

Escola Politécnica-USP
LARC



Seminário NTT

Resumo

Contents

1	A Dualidade entre Tempo e Frequênci a	2
2	Transformada de Fourier Contínua (CTFT)	2
3	Transformada Discreta de Fourier (DFT)	2
3.1	Definição da IDFT	3
4	A Multiplicação de Polinômios e a Complexidade Computacional	4
5	A Fast Fourier Transform	5
6	Problemas da FFT	7
7	Number Theoretic Transform (NTT)	7
7.1	Fundamentos	7
8	O Isomorfismo via Teorema Chinês dos Restos (CRT)	11
9	Transformada Numérica Inversa (INTT)	12
9.1	A NTT como uma FFT: Decomposição Radix-2 via CRT	13
9.2	A INTT via Gentleman-Sande (GS): Reconstrução via CRT	15
10	Apêndice	18
10.1	Exemplo de convolução circular	18
10.2	Determinação unívoca do polinomio	20

1 A Dualidade entre Tempo e Frequência

A Transformada de Fourier é uma operação matemática que mapeia uma função do domínio do tempo (ou espaço) para o seu domínio dual: a frequência. Essa transição é extremamente útil, pois propriedades que são complexas de analisar no tempo tornam-se claras no espectro de frequências.

Esta ferramenta é um pilar fundamental em diversas áreas do conhecimento:

- **Matemática Pura:** Essencial na Teoria Analítica dos Números e no estudo de Equações Diferenciais Parciais (EDPs).
- **Física Moderna:** É a base matemática do **Princípio da Incerteza de Heisenberg** na Mecânica Quântica, onde a posição e o momento de uma partícula formam um par de variáveis conjugadas de Fourier.
- **Engenharia:** Processamento de sinais, compressão de dados (MP3, JPEG) e telecomunicações.

2 Transformada de Fourier Contínua (CTFT)

Para uma função contínua $g(t)$, a transformada é definida pela integral:

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi ift} dt$$

Elá pode ser entendida como um produto interno (uma projeção) do sinal com todos as frequencias da reta real $\langle g, e^{-2\pi ift} \rangle$, que, devido a ortogonalidade das frequências diferentes e que funções bem comportadas podem ser decompostas em séries de autofunções e^{-ift} , consegue extrair extamente as frequências do sinal. Apesar de sua elegância teórica, a CTFT apresenta desafios para a aplicação prática em sistemas digitais:

1. **Natureza Analítica:** A resolução de integrais impróprias exige uma manipulação simbólica que é difícil de implementar em computadores comuns.
2. **Limite Infinito:** A definição pressupõe que conhecemos o sinal de $-\infty$ a $+\infty$, o que é impossível em cenários reais.
3. **Amostragem Finita:** Na prática, os sinais são capturados de forma discreta (amostras) e por um tempo limitado, o que torna a integral contínua inaplicável.

3 Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Para viabilizar o processamento em computadores, utilizamos a **DFT**. Ela opera sobre uma sequência finita de N amostras, mapeando dados discretos no tempo para dados discretos na frequência, devido ao teorema de Teorema de amostragem de Nyquist-Shannon [1 colocar uma referência], um sinal de frequência f precisa de $N \geq f/2$ para ser unicamente determinado.

A DFT é definida da seguinte forma:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}$$

Para $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Diferente da versão contínua, a DFT lida com somatórios e vetores numéricos, permitindo que a teoria de Fourier seja aplicada em qualquer dispositivo digital. É possível provar que a DFT é um transformacão linear, logo, pode ser representada matricialmente.

Seja $\zeta_N = e^{-i \frac{2\pi}{N}}$. A representação matricial da DFT para $n = 0, 1, \dots, N - 1$ é:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta_N^1 & \zeta_N^2 & \cdots & \zeta_N^{N-1} \\ 1 & \zeta_N^2 & \zeta_N^4 & \cdots & \zeta_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_N^{N-1} & \zeta_N^{2(N-1)} & \cdots & \zeta_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

3.1 Definição da IDFT

A reconstrução do sinal original no domínio do tempo a partir de suas amostras de frequência é realizada pela IDFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \zeta_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

Onde $\zeta_N^{-nk} = e^{i \frac{2\pi}{N} nk}$. Matricialmente, a IDFT é dada por:

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta_N^{-1} & \zeta_N^{-2} & \cdots & \zeta_N^{-(N-1)} \\ 1 & \zeta_N^{-2} & \zeta_N^{-4} & \cdots & \zeta_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_N^{-(N-1)} & \zeta_N^{-2(N-1)} & \cdots & \zeta_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

Percebe-se que nesse caso discreto, a DFT e IDFT atuam como uma matriz mudança de base, saindo da base do tempo e indo para base das raízes unitárias

A DFT pode ser vista de outra óptica, como avaliação de polinomios. Seja

$$a(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$$

e tome $\zeta_N = e^{-i \frac{2\pi}{N}}$ seja uma N -ésima raiz primitiva da unidade. Define

$$A_k := a(\zeta_N^k).$$

Então

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} a_n (\zeta_N^k)^n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \zeta_N^{kn},$$

o que é exatamente a formulação da DFT, para $a_n \equiv x[n]$ e $A_n \equiv X[n]$, oportamente, a IDFT é interpretada como interpolação de polinômios:

Dados os valores $\{A_k\}_{k=0}^{N-1}$, ela reconstrói os coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{N-1}$ do único polinômio de grau $N - 1$ que satisfaz $a(\zeta_N^k) = A_k$ para todo k . Explicitamente,

