Escola Politécnica-USP
LARC

Seminário NTT

Resumo

O objetivo do semanário é apresentar a NTT e suas vantagens, para isso, parti-se da transformada de Fourier, apos, para a sua forma discreta (DFT) e chega-se na NTT propriamente dita. O que almejo com esse semanário é passar a intuição por trás das ferramentas matemática utilizadas e beleza inerentes delas.

Contents

1 A Dualidade entre Tempo e Frequência

A Transformada de Fourier é uma operação matemática que mapeia uma função do domínio do tempo (ou espaço) para o seu domínio dual: a frequência. Essa transição é extremamente útil, pois propriedades que são complexas de analisar no tempo tornam-se claras no espectro de frequências.

Esta ferramenta é um pilar fundamental em diversas áreas do conhecimento:

- **Matemática Pura:** Essencial na Teoria Analítica dos Números e no estudo de Equações Diferenciais Parciais (EDPs).
- **Física Moderna:** É a base matemática do **Princípio da Incerteza de Heisenberg** na Mecânica Quântica, onde a posição e o momento de uma partícula formam um par de variáveis conjugadas de Fourier.
- **Engenharia:** Processamento de sinais, compressão de dados (MP3, JPEG) e telecomunicações.

2 Transformada de Fourier Contínua (CTFT)

Para uma função contínua $g(t)$, a transformada é definida pela integral:

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi ift}\,dt$$

Ela pode ser entendida como um produto interno(uma projeção) do sinal com todos as frequencias da reta real $\langle g, e^{-2\pi ift}\rangle$, que, devido a ortoganalidade das frequências diferentes e que funcoes bem comportadas podem ser decompostas em series de autofuncoes e^{-ift}, consegue extrair extamente as frequências do sinal. Apesar de sua elegância teórica, a CTFT apresenta desafios para a aplicação prática em sistemas digitais:

1. **Natureza Analítica:** A resolução de integrais impróprias exige uma manipulação simbólica que é difícil de implementarz em computadores comuns.
2. **Limite Infinito:** A definição pressupõe que conhecemos o sinal de $-\infty$ a $+\infty$, o que é impossível em cenários reais.
3. **Amostragem Finita:** Na prática, os sinais são capturados de forma discreta (amostras) e por um tempo limitado, o que torna a integral contínua inaplicável.

3 Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Para viabilizar o processamento em computadores, utilizamos a **DFT**. Ela opera sobre uma sequência finita de N amostras, mapeando dados discretos no tempo para dados discretos na frequência, devido ao teorema de Teorema de amostragem de Nyquist-Shannon[1colocar uma referencia], um sinal de frequência f precisa de $N \geq f/2$ para ser unicamente determinado.

A DFT é definida da seguinte forma:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

Para $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Diferente da versão contínua, a DFT lida com somatórios e vetores numéricos, permitindo que a teoria de Fourier seja aplicada em qualquer dispositivo digital. é possivel provar que a DFT é um transformacao linear, logo, pode ser representada matricialmente.

Seja $\zeta_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$. A representação matricial da DFT para $n = 0, 1, \ldots, N-1$ é:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta_N^1 & \zeta_N^2 & \cdots & \zeta_N^{N-1} \\ 1 & \zeta_N^2 & \zeta_N^4 & \cdots & \zeta_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_N^{N-1} & \zeta_N^{2(N-1)} & \cdots & \zeta_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

3.1 Definição da IDFT

A reconstrução do sinal original no domínio do tempo a partir de suas amostras de frequência é realizada pela IDFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \zeta_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Onde $\zeta_N^{-nk} = e^{i\frac{2\pi}{N}nk}$. Matricialmente, a IDFT é dada por:

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta_N^{-1} & \zeta_N^{-2} & \cdots & \zeta_N^{-(N-1)} \\ 1 & \zeta_N^{-2} & \zeta_N^{-4} & \cdots & \zeta_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_N^{-(N-1)} & \zeta_N^{-2(N-1)} & \cdots & \zeta_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

Percebe-se que nesse caso discreto, a DFT e IDFT atuam como uma matriz mudanca de base, saindo da base do tempo e indo para base das raizes unitarias

A DFT pde ser vista de outra óptica, como avalição de polinomios. Seja

$$a(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$$

e tome $\zeta_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ seja uma N-ésima raiz primitiva da unidade. Define

$$A_k := a(\zeta_N^k).$$

Então

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} a_n (\zeta_N^k)^n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \, \zeta_N^{kn},$$

o que é exatamente a formulação da DFT, para $a_n \equiv x[n]$ e $A_n \equiv X[n]$, opostamente, a IDFT é interpretada como interpolção de polinômios:

Dados os valores $\{A_k\}_{k=0}^{N-1}$, ela reconstrói os coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{N-1}$ do único polinômio de grau $N-1$ que satisfaz $a(\zeta_N^k) = A_k$ para todo k. Explicitamente,

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k \, \zeta_N^{-kn}.$$

Assim, DFT é *avaliar* em raízes da unidade e IDFT é *interpolar* (recuperar os coeficientes) a partir dessas avaliações. (Essa perspectiva baseia-se na determinição unívoca do polinómio de grau $N-1$ por N pontos veja a seção 11.2 para demonstração desse fato)

4 A Multiplicação de Polinômios e a Complexidade Computacional

Um problema simplificado pela mudanca de domino é a multiplicacao de polinomios. Tome os polinomios $f(x)$ e $g(x)$ de grau $N-1$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^{N-1} b_j x^j$$

Na abordagem clássica , o produto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é obtido distribuindo-se cada termo de f sobre todos os termos de g. Este processo resulta em um novo polinômio de grau $2N-2$:

$$h(x) = \sum_{k=0}^{2N-2} c_k x^k$$

onde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Nesta metodologia, o cálculo de cada coeficiente c_k exige múltiplas operações de produto e soma, resultando em uma complexidade assintótica $O(n^2)$. Para polinômios com grandes volumes de coeficientes, este custo computacional torna o metodo inviavel.

