随机过程. Stochastic process

functions $\longrightarrow$ Calculus $\longrightarrow$ differential equation

stochastic processes $\longrightarrow$ Itô Calculus (Stoch Calculus) $\longrightarrow$ stochastic diff equ's

$\cup$ martingales

$\cup$ Brownian motions.

伊藤积分 随机微分方程

Stochastic process: a collection of r.v.'s

$\{X_t\}_{t\in T}$ defined on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

一串r.v.

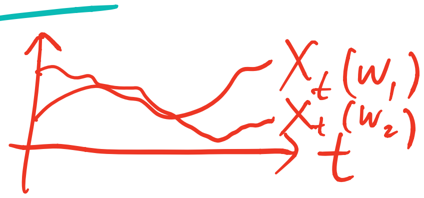
T index set.

$X_t \in \mathbb{R}$

Rmk
- $\mathbb{R}$ can be replaced by $\mathbb{R}^n$.
- $T=[0,\infty)$. $T=\mathbb{Z}_+$ "time"

固定时间 ① fix t, $\omega \mapsto X_t(\omega)$ is a r.v.

固定w ② fix w, $t \mapsto X_t(w)$ is a function. "a path"



③ $(t,\omega) \longmapsto X_t(\omega)$.

每个w都有 一个path

$\overset{w}{\Omega} \rightsquigarrow t\mapsto X_t(w)$

$\subset \tilde{\Omega} = \mathbb{R}^T$

pathspace $T=[0,\infty)$

a stochastic process is a prob measure on $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B})$

随机过程是$(\mathbb{R}^T,\mathcal{B})$上 的prob.measure

$\mathcal{B} = \sigma\{ w\in\tilde{\Omega} : w(t_1)\in F_1 \cdots w(t_k)\in F_k, \ F_i\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$

"product topology on $\tilde{\Omega}$" $\mathcal{B}$ is Borel σ-alg.

One-point distribution $\mu_t(F) = P(X_t \in F)$ $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$X_t \in F$的概率

有限维. finite-dim distr.

$$\mu_{t_1 \cdots t_k}(F_1 \times \cdots \times F_k) = P(X_{t_1} \in F_1, X_{t_2} \in F_2, \cdots X_{t_k} \in F_k)$$

Stoch process X $\Rightarrow$ $\mu_{t_1 \cdots t_k}$.

$\Leftarrow$ converse ?

Thm (Kolmogorov extension thm):

For all $t_1 \cdots t_k \in T$, $k \in \mathbb{N}$. Let $\mu_{t_1 \cdots t_k}$ be prob measure on $\mathbb{R}^k$ s.t

$$(K1) \quad \mu_{t_{\sigma(1)} \cdots t_{\sigma(k)}}(F_1 \times \cdots \times F_k) = \mu_{t_1 \cdots t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times \cdots \times F_{\sigma^{-1}(k)})$$

?

$\mathbb{R}^d$

for all permutation σ of $\{1 \ldots k\}$

对于$\{1, \cdots, k\}$的所有排列

and

$$(K2) \quad \mu_{t_1 \cdots t_k}(F_1 \times \cdots \times F_k) = \mu_{t_1 \cdots t_k, t_{k+1} \cdots t_{k+m}}(F_1 \times \cdots \times F_k \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R})$$

$\forall k, m.$

Then ∃ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and a stoch process $\{X_t\}$ on Ω.

$X_t : \Omega \to \mathbb{R}$. s.t. μ is the finite dim distr of X.

① 对于固定的时刻t. $X_t(w)$ 是一个随机变量.

② 对于固定的事件w. $X_t(w)$ 是关于 t 的 function. 是 w 在 t 上的 path

③ $(t,w) \mapsto X_t(w)$ 由二元组映射到 $X_t(w)$

随机路径:

对于 $\forall w \in \Omega \to$ 给定了一个 path

所以 $\Omega \subset \tilde{\Omega} = \mathbb{R}^T$ 是一个 space of path $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$

从而每一个 w 都可以认为是 $\tilde{\Omega}$ 中的一个 subset

一个随机过程是 $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B})$ 上的一个 measure.

这里 $\mathcal{B} = \{ w \in \tilde{\Omega} : w(t_1) \in F_1 \dots w(t_k) \in F_k \}$

path　　$F_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(t_1 时刻在 F_1 区域内且 t_2 时刻 $\in F_2$ 且 ..... 且 t_k 时刻在 F_k

的 w (path)

的集合 $\Rightarrow \mathcal{B}$