零．值得关注的计算错误

1.要特别注意符号哦

例 15 设函数 $z=(x^2-y^2)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 解法 1 引入中间变量 $u=x^2-y^2$, $v=\frac{x}{y}$, 则 $z=u\mathrm{e}^v$. 由复合函数的求导法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2x\mathrm{e}^v+\frac{u}{y}\mathrm{e}^v=\frac{2xy+x^2-y^2}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{2y^3+ux}{y^2}\mathrm{e}^v=-\frac{2y^3+x^3-xy^2}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}.$$

解法 2 由复合函数的求导法则, 直接求偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(2x+\frac{x^2-y^2}{y}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=\frac{2xy+x^2-y^2}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\left(2y+\frac{(x^2-y^2)x}{y^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=-\frac{2y^3+x^3-xy^2}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}.$$

2.看清楚是几阶导数，对于分数类的求导最好手动分离算一遍 最忌讳大眼瞪小眼

例 16 设函数 $z=\frac{1}{x}f(xy)+yg(x+y)$, 其中 f, g 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+yg'(x+y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(xy)+g(x+y)+yg'(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2}{x^3}f(xy)-\frac{2y}{x^2}f'(xy)+\frac{y^2}{x}f''(xy)+yg''(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xf''(xy)+2g'(x+y)+yg''(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=yf''(xy)+g'(x+y)+yg''(x+y).$$

3.注意括号外的系数 最好能把系数写到前面去，不至于漏项

例 17 设函数 $z=f(x^2-y,g(xy))$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 二阶可导, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解 所给函数是含有两个中间变量和两个自变量 x, y 的复合函数, 由复合函数的求导法则得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}&=2xf_1'+yf_2'g',\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}&=\frac{\partial}{\partial y}(2xf_1'+yf_2'g')\\
&=2x(-f_{11}''+xg'f_{12}'')+g'f_2'+xyg''f_2'+yg'(-f_{21}''+xg'f_{22}'')\\
&=(g'+xyg'')f_2'-2xf_{11}''+(2x^2-y)g'f_{12}''+xy(g')^2f_{22}''.
\end{aligned}$$

4.分数是个大坑啊

例 18 设函数 $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\mathrm{d}u$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$.

解 由一阶微分形式不变性及全微分的四则运算法则, 得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u&=f_1'\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)+f_2'\mathrm{d}\left(\frac{y}{z}\right)=f_1'\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+f_2'\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2}\\
&=\frac{1}{y}f_1'\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{z}f_2'-\frac{x}{y^2}f_1'\right)\mathrm{d}y-\frac{y}{z^2}f_2'\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

所以有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}f_2'-\frac{x}{y^2}f_1',$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)&=-\frac{1}{z^2}f_2'+\frac{1}{z}f_{22}''\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{z}\right)-\frac{x}{y^2}f_{12}''\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{z}\right)\\
&=\frac{x}{yz^2}f_{12}''-\frac{y}{z^3}f_{22}''-\frac{1}{z^2}f_2'.
\end{aligned}$$

5.含三角函数类求驻点

(2) 由驻点方程

$$\begin{cases} z'_x = -(1+e^y)\sin x = 0, \\ z'_y = e^y(\cos x - 1 - y) = 0, \end{cases}$$

解得驻点

$$(x,y) = (2n\pi, 0) \quad \text{或} \quad (x,y) = ((2n+1)\pi, -2),\ n \in \mathbb{Z}.$$

二阶偏导数为

$$A = z''_{xx} = -(1+e^y)\cos x, \quad B = z''_{xy} = -e^y \sin x, \quad C = z''_{yy} = e^y(\cos x - 2 - y).$$

当 $(x,y) = (2n\pi, 0)$ 时,

$$AC - B^2 = (-2)\times(-1) - 0 = 2 > 0, \quad A = -2 < 0,$$

则 $(2n\pi, 0)$ 是极大值点, 极大值为 $z(2n\pi, 0) = 2$.

当 $(x,y) = ((2n+1)\pi, -2)$ 时,

$$AC - B^2 = (1+e^{-2})\times(-e^{-2}) - 0 = -\frac{e^2+1}{e^4} < 0,$$

则 $((2n+1)\pi, 0)$ 不是极值点.

6. 根号在分子上的复合函数求导

三、(本题 15 分) 讨论函数 $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在原点的可微性, 以及它在原点的偏导数是否连续?