A conexão entre a multiplicação de polinômios e a análise de Fourier vem do fato de que, se $h(x) = f(x)g(x)$, então os coeficientes c_k de h são dados pela **convolução linear** dos coeficientes de f e g:

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i \, b_j.$$

Neste trabalho, devido ao foco na NTT e ao anel quociente $\mathbb{Z}_p[x]/(x^N+1)$, trabalhamos com a **convolução circular** (de comprimento n), definida por

$$c_k = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \, b_{(k-i) \bmod n}, \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

Teorema da Convolução: a transformada de uma convolução no domínio do tempo (ou espaço) é o produto ponto a ponto (Hadamard) das transformadas no domínio da frequência:

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \odot \mathcal{F}(g).$$

Assim, o cálculo custoso da convolução é convertido em um produto ponto a ponto, pois a base de Fourier diagonaliza o operador de convolução (circulante). Com a transformada direta ingênua o custo ainda é $O(n^2)$, não há ganho da multiplicação clássica de polinômios.

Uma exemplo para o convencimento do leitor foi disposto no apendice 11.1

5 A Fast Fourier Transform

A FFT (Fast Fourier Transform) é uma maneira de otimizar o calculo da DFT.

O algoritmo da FFT foi redescoberta por Cooley e Tukey em 1965, uma vez que Gauss ja tinha utilzado um algoritmo semelhante para calcular a orbitas de asteroides em 1805.

O algoritmo se baseia em **dividir para conquistar**.

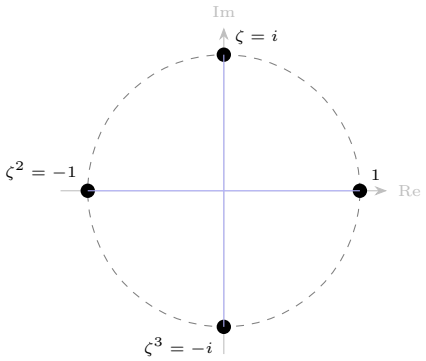
Relembrando

As raízes unitárias possuem propriedades cíclicas e certas simetrias que permitem a economia nos cálculos, vejamos um exemplo.

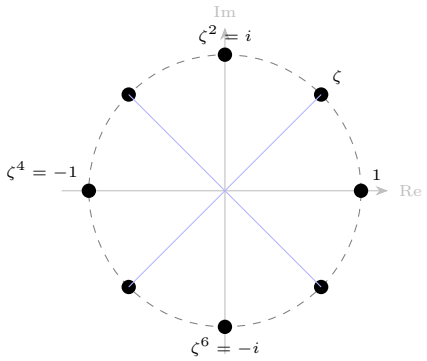
$$\zeta_4^1 = e^{-i\frac{2\pi}{4}} = e^{-i90^\circ} = -i$$

$$\zeta^1 = -i \qquad \zeta^2 = -1$$
$$\zeta^3 = i \qquad \zeta^4 = 1$$

por isso, percebe-se que, a cada 2 "deslocamentos", o valor se torna o oposto, como ilustrado na figura:



(a) 4-ésimas raízes da unidade



(b) 8-ésimas raízes da unidade

Figure 1: Comparação entre as raízes da unidade no plano complexo.

De forma mais geral:

$\zeta_N = e^{\frac{-2\pi i}{N}}$, uma raiz N-ésima primitiva da unidade. Então para todo inteiro a, $\zeta_N^{a+\frac{N}{2}} = -\zeta_N^a$.

Alem de que, pela periodicidade $\zeta_N^{a+N} = \zeta_N^a$.

Para esse caso a DFT é representada desse modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

Voltandao a FFT, o algoritmo decompõe uma DFT de tamanho N em duas sub-transformadas de tamanho $N/2$, separando os índices pares e ímpares da sequência original:

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m]\,\zeta_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1]\,\zeta_N^{(2m+1)k} \\ &\qquad \text{Usando } \zeta_N^2 = \zeta_{N/2}: \qquad \zeta_N^{2mk} = (\zeta_N^2)^{mk} = \zeta_{N/2}^{mk} \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m]\,\zeta_{N/2}^{mk} + \zeta_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1]\,\zeta_{N/2}^{mk} \\ &= E[k] + \zeta_N^k O[k], \qquad k = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1. \end{aligned}$$

Esta estrutura permite calcular dois valores de saída ($X[k]$ e $X[k+N/2]$) utilizando os mesmos resultados intermediários, através da denominada **operação borboleta** (*butterfly operation*):

1. $X[k] = E[k] + \zeta_N^k O[k]$
2. $X[k+N/2] = E[k] - \zeta_N^k O[k]$

como pode ser visto na imagem

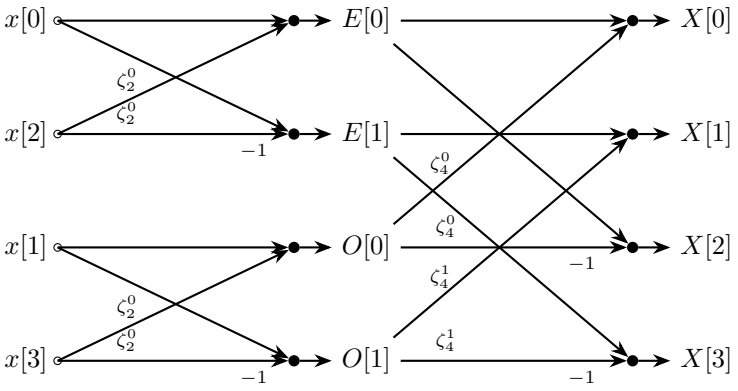


Figure 2: butterfly radix-2

o a implementacao em sage esta no codigo1

Listing 1: Implementação do algoritmo FFT em SageMath

```
def fft(a, omega):
    n = len(a)
    if n == 1:
        return a[:]


    a_par = fft(a[0::2], omega^2)
    a_impar  = fft(a[1::2], omega^2)

    A = [0] * n
    w = 1
    half = n // 2
    for k in range(half):
        t = w * a_impar[k]
        A[k]          = a_par[k] + t
        A[k + half]   = a_par[k] - t
        w *= omega
    return A
```

Desse modo, reduzimos a complexidade da transformada de $O(n^2)$ para $O(n \cdot \log n)$. Por causa disso, podemos utilizar a FFT, junto com o **teorema da convolucao**, para multiplicar polinomios em $O(n \cdot \log n)$

6 Problemas da FFT

Uns dos problemas da FTT é que ela trabalha com ponto flutuante, o que, para computadores, é um grande problemas que pode causar erro de arredondamentos e, assim causar uma falha nos esquemas criptograficos. Alem disso, na convolução linear, o polinomio dobra de tamanho a cada concolucao o que rapidamente torna-se um problema tanto computacional quanto de armazenamento .

