

Escola Politécnica-USP
LARC



Seminário NTT

Resumo

O objetivo do semanário é apresentar a NTT e suas vantagens, para isso, parte-se da transformada de Fourier, em seguida, para a sua forma discreta (DFT) e chega-se na NTT propriamente dita. O que almejo com esse trabalho é passar a intuição por trás das ferramentas matemática utilizadas e beleza inerentes a elas.

Contents

1	A Dualidade entre Tempo e Frequência	2
2	Transformada de Fourier Contínua (CTFT)	2
3	Transformada Discreta de Fourier (DFT)	2
3.1	Definição da IDFT	3
4	A Multiplicação de Polinômios e a Complexidade Computacional	4
5	A Fast Fourier Transform	5
6	Problemas da FFT	8
7	Number Theoretic Transform (NTT)	8
7.1	Fundamentos	8
8	O Isomorfismo via Teorema Chinês dos Restos (CRT)[1]	11
9	Transformada Numérica Inversa (INTT)	12
9.1	A NTT como uma FFT: Decomposição Radix-2 via CRT	13
9.2	A INTT via Gentleman-Sande (GS): Reconstrução via CRT	15
9.3	Extra: NTT incompleta e a restrição de parâmetros no caso negacíclico . . .	18
10	Agradecimentos	19
11	Apêndice	19
11.1	DFT como transformação linear	19
11.2	Exemplo de convolução negacíclica	20
11.3	Determinação unívoca do polinômio	22

1 A Dualidade entre Tempo e Frequência

A Transformada de Fourier é uma operação matemática que mapeia uma função do domínio do tempo (ou espaço) para o seu domínio dual: a frequência. Essa transição é extremamente útil, pois propriedades que são complexas de analisar no tempo tornam-se claras no espectro de frequências.

Esta ferramenta é um pilar fundamental em diversas áreas do conhecimento:

- **Matemática Pura:** Essencial na Teoria Analítica dos Números e no estudo de Equações Diferenciais Parciais (EDPs).
- **Física Moderna:** É a base matemática do **Princípio da Incerteza de Heisenberg** na Mecânica Quântica, onde a posição e o momento de uma partícula formam um par de variáveis conjugadas de Fourier.
- **Engenharia:** Processamento de sinais, compressão de dados (MP3, JPEG) e telecomunicações.

2 Transformada de Fourier Contínua (CTFT)

Para uma função contínua $g(t)$, a transformada é definida pela integral:

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi i f t} dt$$

Ela pode ser entendida como um produto interno (uma projeção) do sinal com todos as frequências da reta real $\langle g, e^{-2\pi i f t} \rangle$, que, devido a ortogonalidade das frequências diferentes e que funções bem comportadas podem ser decompostas em séries de autofunções $e^{-2\pi i f t}$, consegue extrair exatamente as frequências do sinal. Apesar de sua elegância teórica, a CTFT apresenta desafios para a aplicação prática em sistemas digitais:

1. **Natureza Analítica:** A resolução de integrais impróprias exige uma manipulação simbólica que é difícil de implementar em computadores comuns.
2. **Limite Infinito:** A definição pressupõe que conhecemos o sinal de $-\infty$ a $+\infty$, o que é impossível em cenários reais.
3. **Amostragem Finita:** Na prática, os sinais são capturados de forma discreta (amostras) e por um tempo limitado, o que torna a integral contínua inaplicável.

3 Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Para viabilizar o processamento em computadores, utilizamos a **DFT** (*Discrete Fourier Transform*). Ela opera sobre uma sequência finita de N amostras, mapeando dados discretos no tempo para o domínio da frequência. Segundo o Teorema de Amostragem de Nyquist-Shannon [2], para que um sinal contínuo possa ser unicamente determinado a partir de suas amostras, a frequência de amostragem f_s deve ser superior ao dobro da maior

frequência f_{max} contida no sinal. $f_s > 2f_{max}$. Com essa restrição para a quantidade de amostras N em mente, a DFT é definida da seguinte forma:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}$$

Para $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Diferente da versão contínua, a DFT lida com somatórios e vetores numéricos, permitindo que a teoria de Fourier seja aplicada em qualquer dispositivo digital. É possível provar que a DFT é um transformacao linear 11.1, logo, pode ser representada matricialmente.

Seja $\zeta_N = e^{-i \frac{2\pi}{N}}$. A representação matricial da DFT para $n = 0, 1, \dots, N-1$ é:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta_N^1 & \zeta_N^2 & \dots & \zeta_N^{N-1} \\ 1 & \zeta_N^2 & \zeta_N^4 & \dots & \zeta_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_N^{N-1} & \zeta_N^{2(N-1)} & \dots & \zeta_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

3.1 Definição da IDFT

A reconstrução do sinal original no domínio do tempo a partir de suas amostras de frequência é realizada pela IDFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \zeta_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Onde $\zeta_N^{-nk} = e^{i \frac{2\pi}{N} nk}$. Matricialmente, a IDFT é dada por:

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta_N^{-1} & \zeta_N^{-2} & \dots & \zeta_N^{-(N-1)} \\ 1 & \zeta_N^{-2} & \zeta_N^{-4} & \dots & \zeta_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_N^{-(N-1)} & \zeta_N^{-2(N-1)} & \dots & \zeta_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

Percebe-se que nesse caso discreto, a DFT e IDFT atuam como uma matriz mudança de base, saindo da base do tempo e indo para base das raízes unitarias

Além disso, a DFT pode ser vista de outra óptica, como avaliação de polinômios.

Seja:

$$a(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$$

e tome $\zeta_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ seja uma N -ésima raiz primitiva da unidade. Defina

$$A_k := a(\zeta_N^k).$$

Então

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} a_n (\zeta_N^k)^n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \zeta_N^{kn},$$

o que é exatamente a formulação da DFT, para $a_n \equiv x[n]$ e $A_n \equiv X[n]$, opostamente, a IDFT é interpretada como interpolação de polinômios:

Dados os valores $\{A_k\}_{k=0}^{N-1}$, ela reconstrói os coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{N-1}$ do único polinômio de grau $N - 1$ que satisfaz $a(\zeta_N^k) = A_k$ para todo k . Explicitamente,

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k \zeta_N^{-kn}.$$

Assim, DFT é *avaliar* em raízes da unidade e IDFT é *interpolar* (recuperar os coeficientes) a partir dessas avaliações. (Essa perspectiva baseia-se na determinição unívoca do polinômio de grau $N - 1$ por N pontos veja a seção 11.3 para demonstração desse fato)

4 A Multiplicação de Polinômios e a Complexidade Computacional

Um problema simplificado pela mudança de domínio é a multiplicação de polinômios. Tome os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ de grau $N - 1$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^{N-1} b_j x^j$$

Na abordagem clássica, o produto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é obtido distribuindo-se cada termo de f sobre todos os termos de g . Este processo resulta em um novo polinômio de grau $2N - 2$:

$$h(x) = \sum_{k=0}^{2N-2} c_k x^k$$

onde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Nesta metodologia, o cálculo de cada coeficiente c_k exige múltiplas operações de produto e soma, resultando em uma complexidade assintótica $O(n^2)$. Para polinômios com grandes volumes de coeficientes, este custo computacional torna o método inviável.

