Escola Politécnica-USP
LARC

Seminário NTT

Resumo

O objetivo do seminário é apresentar a NTT e suas vantagens, para isso, parte-se da transformada de Fourier, em seguida, para a sua forma discreta (DFT) e chega-se na NTT propriamente dita. O que almejo com esse trabalho é passar a intuição por trás das ferramentas matemática utilizadas e beleza inerentes a elas.

Contents

1 A Dualidade entre Tempo e Frequência

A Transformada de Fourier é uma operação matemática que mapeia uma função do domínio do tempo (ou espaço) para o seu domínio dual: a frequência. Essa transição é extremamente útil, pois propriedades que são complexas de analisar no tempo tornam-se claras no espectro de frequências.

Esta ferramenta é um pilar fundamental em diversas áreas do conhecimento:

- **Matemática Pura:** Essencial na Teoria Analítica dos Números e no estudo de Equações Diferenciais Parciais (EDPs).
- **Física Moderna:** É a base matemática do **Princípio da Incerteza de Heisenberg** na Mecânica Quântica, onde a posição e o momento de uma partícula formam um par de variáveis conjugadas de Fourier.
- **Engenharia:** Processamento de sinais, compressão de dados (MP3, JPEG) e telecomunicações.

2 Transformada de Fourier Contínua (CTFT)

Para uma função contínua $g(t)$, a transformada é definida pela integral:

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i f t}\, dt$$

Ela pode ser entendida como um produto interno(uma projeção) do sinal com todas as frequências da reta real $\langle g, e^{-2\pi i f t} \rangle$, que, devido à ortogonalidade das frequências diferentes e que funções bem comportadas podem ser decompostas em séries de autofunções $e^{-2\pi i f t}$, consegue extrair extamente as frequências do sinal. Apesar de sua elegância teórica, a CTFT apresenta desafios para a aplicação prática em sistemas digitais:

1. **Natureza Analítica:** A resolução de integrais impróprias exige uma manipulação simbólica que é difícil de implementar em computadores comuns.
2. **Limite Infinito:** A definição pressupõe que conhecemos o sinal de $-\infty$ a $+\infty$, o que é impossível em cenários reais.
3. **Amostragem Finita:** Na prática, os sinais são capturados de forma discreta (amostras) e por um tempo limitado, o que torna a integral contínua inaplicável.

3 Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Para viabilizar o processamento em computadores, utilizamos a **DFT** (*Discrete Fourier Transform*). Ela opera sobre uma sequência finita de N amostras, mapeando dados discretos no tempo para o domínio da frequência. Segundo o Teorema de Amostragem de Nyquist-Shannon [6], para que um sinal contínuo possa ser unicamente determinado a partir de suas amostras, a frequência de amostragem f_s deve ser superior ao dobro da maior

frequência f_{max} contida no sinal. $f_s > 2f_{max}$. Com essa restrição para a quantidade de amostras N em mente, a DFT é definida da seguinte forma:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

Para $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Diferente da versão contínua, a DFT lida com somatórios e vetores numéricos, permitindo que a teoria de Fourier Seja aplicada em qualquer dispositivo digital. É possivel provar que a DFT é uma transformação linear 11.1, logo, pode ser representada matricialmente.

Seja $\zeta_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$. A representação matricial da DFT para $n = 0, 1, \ldots, N-1$ é:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta_N^1 & \zeta_N^2 & \cdots & \zeta_N^{N-1} \\ 1 & \zeta_N^2 & \zeta_N^4 & \cdots & \zeta_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_N^{N-1} & \zeta_N^{2(N-1)} & \cdots & \zeta_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

3.1 Definição da IDFT

A reconstrução do sinal original no domínio do tempo a partir de suas amostras de frequência é realizada pela IDFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \zeta_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Onde $\zeta_N^{-nk} = e^{i\frac{2\pi}{N}nk}$. Matricialmente, a IDFT é dada por:

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta_N^{-1} & \zeta_N^{-2} & \cdots & \zeta_N^{-(N-1)} \\ 1 & \zeta_N^{-2} & \zeta_N^{-4} & \cdots & \zeta_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_N^{-(N-1)} & \zeta_N^{-2(N-1)} & \cdots & \zeta_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

Percebe-se que nesse caso discreto, a DFT e IDFT atuam como uma matriz mudança de base, saindo da base do tempo e indo para base das raízes unitarias

Além disso, a DFT pode ser vista de outra óptica, como avalição de polinômios.