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k \zeta_N^{-kn}.$$

Assim, DFT é *avaliar* em raízes da unidade e IDFT é *interpolar* (recuperar os coeficientes) a partir dessas avaliações. (Essa perspectiva baseia-se na determinação unívoca do polinômio de grau $N - 1$ por N pontos veja a seção 10.2 para demonstração desse fato)

4 A Multiplicação de Polinômios e a Complexidade Computacional

Um problema simplificado pela mudança de domínio é a multiplicação de polinomios. Tome os polinomios $f(x)$ e $g(x)$ de grau $N - 1$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^{N-1} b_j x^j$$

Na abordagem clássica , o produto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é obtido distribuindo-se cada termo de f sobre todos os termos de g . Este processo resulta em um novo polinômio de grau $2N - 2$:

$$h(x) = \sum_{k=0}^{2N-2} c_k x^k$$

onde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Nesta metodologia, o cálculo de cada coeficiente c_k exige múltiplas operações de produto e soma, resultando em uma complexidade assintótica $O(n^2)$. Para polinômios com grandes volumes de coeficientes, este custo computacional torna o método inviável.

A conexão entre a multiplicação de polinômios e a análise de Fourier vem do fato de que, se $h(x) = f(x)g(x)$, então os coeficientes c_k de h são dados pela **convolução linear** dos coeficientes de f e g :

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Neste trabalho, devido ao foco na NTT e ao anel quociente $\mathbb{Z}_p[x]/(x^N + 1)$, trabalhamos com a **convolução circular** (de comprimento n), definida por

$$c_k = \sum_{i=0}^{N-1} a_i b_{(k-i) \bmod n}, \quad k = 0, \dots, N - 1.$$

Teorema da Convolução: a transformada de uma convolução no domínio do tempo (ou espaço) é o produto ponto a ponto (Hadamard) das transformadas no domínio da frequência:

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \odot \mathcal{F}(g).$$

Assim, o cálculo custoso da convolução é convertido em um produto ponto a ponto, pois a base de Fourier diagonaliza o operador de convolução (circulante). Com a transformada direta ingênuo o custo ainda é $O(n^2)$, não há ganho da multiplicação clássica de polinômios.

Uma exemplo para o convencimento do leitor foi disposto no apendice 10.1

5 A Fast Fourier Transform

A FFT (Fast Fourier Transform) é uma maneira de otimizar o calculo da DFT.

O algoritmo da FFT foi redescoberta por Cooley e Tukey em 1965, uma vez que Gauss ja tinha utilzado um algoritmo semelhante para calcular a orbitas de asteroides em 1805.

O algoritmo se baseia em **dividir para conquistar**.

Relembrando

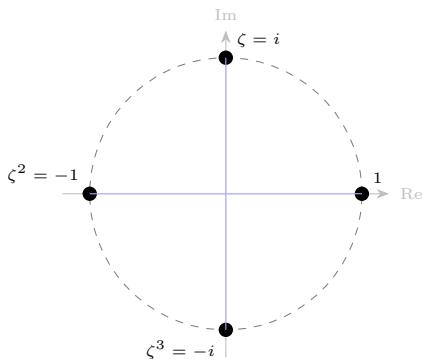
As raízes unitárias possuem propriedades cíclicas e certas simetrias que permitem a economia nos cálculos, vejamos um exemplo.

$$\zeta_4^1 = e^{-i\frac{2\pi}{4}} = e^{-i90^\circ} = -i$$

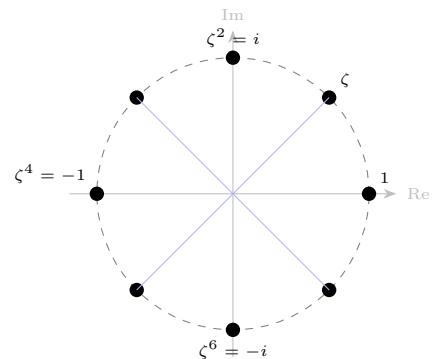
$$\zeta^1 = -i \qquad \zeta^2 = -1$$

$$\zeta^3 = i \qquad \zeta^4 = 1$$

por isso, percebe-se que, a cada 2 "deslocamentos", o valor se torna o oposto, como ilustrado na figura:



(a) 4-ésimas raízes da unidade



(b) 8-ésimas raízes da unidade

Figure 1: Comparação entre as raízes da unidade no plano complexo.

De forma mais geral:

$\zeta_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$, uma raiz N -ésima primitiva da unidade. Então para todo inteiro a ,

$$\zeta_N^{a+\frac{N}{2}} = -\zeta_N^a.$$

Alem de que, pela periodicidade $\zeta_N^{a+N} = \zeta_N^a$.

Para esse caso a DFT é representada desse modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

Voltando a FFT, o algoritmo decompõe uma DFT de tamanho N em duas sub-transformadas de tamanho $N/2$, separando os índices pares e ímpares da sequência original:

$$X[k] = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m] \zeta_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1] \zeta_N^{(2m+1)k}$$

$$\text{Usando } \zeta_N^2 = \zeta_{N/2} : \quad \zeta_N^{2mk} = (\zeta_N^2)^{mk} = \zeta_{N/2}^{mk}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m] \zeta_{N/2}^{mk} + \zeta_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1] \zeta_{N/2}^{mk} \\ &= E[k] + \zeta_N^k O[k], \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{aligned}$$

Esta estrutura permite calcular dois valores de saída ($X[k]$ e $X[k + N/2]$) utilizando os mesmos resultados intermediários, através da denominada **operação borboleta** (*butterfly operation*):