解 记 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. 则

$$f(x,y) = f(0,0) + \rho^2 \sin\frac{1}{\rho} = o(\rho)\ (\rho \to 0).$$

这说明 f 在 $(0,0)$ 可微, 且 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin\frac{1}{\rho} + \rho^2\cos\frac{1}{\rho}\cdot\frac{-x}{\rho^3} = 2x\sin\frac{1}{\rho} - \frac{x}{\rho}\cos\frac{1}{\rho}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\sin\frac{1}{\rho} + \rho^2\cos\frac{1}{\rho}\cdot\frac{-y}{\rho^3} = 2y\sin\frac{1}{\rho} - \frac{y}{\rho}\cos\frac{1}{\rho}.$$

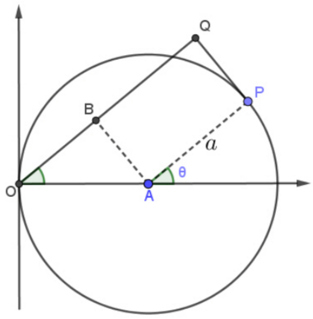
(x,y) 沿直线 $y = x$ 趋于 $(0,0)$ 时, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 都无极限. 故, 它们不连续.

注 可微给 5 分, 偏导数计算给 5 分, 不连续给 5 分.

八、（本题 10 分）设 P 是圆 $(x-a)^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 上的动点. 从原点往圆过 P 点的切线作垂线, 垂足为 Q. 当 P 沿圆运动时, 点 Q 的轨迹是 xy 平面上一条封闭曲线. 求此封闭曲线围成区域的面积.

解 设 $A=(a,0)$, Q 点坐标为 (x,y), AB 与 x 轴夹角为 θ. 则

$$OQ=OB+BQ=a\cos\theta+a$$
$$x=OQ\cos\theta=a\cos\theta(1+\cos\theta)$$
$$y=OQ\sin\theta=a\sin\theta(1+\cos\theta),\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$



故, 点 Q 的极坐标方程为

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=a(1+\cos\theta).$$

Q 的轨迹所围的区域的面积为

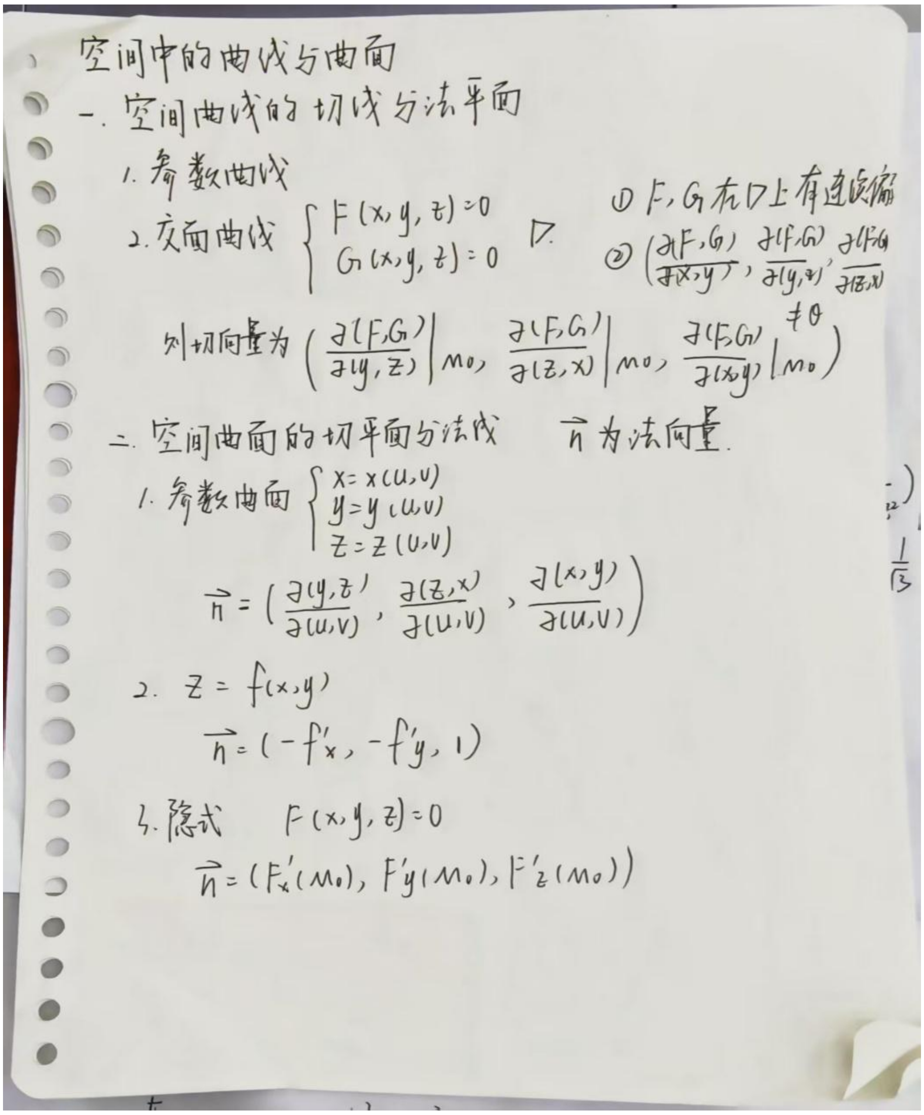
$$S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2(\theta)\,d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