A conexão entre a multiplicação de polinômios e a análise de Fourier vem do fato de que, se $h(x) = f(x)g(x)$, então os coeficientes c_k de h são dados pela **convolução linear** dos coeficientes de f e g :

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Neste trabalho, devido ao foco na NTT e ao anel quociente $\mathbb{Z}_p[x]/(x^N + 1)$, trabalhamos com a **convolução negacíclica** (de comprimento N), definida por:

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} - \sum_{i=k+1}^{N-1} a_i b_{N+k-i}, \quad k = 0, \dots, N - 1.$$

Diferente da circular, aqui os termos que “ultrapassam” o comprimento N retornam com sinal invertido.

Teorema da Convolução: a transformada de uma convolução no domínio do tempo (ou espaço) é o produto ponto a ponto (Hadamard) das transformadas no domínio da frequência:

$$\mathcal{F}(f *_{\text{neg}} g) = \mathcal{F}(f) \odot \mathcal{F}(g).$$

Assim, o cálculo custoso da convolução é convertido em um produto ponto a ponto, pois a base de Fourier apropriada (utilizando raízes de $x^N + 1$) diagonaliza o operador de convolução negacíclica (matriz negacirculante). Com a transformada direta ingênua o custo ainda seria $O(N^2)$, portanto, não há ganho computacional em realizar essa transformação.

Um exemplo para o convencimento do leitor foi disposto no apêndice 11.2.

5 A Fast Fourier Transform

A FFT (Fast Fourier Transform) é uma maneira de otimizar o calculo da DFT.

O algoritmo da FFT foi redescoberta por Cooley e Tukey em 1965, uma vez que Gauss já tinha utilizado um algoritmo semelhante para calcular a orbitas de asteroides em 1805.

O algoritmo se baseia em **dividir para conquistar**.

Relembrando

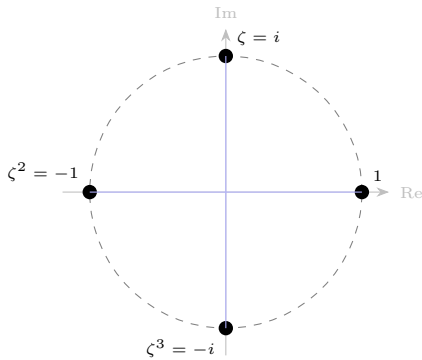
As raízes unitárias possuem propriedades cíclicas e certas simetrias que permitem a economia nos cálculos, vejamos um exemplo.

$$\zeta_4^1 = e^{-i\frac{2\pi}{4}} = e^{-i90^\circ} = -i$$

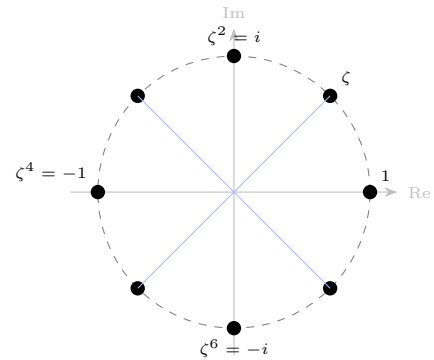
$$\zeta^1 = -i \quad \zeta^2 = -1$$

$$\zeta^3 = i \quad \zeta^4 = 1$$

por isso, percebe-se que, a cada 2 “deslocamentos”, o valor se torna o oposto, como ilustrado na figura:



(a) 4-ésimas raízes da unidade



(b) 8-ésimas raízes da unidade

Figure 1: Comparação entre as raízes da unidade no plano complexo.

De forma mais geral:

$$\zeta_N = e^{\frac{-2\pi i}{N}}, \text{ uma raiz } N\text{-ésima primitiva da unidade. Então para todo inteiro } a, \\ \zeta_N^{a+\frac{N}{2}} = -\zeta_N^a.$$

Alem de que, pela periodicidade $\zeta_N^{a+N} = \zeta_N^a$ e $\zeta_N^2 = \zeta_{N/2}$, esta última pode ser vista na figura 1

Para esse caso a DFT é representada desse modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

Voltando a FFT, o algoritmo decompõe uma DFT de tamanho N em duas sub-transformadas de tamanho $N/2$, separando os índices pares e ímpares da sequência original:

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m] \zeta_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1] \zeta_N^{(2m+1)k} \\ \text{Usando } \zeta_N^2 &= \zeta_{N/2} : \quad \zeta_N^{2mk} = (\zeta_N^2)^{mk} = \zeta_{N/2}^{mk} \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m] \zeta_{N/2}^{mk} + \zeta_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1] \zeta_{N/2}^{mk} \\ &= E[k] + \zeta_N^k O[k], \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{aligned}$$

Esta estrutura permite calcular dois valores de saída ($X[k]$ e $X[k + N/2]$) utilizando os mesmos resultados intermediários, através da denominada **operação borboleta** (*butterfly operation*):