1. $X[k] = E[k] + \zeta_N^k O[k]$
2. $X[k + N/2] = E[k] - \zeta_N^k O[k]$

como pode ser visto na imagem

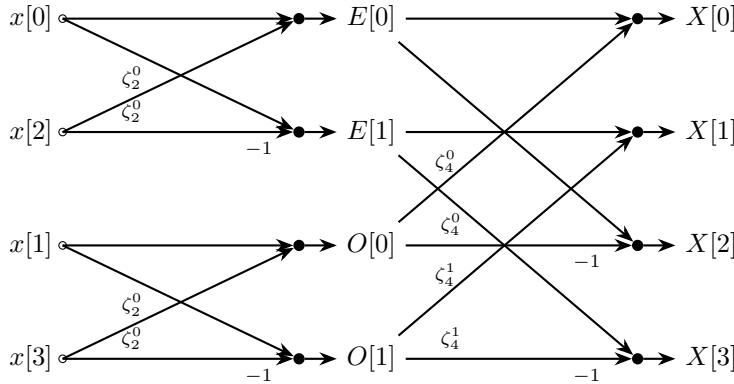


Figure 2: butterfly radix-2

o a implementacao em sage esta no codigo1

Listing 1: Implementação do algoritmo FFT em SageMath

```

1 def fft(a, omega):
2     n = len(a)
3     if n == 1:
4         return a[:]
5
6
7     a_par = fft(a[0::2], omega^2)
8     a_impar = fft(a[1::2], omega^2)
9
10    A = [0] * n
11    w = 1
12    half = n // 2
13    for k in range(half):
14        t = w * a_impar[k]
15        A[k]           = a_par[k] + t
16        A[k + half]   = a_par[k] - t
17        w *= omega
18    return A

```

Desse modo, reduzimos a complexidade da transformada de $O(n^2)$ para $O(n \cdot \log n)$. Por causa disso, podemos utilizar a FFT, junto com o **teorema da convolução**, para multiplicar polinomios em $O(n \cdot \log n)$

6 Problemas da FFT

Um dos problemas da FFT é que ela trabalha com ponto flutuante, o que, para computadores, é um grande problema que pode causar erro de arredondamentos e, assim causar uma falha nos esquemas criptográficos. Além disso, na convolução linear, o polinômio dobra de tamanho a cada convolução o que rapidamente torna-se um problema tanto computacional quanto de armazenamento.

Solução: utilizar uma transformada que utiliza apenas números exatos

7 Number Theoretic Transform (NTT)

7.1 Fundamentos

As propriedades que usamos na FFT — em especial a existência de uma raiz N -ésima da unidade ζ_N e o fato de que suas potências percorrem uniformemente o círculo — têm um análogo perfeito em teoria dos números, dentro de corpos (ou anéis) finitos. Isso não é coincidência: a FFT nada mais é do que a transformada de Fourier no grupo cíclico $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, e a mesma construção existe em outros contextos algébricos.

Mais formalmente, se ζ_N é uma raiz N -ésima primitiva da unidade, então o conjunto de todas as N -ésimas raízes

$$\mu_N = \{1, \zeta_N, \zeta_N^2, \dots, \zeta_N^{N-1}\}$$

forma um grupo multiplicativo cíclico de ordem N . Existe um isomorfismo natural de grupos

$$\varphi : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mu_N, \quad \varphi([k]) = \zeta_N^k,$$

onde o lado esquerdo usa a soma módulo N e o lado direito usa multiplicação:

$$\varphi([k + \ell]) = \zeta_N^{k+\ell} = \zeta_N^k \zeta_N^\ell = \varphi([k]) \varphi([\ell]).$$

Raiz Primitiva e Estrutura Negacíclica

Diferente da DFT complexa, onde raízes da unidade sempre existem para qualquer N , a NTT exige que o corpo finito \mathbb{Z}_p , isto é, os inteiros $(\text{mod } p)$, sendo p um primo, suporte a ordem da transformada.

Para a NTT Negacíclica, utilizada para realizar a multiplicação polinomial módulo $x^N + 1$, precisamos de uma raiz primitiva $2N$ -ésima da unidade em \mathbb{Z}_p , que denotaremos por ψ . Isso implica que:

1. $\psi^{2N} \equiv 1 \pmod{p}$;
2. $\psi^N \equiv -1 \pmod{p}$.

Para garantir a existência desse elemento, a ordem $2N$ deve dividir a ordem do grupo multiplicativo do corpo. Portanto, o primo p deve satisfazer:

$$2N \mid (p - 1) \quad \text{i.e. } 2N \text{ divide } (p-1)$$

Ou seja, $p \equiv 1 \pmod{2N}$.

Como $2N \mid (p - 1)$, em particular temos $p \nmid N$ (i.e. $\gcd(p, N) = 1$); logo N possui inverso em \mathbb{Z}_p .

Agora, trataremos da estrutura algébrica. A NTT Negacíclica é definida no anel quociente

$$R = \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x^N + 1)}$$

(a imagem 3 ilustra a sequencia das duas operações visualmente.)