注 求出 Q 点的坐标给 4 分. 求出面积给 6 分.

一 . 计算题:

1. 距离类: 点到平面的距离、点到直线的距离: 点乘和叉乘的具体应用
2. 曲线曲面类: 曲线的切线与法平面, 曲面的切平面与法线

   特别注意根据不同的题目特征求解



空间中的曲线与曲面

一. 空间曲线的切线与法平面

1. 参数曲线

2. 交面曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ D

① F, G 在 D 上有连续偏

② $\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}, \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right) \neq 0$

则切向量为 $\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_{M_0}, \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_{M_0}, \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_{M_0}\right)$

二. 空间曲面的切平面与法线　　$\vec{n}$ 为法向量.

1. 参数曲面 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$

$\vec{n}=\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$

2. $z=f(x,y)$

$\vec{n}=(-f'_x, -f'_y, 1)$

3. 隐式　$F(x,y,z)=0$

$\vec{n}=(F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0))$

例 53　求曲线

$$\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=47, \\ x^2+2y^2=z \end{cases}$$

在点 $(-2,1,6)$ 处的切线和法平面方程.

解　在点 $(-2,1,6)$ 处曲面 $2x^2+3y^2+z^2=47$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(-4,3,6)$, 曲面 $x^2+2y^2=z$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(-4,4,-1)$. 则曲线在该点的切向量为

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(-27,-28,-4),$$

故切线方程为

$$\frac{x+2}{27}=\frac{y-1}{28}=\frac{z-6}{4},$$

法平面方程为

$$27(x+2)+28(y-1)+4(z-6)=0,\quad 即\quad 27x+28y+4z+2=0.$$

3. 初等函数的泰勒展开式：常常采用换元法

注意：1.换元之后要相应地更改余项的阶数

2.尽量对函数做可分离的初等变形

3.如果需要合并 可展开到 n 项，舍去高阶量

进阶形式的泰勒展开式：

1） 复杂函数的泰勒展开式：只展开需要展开的函数项

2） 泰勒展开式的用处：

a) 从可求的泰勒展开式推导出对应阶数的偏导数

需要注意公式：a*m!*n!

b) 从可求偏导推导出对应的近似公式

3） 利用泰勒展开式分析函数阶数

例 42 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^3\mathrm{e}^{xz}=\sin(y^3+z)$ 在原点 $O(0,0,0)$ 的局部所确立的 C^∞ 隐函数, 试证它满足

$$z=x^3-y^3+o(\rho^6)\quad(\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0).$$

证明 限制点 (x,y,z) 满足 $x^2+y^2+z^2<\dfrac{1}{2}$ 及题中方程. 令 $t=x^3\mathrm{e}^{xz}$, 则

$$t=O(\rho^3),\quad t^3=O(\rho^9)\ (\rho\to 0).$$

由题设方程有

$$y^3+z=\arcsin t=t+O(t^3)=t+O(\rho^9),$$

故

$$z=-y^3+t+O(\rho^9)=-y^3+t+o(\rho^6). \tag{1}$$

由于 y^3 与 t 均属 $O(\rho^3)$ 型变量, 从上式知 $z=O(\rho^3)$. 现在利用 e^u 的零阶麦克劳林带余展开式

$$\mathrm{e}^u=1+u\mathrm{e}^{\theta u}\quad(0<\theta<1),$$

得到

$$t=x^3\mathrm{e}^{xz}=x^3(1+xz\mathrm{e}^{\theta xz})=x^3+x^4z\mathrm{e}^{\theta xz}=x^3+O(\rho^7)=x^3+o(\rho^6),$$

其中用到 $x^4=O(\rho^4)$, $z=O(\rho^3)$, $x^4z=O(\rho^7)$ $(\rho\to 0)$.