1. $X[k] = E[k] + \zeta_N^k O[k]$
2. $X[k + N/2] = E[k] - \zeta_N^k O[k]$

como pode ser visto na imagem

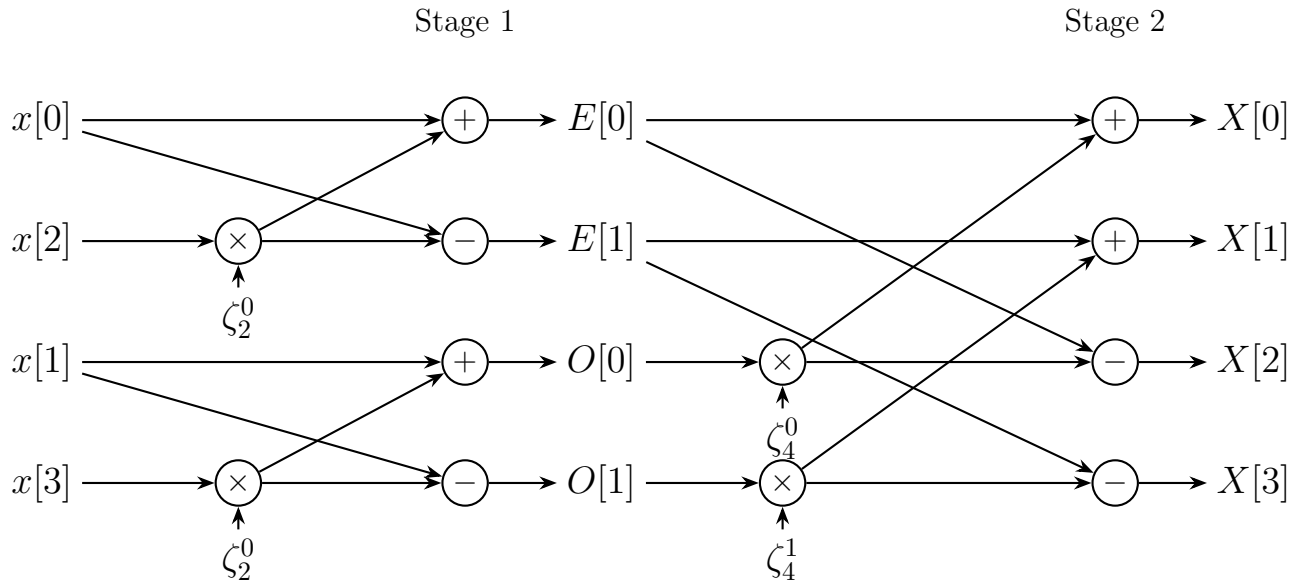


Figure 2: butterfly radix-2

o a implementacao em sage esta no codigo1

Listing 1: Implementação do algoritmo FFT em SageMath

```

1 def fft(a, omega):
2     n = len(a)
3     if n == 1:
4         return a[:]
5
6
7     a_par = fft(a[0::2], omega^2)
8     a_impar = fft(a[1::2], omega^2)
9
10    A = [0] * n
11    w = 1
12    half = n // 2
13    for k in range(half):
14        t = w * a_impar[k]
15        A[k] = a_par[k] + t
16        A[k + half] = a_par[k] - t
17        w *= omega
18    return A

```

Desse modo, reduzimos a complexidade da transformada de $O(n^2)$ para $O(n \cdot \log n)$. Por causa disso, podemos utilizar a FFT, junto com o **teorema da convolucao**, para multiplicar polinomios em $O(n \cdot \log n)$

6 Problemas da FFT

Uns dos problemas da FFT é que ela trabalha com ponto flutuante, o que, para computadores, é um grande problemas que pode causar erro de arredondamentos e, assim causar uma falha nos esquemas criptograficos. Alem disso, na convolução linear, o polinomio dobra de tamanho a cada convolução o que rapidamente torna-se um problema tanto computacional quanto de armazenamento .

Solucao: utilizar um transformada que utiliza apenas números exatos

7 Number Theoretic Transform (NTT)

7.1 Fundamentos

As propriedades que usamos na FFT — em especial a existência de uma raiz N -ésima da unidade ζ_N e o fato de que suas potências percorrem uniformemente o círculo — têm um análogo perfeito em teoria dos números, dentro de corpos (ou anéis) finitos. Isso não é coincidência: a DFT nada mais é do que a transformada de Fourier no grupo cíclico $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, e a mesma construção existe em outros contextos algébricos.

Mais formalmente, se ζ_N é uma raiz N -ésima primitiva da unidade, então o conjunto de todas as N -ésimas raízes

$$\mu_N = \{1, \zeta_N, \zeta_N^2, \dots, \zeta_N^{N-1}\}$$

forma um grupo multiplicativo cíclico de ordem N . Existe um isomorfismo natural de grupos

$$\varphi : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mu_N, \quad \varphi([k]) = \zeta_N^k,$$

onde o lado esquerdo usa a soma módulo N e o lado direito usa multiplicação:

$$\varphi([k + \ell]) = \zeta_N^{k+\ell} = \zeta_N^k \zeta_N^\ell = \varphi([k]) \varphi([\ell]).$$

Raiz Primitiva e Estrutura Negacíclica

Diferente da DFT complexa, onde raízes da unidade sempre existem para qualquer N , a NTT exige que o corpo finito \mathbb{Z}_p , isto é, os inteiros $(\text{mod } p)$, sendo p um primo, suporte a ordem da transformada.

Para a NTT Negacíclica, utilizada para realizar a multiplicação polinomial módulo $x^N + 1$, precisamos de uma raiz primitiva $2N$ -ésima da unidade em \mathbb{Z}_p , que denotaremos por ψ . Isso implica que:

1. $\psi^{2N} \equiv 1 \pmod{p}$;
2. $\psi^N \equiv -1 \pmod{p}$.

Para garantir a existência desse elemento, a ordem $2N$ deve dividir a ordem do grupo multiplicativo do corpo. Portanto, o primo p deve satisfazer:

$$2N \mid (p - 1) \quad \text{i.e. } 2N \text{ divide } (p-1)$$

Ou seja, $p \equiv 1 \pmod{2N}$.

Como $2N \mid (p-1)$, em particular temos $p \nmid N$ (i.e. $\gcd(p, N) = 1$); logo N possui inverso em \mathbb{Z}_p .

Agora, trataremos da estrutura algébrica. A NTT Negacíclica é definida no anel quociente

$$R = \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x^N + 1)}$$

(a imagem 3 ilustra a sequencia das duas operacoes visualmente.)

Ela pode ser vista como a avaliação do polinômio nas raízes da equação $x^N + 1 = 0$, que correspondem às potências ímpares de ψ . A transformada é definida por:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \psi^{(2k+1)n} \pmod{p}$$

Na forma matricial:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

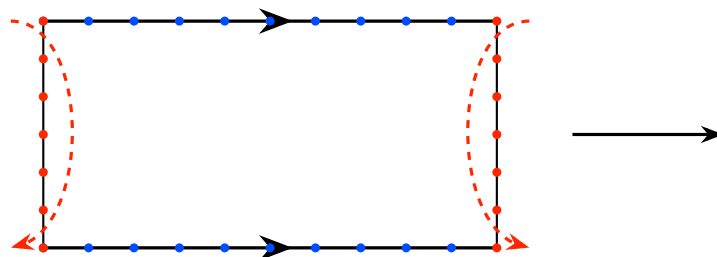
Neste caso, a matriz de transformação \mathbf{W}_N difere da versão cíclica padrão, pois seus coeficientes seguem a estrutura das raízes negacíclicas:

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & \psi^2 & \psi^3 & \dots & \psi^{(N-1)} \\ 1 & \psi^3 & \psi^6 & \dots & \psi^{3(N-1)} \\ 1 & \psi^5 & \psi^{10} & \dots & \psi^{5(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{(2k+1)} & \psi^{(2k+1)2} & \dots & \psi^{(2k+1)(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{(2N-1)} & \psi^{(2N-1)2} & \dots & \psi^{(2N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