Seja:

$$a(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$$

e $\zeta_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ Seja uma N-ésima raiz primitiva da unidade. Define

$$A_k := a(\zeta_N^k).$$

Então

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} a_n (\zeta_N^k)^n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \, \zeta_N^{kn},$$

o que é exatamente a formulação da DFT, para $a_n \equiv x[n]$ e $A_n \equiv X[n]$, opostamente, a IDFT é interpretada como interpolção de polinômios:

Dados os valores $\{A_k\}_{k=0}^{N-1}$, ela reconstrói os coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{N-1}$ do único polinômio de grau $N-1$ que satisfaz $a(\zeta_N^k) = A_k$ para todo k. Explicitamente,

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k \, \zeta_N^{-kn}.$$

Assim, DFT é *avaliar* em raízes da unidade e IDFT é *interpolar* (recuperar os coeficientes) a partir dessas avaliações. (Essa perspectiva baseia-se na determinição unívoca do polinómio de grau $N-1$ por N pontos vejá a seção 11.3 para demonstração desse fato)

4 A Multiplicação de Polinômios e a Complexidade Computacional

Um problema simplificado pela mudança de domino é a multiplicação de polinômios. Tome os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ de grau $N-1$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^{N-1} b_j x^j$$

Na abordagem clássica , o produto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é obtido distribuindo-se cada termo de f sobre todos os termos de g. Este processo resulta em um novo polinômio de grau $2N-2$:

$$h(x) = \sum_{k=0}^{2N-2} c_k x^k$$

onde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Nesta metodologia, o cálculo de cada coeficiente c_k exige múltiplas operações de produto e soma, resultando em uma complexidade assintótica $O(n^2)$. Para polinômios com grandes volumes de coeficientes, este custo computacional torna o método inviavel.

A conexão entre a multiplicação de polinômios e a análise de Fourier vem do fato de que, se $h(x) = f(x)g(x)$, então os coeficientes c_k de h são dados pela **convolução linear** dos coeficientes de f e g:

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i \, b_j.$$

Neste trabalho, devido ao foco na NTT e ao anel quociente $\mathbb{Z}_p[x]/(x^N+1)$, trabalhamos com a **convolução negacíclica** (de comprimento N), definida por:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \, b_{k-i} - \sum_{i=k+1}^{N-1} a_i \, b_{N+k-i}, \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

Diferente da circular, aqui os termos que "ultrapassam" o comprimento N retornam com sinal invertido.

4.1 Teorema da Convolução

Teorema 1. *A transformada de uma convolução no domínio do tempo (ou espaço) é o produto ponto a ponto (Hadamard) das transformadas no domínio da frequência:*

$$\mathcal{F}(f *_{neg} g) = \mathcal{F}(f) \odot \mathcal{F}(g).$$

Assim, o cálculo custoso da convolução é convertido em um produto ponto a ponto, pois a base de Fourier apropriada (utilizando as raízes de $x^N + 1$) diagonaliza o operador de convolução negacíclica (matriz negacirculante). Com a transformada direta ingênua, o custo ainda seria $O(N^2)$, portanto, não há ganho computacional em realizar essa transformação.

Um exemplo para o convencimento do leitor foi disposto no apêndice 11.2.

5 A "Fast Fourier Transform"

A FFT (Fast Fourier Transform) é uma maneira de otimizar o calculo da DFT.

O algoritmo da FFT foi redescoberto por Cooley e Tukey em 1965, uma vez que Gauss já tinha utilzado um algoritmo semelhante para calcular a órbitas de asteroides em 1805.

O algoritmo se baseia em **dividir para conquistar**.

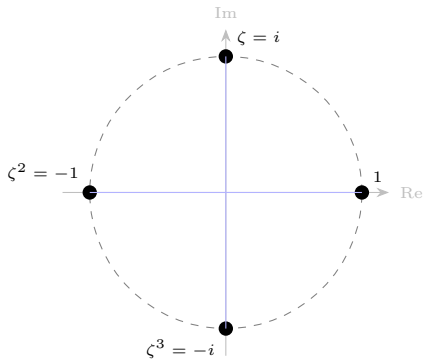
5.1 Números complexos

As raízes unitárias possuem propriedades cíclicas e certas simetrias que permitem a economia nos cálculos, vejámos um exemplo.

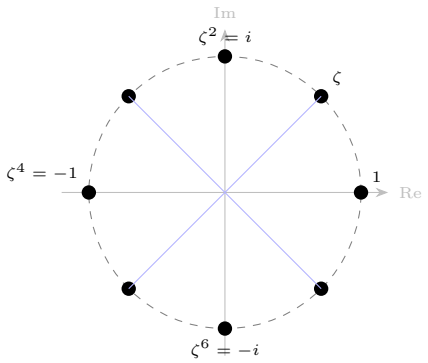
$$\zeta_4^1 = e^{-i\frac{2\pi}{4}} = e^{-i90^\circ} = -i$$

$$\zeta^1 = -i \qquad \zeta^2 = -1$$
$$\zeta^3 = i \qquad \zeta^4 = 1$$

por isso, percebe-se que, a cada 2 "deslocamentos", o valor se torna o oposto, como ilustrado na figura1:



(a) 4-ésimas raízes da unidade



(b) 8-ésimas raízes da unidade

Figure 1: Comparação entre as raízes da unidade no plano complexo.

