的个数。

(b) (5pt) 求该方程非负奇数解（x_i 全为奇数）的个数。

隔板法解决非负整数解问题

(a) $\frac{m}{2}$ 个1和 $n-1$ 个隔板

解：(a) 方程左右两边同时除以2，得到：

$k_1+k_2+\cdots+k_n=m/2$，其中 $k_i=x_i/2$

则原问题转化为

上述方程的非负整数解的个数

为 $\binom{\frac{m}{2}+n-1}{n-1}$

(b) 令 $x_i=2k_i+1$

则原方程等价为

$2(k_1+k_2+\cdots+k_n)=m-n$

即 $k_1+k_2+\cdots+k_n=\frac{m-n}{2}$ $\quad\frac{m+n}{2}$

故答案为 $\binom{\frac{m-n}{2}+n-1}{n-1}=\binom{\frac{m+n}{2}-1}{n-1}$

5. (20pt) 考虑 n 对夫妻排成一列：

20

(a) (10pt) 其中每对夫妻两人之间不相邻的排列方法有多少种？

(b) (10pt) 其中男女相间且每对夫妻两人之间不相邻的排列方法有多少种？

二重错排问题

(a) 容斥原理

记 P_i 为第 i 对夫妻两人相邻

则 $|S|=(2n)!$ $\quad |A_i|=(2n-1)!\cdot 2\ (1\le i\le n)$ $\quad |A_i\cap A_j|=(2n-2)!\cdot 2^2\ (1\le i,j\le n)$

故知 $|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n|=(2n)!-n\cdot(2n-1)!\cdot 2+\binom{n}{2}\cdot(2n-2)!\cdot 2^2+\cdots+(-1)^m\binom{n}{m}(2n-m)!\cdot 2^m+\cdots+(-1)^n n!\cdot 2^n$

$=(2n)!+\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}(2n-m)!\cdot 2^m$

$=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}(2n-m)!\cdot 2^m$

(b) 以 M 表示男士，W 表示女士，则分为 M 开头和 W 开头两种模式且二者具有对称性

下只考虑 W 打头情况：

① 对女士作全排列 $n!$

② 取定女士 $W_1, W_2, \ldots, W_n$

形成 n 个空位，记 W_i 后的空位为 i

则第 i 位上禁止出现 M_i 和 M_{i+1}，为简化，记作 (i,i) $(i,i+1)$

则可映射到棋盘

	1	2	3	⋯	n
1	X	X			
2		X	X		
3			⋱		
⋮				⋱	
n					X

故由容斥原理可知

男士排列数为

$n!+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k r_k(n-k)!$

其中 r_k 等价于从 $(1,1)(1,2)(2,2)\ldots(n,n)$ 中取 k 个不相邻的数 $r_k=\binom{2n-1-k+1}{k}=\binom{2n-k}{k}$

③ 综上可得

总数为

$2\cdot n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}(n-k)!$

6. (10pt) 使用组合含义证明恒等式 $\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k} = \binom{2n-k+1}{k} - \binom{2n-k-1}{k-2}$.

10

(考虑如下问题：$2n$ 个人围坐一桌，从中选取 k 个人，要求其中任意两人位置不相邻，有多少种不同的选取方法。)

证明：以题设中问题为例，

法1：先从2n个人中选k个人 $\binom{2n}{k}$

再对未选中的(2n-k)个人圆排列 $(2n-k-1)!$

再对剩余k人插空排 $\binom{2n-k}{k}\cdot k!$

利用乘法原理可得

共有 $\frac{(2n)!}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$ 种选取方法

法2：先从2n个人中选k个人 $\binom{2n}{k}$

再对未选中的2n-k个人线排列 $(2n-k)!$

再按线排列对k人插空排，减去特殊情况即首尾都有

$\left[\binom{2n-k+1}{k}\cdot k! - \binom{2n-k-1}{k-2}\cdot k!\right]$

再除以2n，圆排列去重

故有 $\binom{2n}{k}\cdot(2n-k)!\cdot\left[\binom{2n-k+1}{k}-\binom{2n-k-1}{k-2}\right]\cdot k!/2n$