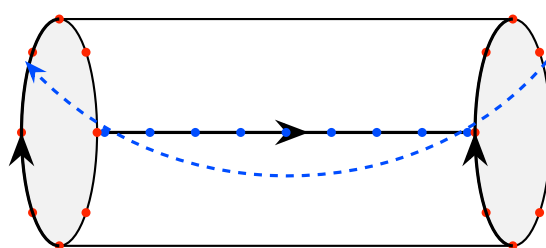
De forma geral, o termo na linha k e coluna n da matriz é dado por:

$$(\mathbf{W}_N)_{k,n} = \psi^{(2k+1)n} \pmod{p}, \quad 0 \leq k, n \leq N-1$$

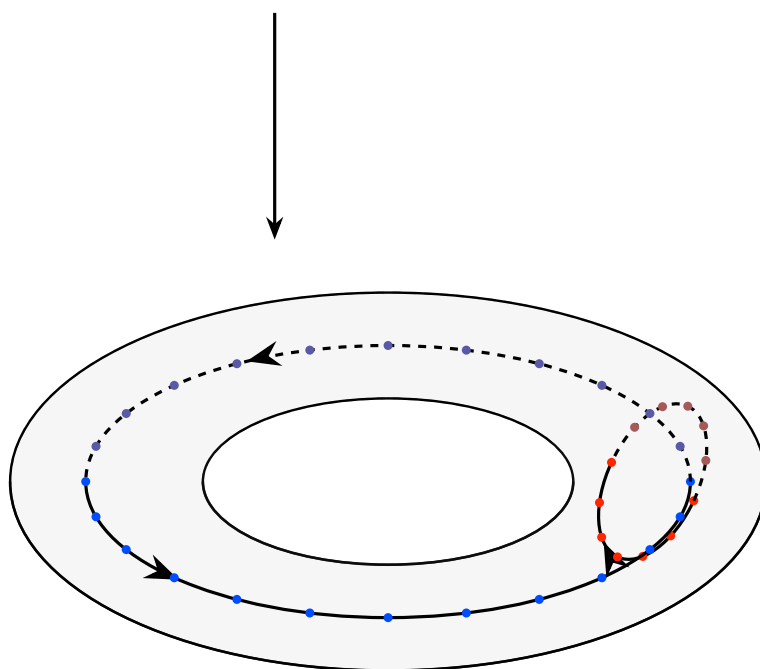
1. Colar lados horizontais (Passo \mathbb{Z}_p)



Obtém-se um cilindro



2. Colar lados verticais (Passo $/(x^N + 1)$)



3. Obtém-se um Toro Discreto

• Direção $/(x^N + 1)$ • Direção \mathbb{Z}_p

Figure 3: representação das transformacoes

8 O Isomorfismo via Teorema Chinês dos Restos (CRT)[1]

A fundamentação algébrica da NTT reside na estrutura do anel quociente $\mathbb{Z}_p[x]/(x^N + 1)$. Já que $x^N + 1$ fatora-se em N fatores lineares distintos e coprimos,

$$x^N + 1 = \prod_{k=0}^{N-1} (x - \psi^{2k+1}),$$

Homomorfismo de avaliação e o isomorfismo local. Para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, considere o mapa de avaliação

$$\text{ev}_\alpha : \mathbb{Z}_p[x] \rightarrow \mathbb{Z}_p, \quad \text{ev}_\alpha(a(x)) = a(\alpha).$$

Esse mapa é um *homomorfismo de anéis* (preserva soma e produto):

$$\text{ev}_\alpha(a + b) = \text{ev}_\alpha(a) + \text{ev}_\alpha(b), \quad \text{ev}_\alpha(ab) = \text{ev}_\alpha(a) \text{ev}_\alpha(b).$$

Além disso, seu núcleo é exatamente o ideal gerado por $(x - \alpha)$:

$$\ker(\text{ev}_\alpha) = (x - \alpha).$$

De fato, pela Divisão Euclidiana, qualquer $a(x)$ pode ser escrito como

$$a(x) = q(x)(x - \alpha) + r$$

com $r \in \mathbb{Z}_p$, e avaliando em $x = \alpha$ obtemos $a(\alpha) = r$. Logo $a(\alpha) = 0$ se e somente se $(x - \alpha) \mid a(x)$. Pelo **Primeiro Teorema do Isomorfismo** para anéis,

$$\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x - \alpha)} \cong \text{Im}(\text{ev}_\alpha) = \mathbb{Z}_p, \quad [a(x)] \mapsto a(\alpha).$$

O isomorfismo global do CRT como produto de avaliações. Como os fatores $(x - \psi^{2k+1})$ são coprimos dois a dois, o CRT fornece um isomorfismo de anéis

$$\Phi : \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x^N + 1)} \xrightarrow{\cong} \prod_{k=0}^{N-1} \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x - \psi^{2k+1})} \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{N \text{ vezes}}.$$

E, crucialmente, Φ é construído a partir dos homomorfismos de avaliação: a k -ésima componente é exatamente o homomorfismo $\text{ev}_{\psi^{2k+1}}$ (passando ao quociente). Assim, para $[a(x)] \in \mathbb{Z}_p[x]/(x^N + 1)$,

$$\Phi([a(x)]) = (a(\psi^1), a(\psi^3), \dots, a(\psi^{2N-1})) \in \mathbb{Z}_p^N.$$

Multiplicação vira produto ponto a ponto. Como cada $\text{ev}_{\psi^{2k+1}}$ é homomorfismo e Φ é isomorfismo de anéis,

$$\Phi([a(x)] [b(x)]) = \Phi([a(x)]) \cdot \Phi([b(x)])$$

onde o produto do lado direito é componente a componente. Em particular, se $C = \Phi([a(x)b(x)])$, então

$$C_k = (ab)(\psi^{2k+1}) = a(\psi^{2k+1}) b(\psi^{2k+1}).$$

Isso explica formalmente por que a multiplicação no quociente $\mathbb{Z}_p[x]/(x^N + 1)$ (convolução negacíclica dos coeficientes) se traduz em um produto de Hadamard no domínio transformado.