将 $t=x^3+o(\rho^6)$ 代入式 (1), 则有

$$z=x^3-y^3+o(\rho^6)\quad(\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0).$$

4. 极值问题：

普通极值：求驻点+矩阵判断

特殊情况：判别法失效：配方法/定义法（直接由函数值附近的值来判断，可以从任意的方向去趋近）

例 43 求下列函数的极值点与极值：

(1) $z=\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2-2x-2y+5$.

(2) $z=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$.

(3) $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.

(2013 年中国科大“多变量微积分”期中试题)

解 (1) 因为 $z'_x=z'_y=x+y-2$，则直线 $x+y-2=0$ 上的点都是驻点. 又

$$A=z''_{xx}=1,\quad B=z''_{xy}=1,\quad C=z''_{yy}=1,\quad \Delta=AC-B^2=0,$$

故不能用定理判别这些驻点是否为极值点. 把函数作恒等变形，有

$$z=\frac{1}{2}(x+y)^2-2(x+y)+5=\frac{1}{2}[(x+y)-2]^2+3,$$

显然，直线 $x+y-2=0$ 上的全部点都是函数 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 3.

(3) 由驻点方程组

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, & (1) \\ z'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0, & (2) \end{cases}$$

解得 $x = y$, 并代入式 (1) 或式 (2) 得驻点

$$M_0(0,0), \quad M_1(1,1), \quad M_2(-1,-1).$$

又由

$$z''_{xx} = 12x^2 - 2, \quad z''_{xy} = -2, \quad z''_{yy} = 12y^2 - 2,$$

知在点 M_1 和 M_2 皆有

$$A = z''_{xx} = 10 > 0, \quad B = z''_{xy} = -2, \quad C = z''_{yy} = 10, \quad AC - B^2 = 96 > 0.$$

故 $M_1(1,1)$, $M_2(-1,-1)$ 是极小值点, 极小值为 $z(M_1) = z(M_2) = -2$.

对于驻点 $M_0(0,0)$, 由于

$$A = B = C = -2, \quad AC - B^2 = 0,$$

判别法失效. 但 $z(M_0) = 0$, 而当 $x = y$, 且 $0 < |x| < 1$ 时, 有 $z = 2x^4 - 4x^2 < 0$; 当 $x = -y$, 且 $0 < |x| < 1$ 时, 有 $z = 2x^4 > 0$; 即在点 M_0 的任意邻域内, 函数 $z(x,y)$ 有正有负, 由极值的定义知点 M_0 不是极值点.

注记 (1) 例 43 的第 (1)、(2) 题说明, 对于多元函数, 即使它不是常值函数, 其驻点仍可以有无穷多个, 甚至可以构成曲线、曲面等 (称为驻点线、驻点面).

(2) 极值判别法只是判别极值的充分条件, 当条件不满足时, 并不能说明该点不是极值点, 只是不能用此法判断. 此时可用极值的定义, 或更高阶的偏导数情况来判断.

条件极值：拉格朗日乘数法

5. 多变量函数的偏导数与微分
   1）某点处偏导数的计算：求导代入法/定义法（断点处常用）
   2）偏导数的具体应用:
   求解原函数：该题需要特别注意 1/x 的原函数是含绝对值的，而且应该加的是关于 y 的函数而不是单纯的函数项

应的极限值也会比较简单.

例 7 设函数 $f(x,y)$ 满足 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\sin y + \dfrac{1}{1-xy}, \\ f(1,y) = \sin y, \end{cases}$ 求 $f(x,y)$.

分析 由已知, 要求 $f(x,y)$, 必须对第一个等式两边关于 x 求积分, 但要注意的是, 求关于 x 的偏导数时, 把自变量 y 当作常数, 所以积分后要加上含有 y 的任意函数 (不是任意常数 C). 由 $f(1,y)$ 定出这个任意函数. 此题实质为一元函数的积分问题, 当 y 给定时, 它是 x 的一元函数的积分.