De forma mais geral:

$\zeta_N = e^{\frac{-2\pi i}{N}}$, uma raiz N-ésima primitiva da unidade. Então para todo inteiro a, $\zeta_N^{a+\frac{N}{2}} = -\zeta_N^a$.

Além de que, pela periodicidade $\zeta_N^{a+N} = \zeta_N^a$ e $\zeta_N^2 = \zeta_{N/2}$, esta última pode ser vista na figura 1, onde $\zeta_8^2 = \zeta_4$

Para esse caso a DFT é representada desse modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

Voltando a FFT, o algoritmo decompõe uma DFT de tamanho N em duas sub-transformadas de tamanho $N/2$, separando os índices pares e ímpares da sequência original:

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m]\,\zeta_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1]\,\zeta_N^{(2m+1)k} \\ &\qquad \text{Usando } \zeta_N^2 = \zeta_{N/2}: \qquad \zeta_N^{2mk} = (\zeta_N^2)^{mk} = \zeta_{N/2}^{mk} \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m]\,\zeta_{N/2}^{mk} + \zeta_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1]\,\zeta_{N/2}^{mk} \\ &= E[k] + \zeta_N^k O[k], \qquad k = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1. \end{aligned}$$

Esta estrutura permite calcular dois valores de saída ($X[k]$ e $X[k+N/2]$) utilizando os mesmos resultados intermediários, através da denominada **operação borboleta** (*butterfly operation*):