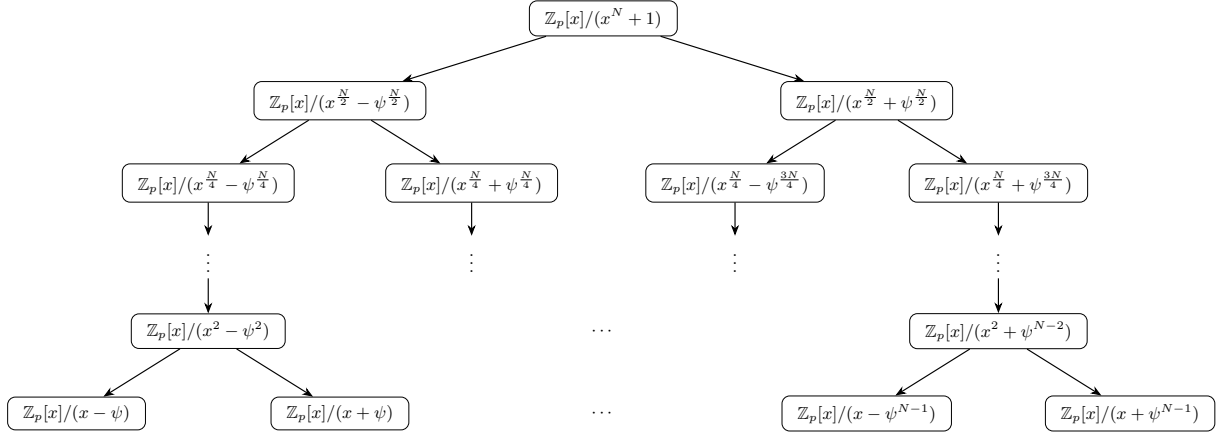


Figure 4: CRT da NTT Negacíclica

9 Transformada Numérica Inversa (INTT)

Como o Teorema Chinês dos Restos garante que a aplicação da NTT é um isomorfismo bijetor entre o anel de polinômios $\mathbb{Z}_p[x]/(x^N + 1)$ e o domínio da frequência, existe uma transformação inversa única capaz de recuperar os coeficientes originais.

Denotamos a inversa multiplicativa de N no corpo \mathbb{Z}_p por N^{-1} , tal que $N \cdot N^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$. A **NTT Negacíclica Inversa (INTT)** é definida formalmente por:

$$x[n] = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \psi^{-(2k+1)n} \pmod{p}$$

Note que o termo $\psi^{-(2k+1)n}$ refere-se à potência do inverso multiplicativo da raiz, ou seja, $\psi^{-1} \equiv \psi^{2N-1} \pmod{p}$.

Representação Matricial

Na forma matricial, a operação de inversão corresponde à resolução do sistema linear $\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x}$. A solução é dada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}$$

Onde a matriz inversa \mathbf{W}_N^{-1} é definida como a conjugada transposta da matriz direta, escalada pelo fator N^{-1} :

$$\mathbf{W}_N^{-1} = N^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \psi^{-3} & \psi^{-6} & \dots & \psi^{-(2N-1)} \\ 1 & \psi^{-6} & \psi^{-10} & \dots & \psi^{-2(2N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{-(2k+1)} & \psi^{-2(2k+1)} & \dots & \psi^{-(N-1)(2k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{-(2N-1)} & \psi^{-2(2N-1)} & \dots & \psi^{-(N-1)(2N-1)} \end{bmatrix}$$

De modo geral, o termo na linha n e coluna k da matriz inversa é:

$$(\mathbf{W}_N^{-1})_{n,k} = N^{-1} \psi^{-(2k+1)n} \pmod{p}$$

Ortogonalidade

A existência da inversa e a validade da fórmula acima decorrem da propriedade de ortogonalidade das raízes negacíclicas no corpo finito \mathbb{Z}_p . Para quaisquer $n, m \in \{0, \dots, N-1\}$, temos:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \psi^{(2k+1)(n-m)} = \begin{cases} N & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Isso garante que o produto das matrizes resulta na identidade:

$$\mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{W}_N = \mathbf{I}$$

9.1 A NTT como uma FFT: Decomposição Radix-2 via CRT

A eficiência da NTT reside na estratégia “dividir para conquistar”. Em vez de avaliar um polinômio $A(x)$ de grau $N-1$ de uma só vez, utilizamos a estrutura algébrica do anel para decompor o problema em dois problemas independentes de tamanho $N/2$.

1. A Fatoração do Módulo

O ponto de partida é a decomposição do polinômio $x^N + 1$. Como ψ é uma raiz primitiva $2N$ -ésima da unidade, temos que $\psi^N \equiv -1 \pmod{p}$, o que implica $(\psi^{N/2})^2 \equiv -1$.

Pelo Teorema Chinês dos Restos (CRT), podemos fatorar o módulo original em dois sub-anéis:

$$x^N + 1 = x^N - (\psi^{N/2})^2 = \underbrace{(x^{N/2} - \psi^{N/2})}_{\text{Módulo Esquerdo}} \cdot \underbrace{(x^{N/2} + \psi^{N/2})}_{\text{Módulo Direito}}$$

Nota: Essa fatoração particiona o conjunto das raízes de $x^N + 1$ (que são as potências ímpares ψ^{2k+1}). As raízes que satisfazem o lado esquerdo continuam na recursão L , e as que satisfazem o lado direito seguem na recursão R .

2. O Colapso da Variável

Considere o polinômio de entrada $A(x)$ com coeficientes $a[i]$. Podemos dividir seu somatório em duas partes: os primeiros $N/2$ termos e os últimos $N/2$ termos.

$$A(x) = \sum_{i=0}^{N/2-1} a[i]x^i + \sum_{i=0}^{N/2-1} a[i + N/2]x^{i+N/2}$$

Colocando $x^{N/2}$ em evidência na segunda metade, obtemos uma estrutura que revela a simetria do problema:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{N/2-1} (a[i] + x^{N/2} \cdot a[i + N/2]) x^i$$

A intuição chave da NTT é projetar essa equação nos sub-anéis definidos no passo 1. Ao fazer isso, a potência $x^{N/2}$ deixa de ser uma variável e torna-se uma constante escalar:

- **Ramo Esquerdo** ($x^{N/2} \equiv \psi^{N/2}$): Substituímos $x^{N/2}$ por $+\psi^{N/2}$.
- **Ramo Direito** ($x^{N/2} \equiv -\psi^{N/2}$): Substituímos $x^{N/2}$ por $-\psi^{N/2}$.

3. A Operação Borboleta (Butterfly)

Ao realizar as substituições acima diretamente no somatório, os coeficientes dos novos polinômios reduzidos (a_L e a_R) surgem imediatamente. Para cada posição $0 \leq i < N/2$:

$$\begin{cases} a_L[i] = a[i] + \psi^{N/2} \cdot a[i + N/2] \pmod{p} \\ a_R[i] = a[i] - \psi^{N/2} \cdot a[i + N/2] \pmod{p} \end{cases}$$

Note que não precisamos calcular polinômios inteiros; a operação acontece pontualmente nos coeficientes. Os valores a_L tornam-se a entrada para a recursão da esquerda, e a_R para a recursão da direita.