Ela pode ser vista como a avaliação do polinômio nas raízes da equação $x^N + 1 = 0$, que correspondem às potências ímpares de ψ . A transformada é definida por:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \psi^{(2k+1)n} \pmod{p}$$

Na forma matricial:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

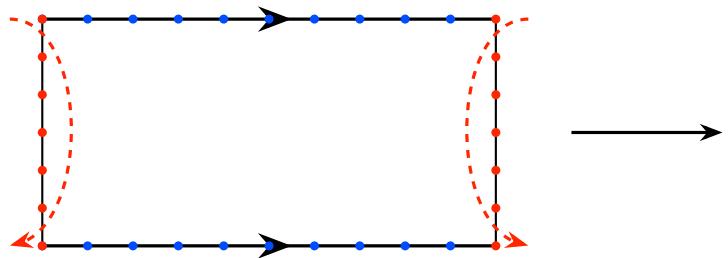
Neste caso, a matriz de transformação \mathbf{W}_N difere da versão cíclica padrão, pois seus coeficientes seguem a estrutura das raízes negacíclicas:

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \psi^3 & \psi^6 & \cdots & \psi^{3(N-1)} \\ 1 & \psi^5 & \psi^{10} & \cdots & \psi^{5(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{(2k+1)} & \psi^{(2k+1)2} & \cdots & \psi^{(2k+1)(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{(2N-1)} & \psi^{(2N-1)2} & \cdots & \psi^{(2N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

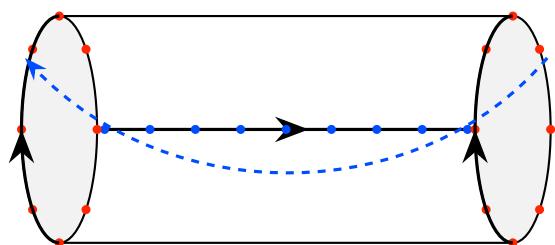
De forma geral, o termo na linha k e coluna n da matriz é dado por:

$$(\mathbf{W}_N)_{k,n} = \psi^{(2k+1)n} \pmod{p}, \quad 0 \leq k, n \leq N-1$$

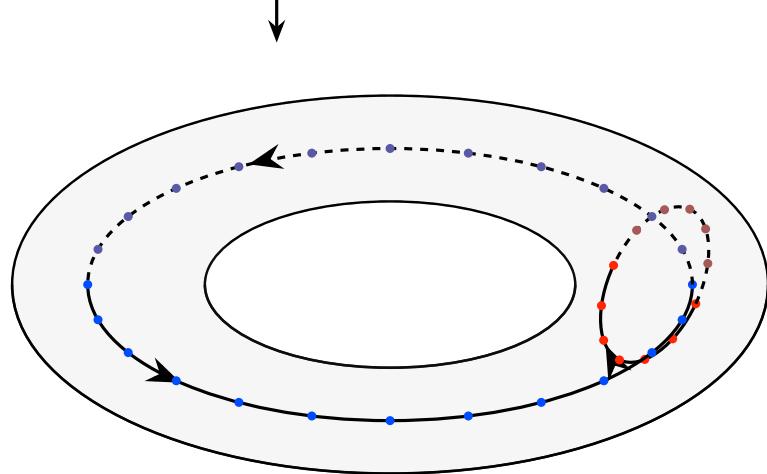
1. Colar lados horizontais (Passo \mathbb{Z}_p)



Obtém-se um cilindro



2. Colar lados verticais (Passo $/(x^N + 1)$)



3. Obtém-se um Toro Discreto

• Direção $/(x^N + 1)$ • Direção \mathbb{Z}_p

Figure 3: representação das transformações

8 O Isomorfismo via Teorema Chinês dos Restos (CRT)

A fundamentação algébrica da NTT reside na estrutura do anel quociente $\mathbb{Z}_p[x]/\langle x^N + 1 \rangle$. Dado que $x^N + 1$ fatora-se em N binômios lineares distintos ($x - \psi^{2k+1}$), o CRT estabelece uma equivalência entre o anel original e o produto de anéis menores.

Para compreender a natureza desses anéis menores, invocamos o conceito de *homomorfismo*. Considere o anel quociente genérico $\mathbb{Z}_p[x]/\langle x - \alpha \rangle$. Pela Divisão Euclidiana, qualquer polinômio $a(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ pode ser escrito unicamente como:

$$a(x) = q(x) \cdot (x - \alpha) + r$$

onde o grau de r deve ser estritamente menor que o grau do divisor ($x - \alpha$). Como o divisor tem grau 1, o resto r é necessariamente um escalar constante ($r \in \mathbb{Z}_p$).

No anel quociente, impomos que $x - \alpha \equiv 0$, ou seja, $x \equiv \alpha$. Ao aplicarmos essa equivalência (ou avaliarmos a equação em $x = \alpha$), o termo que contém o divisor se anula:

$$a(\alpha) = q(\alpha) \cdot (\underbrace{\alpha - \alpha}_0 + r) \implies a(\alpha) = r$$

Portanto, a classe de equivalência de $a(x)$ módulo $(x - \alpha)$ é univocamente representada pelo escalar $a(\alpha)$. Isso estabelece o isomorfismo local:

$$\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x - \alpha \rangle} \cong \mathbb{Z}_p \quad \text{via o mapa} \quad [a(x)] \mapsto a(\alpha)$$

Com essa intuição firmada, podemos expandir explicitamente o isomorfismo global Φ garantido pelo CRT. A transformação mapeia o polinômio $a(x)$ diretamente para o vetor de suas avaliações nas raízes de $x^N + 1$:

$$\begin{aligned} \Phi : \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^N + 1 \rangle} &\xrightarrow{\cong} \bigotimes_{k=0}^{N-1} \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x - \psi^{2k+1} \rangle} \\ &\cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{N \text{ vezes}} \end{aligned}$$

A ação de Φ sobre um elemento $a(x)$ é dada explicitamente por:

$$\Phi(a(x)) = (a(\psi^1), a(\psi^3), \dots, a(\psi^{2N-1})) \in \mathbb{Z}_p^N$$

Neste domínio transformado, a operação de multiplicação de dois polinômios $a(x)$ e $b(x)$ ocorre componente a componente. Se $C = \Phi(a(x) \cdot b(x))$, então a k -ésima componente do vetor resultante é:

$$C_k = (a \cdot b)(\psi^{2k+1}) = a(\psi^{2k+1}) \cdot b(\psi^{2k+1})$$

Isso demonstra formalmente por que a convolução cíclica (ou negacíclica) no domínio do tempo se traduz em um produto de Hadamard (ponto a ponto) no domínio da frequência.