1. $X[k] = E[k] + \zeta_N^k O[k]$
2. $X[k + N/2] = E[k] - \zeta_N^k O[k]$

como pode ser visto na imagem 2

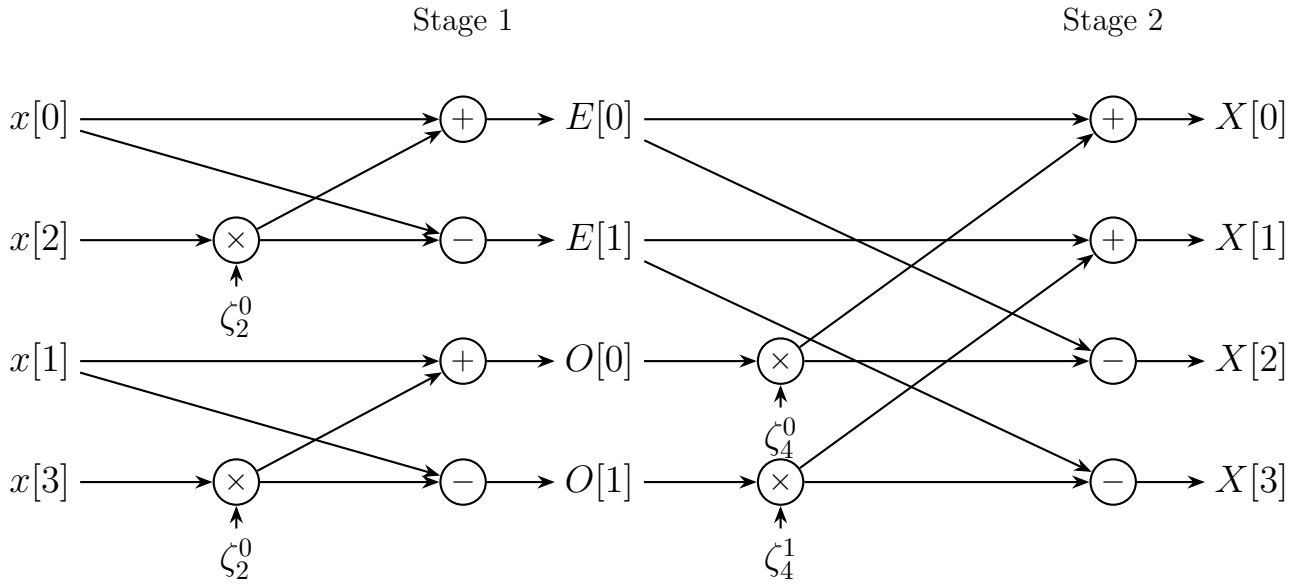


Figure 2: butterfly radix-2

A implementação em pseudocódigo no algoritmo 1

Algorithm 1 Cooley–Tukey FFT

Input: $x \in \mathbb{C}^N$, $N = 2^m$
Output: $X = \mathrm{DFT}(x)$

if $N = 1$ **then**
    return x
end if
$x_e \leftarrow$ elementos pares de x
$x_o \leftarrow$ elementos ímpares de x
$X_e \leftarrow \mathrm{FFT}(x_e)$
$X_o \leftarrow \mathrm{FFT}(x_o)$
for $k = 0$ to $N/2 - 1$ **do**
    $X[k] \leftarrow X_e[k] + \zeta_N^k X_o[k]$
    $X[k + N/2] \leftarrow X_e[k] - \zeta_N^k X_o[k]$
end for

Como a IDFT é praticamente identica à DFT, podemos usar o mesmo algoritmo da FFT para calcular a IFFT

Algorithm 2 IFFT via FFT

Input: $X \in \mathbb{C}^N$
Output: $x = \text{IFFT}(X)$
1: $Y \leftarrow \overline{X}$ ▷ i.e. o conjugado de X
2: $Z \leftarrow \text{FFT}(Y)$
3: $x \leftarrow \frac{1}{N} \cdot \overline{Z}$
4: **return** x

Desse modo, reduzimos a complexidade da transformada de $O(n^2) \longrightarrow O(n \cdot \log n)$. Por causa disso, podemos utilizar a FFT, junto com o **Teorema da convolução**, para multiplicar polinômios em $O(n \cdot \log n)$

6 Problemas da FFT

Um dos problemas da FFT é que ela trabalha com ponto flutuante, o que, para computadores, é um grande problema que pode causar erro de arredondamentos ou limitação nos cálculos. Além disso, na convolução linear, o polinômio dobra de tamanho a cada convolução o que rapidamente torna-se um problema tanto computacional quanto de armazenamento .

Solução: utilizar uma transformada que utiliza apenas números exatos e realiza uma convolução (nega)cíclica

7 Number Theoretic Transform (NTT)

7.1 Fundamentos

As propriedades que usamos na FFT — em especial a existência de uma raiz N-ésima da unidade ζ_N e o fato de que suas potências percorrem uniformemente o círculo — têm um análogo perfeito em teoria dos números, dentro de corpos (ou anéis) finitos. Isso não é coincidência: a DFT nada mais é do que a transformada de Fourier no grupo cíclico $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, e a mesma construção existe em outros contextos algébricos.

Mais formalmente, se ζ_N é uma raiz N-ésima primitiva da unidade, então o conjunto de todas as N-ésimas raízes

$$\mu_N = \{1, \zeta_N, \zeta_N^2, \ldots, \zeta_N^{N-1}\}$$

forma um grupo multiplicativo cíclico de ordem N. Existe um isomorfismo natural de grupos

$$\varphi : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mu_N, \qquad \varphi([k]) = \zeta_N^k,$$

onde o lado esquerdo usa a soma módulo N e o lado direito usa multiplicação:

$$\varphi([k+\ell]) = \zeta_N^{k+\ell} = \zeta_N^k \zeta_N^\ell = \varphi([k])\,\varphi([\ell]).$$

Assim, o grupo μ_N, gerado pelas potências de ζ_N, é uma realização "multiplicativa" do grupo cíclico $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$: o isomorfismo $[k] \mapsto \zeta_N^k$ mostra que somar módulo N corresponde exatamente

a multiplicar raízes N-ésimas da unidade. Portanto, estamos apenas vendo o mesmo grupo abstrato em duas roupagens diferentes, uma aditiva e outra multiplicativa.

7.1.1 Raiz Primitiva e Estrutura Negacíclica

Diferente da DFT complexa, onde raízes da unidade sempre existem para qualquer N, a NTT exige que o corpo finito $\mathbb{Z}_p$, isto é, os inteiros $(\text{mod } p)$, sendo p um primo, suporte a ordem da transformada.

Como p é primo, o conjunto $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ forma um corpo, e portanto seus elementos não nulos formam um grupo multiplicativo

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$$

de cardinalidade $p-1$. Além disso, esse grupo é cíclico (ver Apêndice 11.4), isto é, existe um gerador g tal que todo elemento não nulo pode ser escrito como uma potência de g.

Nesse contexto, dizer que existe uma raiz $2N$-ésima primitiva da unidade em $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ significa exatamente dizer que existe um elemento $\psi \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$ com ordem $\text{ord}(\psi) = 2N$ tal que $\psi^{2N} \equiv 1 \pmod{p}$ e nenhuma potência menor vale 1.