Solucao: utilizar um transformada que utiliza apenas numeros exatos

7 Number Theoretic Transform (NTT)

7.1 Fundamentos

As propriedades que usamos na FFT — em especial a existência de uma raiz N-ésima da unidade ζ_N e o fato de que suas potências percorrem uniformemente o círculo — têm um análogo perfeito em teoria dos números, dentro de corpos (ou anéis) finitos. Isso não é coincidência: a FFT nada mais é do que a transformada de Fourier no grupo cíclico $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, e a mesma construção existe em outros contextos algébricos.

Mais formalmente, se ζ_N é uma raiz N-ésima primitiva da unidade, então o conjunto de todas as N-ésimas raízes

$$\mu_N = \{1, \zeta_N, \zeta_N^2, \ldots, \zeta_N^{N-1}\}$$

forma um grupo multiplicativo cíclico de ordem N. Existe um isomorfismo natural de grupos

$$\varphi : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mu_N, \qquad \varphi([k]) = \zeta_N^k,$$

onde o lado esquerdo usa a soma módulo N e o lado direito usa multiplicação:

$$\varphi([k+\ell]) = \zeta_N^{k+\ell} = \zeta_N^k \zeta_N^\ell = \varphi([k])\,\varphi([\ell]).$$

Raiz Primitiva e Estrutura Negacíclica

Diferente da DFT complexa, onde raízes da unidade sempre existem para qualquer N, a NTT exige que o corpo finito $\mathbb{Z}_p$, isto é, os inteiros (mod p), sendo p um primo, suporte a ordem da transformada.

Para a NTT Negacíclica, utilizada para realizar a multiplicação polinomial módulo x^N+1, precisamos de uma raiz primitiva $2N$-ésima da unidade em $\mathbb{Z}_p$, que denotaremos por ψ. Isso implica que:

1. $\psi^{2N} \equiv 1 \pmod{p}$;
2. $\psi^N \equiv -1 \pmod{p}$.

Para garantir a existência desse elemento, a ordem $2N$ deve dividir a ordem do grupo multiplicativo do corpo. Portanto, o primo p deve satisfazer:

$$2N \mid (p-1) \qquad \text{i.e. 2N divide (p-1)}$$

Ou seja, $p \equiv 1 \pmod{2N}$.

Como $2N \mid (p-1)$, em particular temos $p \nmid N$ (i.e. $gcd(p, N) = 1$); logo N possui inverso em $\mathbb{Z}_p$.

Agora, trataremos da estrutura algébrica. A NTT Negacíclica é definida no anel quaociente

$$R = \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x^N+1)}$$

(a imagem 3 ilustra a sequencia das duas operacoes visualmente.)

Ela pode ser vista como a avalição do polinômio nas raízes da equação $x^N + 1 = 0$, que correspondem às potências ímpares de ψ. A transformada é definida por:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\psi^{(2k+1)n} \pmod{p}$$

Na forma matricial:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N\,\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Neste caso, a matriz de transformação $\mathbf{W}_N$ difere da versão cíclica padrão, pois seus coeficientes seguem a estrutura das raízes negacíclicas:

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \psi^3 & \psi^6 & \cdots & \psi^{3(N-1)} \\ 1 & \psi^5 & \psi^{10} & \cdots & \psi^{5(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{(2k+1)} & \psi^{(2k+1)2} & \cdots & \psi^{(2k+1)(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{(2N-1)} & \psi^{(2N-1)2} & \cdots & \psi^{(2N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

De forma geral, o termo na linha k e coluna n da matriz é dado por:

$$(\mathbf{W}_N)_{k,n} = \psi^{(2k+1)n} \pmod{p}, \qquad 0 \leq k, n \leq N-1$$

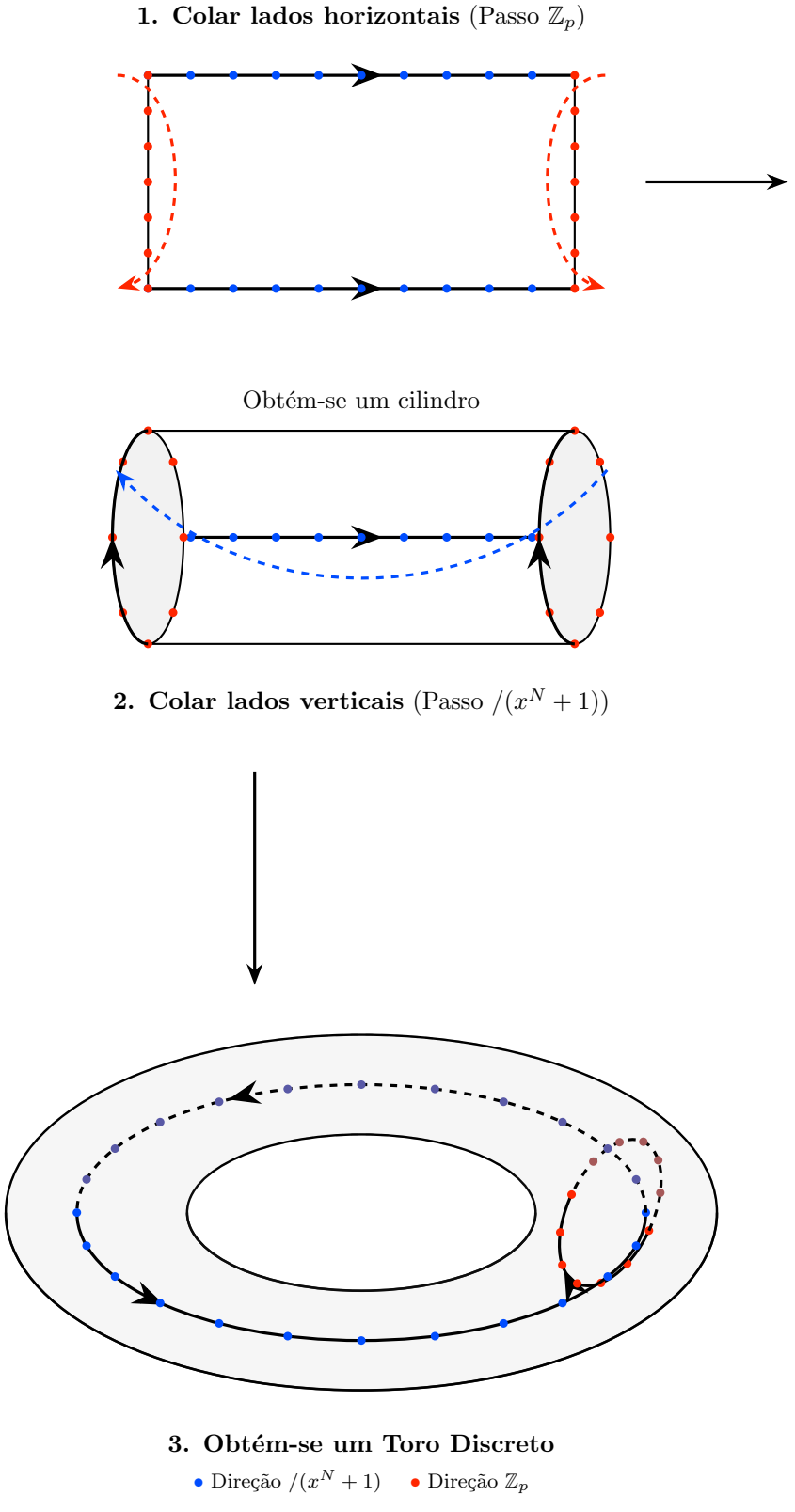


Figure 3: representação das transformacoes

8 O Isomorfismo via Teorema Chinês dos Restos (CRT)

A fundamentação algébrica da NTT reside na estrutura do anel quociente $\mathbb{Z}_p[x]/\langle x^N + 1\rangle$. Dado que $x^N + 1$ fatora-se em N binômios lineares distintos $(x - \psi^{2k+1})$, o CRT estabelece uma equivalência entre o anel original e o produto de anéis menores.

Para compreender a natureza desses anéis menores, invocamos o conceito de *homomorfismo* . Considere o anel quociente genérico $\mathbb{Z}_p[x]/\langle x-\alpha\rangle$. Pela Divisão Euclidiana, qualquer polinômio $a(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ pode ser escrito unicamente como:

$$a(x) = q(x) \cdot (x - \alpha) + r$$

onde o grau de r deve ser estritamente menor que o grau do divisor $(x - \alpha)$. Como o divisor tem grau 1, o resto r é necessariamente um escalar constante $(r \in \mathbb{Z}_p)$.

No anel quociente, impomos que $x - \alpha \equiv 0$, ou seja, $x \equiv \alpha$. Ao aplicarmos essa equivalência (ou avaliarmos a equação em $x = \alpha$), o termo que contém o divisor se anula:

$$a(\alpha) = q(\alpha) \cdot (\underbrace{\alpha - \alpha}_{0}) + r \implies a(\alpha) = r$$

Portanto, a classe de equivalência de $a(x)$ módulo $(x - \alpha)$ é univocamente representada pelo escalar $a(\alpha)$. Isso estabelece o isomorfismo local:

$$\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x - \alpha\rangle} \cong \mathbb{Z}_p \quad \text{via o mapa} \quad [a(x)] \mapsto a(\alpha)$$

Com essa intuição firmada, podemos expandir explicitamente o isomorfismo global Φ garantido pelo CRT. A transformação mapeia o polinômio $a(x)$ diretamente para o vetor de suas avaliações nas raízes de $x^N + 1$:

$$\begin{aligned}\Phi : \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^N + 1\rangle} &\xrightarrow{\cong} \bigotimes_{k=0}^{N-1} \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x - \psi^{2k+1}\rangle} \\ &\cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{N \text{ vezes}}\end{aligned}$$

A ação de Φ sobre um elemento $a(x)$ é dada explicitamente por:

$$\Phi(a(x)) = \big(a(\psi^1), a(\psi^3), \ldots, a(\psi^{2N-1})\big) \in \mathbb{Z}_p^N$$

Neste domínio transformado, a operação de multiplicação de dois polinômios $a(x)$ e $b(x)$ ocorre componente a componente. Se $C = \Phi(a(x) \cdot b(x))$, então a k-ésima componente do vetor resultante é:

$$C_k = (a \cdot b)(\psi^{2k+1}) = a(\psi^{2k+1}) \cdot b(\psi^{2k+1})$$

Isso demonstra formalmente por que a convolução cíclica (ou negacíclica) no domínio do tempo se traduz em um produto de Hadamard (ponto a ponto) no domínio da frequência.