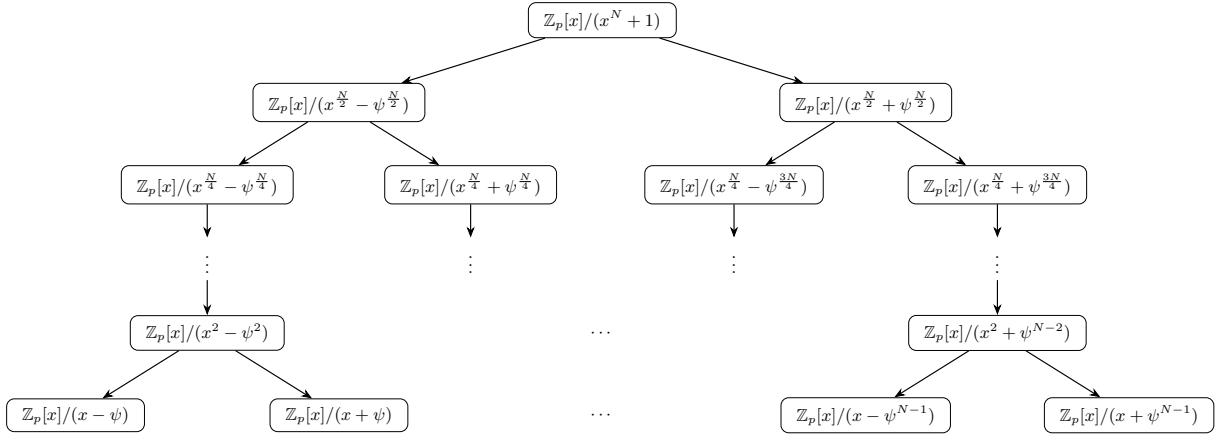


Figure 4: CRT da NTT Negacíclica

9 Transformada Numérica Inversa (INTT)

Como o Teorema Chinês dos Restos garante que a aplicação da NTT é um isomorfismo bijutor entre o anel de polinômios $\mathbb{Z}_p[x]/(x^N + 1)$ e o domínio da frequência, existe uma transformação inversa única capaz de recuperar os coeficientes originais.

Denotamos a inversa multiplicativa de N no corpo \mathbb{Z}_p por N^{-1} , tal que $N \cdot N^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$. A **NTT Negacíclica Inversa (INTT)** é definida formalmente por:

$$x[n] = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \psi^{-(2k+1)n} \pmod{p}$$

Note que o termo $\psi^{-(2k+1)n}$ refere-se à potência do inverso multiplicativo da raiz, ou seja, $\psi^{-1} \equiv \psi^{2N-1} \pmod{p}$.

Representação Matricial

Na forma matricial, a operação de inversão corresponde à resolução do sistema linear $\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x}$. A solução é dada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}$$

Onde a matriz inversa \mathbf{W}_N^{-1} é definida como a conjugada transposta da matriz direta, escalada pelo fator N^{-1} :

$$\mathbf{W}_N^{-1} = N^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \psi^{-3} & \psi^{-6} & \cdots & \psi^{-(2N-1)} \\ 1 & \psi^{-6} & \psi^{-10} & \cdots & \psi^{-2(2N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{-(2k+1)} & \psi^{-2(2k+1)} & \cdots & \psi^{-(N-1)(2k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{-(2N-1)} & \psi^{-2(2N-1)} & \cdots & \psi^{-(N-1)(2N-1)} \end{bmatrix}$$

De modo geral, o termo na linha n e coluna k da matriz inversa é:

$$(\mathbf{W}_N^{-1})_{n,k} = N^{-1} \psi^{-(2k+1)n} \pmod{p}$$

Ortogonalidade

A existência da inversa e a validade da fórmula acima decorrem da propriedade de ortogonalidade das raízes negacíclicas no corpo finito \mathbb{Z}_p . Para quaisquer $n, m \in \{0, \dots, N-1\}$, temos:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \psi^{(2k+1)(n-m)} = \begin{cases} N & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Isso garante que o produto das matrizes resulta na identidade:

$$\mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{W}_N = \mathbf{I}$$

9.1 A NTT como uma FFT: Decomposição Radix-2 via CRT

A eficiência da NTT reside na estratégia “dividir para conquistar”. Em vez de avaliar um polinômio de grau $N-1$ de uma só vez, utilizamos a estrutura algébrica do anel para decompor o problema em dois problemas independentes de tamanho $N/2$.

1. A Fatoração do Módulo

O ponto de partida é a decomposição do polinômio $X^N + 1$. Como ψ é uma raiz primitiva $2N$ -ésima, temos que $\psi^N \equiv -1$. Isso implica que o termo $\psi^{N/2}$ atua como uma “raiz quadrada de -1” no corpo finito.

Podemos então ver $X^N + 1$ como uma diferença de quadrados:

$$X^N + 1 = X^N - (\psi^{N/2})^2 = (X^{N/2} - \psi^{N/2}) \cdot (X^{N/2} + \psi^{N/2})$$

O Teorema Chinês dos Restos (CRT) garante que resolver o problema no anel original é equivalente a resolvê-lo simultaneamente nestes dois sub-anéis menores.