解 将第一个等式两边对 x 求积分得

$$f(x,y) = -x\sin y - \frac{1}{y}\ln|1-xy| + \varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$ 为待定函数. 上面的等式中令 $x=1$, 并由已知条件得

$$-\sin y - \frac{1}{y}\ln|1-y| + \varphi(y) = \sin y,$$

则

$$\varphi(y) = 2\sin y + \frac{1}{y}\ln|1-y|.$$

故

$$f(x,y) = (2-x)\sin y + \frac{1}{y}\ln\left|\frac{1-y}{1-xy}\right|.$$

3） 偏导数的连续性：常常与分段函数结合

注意：

a) 只有连续函数的高阶偏导数在交换次序之后才会相等，一般函数未必符合这一点

b) 对于分段函数来说，求高阶偏导数遵循以下原则：
先求连续函数部分的偏导数 再用定义法求断点处的偏导数值

c) 求解偏导数的连续性 是要验证已求出的连续函数的偏导数极限值和定义法求出的极限值是否相等

$\overline{\partial x^2 \partial y^2}$

例 12 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ 证明:

(1) 函数的二阶偏导数存在, 且 $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

(2) 所有二阶偏导数在点 $(0,0)$ 处不连续.

证明 (1) 显然, $f(0,0)=0$, $f(x,0)=f(0,y)=0$, 由偏导数定义, 有

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0, \quad f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时, 有

$$f'_x(x,y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad f'_y(x,y)=x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{12xy^5-4x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}, \quad f''_{yy}(x,y)=\frac{4x^3y^3-12x^5y}{(x^2+y^2)^3},$$

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=\frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}.$$

则 $f'_x(0,y)=-y$, $f'_y(x,0)=x$, $f'_x(x,0)=f'_y(0,y)=0$. 从而有

$$f''_{xx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_x(x,0)-f'_x(0,0)}{x}=0, \quad f''_{yy}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(0,y)-f'_y(0,0)}{y}=0,$$

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=-1, \quad f''_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_x(0,0)}{x}=1.$$

所以函数 $f(x,y)$ 的二阶偏导数为

$$f''_{xx}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{12xy^5-4x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

$$f''_{yy}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^3y^3-12x^5y}{(x^2+y^2)^3}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

$$f''_{xy}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}, & x^2+y^2\neq 0,\\ -1, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

$$f''_{yx}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 1, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

且 $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

(2) 因为

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} f''_{xx}(x,y)=\frac{12k^5-4k^3}{(1+k^2)^3}, \quad \lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} f''_{yy}(x,y)=\frac{4k^3-12k}{(1+k^2)^3},$$

上述两个极限值依赖于参数 k, 故函数 $f''_{xx}(x,y)$ 与 $f''_{yy}(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的极限不存在, 从而在 $(0,0)$ 点不连续.

由于

$$\lim_{\substack{y=x\\ x\to 0}} f''_{xy}(x,y)=\lim_{\substack{y=x\\ x\to 0}} f''_{yx}(x,y)=0, \quad \lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}} f''_{xy}(x,y)=\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}} f''_{yx}(x,y)=1,$$

则函数 $f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yx}(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的极限不存在, 故它们在 $(0,0)$ 点也不连续.

此题的关键之处：基本不等式：还是要有一些对数字的敏感度

例 13 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b)\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

试问:

(1) 当 a,b 取何值时, 函数 $f(x,y)$ 在原点连续.

(2) 当 a,b 取何值时, 函数 $f(x,y)$ 在原点可微.

(2012 年中国科大“多变量微积分”期中试题)

(2012 年中国科大“多变量微积分”期中试题)

解 (1) 要使函数 $f(x,y)$ 在原点连续, 即证

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0.$$

特别地, 沿抛物线 $x=y^2$ 趋近于原点时, 有

$$0=\lim_{\substack{x=y^2\\ y\to 0}}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b)\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}=\frac{1}{2}b,$$

即得 $b=0$. 由于当 $x^2+y^2\neq 0$ 时, 有

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right|\leqslant\frac{1}{2},$$

而当 $b=0$ 时, 有极限

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2)\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2)\frac{xy^2}{x^2+y^4}\\&=0=f(0,0).\end{aligned}$$

所以, 当 $b=0$ 时, 函数 $f(x,y)$ 在原点连续.