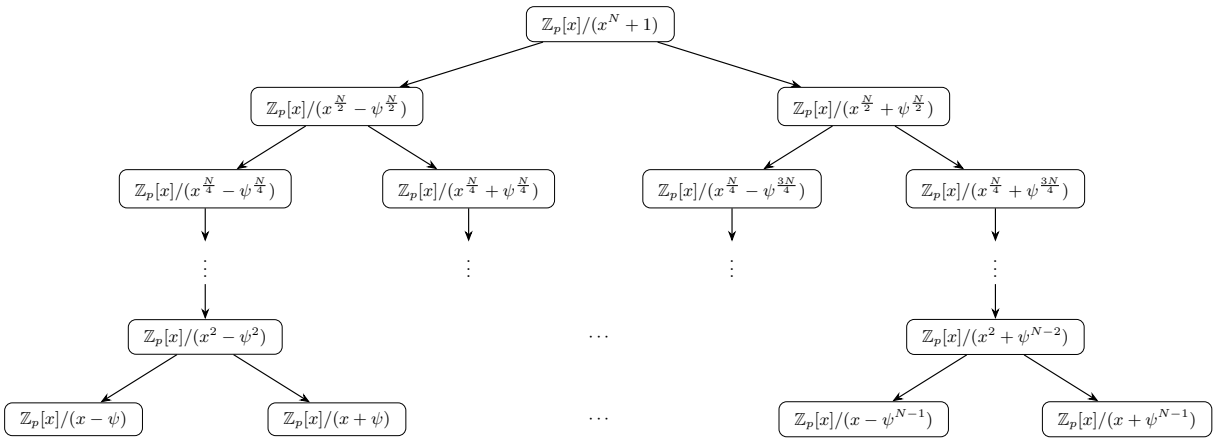


Figure 4: CRT da NTT Negacíclica

9 Transformada Numérica Inversa (INTT)

Como o Teorema Chinês dos Restos garante que a aplicação da NTT é um isomorfismo bijetor entre o anel de polinômios $\mathbb{Z}_p[x]/(x^N+1)$ e o domínio da frequência, existe uma transformação inversa única capaz de recuperar os coeficientes originais.

Denotamos a inversa multiplicativa de N no corpo $\mathbb{Z}_p$ por N^{-1}, tal que $N \cdot N^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$. A **NTT Negacíclica Inversa (INTT)** é definida formalmente por:

$$x[n] = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \psi^{-(2k+1)n} \pmod{p}$$

Note que o termo $\psi^{-(2k+1)n}$ refere-se à potência do inverso multiplicativo da raiz, ou seja, $\psi^{-1} \equiv \psi^{2N-1} \pmod{p}$.

Representação Matricial

Na forma matricial, a operação de inversão corresponde à resolução do sistema linear $\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x}$. A solução é dada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}$$

Onde a matriz inversa $\mathbf{W}_N^{-1}$ é definida como a conjugada transposta da matriz direta, escalada pelo fator N^{-1}:

$$\mathbf{W}_N^{-1} = N^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \psi^{-3} & \psi^{-6} & \cdots & \psi^{-(2N-1)} \\ 1 & \psi^{-6} & \psi^{-10} & \cdots & \psi^{-2(2N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{-(2k+1)} & \psi^{-2(2k+1)} & \cdots & \psi^{-(N-1)(2k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{-(2N-1)} & \psi^{-2(2N-1)} & \cdots & \psi^{-(N-1)(2N-1)} \end{bmatrix}$$

De modo geral, o termo na linha n e coluna k da matriz inversa é:

$$(\mathbf{W}_N^{-1})_{n,k} = N^{-1}\psi^{-(2k+1)n} \pmod{p}$$

Ortogonalidade

A existência da inversa e a validade da fórmula acima decorrem da propriedade de ortogonalidade das raízes negacíclicas no corpo finito $\mathbb{Z}_p$. Para quaisquer $n, m \in \{0, \ldots, N-1\}$, temos:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \psi^{(2k+1)(n-m)} = \begin{cases} N & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Isso garante que o produto das matrizes resulta na identidade:

$$\mathbf{W}_N^{-1}\mathbf{W}_N = \mathbf{I}$$

9.1 A NTT como uma FFT: Decomposição Radix-2 via CRT

A eficiência da NTT reside na estratégia "dividir para conquistar". Em vez de avaliar um polinômio $A(x)$ de grau $N-1$ de uma só vez, utilizamos a estrutura algébrica do anel para decompor o problema em dois problemas independentes de tamanho $N/2$.

1. A Fatoração do Módulo

O ponto de partida é a decomposição do polinômio $x^N + 1$. Como ψ é uma raiz primitiva $2N$-ésima da unidade, temos que $\psi^N \equiv -1 \pmod{p}$, o que implica $(\psi^{N/2})^2 \equiv -1$.

Pelo Teorema Chinês dos Restos (CRT), podemos fatorar o módulo original em dois sub-anéis:

$$x^N + 1 = x^N - (\psi^{N/2})^2 = \underbrace{(x^{N/2} - \psi^{N/2})}_{\text{Módulo Esquerdo}} \cdot \underbrace{(x^{N/2} + \psi^{N/2})}_{\text{Módulo Direito}}$$

Nota: Essa fatoração particiona o conjunto das raízes de $x^N + 1$ (que são as potências ímpares ψ^{2k+1}). As raízes que satisfazem o lado esquerdo continuam na recursão L, e as que satisfazem o lado direito seguem na recursão R.

2. O Colapso da Variável

Considere o polinômio de entrada $A(x)$ com coeficientes $a[i]$. Podemos dividir seu somatório em duas partes: os primeiros $N/2$ termos e os últimos $N/2$ termos.

$$A(x) = \sum_{i=0}^{N/2-1} a[i]x^i + \sum_{i=0}^{N/2-1} a[i+N/2]x^{i+N/2}$$

Colocando $x^{N/2}$ em evidência na segunda metade, obtemos uma estrutura que revela a simetria do problema:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(a[i] + x^{N/2} \cdot a[i+N/2]\right) x^i$$

A intuição chave da NTT é projetar essa equação nos sub-anéis definidos no passo 1. Ao fazer isso, a potência $x^{N/2}$ deixa de ser uma variável e torna-se uma constante escalar:

- **Ramo Esquerdo** ($x^{N/2} \equiv \psi^{N/2}$): Substituímos $x^{N/2}$ por $+\psi^{N/2}$.
- **Ramo Direito** ($x^{N/2} \equiv -\psi^{N/2}$): Substituímos $x^{N/2}$ por $-\psi^{N/2}$.

3. A Operação Borboleta (Butterfly)

Ao realizar as substituições acima diretamente no somatório, os coeficientes dos novos polinômios reduzidos (a_L e a_R) surgem imediatamente. Para cada posição $0 \leq i < N/2$:

$$\boxed{\begin{aligned} a_L[i] &= a[i] + \psi^{N/2} \cdot a[i+N/2] \pmod p \\ a_R[i] &= a[i] - \psi^{N/2} \cdot a[i+N/2] \pmod p \end{aligned}}$$

Note que não precisamos calcular polinômios inteiros; a operação acontece pontualmente nos coeficientes. Os valores a_L tornam-se a entrada para a recursão da esquerda, e a_R para a recursão da direita.