$=(2n-1)!\left[\binom{2n-k+1}{k}-\binom{2n-k-1}{k-2}\right]$

两种方法所得结果相等，

$$\frac{(2n)!}{2n-k}\binom{2n-k}{k} = (2n-1)!\left[\binom{2n-k+1}{k}-\binom{2n-k-1}{k-2}\right],$$

约简即得：

$$\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}=\binom{2n-k+1}{k}-\binom{2n-k-1}{k-2}$$

7. (15pt) f 和 g 为定义在非负整数上的函数，已知对任意 $n \geq 0$ 有

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g(i),$$

15

证明对任意 $n \geq 0$，$g(n)$ 可唯一的表示为

$$g(n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(i).$$

二项式反演，

与莫比乌斯反演类似，

都是由求和定义的函数还原出原始组成部分

证明方法：代入验证法

将已知的f(i)表达式代入，利用组合恒等式证明

解：将 $f(i)=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}g(k)$ 代入得

右式 $=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}g(k)\right)$

$=\sum_{k=0}^{n}g(k)\sum_{i=k}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\binom{i}{k}$

$=\sum_{k=0}^{n}g(k)\binom{n}{k}\sum_{i=k}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n-k}{i-k}$

$=\sum_{k=0}^{n}g(k)\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}(-1)^{n-i-k}$

$\overset{n=k}{=}\sum_{k=0}^{n}g(k)\binom{n}{k} = g(n)$ =左式

因为上述证明处处可逆，故该表示也是唯一的

其中作了求和次序交换 $\sum_{i=0}\sum_{k=0}^{i}(Term_{i,j}) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}(Term_{i,j})$

其中用到组合恒等式 $\binom{n}{i}\binom{i}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$

其中 $\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}(-1)^{n-i-k}=(1-1)^{n-k}=\begin{cases}1 & n=k\\ 0 & n>k\end{cases}$

8. (15pt) S 为一个 n 元集合，f 和 g 为定义在 S 的子集上的函数。

8

已知对于 S 的任意**偶数**元子集 X, 都有

$$f(X) = \sum_{Y\subseteq X, |Y| \text{ is even}} g(Y),$$

且对于 S 的任意**奇数**元子集 X, 都有

$$f(X) = \sum_{Y\subseteq X, |Y| \text{ is even}} -g(Y).$$

对于任意**奇数**元子集 $X \subseteq S$，求解 $\sum_{Y\subseteq X} f(Y)$ 并给出证明。

集合上的反演

$$\sum_{Y\subseteq X} f(Y) = \sum_{\substack{Y\subseteq X\\ |Y| \text{ is even}}} f(Y) + \sum_{\substack{Y\subseteq X\\ |Y| \text{ is odd}}} f(Y)$$

$$= \sum_{\substack{Y\subseteq X\\ |Y| \text{ is even}}} \left(\sum_{Z\subseteq Y, |Z| \text{ is even}} g(Z) \right) + \sum_{\substack{Y\subseteq X\\ |Y| \text{ is odd}}} \left(\sum_{\substack{Z\subseteq Y\\ |Z| \text{ is even}}} -g(Z) \right)$$

$$= \sum_{\substack{Z\subseteq X\\ |Z| \text{ is even}}} g(Z) \boxed{(-1+1)^{|X|-|Z|}}$$

$$= 0$$

$$\sum_{\substack{Z\subseteq X\\ 2 \mid |Z|}} g(Z) \left(\sum_{\substack{Z\subseteq Y\subseteq X\\ 2\mid |Y|}} 1 - \sum_{\substack{Z\subseteq Y\subseteq X\\ 2\nmid |Y|}} 1 \right)$$

100/100