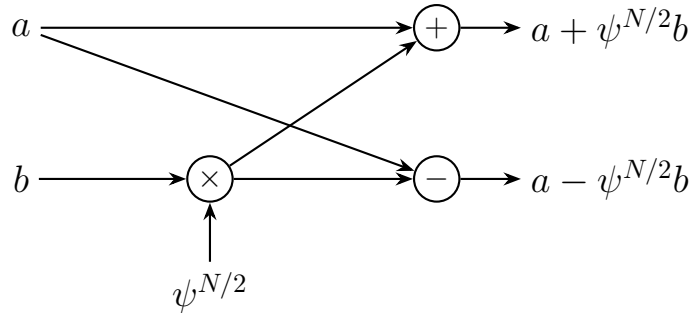


Figure 5: Butterfly NTT

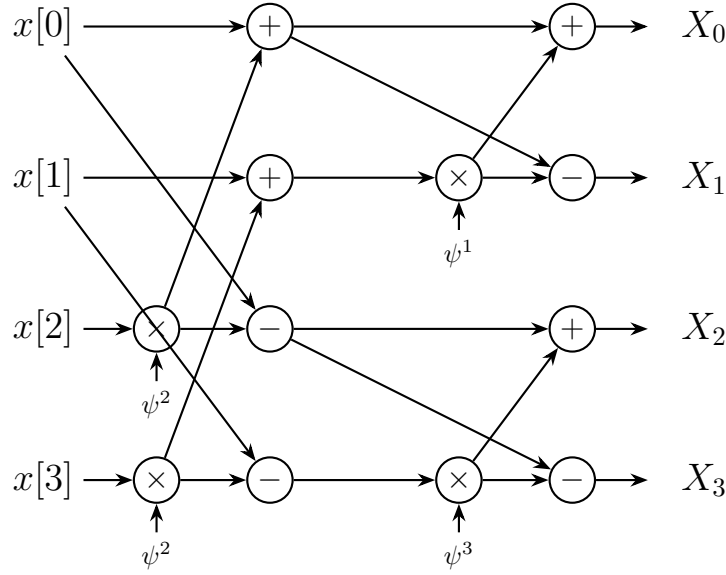


Figure 6: Butterfly NTT

9.2 A INTT via Gentleman-Sande (GS): Reconstrução via CRT

Enquanto a transformação direta (NTT) utiliza a decomposição para reduzir o problema, a transformação inversa (INTT) realiza o caminho oposto: ela combina os resultados dos sub-problemas menores para reconstruir o vetor original. O algoritmo de Gentleman-Sande implementa essa reconstrução de forma eficiente.

1. A Inversão do Sistema Linear

Na etapa da transformação direta, definimos os valores dos sub-ramos (a_L e a_R) através das equações:

$$\begin{cases} a_L[i] = a[i] + \psi^{N/2} \cdot a[i + N/2] \\ a_R[i] = a[i] - \psi^{N/2} \cdot a[i + N/2] \end{cases}$$

Na etapa inversa, conhecemos a_L e a_R (retornados pela recursão) e nosso objetivo é recuperar os coeficientes originais $a[i]$ e $a[i + N/2]$. Trata-se apenas de resolver este sistema linear de duas variáveis.

2. A Lógica da Recuperação

Somando e subtraindo as duas equações do sistema acima, podemos isolar os termos desejados:

- **Recuperando a metade inferior ($a[i]$):** Somamos as equações:

$$a_L[i] + a_R[i] = 2a[i] \implies a[i] = 2^{-1}(a_L[i] + a_R[i])$$

- **Recuperando a metade superior** ($a[i + N/2]$): Subtraímos a segunda da primeira:

$$a_L[i] - a_R[i] = 2\psi^{N/2} \cdot a[i + N/2]$$

Para isolar $a[i + N/2]$, multiplicamos pelo inverso de $2\psi^{N/2}$:

$$a[i + N/2] = 2^{-1}(a_L[i] - a_R[i]) \cdot \psi^{-N/2}$$

Esta manipulação algébrica revela a diferença fundamental na ordem das operações entre a ida (Cooley-Tukey) e a volta (Gentleman-Sande).

3. A Borboleta GS (Inverse Butterfly)

Baseado nas isolações acima, definimos a operação borboleta inversa. Para cada par de entradas $a_L[i]$ e $a_R[i]$ provenientes dos sub-blocos, calculamos:

$$\begin{aligned} a[i] &= 2^{-1}(a_L[i] + a_R[i]) \pmod{p} \\ a[i + N/2] &= 2^{-1}(a_L[i] - a_R[i]) \cdot \psi^{-N/2} \pmod{p} \end{aligned}$$

Observe a mudança estrutural:

1. Na **Ida (CT)**, multiplicamos pelo fator de rotação *antes* de somar/subtrair.
2. Na **Volta (GS)**, subtraímos primeiro e multiplicamos pelo fator de rotação inverso *depois*.

Nota de Implementação: O fator escalar $1/2$ (inverso modular de 2) geralmente não é aplicado a cada camada. Para eficiência, acumula-se o fator total $1/N$ e aplica-se uma única multiplicação escalar ao final de toda a transformação.

4. Fluxo de Dados e Bit-Reversal

O algoritmo Gentleman-Sande é a "transposta" do Cooley-Tukey. Se a NTT direta recebe os dados em ordem natural e os devolve em ordem *bit-reversed* (permutada), a INTT via GS aceita os dados em ordem *bit-reversed* e os reconstrói naturalmente para a ordem linear.

Isso cria um par perfeito:

$$\text{Input Natural} \xrightarrow{\text{CT}} \text{Bit-Reversed} \xrightarrow{\text{Operação Pontual}} \text{Bit-Reversed} \xrightarrow{\text{GS}} \text{Output Natural}$$

Essa simetria elimina a necessidade de reordenamentos de memória (bit-reversal) custosos entre as transformações.

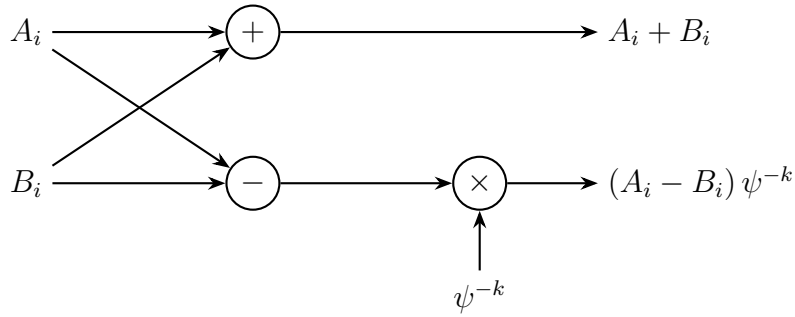


Figure 7: Butterfly INTT

A implementa da NTT negacíclica está a seguir 2

Listing 2: código em SageMath

```

1 def NTT_Negacyclic(A, R, psi):
2
3     n = len(A)
4     if n == 1:
5         return [A[0]]
6
7     A_even = A[0::2]
8     A_odd  = A[1::2]
9
10    psi_sq = psi^2
11    Y_even = NTT_Negacyclic(A_even, R, psi_sq)
12    Y_odd  = NTT_Negacyclic(A_odd, R, psi_sq)
13
14    Y = [R(0)] * n
15
16    w = psi
17
18    half = n // 2
19    for k in range(half):
20        t = w * Y_odd[k]
21
22        Y[k]          = Y_even[k] + t
23        Y[k + half] = Y_even[k] - t
24
25        w *= psi_sq
26
27    return Y
28
29 def INTT_Negacyclic(A, R, psi):
30     n = len(A)
31     # A inversa usa psi^{-1}
32     psi_inv = psi^(-1)