2. O Colapso da Variável

Considere o polinômio de entrada $A(X)$ dividido em sua metade inferior (A_{lo}) e superior (A_{hi}):

$$A(X) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]X^n + X^{N/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+N/2]X^n$$

A intuição chave da NTT é que, ao projetarmos $A(X)$ nos sub-anéis definidos pelos fatores acima, a potência $X^{N/2}$ deixa de ser uma variável e colapsa em uma constante:

- **No ramo esquerdo** (módulo $X^{N/2} - \psi^{N/2}$): Temos a equivalência $X^{N/2} \equiv \psi^{N/2}$.
- **No ramo direito** (módulo $X^{N/2} + \psi^{N/2}$): Temos a equivalência $X^{N/2} \equiv -\psi^{N/2}$.

Isso simplifica drasticamente o cálculo, pois reduz a multiplicação polinomial a somas ponderadas.

3. A Operação Borboleta (Butterfly)

Substituindo as equivalências acima na expressão de $A(X)$, obtemos as fórmulas para os novos polinômios $A_L(X)$ e $A_R(X)$ de grau $N/2 - 1$. Em termos dos coeficientes, para cada $0 \leq i < N/2$:

$$\boxed{\begin{aligned} x_L[i] &= x[i] + \psi^{N/2} \cdot x[i+N/2] \pmod{p} \\ x_R[i] &= x[i] - \psi^{N/2} \cdot x[i+N/2] \pmod{p} \end{aligned}}$$

Esta é a clássica operação “borboleta”. Observe a simetria: os mesmos valores de entrada ($x[i]$ e $x[i+N/2]$) são usados para calcular ambas as saídas, diferenciando-se apenas pelo sinal da operação.

O processo é então aplicado recursivamente: x_L torna-se a entrada para uma NTT de tamanho $N/2$, e x_R para outra, até que o tamanho do problema seja trivial (1).

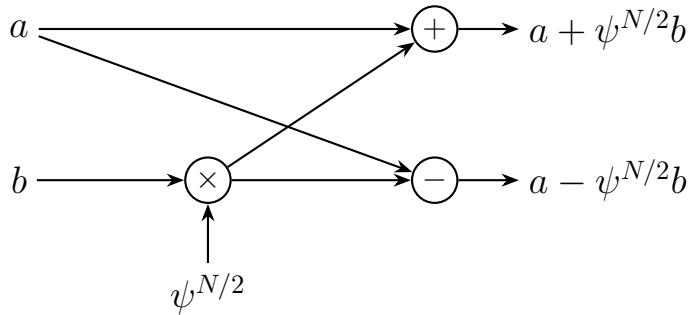


Figure 5: Butterfly NTT

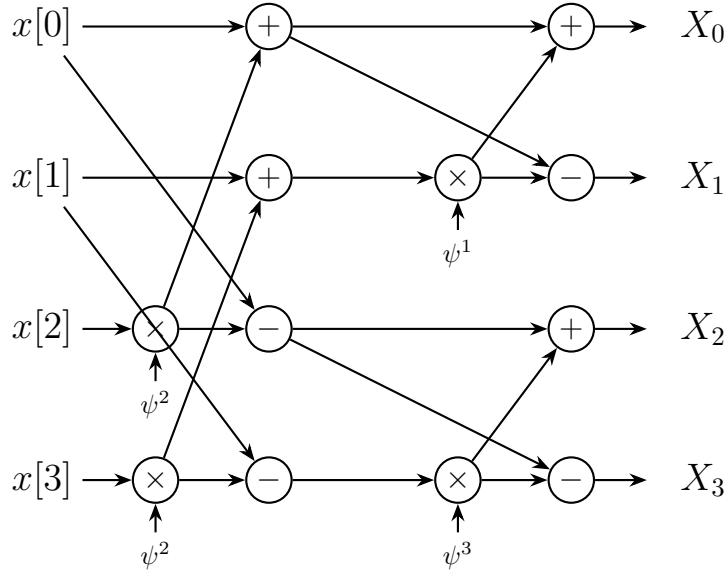


Figure 6: Butterfly NTT

9.2 A INTT via Gentleman-Sande (GS): Reconstrução via CRT

Enquanto a transformação direta (Forward NTT) utiliza a estratégia de decomposição para reduzir o grau do polinômio, a transformação inversa (INTT) realiza o caminho oposto: ela combina pares de polinômios menores para reconstruir o polinômio original modulo $X^N + 1$. O algoritmo de Gentleman-Sande implementa essa reconstrução de forma eficiente.

1. O Problema da Interpolação

Na etapa inversa, começamos com dois polinômios "metade" recuperados dos sub-anéis:

- $A_L(X)$: O resultado associado ao ramo $X^{N/2} - \psi^{N/2}$.
- $A_R(X)$: O resultado associado ao ramo $X^{N/2} + \psi^{N/2}$.