此题关键处：继续积累多元函数相关的不等式处理方法

例 14 设函数 $f(x,y)=|x-y|g(x,y)$, 其中函数 $g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内连续.

(1) 求偏导数 $f'_x(0,0)$ 与 $f'_y(0,0)$ 存在时, $g(x,y)$ 应满足的条件.

(2) 在上述确定的条件下, 讨论函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性.

解 (1) 由偏导数的定义知

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|g(x,0)}{x},$$

因为函数 $g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的邻域内连续, 要使 $f'_x(0,0)$ 存在, 则必须满足

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|g(x,0)}{x}=g(0,0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|g(x,0)}{x}=-g(0,0),$$

故 $g(0,0)=0$, 即当函数 $g(x,y)$ 满足 $g(0,0)=0$ 时, 偏导数 $f'_x(0,0)$ 存在, 且 $f'_x(0,0)=0$. 同理, 当 $g(0,0)=0$ 时, 偏导数 $f'_y(0,0)$ 存在, 且 $f'_y(0,0)=0$.

(2) 由已知条件及 $g(0,0)=0$, 有

$$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}g(x,y)=g(0,0)=0.$$

进而有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-(f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}g(x,y)=0,$$

其中用到

$$0\leqslant\frac{|x-y|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant 2.$$

故由可微的定义知, 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

4) 复合函数的微分与偏导数

   a) 复合函数偏导数的求解：可以使用全微分法+一阶微分形式不变性

   b) 变上限积分的形式改换与偏导数的求解

例 20 设函数 $z(x,y)=x^y+\int_0^x x\mathrm{e}^{-(t+y)^2}\mathrm{d}t\ (x>0)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 对变限定积分作变量代换得

$$z(x,y)=x^y+\int_0^x x\mathrm{e}^{-(t+y)^2}\mathrm{d}t=x^y+x\int_y^{x+y}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,$$

由变限定积分的求导公式及复合函数的求导法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}+x\mathrm{e}^{-(x+y)^2}+\int_y^{x+y}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x+x(\mathrm{e}^{-(x+y)^2}-\mathrm{e}^{-y^2}),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x-2x(x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)^2}+\mathrm{e}^{-(x+y)^2}-\mathrm{e}^{-y^2}.$$

5）隐函数的全微分、偏导数

6. 多元函数积分学:

二重积分、三重积分、n 重积分、第一型曲面积分、第一型曲线积分

常用技巧:

1）转为累次积分，观察积分区间，选择合适的积分顺序

三元函数中：根据函数特征选择先一后二法/先二后一法

六、(本题 15 分) 计算三重积分 $\iiint\limits_V (x^2+y^2)^5 z\,dxdydz$, 其中 V 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant 1$ 被曲面 $z=\sqrt{3x^2+y^2+1}$ 及 Oxy 平面所截下的部分。

解 记所求积分为 I, 则

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5\int_0^{\sqrt{3x^2+y^2}} z\,dz=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5(3x^2+y^2+1)dxdy.$$

由对称性,

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5x^2\,dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5y^2\,dxdy,$$

故,

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5(2x^2+2y^2+1)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} r^{10}(2r^2+1)\,r\,drd\varphi=\frac{19}{84}\pi.$$

2）利用函数的奇偶性+积分区间的对称性化简

3) 利用轮换对称性

4）换元：二元函数极坐标变换 三元函数球坐标变换与广义球坐标变换与柱坐标变换。

难点：参数化过程中范围的确定：先写出最初直角坐标中 x,y,z 的范围再代入换元后的式子然后确定范围

注意：这道题中是原式暂且不能确定大于小于号的时候 先化为球坐标系下的式子，r 显然是从 0 到这一边界，再根据其固有的恒正性质规范角度范围 最后再加上卦限的限制 每一条都很重要

3.计算 $\iiint\limits_V |z|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$V$是曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$ 所围成的闭区域$(a>0)$.

解： 积分区域关于三个坐标面对称， 被积函数关于x,y,z都是偶函数，只需计算第一卦限部分的积分， 令$x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$

边界曲面化为 $r^4=a^2(r^2\sin^2\theta-r^2\cos^2\theta)=-a^2r^2\cos 2\theta$, 即$r^2=-a^2\cos 2\theta$,,

第一卦限部分 $V':\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}],\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}],r\in[0,a\sqrt{-\cos 2\theta}]$. ......(3分)

$$\iiint\limits_V |z|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{-\cos 2\theta}} r\cos\theta r^2\sin\theta\mathrm{d}r \qquad ......(5分)$$

$$=8\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}a^4(-\cos 2\theta)^2\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{12}a^4. \qquad ......(8分)$$

2. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\mathrm{d}S$, Σ为锥面 $x^2+y^2=z^2$位于平面$z=0,z=1$之间的部分.