```

```

33
34     Y = NTT_Negacyclic(A, R, psi_inv)
35
36     n_inv = R(n)^(-1)
37     return [y * n_inv for y in Y]

```

A comparação computacional dessa ferramentas pode ser vista na tabela a seguir, onde calculou-se os números de Fibonacci.

Algorithm	Fibonacci index
Algoritmo Naive	44
Algoritmo Linear	566'053
Algoritmo FFT	3'145'816
Algoritmo NTT	24'178'839
Algoritmo GMP	238'961'323

fonte: <https://github.com/SheafificationOfG/Fibsonisheaf>

9.3 Extra: NTT incompleta e a restrição de parâmetros no caso negacíclico

Na multiplicação negacíclica de polinômios no anel

$$\mathbb{Z}_p[x]/(x^N + 1),$$

com N potência de dois, a utilização de uma **NTT completa** exige a existência de uma raiz primitiva de ordem $2N$ módulo p . Quando p é primo, essa condição é equivalente a

$$p \equiv 1 \pmod{2N}.$$

Em aplicações criptográficas baseadas em reticulados, em especial em esquemas de Fully Homomorphic Encryption o valor de N é tipicamente muito grande. Como consequência, a condição acima impõe fortes restrições sobre a escolha do primo p , frequentemente forçando o uso de módulos grandes ou pouco flexíveis, o que impacta tanto a eficiência quanto o ajuste fino de parâmetros de segurança.

Uma forma natural de relaxar essa restrição é empregar a chamada **NTT ℓ -incompleta**. A ideia consiste em interromper o algoritmo da NTT antes de executar todos os $\log_2 N$ estágios do esquema radix-2. Mais precisamente, ao parar após $\log_2 N - \ell$ estágios, a existência da transformada passa a requerer apenas uma raiz da unidade de ordem $2N/2^\ell$ em \mathbb{Z}_p , o que resulta na condição mais fraca

$$p \equiv 1 \pmod{2N/2^\ell}.$$

Dessa forma, o conjunto de primos admissíveis torna-se significativamente maior, permitindo escolhas de parâmetros mais flexíveis.

Do ponto de vista algébrico, a NTT ℓ -incompleta não avalia o polinômio em todas as N raízes da unidade, mas o mapeia para um vetor de $N/2^\ell$ polinômios de menor grau, cada um pertencente a um quociente do tipo

$$\mathbb{Z}_p[x]/(x^{2^\ell} - \psi_i),$$

onde ψ_i são potências apropriadas da raiz disponível. A multiplicação passa então a ser realizada componente a componente nesses anéis menores, seguida de uma transformada inversa incompleta.

O principal custo adicional desse método está na *multiplicação de base* dentro dos anéis $\mathbb{Z}_p[x]/(x^{2^\ell} - \psi_i)$, que, para valores maiores de ℓ , tende a ser implementada por algoritmos quadráticos. No entanto, o trabalho de Paiva et al. [3] mostra que, no contexto de bootstrapping amortizado para esquemas do tipo FHEW/TFHE, esse custo pode ser eliminado. Os autores reformulam a NTT inversa como o produto de duas matrizes de borboleta (controladas por um parâmetro de divisão α) e demonstram que a multiplicação de base da NTT incompleta pode ser *incorporada* ao primeiro estágio dessa decomposição matricial, sem aumento no número assintótico de operações.

Como resultado, obtém-se o que os autores denominam “*NTT incompleta gratuita*”: para valores moderados de ℓ , é possível relaxar substancialmente a condição sobre o primo p sem penalidade computacional relevante, ao mesmo tempo em que se ampliam as opções de parâmetros e se melhora o compromisso entre desempenho e taxa de falha (decryption failure rate).

10 Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao professor doutor *Thales Paiva* pela chance de apresentar o semanário e pelos ensinamentos, gostaria de agradecer também o professor doutor *João Fernando da Cunha Nariyoshi* por esclarecer algumas dúvidas sobre a parte da matemática pura. Foi realmente divertido pesquisar, escrever, desenhar e animar para esse semanário.

11 Apêndice

11.1 DFT como transformação linear

Seja ζ uma raiz primitiva N -ésima da unidade, por exemplo

$$\zeta = e^{-2\pi i/N}.$$

Dado um sinal discreto de comprimento N , com amostras $x[0], x[1], \dots, x[N-1]$ (no domínio do tempo), definimos a DFT como a sequência $X[0], X[1], \dots, X[N-1]$ (no domínio da frequência), onde

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \zeta^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Prova de linearidade

Sejam dois sinais $x[n]$ e $y[n]$ e escalares $a, b \in \mathbb{C}$. Considere a combinação linear

$$z[n] = a x[n] + b y[n].$$

Seja $Z[k]$ a DFT de $z[n]$. Então

$$\begin{aligned} Z[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} z[n] \zeta^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} (a x[n] + b y[n]) \zeta^{kn} \\ &= a \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \zeta^{kn} + b \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \zeta^{kn} = a X[k] + b Y[k]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{DFT}(ax + by) = a \text{DFT}(x) + b \text{DFT}(y),$$

o que mostra que a DFT é uma **transformação linear**.

11.2 Exemplo de convolução negacíclica

Sejam dois sinais x e y de comprimento $N = 3$:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Neste contexto, a frequência fundamental não é a raiz da unidade, mas sim a raiz de $x^N + 1 = 0$. Seja ψ tal que $\psi^N = -1$. Para $N = 3$, temos $\psi^3 = -1$.