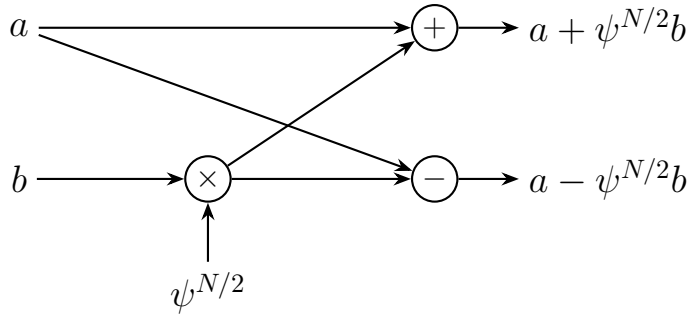


Figure 5: Butterfly NTT

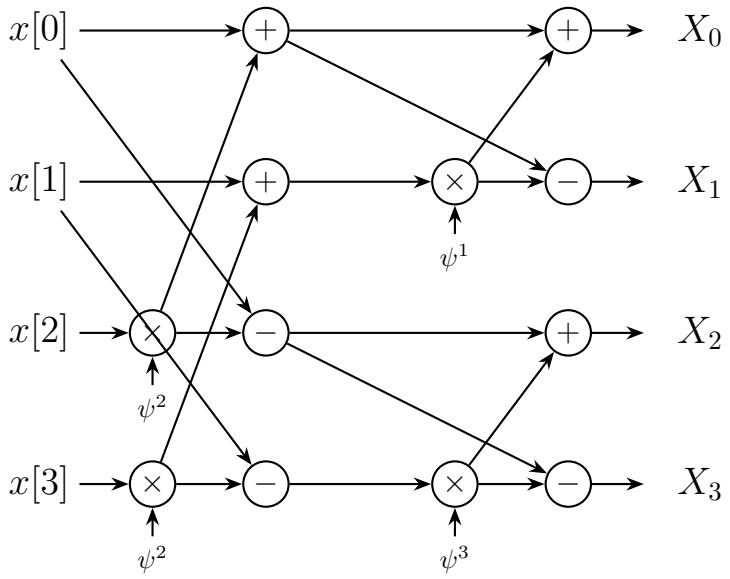


Figure 6: Butterfly NTT

9.2 A INTT via Gentleman-Sande (GS): Reconstrução via CRT

Enquanto a transformação direta (NTT) utiliza a decomposição para reduzir o problema, a transformação inversa (INTT) realiza o caminho oposto: ela combina os resultados dos sub-problemas menores para reconstruir o vetor original. O algoritmo de Gentleman-Sande implementa essa reconstrução de forma eficiente.

1. A Inversão do Sistema Linear

Na etapa da transformação direta, definimos os valores dos sub-ramos (a_L e a_R) através das equações:

$$\begin{cases} a_L[i] = a[i] + \psi^{N/2} \cdot a[i + N/2] \\ a_R[i] = a[i] - \psi^{N/2} \cdot a[i + N/2] \end{cases}$$

Na etapa inversa, conhecemos a_L e a_R (retornados pela recursão) e nosso objetivo é recuperar os coeficientes originais $a[i]$ e $a[i + N/2]$. Trata-se apenas de resolver este sistema linear de duas variáveis.

2. A Lógica da Recuperação

Somando e subtraindo as duas equações do sistema acima, podemos isolar os termos desejados:

- **Recuperando a metade inferior ($a[i]$):** Somamos as equações:

$$a_L[i] + a_R[i] = 2a[i] \implies a[i] = \frac{a_L[i] + a_R[i]}{2}$$

- **Recuperando a metade superior ($a[i + N/2]$):** Subtraímos a segunda da primeira:

$$a_L[i] - a_R[i] = 2\psi^{N/2} \cdot a[i + N/2]$$

Para isolar $a[i + N/2]$, multiplicamos pelo inverso de $2\psi^{N/2}$:

$$a[i + N/2] = \frac{a_L[i] - a_R[i]}{2} \cdot \psi^{-N/2}$$

Esta manipulação algébrica revela a diferença fundamental na ordem das operações entre a ida (Cooley-Tukey) e a volta (Gentleman-Sande).

3. A Borboleta GS (Inverse Butterfly)

Baseado nas isolações acima, definimos a operação borboleta inversa. Para cada par de entradas $a_L[i]$ e $a_R[i]$ provenientes dos sub-blocos, calculamos:

$$\boxed{\begin{aligned} a[i] &= \frac{1}{2}(a_L[i] + a_R[i]) \pmod p \\ a[i + N/2] &= \frac{1}{2}(a_L[i] - a_R[i]) \cdot \psi^{-N/2} \pmod p \end{aligned}}$$

Observe a mudança estrutural:

1. Na **Ida (CT)**, multiplicamos pelo fator de rotação *antes* de somar/subtrair.
2. Na **Volta (GS)**, subtraímos primeiro e multiplicamos pelo fator de rotação inverso *depois*.

Nota de Implementação: O fator escalar $1/2$ *(inverso modular de 2) geralmente não é aplicado a cada camada. Para eficiência, acumula-se o fator total* $1/N$ *e aplica-se uma única multiplicação escalar ao final de toda a transformação.*

4. Fluxo de Dados e Bit-Reversal

O algoritmo Gentleman-Sande é a "transposta" do Cooley-Tukey. Se a NTT direta recebe os dados em ordem natural e os devolve em ordem *bit-reversed* (permutada), a INTT via GS aceita os dados em ordem *bit-reversed* e os reconstrói naturalmente para a ordem linear.

Isso cria um par perfeito:

$$\text{Input Natural} \xrightarrow{\text{CT}} \text{Bit-Reversed} \xrightarrow{\text{Operação Pontual}} \text{Bit-Reversed} \xrightarrow{\text{GS}} \text{Output Natural}$$

Essa simetria elimina a necessidade de reordenamentos de memória (bit-reversal) custosos entre as transformações.