Como em qualquer grupo finito a ordem de um elemento divide a ordem do grupo, necessariamente deve valer

$$2N \mid |(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}| = p - 1.$$

Reciprocamente, como $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$ é cíclico, para todo divisor d de $p-1$ existe um elemento de ordem exatamente d; em particular, se $2N \mid (p-1)$ então existe ψ com $\text{ord}(\psi) = 2N$.

Concluímos, portanto, que existe uma raiz primitiva $2N$-ésima da unidade em $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ se, e somente se, $2N \mid (p-1)$ (equivalentemente via teorema de Euler Totiente, $p \equiv 1 \pmod{2N}$).

Dados esses critérios de de existência, trataremos da estrutura algébrica da transformada. A NTT Negacíclica é definida no anel quociente

$$R = \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x^N + 1)}$$

ou Seja, há uma composição de operações modulares.(a imagem 3 ilustra a sequencia das duas operações visualmente.)

Ela pode ser vista como a avalição do polinômio nas raízes da equação $x^N + 1 = 0$, que correspondem às potências ímpares de ψ. A transformada é definida por:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\psi^{(2k+1)n} \pmod{p}$$

Na forma matricial:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \, \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

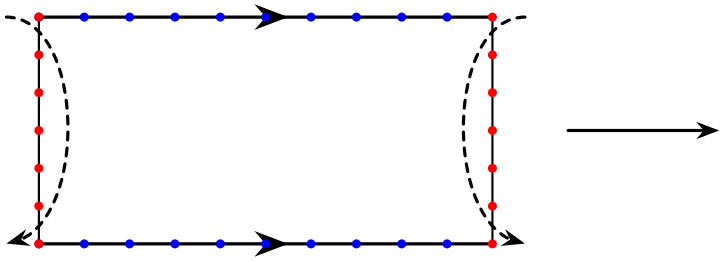
Neste caso, a matriz de transformação $\mathbf{W}_N$ difere da versão cíclica padrão, pois seus coeficientes seguem a estrutura das raízes negacíclicas:

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & \psi^1 & \psi^2 & \dots & \psi^{(N-1)} \\ 1 & \psi^3 & \psi^6 & \dots & \psi^{3(N-1)} \\ 1 & \psi^5 & \psi^{10} & \dots & \psi^{5(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{(2k+1)} & \psi^{(2k+1)2} & \dots & \psi^{(2k+1)(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{(2N-1)} & \psi^{(2N-1)2} & \dots & \psi^{(2N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

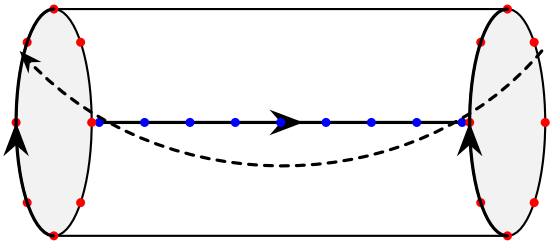
De forma geral, o termo na linha k e coluna n da matriz é dado por:

$$(\mathbf{W}_N)_{k,n} = \psi^{(2k+1)n} \pmod{p}, \qquad 0 \leq k, n \leq N-1$$

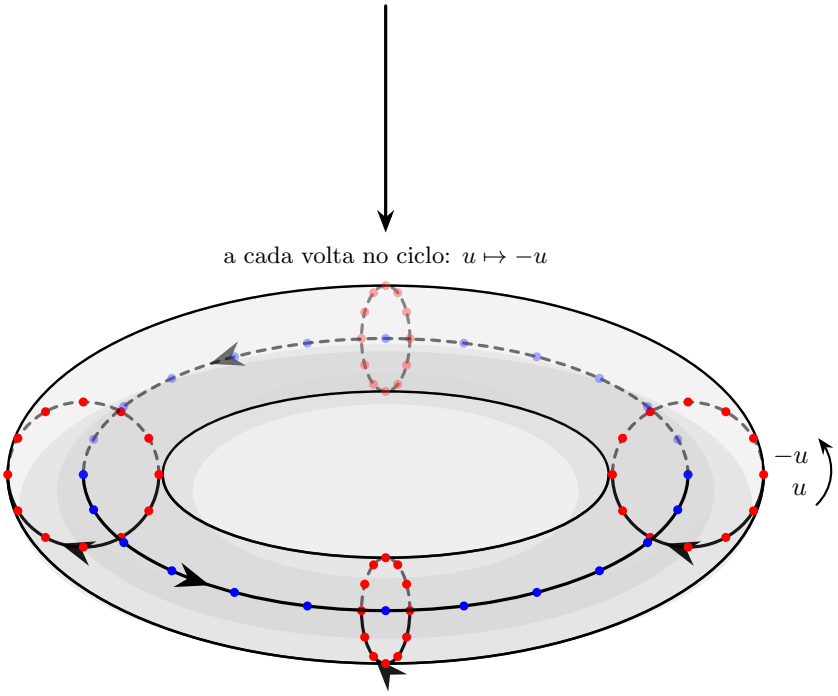
1. Colar lados horizontais (módulo $\mathbb{Z}_p$)