Nosso objetivo é encontrar o polinômio único $A(X) = A_{lo}(X) + X^{N/2}A_{hi}(X)$ que satisfaz:

$$\begin{cases} A(X) \equiv A_L(X) \pmod{X^{N/2} - \psi^{N/2}} \\ A(X) \equiv A_R(X) \pmod{X^{N/2} + \psi^{N/2}} \end{cases}$$

2. A Lógica da Recuperação

Lembrando que no sub-anel esquerdo $X^{N/2} \equiv \psi^{N/2}$ e no direito $X^{N/2} \equiv -\psi^{N/2}$, podemos escrever o sistema linear para os componentes A_{lo} e A_{hi} :

$$\begin{aligned} A_L &= A_{lo} + \psi^{N/2}A_{hi} \\ A_R &= A_{lo} - \psi^{N/2}A_{hi} \end{aligned}$$

Para isolar A_{lo} e A_{hi} , basta somar e subtrair as equações:

- **Soma:** $A_L + A_R = 2A_{lo} \implies A_{lo} = \frac{1}{2}(A_L + A_R)$
- **Subtração:** $A_L - A_R = 2\psi^{N/2}A_{hi} \implies A_{hi} = \frac{1}{2}\psi^{-N/2}(A_L - A_R)$

Esta estrutura algébrica revela a diferença fundamental entre a borboleta da ida (Cooley-Tukey) e a da volta (Gentleman-Sande).

3. A Borboleta GS (Inverse Butterfly)

Diferente da NTT direta, onde a multiplicação pelo fator de rotação ocorre *antes* da borboleta (ou no ramo inferior da entrada), na INTT via Gentleman-Sande a multiplicação ocorre *após* a subtração.

Para coeficientes de entrada y_L e y_R correspondentes à mesma posição nos vetores dos sub-blocos, a operação de fusão é:

$$\boxed{\begin{aligned} x[i] &= \frac{1}{2}(y_L[i] + y_R[i]) \pmod{p} \\ x[i + N/2] &= \frac{1}{2}(y_L[i] - y_R[i]) \cdot \psi^{-N/2} \pmod{p} \end{aligned}}$$

Nota: Em implementações eficientes, o fator escalar $1/2$ (inverso modular de 2) é frequentemente acumulado e aplicado apenas uma vez no final como $1/N$, para evitar multiplicações excessivas a cada estágio.

4. Fluxo de Dados

O algoritmo Gentleman-Sande é a "transposta" do Cooley-Tukey. Se a NTT direta recebe os dados em ordem natural e os devolve em ordem *bit-reversed* (embaralhada), a INTT via GS aceita os dados em ordem *bit-reversed* e os reconstrói para a ordem natural. Isso elimina a necessidade de reordenamentos custosos de memória entre a transformação direta e a inversa durante operações de convolução.

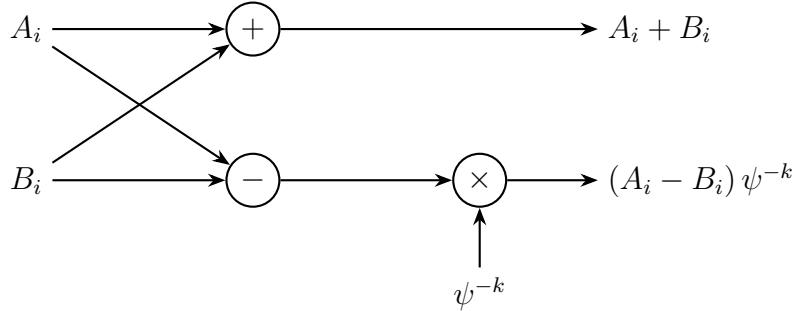


Figure 7: Butterfly INTT

A implementação da NTT negacíclica é a seguir 2

Listing 2: código em SageMath

```

1 def NTT_Negacyclic(A, R, psi):
2
3     n = len(A)
4     if n == 1:
5         return [A[0]]
6
7     A_even = A[0::2]
8     A_odd = A[1::2]
9
10    psi_sq = psi^2
11    Y_even = NTT_Negacyclic(A_even, R, psi_sq)
12    Y_odd = NTT_Negacyclic(A_odd, R, psi_sq)
13
14    Y = [R(0)] * n
15
16    w = psi
17
18    half = n // 2
19    for k in range(half):
20        t = w * Y_odd[k]
21
22        Y[k] = Y_even[k] + t
23        Y[k + half] = Y_even[k] - t
24
25        w *= psi_sq
26
27    return Y
28
29 def INTT_Negacyclic(A, R, psi):
30     n = len(A)
31     # A inversa usa  $\psi^{-1}$ 
32     psi_inv = psi^(-1)
33
34     Y = NTT_Negacyclic(A, R, psi_inv)
35
36     n_inv = R(n)^(-1)
37     return [y * n_inv for y in Y]
```

A comparação computacional dessa ferramentas pode ser vista na tabela a seguir, onde calculou-se os números de Fibonacci.

Algorithm	Fibonacci index
Algoritmo Naive	44
Algoritmo Linear	566'053
Algoritmo FFT	3'145'816
Algoritmo NTT	24'178'839
Algoritmo GMP	238'961'323

fonte: <https://github.com/SheafificationOfG/Fibsonisheaf>

10 Apêndice

10.1 Exemplo de convolução circular

Sejam dois sinais x e y de comprimento $N = 3$:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A frequência fundamental é a raiz da unidade $\zeta_3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Usaremos a propriedade fundamental:

$$1 + \zeta_3 + \zeta_3^2 = 0 \implies \zeta_3 + \zeta_3^2 = -1$$

Método 1: Convolução no Tempo (Matriz Circulante)

A convolução circular $z = x \circledast y$ equivale à multiplicação de uma matriz circulante C_x pelo vetor y :

$$C_x = \begin{bmatrix} x[0] & x[2] & x[1] \\ x[1] & x[0] & x[2] \\ x[2] & x[1] & x[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando $z = C_x y$:

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1) + 0 + 2(1) \\ 2(1) + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Método 2: Diagonalização (Domínio da Frequência)

Mostra-se que a mudança de base para a base de Fourier diagonaliza a matriz circulante C_x . Matematicamente, isso significa que C_x pode ser decomposta como

$$C_x = F^{-1} \Lambda_x F$$

onde Λ_x é uma matriz diagonal contendo os coeficientes da DFT de x .