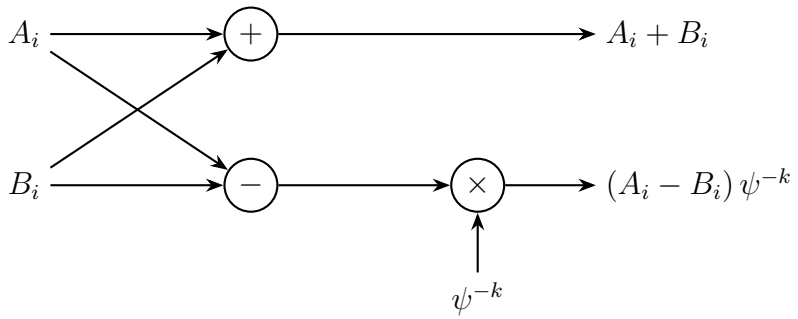


Figure 7: Butterfly INTT

A implementa da NTT negacíclica ésta a seguir 2

Listing 2: codigo em SageMath

```
def NTT_Negacyclic(A, R, psi):

    n = len(A)
    if n == 1:
        return [A[0]]

    A_even = A[0::2]
    A_odd  = A[1::2]

    psi_sq = psi^2
    Y_even = NTT_Negacyclic(A_even, R, psi_sq)
    Y_odd  = NTT_Negacyclic(A_odd,  R, psi_sq)

    Y = [R(0)] * n

    w = psi

    half = n // 2
    for k in range(half):
        t = w * Y_odd[k]

        Y[k]        = Y_even[k] + t
        Y[k + half] = Y_even[k] - t

        w *= psi_sq

    return Y

def INTT_Negacyclic(A, R, psi):
    n = len(A)
    # A inversa usa psi^-1
    psi_inv = psi^(-1)
```

```
33
34      Y = NTT_Negacyclic(A, R, psi_inv)
35
36      n_inv = R(n)^(-1)
37      return [y * n_inv for y in Y]
```

A comporação computacional dessa ferramentas pode ser vista na tabela a seguir, onde calculou-se os números de Fibonacci.

Algorithm	Fibonacci index
Algoritmo Naive	44
Algoritmo Linear	566'053
Algoritmo FFT	3'145'816
Algoritmo NTT	24'178'839
Algoritmo GMP	238'961'323

fonte: https://github.com/SheafificationOfG/Fibsonisheaf

9.3 Extra: NTT incompleta e a restrição de parâmetros no caso negacíclico

Na multiplicação negacíclica de polinômios no anel

$$\mathbb{Z}_p[x]/(x^N + 1),$$

com N potência de dois, a utilização de uma **NTT completa** exige a existência de uma raiz primitiva de ordem $2N$ módulo p. Quando p é primo, essa condição é equivalente a

$$p \equiv 1 \pmod{2N}.$$

Em aplicações criptográficas baseadas em reticulados, em especial em esquemas de Fully Homomorphic Encryption o valor de N é tipicamente muito grande. Como consequência, a condição acima impõe fortes restrições sobre a escolha do primo p, frequentemente forçando o uso de módulos grandes ou pouco flexíveis, o que impacta tanto a eficiência quanto o ajuste fino de parâmetros de segurança.

Uma forma natural de relaxar essa restrição é empregar a chamada **NTT ℓ-incompleta**. A ideia consiste em interromper o algoritmo da NTT antes de executar todos os $\log_2 N$ estágios do esquema radix-2. Mais precisamente, ao parar após $\log_2 N - \ell$ estágios, a existência da transformada passa a requerer apenas uma raiz da unidade de ordem $2N/2^\ell$ em $\mathbb{Z}_p$, o que resulta na condição mais fraca

$$p \equiv 1 \pmod{2N/2^\ell}.$$

Dessa forma, o conjunto de primos admissíveis torna-se significativamente maior, permitindo escolhas de parâmetros mais flexíveis.

Do ponto de vista algébrico, a NTT ℓ-incompleta não avalia o polinômio em todas as N raízes da unidade, mas o mapeia para um vetor de $N/2^\ell$ polinômios de menor grau, cada um pertencente a um quociente do tipo

$$\mathbb{Z}_p[x]/(x^{2^\ell} - \psi_i),$$

onde ψ_i são potências apropriadas da raiz disponível. A multiplicação passa então a ser realizada componente a componente nesses anéis menores, seguida de uma transformada inversa incompleta.

O principal custo adicional desse método está na *multiplicação de base* dentro dos anéis $\mathbb{Z}_p[x]/(x^{2^\ell} - \psi_i)$, que, para valores maiores de ℓ, tende a ser implementada por algoritmos quadráticos. No entanto, o trabalho de Paiva et al. [1] mostra que, no contexto de bootstrapping amortizado para esquemas do tipo FHEW/TFHE, esse custo pode sera eliminado. Os autores reformulam a NTT inversa como o produto de duas matrizes de borboleta (controladas por um parâmetro de divisão α) e demonstram que a multiplicação de base da NTT incompleta pode ser *incorporada* ao primeiro estágio dessa decomposição matricial, sem aumento no número assintótico de operações.

Como resultado, obtém-se o que os autores denominam *"NTT incompleta gratuita"*: para valores moderados de ℓ, é possível relaxar substancialmente a condição sobre o primo p sem penalidade computacional relevante, ao mesmo tempo em que se ampliam as opções de parâmetros e se melhora o compromisso entre desempenho e taxa de falha (decryption failure rate).

10 Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao professor doutor *Thales Paiva* pela chance de apresentar o semanário e pelos ensinamentos, gostaria de agradecer tambem o professor doutor *João Fernando da Cunha Nariyoshi* por esclarecer algumas dúvidas sobre a parte da matemática pura. Foi realmente divertido pesquisar, escrever, desenhar e animar para esse semanário.

11 Apêndice

11.1 Exemplo de convolução circular

Sejam dois sinais x e y de comprimento $N = 3$:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A frequência fundamental é a raiz da unidade $\zeta_3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Usaremos a propriedade fundamental:

$$1 + \zeta_3 + \zeta_3^2 = 0 \implies \zeta_3 + \zeta_3^2 = -1$$

Método 1: Convolução no Tempo (Matriz Circulante)

A convolução circular $z = x \circledast y$ equivale à multiplicação de uma matriz circulante C_x pelo vetor y:

$$C_x = \begin{bmatrix} x[0] & x[2] & x[1] \\ x[1] & x[0] & x[2] \\ x[2] & x[1] & x[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando $z = C_x y$:

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1) + 0 + 2(1) \\ 2(1) + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Método 2: Diagonalização (Domínio da Frequência)

Mostra-se que a mudança de base para a base de Fourier diagonaliza a matriz circulante C_x. Matematicamente, isso significa que C_x pode ser decomposta como

$$C_x = F^{-1} \Lambda_x F$$

onde Λ_x é uma matriz diagonal contendo os coeficientes da DFT de x.