Obtém-se um cilindro



2. Colar lados verticais (módulo $(x^N + 1)$)



3. Obtém-se um Toro Discreto

Figure 3: representação das transformações

7.2 O Isomorfismo via Teorema Chinês dos Restos (CRT)

A fundamentação algébrica da NTT reside na estrutura do anel quociente $\mathbb{Z}_p[x]/(x^N+1)$. Já que x^N+1 fatora-se em N fatores lineares distintos e coprimos,

$$x^N+1=\prod_{k=0}^{N-1}\big(x-\psi^{2k+1}\big),$$

Homomorfismo de avaliação e o isomorfismo local.

Para cada $\alpha\in\mathbb{Z}_p$, considere o mapa de avaliação

$$\mathrm{ev}_\alpha:\mathbb{Z}_p[x]\to\mathbb{Z}_p,\qquad \mathrm{ev}_\alpha(a(x))=a(\alpha).$$

Esse mapa é um *homomorfismo de anéis* (preserva soma e produto):

$$\mathrm{ev}_\alpha(a+b)=\mathrm{ev}_\alpha(a)+\mathrm{ev}_\alpha(b),\qquad \mathrm{ev}_\alpha(ab)=\mathrm{ev}_\alpha(a)\,\mathrm{ev}_\alpha(b).$$

Além disso, seu núcleo é exatamente o ideal gerado por $(x-\alpha)$:

$$\ker(\mathrm{ev}_\alpha)=(x-\alpha).$$

De fato, pela Divisão Euclidiana, qualquer $a(x)$ pode ser escrito como

$$a(x)=q(x)(x-\alpha)+r$$

com $r\in\mathbb{Z}_p$, e avaliando em $x=\alpha$ obtemos $a(\alpha)=r$, uma vez que $(x-\alpha)$ zera. Logo $a(\alpha)=0$ se e somente se $(x-\alpha)\mid a(x)$. Pelo **Primeiro Teorema do Isomorfismo** para anéis,

$$\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x-\alpha)}\;\cong\;\mathrm{Im}(\mathrm{ev}_\alpha)=\mathbb{Z}_p,\qquad [a(x)]\longmapsto a(\alpha).$$

O isomorfismo global do CRT como produto de avaliações.

Como os fatores $(x-\psi^{2k+1})$ são coprimos dois a dois, o CRT fornece um isomorfismo de anéis

$$\Phi:\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x^N+1)}\;\xrightarrow{\cong}\;\prod_{k=0}^{N-1}\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\big(x-\psi^{2k+1}\big)}\;\cong\;\underbrace{\mathbb{Z}_p\times\cdots\times\mathbb{Z}_p}_{N\text{ vezes}}.$$

E, crucialmente, Φ é construído a partir dos homomorfismos de avaliação: a k-ésima componente é exatamente o homomorfismo $\mathrm{ev}_{\psi^{2k+1}}$ (passando ao quociente). Assim, para $[a(x)]\in\mathbb{Z}_p[x]/(x^N+1)$,

$$\Phi([a(x)])=\big(a(\psi^1),\,a(\psi^3),\,\ldots,\,a(\psi^{2N-1})\big)\in\mathbb{Z}_p^N.$$

Multiplicação vira produto ponto a ponto. Como cada $\mathrm{ev}_{\psi^{2k+1}}$ é homomorfismo e Φ é isomorfismo de anéis,

$$\Phi([a(x)]\,[b(x)])=\Phi([a(x)])\cdot\Phi([b(x)])$$

onde o produto do lado direito é componente a componente. Em particular, se $C=\Phi([a(x)b(x)])$, então

$$C_k=(ab)(\psi^{2k+1})=a(\psi^{2k+1})\,b(\psi^{2k+1}).$$

Isso explica formalmente por que a multiplicação no quociente $\mathbb{Z}_p[x]/(x^N+1)$ (convolução negacíclica dos coeficientes) se traduz em um produto de Hadamard no domínio transformado.