Substituindo essa decomposição na equação original da convolução $z = C_x y$, podemos rearranjar os termos para utilizar a multiplicação na frequência:

$$z = (F^{-1} \Lambda_x F) y = F^{-1} \Lambda_x (F y) = F^{-1} \Lambda_x Y \tag{1}$$

Dessa forma, o cálculo se resume a obter Y (DFT de y), multiplicar pela matriz diagonal Λ_x e aplicar a inversa (F^{-1}).

Para legitimar que os autovalores de C_x são os coeficientes da DFT de x , resolvemos:

$$\det(C_x - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 2 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Expandindo o determinante:

$$(1 - \lambda)^3 + 8 = 0 \implies (1 - \lambda)^3 = -8$$

As raízes para $(1 - \lambda)$ são as três raízes cúbicas de -8 :

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_0 &= -2 \implies \lambda_0 = 3 \\ 1 - \lambda_1 &= -2\zeta_3 \implies \lambda_1 = 1 + 2\zeta_3 \\ 1 - \lambda_2 &= -2\zeta_3^2 \implies \lambda_2 = 1 + 2\zeta_3^2 \end{aligned}$$

Estes valores coincidem exatamente com a DFT de x , provando a legitimidade da diagonalização.

Verificação do Autovetor

Verificamos agora se o autovetor v_1 da base de Fourier (coluna de F^{-1}), dado por $v_1 = [1, \zeta_3^2, \zeta_3]^T$, satisfaz $C_x v_1 = \lambda_1 v_1$.

Lado esquerdo ($C_x v_1$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta_3^2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\zeta_3 \\ 2 + \zeta_3^2 \\ 2\zeta_3^2 + \zeta_3 \end{bmatrix}$$

Lado direito ($\lambda_1 v_1$):

$$(1 + 2\zeta_3) \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta_3^2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\zeta_3 \\ \zeta_3^2 + 2\zeta_3^3 \\ \zeta_3 + 2\zeta_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\zeta_3 \\ 2 + \zeta_3^2 \\ \zeta_3 + 2\zeta_3^2 \end{bmatrix}$$

A igualdade é satisfeita, pensamento análogo é utilizado para mostrar que o v_0 e v_2 e também são autovetores, confirmando que a base de Fourier é a base natural de C_x .

Representação Matricial da Diagonalização

Primeiro, calculamos os vetores transformados $X = Fx$ e $Y = Fy$:

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 + 2\zeta_3 \\ 1 + 2\zeta_3^2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 + \zeta_3^2 \\ 1 + \zeta_3 \end{bmatrix}$$

Agora, construímos a matriz diagonal $\Lambda_x = \text{diag}(X)$. A operação de convolução no domínio da frequência ($Z = X \cdot Y$), visualizada matricialmente como $Z = \Lambda_x Y$, torna-se:

$$\mathbf{Z} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 2\zeta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2\zeta_3^2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz Diagonal } (\Lambda_x)} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 + \zeta_3^2 \\ 1 + \zeta_3 \end{bmatrix}$$

Executando o produto matricial (que equivale ao produto ponto a ponto):

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 \\ (1 + 2\zeta_3)(1 + \zeta_3^2) \\ (1 + 2\zeta_3^2)(1 + \zeta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 + \zeta_3 \\ 2 + \zeta_3^2 \end{bmatrix}$$

*Nota: As simplificações algébricas utilizam $1 + \zeta_3 + \zeta_3^2 = 0$.

Retorno ao Tempo (IDFT)

Finalmente, aplicamos a matriz inversa de Fourier (F^{-1}) para obter z :

$$z = F^{-1}\mathbf{Z} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta_3^{-1} & \zeta_3^{-2} \\ 1 & \zeta_3^{-2} & \zeta_3^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 + \zeta_3 \\ 2 + \zeta_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Isso confirma numericamente que a base de Fourier diagonalizou a operação.

10.2 Determinação unívoca do polinomio

Theorem 1 (Unicidade via matriz de Vandermonde). *Sejam x_0, \dots, x_{N-1} escalares dois a dois distintos em um corpo \mathbb{K} (e.g., $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$), e sejam $y_0, \dots, y_{N-1} \in \mathbb{K}$. Existe um único polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{N-1}x^{N-1} \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p(x_i) = y_i$ para todo $i = 0, \dots, N-1$.*

Proof. Escreva $p(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k$. Impor as condições $p(x_i) = y_i$ para $i = 0, \dots, N-1$ gera o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{N-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N-1} & x_{N-1}^2 & \cdots & x_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Denote essa matriz por V (matriz de Vandermonde,i.e. $V_{i,j} = x_i^{j-1}$ para todo os índices i,j), o vetor de coeficientes por a e o vetor de valores por y ; então o sistema é

$$Va = y.$$

O determinante de Vandermonde é dado por

$$\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq N-1} (x_j - x_i).$$

Como os x_i são dois a dois distintos, temos $x_j - x_i \neq 0$ para $i \neq j$, logo $\det(V) \neq 0$. Portanto, V é invertível e o sistema $Va = y$ tem **solução única**, dada por

$$a = V^{-1}y.$$

Concluímos que existe um único vetor de coeficientes (a_0, \dots, a_{N-1}) , isto é, um **único** polinômio $p(x)$ de grau $\leq N - 1$ que interpola os N pontos. \square