Método 1: Convolução no Tempo (Matriz Negacirculante)

A convolução negacíclica $z = x *_{neg} y$ equivale à multiplicação de uma matriz negacirculante H_x pelo vetor y . Note que os elementos que “dão a volta” (acima da diagonal principal) têm sinal invertido:

$$H_x = \begin{bmatrix} x[0] & -x[2] & -x[1] \\ x[1] & x[0] & -x[2] \\ x[2] & x[1] & x[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando $z = H_x y$:

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1) + 0 - 2(1) \\ 2(1) + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Método 2: Diagonalização (Domínio da Frequência)

A matriz negacirculante H_x é diagonalizada por uma variante da DFT que utiliza potências ímpares de ψ (raízes de $x^N + 1$). Matematicamente:

$$H_x = \mathcal{F}^{-1} \Lambda_x \mathcal{F}$$

onde Λ_x contém os autovalores de H_x , que correspondem à avaliação do polinômio $x(z)$ nas raízes de $z^N = -1$.

Para verificar os autovalores (o espectro de x), calculamos o polinômio característico de H_x :

$$\det(H_x - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & -2 \\ 2 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Expandindo o determinante (regra de Sarrus):

$$(1 - \lambda)^3 - (2)(2)(2) = 0 \implies (1 - \lambda)^3 = 8$$

As raízes para $(1 - \lambda)$ são as raízes cúbicas de 8. Sabemos que $8 = 8 \cdot 1$, mas no contexto complexo as raízes são 2, $2\zeta_3$ e $2\zeta_3^2$. Logo:

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_0 = 2 &\implies \lambda_0 = -1 \\ 1 - \lambda_1 = 2\zeta_3 &\implies \lambda_1 = 1 - 2\zeta_3 \\ 1 - \lambda_2 = 2\zeta_3^2 &\implies \lambda_2 = 1 - 2\zeta_3^2 \end{aligned}$$

Estes valores λ_k correspondem à Transformada Negacíclica (NTT sobre $x^N + 1$) do vetor x , permitindo calcular a convolução via produto ponto a ponto.

Verificação do Autovetor

Verificamos agora se o autovetor v_1 da base Negacíclica (coluna de \mathcal{F}^{-1} associada à raiz ψ), dado por $v_1 = [1, \psi^{-1}, \psi^{-2}]^T = [1, -\psi^2, -\psi]^T$, satisfaz $H_x v_1 = \lambda_1 v_1$.

Lado esquerdo ($H_x v_1$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\psi^2 \\ -\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\psi \\ 2 - \psi^2 \\ -2\psi^2 - \psi \end{bmatrix}$$

Lado direito ($\lambda_1 v_1$), onde o autovalor é $\lambda_1 = x(\psi) = 1 + 2\psi$:

$$(1 + 2\psi) \begin{bmatrix} 1 \\ -\psi^2 \\ -\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\psi \\ -\psi^2 - 2\psi^3 \\ -\psi - 2\psi^2 \end{bmatrix}$$

Utilizando a propriedade $\psi^3 = -1$, simplificamos o termo do meio: $-\psi^2 - 2(-1) = 2 - \psi^2$. A igualdade é satisfeita, confirmando que as raízes de $x^N + 1$ geram a base natural de H_x .

Representação Matricial da Diagonalização

Primeiro, calculamos os vetores transformados $X = \text{NTT}(x)$ e $Y = \text{NTT}(y)$ avaliando os polinômios nas raízes de $z^3 = -1$:

$$X = \begin{bmatrix} x(-1) \\ x(\psi) \\ x(\psi^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + 2\psi \\ 1 + 2\psi^2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y(-1) \\ y(\psi) \\ y(\psi^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 + \psi^2 \\ 1 + \psi^4 \end{bmatrix}$$

**Nota: $y(\psi) = 1 + 0\psi + 1\psi^2$. Para o terceiro termo, usamos $\psi^4 = -\psi$, logo $1 - \psi$.*

Agora, construímos a matriz diagonal $\Lambda_x = \text{diag}(X)$. A operação de convolução no domínio da frequência ($Z = \Lambda_x Y$) torna-se:

$$\mathbf{Z} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\psi^2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz Diagonal } (\Lambda_x)} \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\psi^2 \\ 1-\psi \end{bmatrix}$$

Executando o produto ponto a ponto:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -2 \\ (1+2\psi)(1+\psi^2) \\ (1+2\psi^2)(1-\psi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1+\psi^2+2\psi+2\psi^3 \\ 1-\psi+2\psi^2-2\psi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1+2\psi+\psi^2 \\ 3-\psi+2\psi^2 \end{bmatrix}$$

*Simplificações usando $\psi^3 = -1$.

Retorno ao Tempo (INTT)

Finalmente, aplicamos a transformada inversa. O vetor resultante z deve coincidir com o cálculo temporal $[-1, 2, 1]^T$. Ao reconstruir o polinômio $z(\omega)$ a partir dos valores em \mathbf{Z} , obtemos os coeficientes:

$$z = \text{INTT}(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Isso verifica que:

$$z(\psi) = -1 + 2\psi + \psi^2$$

O que coincide exatamente com o segundo elemento do vetor \mathbf{Z} calculado acima, fechando o ciclo da prova numérica.

11.3 Determinação unívoca do polinômio

Theorem 1 (Unicidade via matriz de Vandermonde). *Sejam x_0, \dots, x_{N-1} escalares dois a dois distintos em um corpo \mathbb{K} (e.g., \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{F}_p), e sejam $y_0, \dots, y_{N-1} \in \mathbb{K}$. Existe um **único** polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{N-1}x^{N-1} \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p(x_i) = y_i$ para todo $i = 0, \dots, N-1$.*

Proof. Escreva $p(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k$. Impor as condições $p(x_i) = y_i$ para $i = 0, \dots, N-1$ gera o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{N-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N-1} & x_{N-1}^2 & \cdots & x_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Denote essa matriz por V (matriz de Vandermonde, i.e. $V_{i,j} = x_i^{j-1}$ para todo os índices i, j), o vetor de coeficientes por a e o vetor de valores por y ; então o sistema é

$$Va = y.$$

O determinante de Vandermonde é dado por

$$\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq N-1} (x_j - x_i).$$

Como os x_i são dois a dois distintos, temos $x_j - x_i \neq 0$ para $i \neq j$, logo $\det(V) \neq 0$. Portanto, V é invertível e o sistema $Va = y$ tem **solução única**, dada por

$$a = V^{-1}y.$$

Concluimos que existe um único vetor de coeficientes (a_0, \dots, a_{N-1}) , isto é, um **único** polinômio $p(x)$ de grau $\leq N - 1$ que interpola os N pontos. \square

References

- [1] Henri J. Nussbaumer. *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms*. 2nd ed. Springer Berlin, Heidelberg, 1982. DOI: 10.1007/978-3-642-81897-4.
- [2] Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. 3rd. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2009.
- [3] Thales B. Paiva et al. *Faster amortized bootstrapping using the incomplete NTT for free*. <https://eprint.iacr.org/2025/696.pdf>. IACR Cryptology ePrint Archive. 2025.