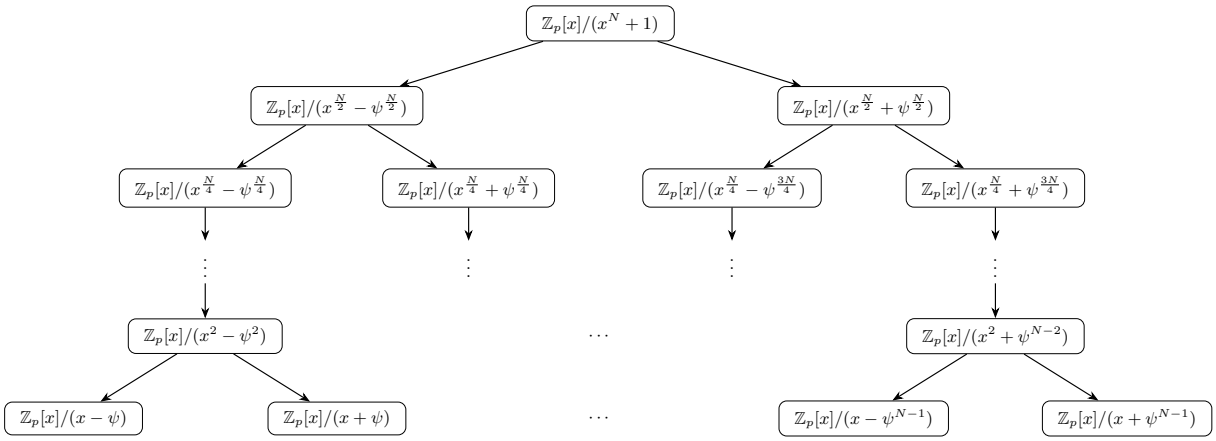


Figure 4: CRT da NTT Negacíclica

7.3 Transformada Numérica Inversa (INTT)

Como o Teorema Chinês dos Restos garante que a aplicação da NTT é um isomorfismo bijetor entre o anel de polinômios $\mathbb{Z}_p[x]/(x^N+1)$ e o domínio da frequência, existe uma transformação inversa única capaz de recuperar os coeficientes originais.

Denotamos a inversa multiplicativa de N no corpo $\mathbb{Z}_p$ por N^{-1}, tal que $N \cdot N^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$. A NTT Negacíclica Inversa (INTT) é definida formalmente por:

$$x[n] = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \psi^{-(2k+1)n} \pmod{p}$$

Note que o termo $\psi^{-(2k+1)n}$ refere-se à potência do inverso multiplicativo da raiz.

Representação Matricial

Na forma matricial, a operação de inversão corresponde à resolução do sistema linear $\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x}$. A solução é dada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}$$

Onde a matriz inversa $\mathbf{W}_N^{-1}$ é definida como o inverso modular das potências impares de ψ, escalada pelo fator N^{-1}:

$$\mathbf{W}_N^{-1} = N^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \psi^{-3} & \psi^{-5} & \cdots & \psi^{-(2N-1)} \\ 1 & \psi^{-6} & \psi^{-10} & \cdots & \psi^{-2(2N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{-(2k+1)} & \psi^{-2(2k+1)} & \cdots & \psi^{-(N-1)(2k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \psi^{-(2N-1)} & \psi^{-2(2N-1)} & \cdots & \psi^{-(N-1)(2N-1)} \end{bmatrix}$$

De modo geral, o termo na linha n e coluna k da matriz inversa é:

$$(\mathbf{W}_N^{-1})_{n,k} = N^{-1}\psi^{-(2k+1)n} \pmod{p}$$

7.4 A NTT como uma FFT: Decomposição Radix-2

A eficiência da NTT negacíclica baseia-se na estratégia *dividir para conquistar*, análoga à FFT clássica (algoritmo de Cooley-Tukey). Em vez de avaliar diretamente um polinômio $A(x)$ em N pontos, decompomos o problema em dois subproblemas de tamanho $N/2$ através da separação dos coeficientes em índices pares e ímpares.

1. Definições e Propriedades

Seja $N = 2^m$ e p um primo tal que exista uma raiz primitiva $\psi \in \mathbb{Z}_p^*$ de ordem $2N$. As propriedades fundamentais para a aritmética negacíclica são:

$$\psi^{2N} \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{e} \quad \psi^N \equiv -1 \pmod{p}.$$

A NTT negacíclica consiste na avaliação do polinômio $A(x)$ nas N raízes ímpares da unidade:

$$x_k = \psi^{2k+1}, \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

2. Decomposição do Polinômio (Decimation-in-Time)

Podemos reescrever $A(x)$ separando os termos com potências pares e ímpares de x:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{i=0}^{N-1} a[i]x^i \\ &= \sum_{i=0}^{N/2-1} a[2i]x^{2i} + \sum_{i=0}^{N/2-1} a[2i+1]x^{2i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{N/2-1} a[2i](x^2)^i + x \cdot \sum_{i=0}^{N/2-1} a[2i+1](x^2)^i. \end{aligned}$$