解： 根据对称性，只需计算第一卦限部分曲面上的积分再乘以4. 设$\Sigma_1: z=\sqrt{x^2+y^2}, D:$ $x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1$ 作极坐标代换， D转化为 $D': \theta\in[0,\frac{\pi}{2}], r\in[0,1]$ ......(2分)

$z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ......(4分)

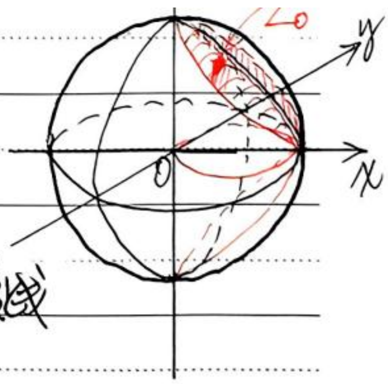
$$\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}S=4\sqrt{2}\iint\limits_{D}xy\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta r\mathrm{d}r=\frac{2\sqrt{2}}{5}$$ ......(8分)

例2、设Σ是球面$\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$被柱面$\Sigma_2$: $x^2+y^2=ax$截下的部分，求Σ的面积$S(\Sigma)$.

解：设Σ_0是Σ在第一卦限部分，

由对称性知，$S(\Sigma)=4\iint\limits_{\Sigma_0}1\,dS$



令$\begin{cases}x=a\sin\theta\cos\varphi\\ y=a\sin\theta\sin\varphi\\ z=a\cos\theta\end{cases}$ 则$\begin{cases}\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]\end{cases}$ 且从交线

$x^2+y^2=a^2-z^2=ax\Rightarrow a^2-(a\cos\theta)^2=a(a\sin\theta\cos\varphi)\Rightarrow\sin\theta=\cos\varphi$
$=\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ 即$\begin{cases}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}-\varphi\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ (5)

从而 $S(\Sigma)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}a^2\sin\theta\,d\theta\right)d\varphi=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}\right\}d\varphi$
$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)d\varphi=4a^2(\frac{\pi}{2}-1)$

例 85 求下列曲面所围体积 (其中 $a,b,c>0$):

(1) 曲面 $\left(\frac{|x|}{a}+\frac{|y|}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$; (2) 曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{|y|}{b}+\frac{\sqrt[3]{z^2}}{\sqrt[3]{c^2}}=\frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{c}}$.

解 (1) 由对称性, 所围体积等于第一卦限内体积的 8 倍, 在第一卦限部分作变换

$$x=ar\sin\theta\cos^2\varphi,\quad y=br\sin\theta\sin^2\varphi,\quad z=cr\cos\theta,$$

则有

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix} a\sin\theta\cos^2\varphi & b\sin\theta\sin^2\varphi & c\cos\theta \\ ar\cos\theta\cos^2\varphi & br\cos\theta\sin^2\varphi & -cr\sin\theta \\ -ar\sin\theta\sin2\varphi & br\sin\theta\sin2\varphi & 0 \end{vmatrix}=abcr^2\sin\theta\sin2\varphi>0,$$

所对应的区域

$$V_1':0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant1,$$

故有

$$\begin{aligned}V&=8\iiint\limits_{V_1}\mathrm{d}V=8\iiint\limits_{V_1'}abcr^2\sin\theta\sin2\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sin\theta\sin2\varphi\mathrm{d}r=\frac{8}{3}abc.\end{aligned}$$

6） 拆解积分

优秀思路积累:

$$I_1 = \int_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x}) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^0 -\sin y \cdot \frac{e^{by} - e^{ay}}{y} \cdot e^y\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^0 \sin y \cdot \frac{e^{(a+1)y} - e^{(b+1)y}}{y}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^0 \sin y \left(\int_{b+1}^{a+1} e^{uy}\, du \right) dy$$

$$= \int_{b+1}^{a+1} \int_{-\infty}^0 e^{uy} \sin y\, dy\, du.$$