Substituindo essa decomposição na equação original da convolução $z = C_x y$, podemos rearranjar os termos para utilizar a multiplicação na frequência:

$$z = (F^{-1} \Lambda_x F) y = F^{-1} \Lambda_x (F y) = F^{-1} \Lambda_x Y \tag{1}$$

Dessa forma, o cálculo se resume a obter Y (DFT de y), multiplicar pela matriz diagonal Λ_x e aplicar a inversa (F^{-1}).

Para legitimar que os autovalores de C_x são os coeficientes da DFT de x, resolvemos:

$$\det(C_x - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Expandindo o determinante:

$$(1-\lambda)^3 + 8 = 0 \implies (1-\lambda)^3 = -8$$

As raízes para $(1-\lambda)$ são as três raízes cúbicas de -8:

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_0 &= -2 \implies \lambda_0 = 3 \\ 1 - \lambda_1 &= -2\zeta_3 \implies \lambda_1 = 1 + 2\zeta_3 \\ 1 - \lambda_2 &= -2\zeta_3^2 \implies \lambda_2 = 1 + 2\zeta_3^2 \end{aligned}$$

Estes valores coincidem exatamente com a DFT de x, provando a legitimidade da diagonalização.

Verificação do Autovetor

Verificamos agora se o autovetor v_1 da base de Fourier (coluna de F^{-1}), dado por $v_1 = [1, \zeta_3^2, \zeta_3]^T$, satisfaz $C_x v_1 = \lambda_1 v_1$.

Lado esquerdo ($C_x v_1$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta_3^2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\zeta_3 \\ 2 + \zeta_3^2 \\ 2\zeta_3^2 + \zeta_3 \end{bmatrix}$$

Lado direito ($\lambda_1 v_1$):

$$(1+2\zeta_3)\begin{bmatrix}1\\ \zeta_3^2\\ \zeta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+2\zeta_3\\ \zeta_3^2+2\zeta_3^3\\ \zeta_3+2\zeta_3^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+2\zeta_3\\ 2+\zeta_3^2\\ \zeta_3+2\zeta_3^2\end{bmatrix}$$

A igualdade é satisfeita, pensamento analogo é utilizado para mostrar que o v_0 e v_2 e tambem são autovetores, confirmando que a base de Fourier é a base natural de C_x.

Representação Matricial da Diagonalização

Primeiro, calculamos os vetores transformados $X = Fx$ e $Y = Fy$:

$$X = \begin{bmatrix}3\\ 1+2\zeta_3\\ 1+2\zeta_3^2\end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix}2\\ 1+\zeta_3^2\\ 1+\zeta_3\end{bmatrix}$$

Agora, construímos a matriz diagonal $\Lambda_x = \text{diag}(X)$. A operação de convolução no domínio da frequência ($Z = X \cdot Y$), visualizada matricialmente como $Z = \Lambda_x Y$, torna-se:

$$\mathbf{Z} = \underbrace{\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1+2\zeta_3 & 0\\ 0 & 0 & 1+2\zeta_3^2\end{bmatrix}}_{\text{Matriz Diagonal } (\Lambda_x)} \begin{bmatrix}2\\ 1+\zeta_3^2\\ 1+\zeta_3\end{bmatrix}$$

Executando o produto matricial (que equivale ao produto ponto a ponto):

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix}3\cdot 2\\ (1+2\zeta_3)(1+\zeta_3^2)\\ (1+2\zeta_3^2)(1+\zeta_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\ 2+\zeta_3\\ 2+\zeta_3^2\end{bmatrix}$$

**Nota: As simplificações algébricas utilizam* $1+\zeta_3+\zeta_3^2 = 0$.

Retorno ao Tempo (IDFT)

Finalmente, aplicamos a matriz inversa de Fourier (F^{-1}) para obter z:

$$z = F^{-1}\mathbf{Z} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \zeta_3^{-1} & \zeta_3^{-2}\\ 1 & \zeta_3^{-2} & \zeta_3^{-4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 2+\zeta_3\\ 2+\zeta_3^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$$

Isso confirma numericamente que a base de Fourier diagonalizou a operação.

11.2 Determinição unívoca do polinomio

Theorem 1 (Unicidade via matriz de Vandermonde)**.** *Sejam $x_0, \ldots, x_{N-1}$ escalares dois a dois distintos em um corpo $\mathbb{K}$ (e.g., $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_p$), e sejam $y_0, \ldots, y_{N-1} \in \mathbb{K}$. Existe um* ***único*** *polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{N-1}x^{N-1} \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p(x_i) = y_i$ para todo $i = 0, \ldots, N-1$.*

Proof. Escreva $p(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k$. Impor as condições $p(x_i) = y_i$ para $i = 0, \ldots, N-1$ gera o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{N-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N-1} & x_{N-1}^2 & \cdots & x_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Denote essa matriz por V (matriz de Vandermonde,i.e. $V_{i,j} = x_i^{j-1}$ para todo os índices i,j), o vetor de coeficientes por a e o vetor de valores por y; então o sistema é

$$Va = y.$$

O determinante de Vandermonde é dado por

$$\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le N-1} (x_j - x_i).$$

Como os x_i são dois a dois distintos, temos $x_j - x_i \neq 0$ para $i \neq j$, logo $\det(V) \neq 0$. Portanto, V é invertível e o sistema $Va = y$ tem **solução única**, dada por

$$a = V^{-1} y.$$

Concluímos que existe um único vetor de coeficientes $(a_0, \ldots, a_{N-1})$, isto é, um **único** polinômio $p(x)$ de grau $\le N-1$ que interpola os N pontos. □