Definindo os polinômios auxiliares $A_{\text{par}}(y)$ e $A_{\text{impar}}(y)$ como as partes pares e ímpares respectivamente, obtemos a relação recursiva:

$$A(x) = A_{\text{par}}(x^2) + x \cdot A_{\text{impar}}(x^2).$$

3. A Recursão e o Fator ψ^2

Ao avaliarmos essa expressão nos pontos $x_k = \psi^{2k+1}$, observamos o comportamento do termo quadrático:

$$x_k^2 = (\psi^{2k+1})^2 = \psi^{4k+2} = (\psi^2)^{2k+1}.$$

Isso revela que, para os subproblemas de tamanho $N/2$, a base da transformação torna-se ψ^2. Como a ordem de ψ é $2N$, a ordem de ψ^2 é N, satisfazendo o requisito de raiz primitiva para o subgrupo de tamanho $N/2$.

Logo, os valores retornados pelas chamadas recursivas são:

$$Y_{\text{par}}[k] = A_{\text{par}}(x_k^2) \quad \text{e} \quad Y_{\text{impar}}[k] = A_{\text{impar}}(x_k^2).$$

4. A Borboleta (Butterfly) Negacíclica

Para recombinar os resultados e obter $Y[k] = A(x_k)$, exploramos a simetria das raízes. Lembre que, após a decomposição $A(x) = A_{\text{par}}(x^2) + x\, A_{\text{impar}}(x^2)$, avaliamos em

$$x_k = \psi^{2k+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

de modo que

$$Y_{\text{par}}[k] = A_{\text{par}}(x_k^2), \qquad Y_{\text{impar}}[k] = A_{\text{impar}}(x_k^2), \qquad (0 \le k < N/2).$$

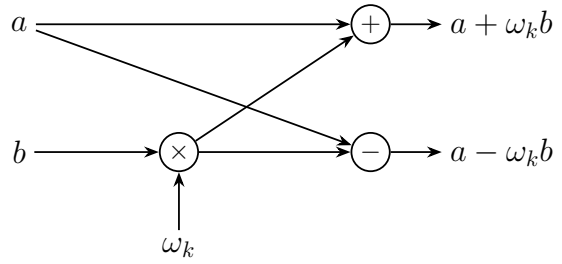
Para a primeira metade ($0 \le k < N/2$), a recombinação é direta. Para a segunda metade, usamos a simetria negacíclica das raízes ímpares:

$$x_{k+N/2} = \psi^{2(k+N/2)+1} = \psi^{2k+1} \cdot \psi^N = -\psi^{2k+1} = -x_k.$$

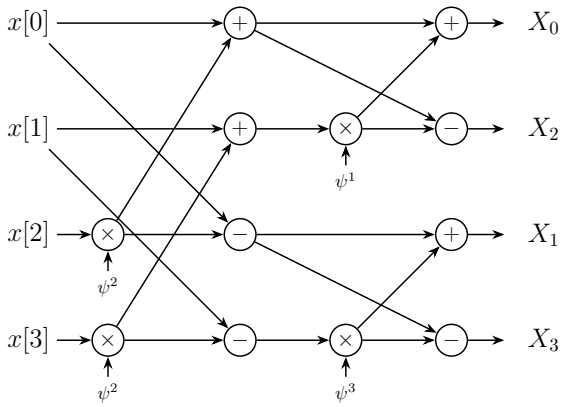
Assim, o termo $x \cdot A_{\text{impar}}(x^2)$ apenas troca de sinal na segunda metade. As equações da borboleta tornam-se:

$$\boxed{\begin{aligned} Y[k] &= Y_{\text{par}}[k] + x_k \cdot Y_{\text{impar}}[k] \pmod p \\ Y[k + N/2] &= Y_{\text{par}}[k] - x_k \cdot Y_{\text{impar}}[k] \pmod p \end{aligned}}$$

Nota de Implementação: Na prática, os valores $x_k = \psi^{2k+1}$ não são recalculados por exponenciação. Percorremos as raízes ímpares multiplicando por ψ^2 a cada passo: inicialize $x \leftarrow \psi$ e atualize $x \leftarrow x \cdot \psi^2$, gerando $(\psi^1, \psi^3, \psi^5, \ldots)$.



(a) Butterfly NTT



(b) Butterfly NTT 4

7.5 A INTT via Gentleman–Sande (GS): Reconstrução

Enquanto a transformação direta (NTT) utiliza *dividir para conquistar* separando coeficientes pares e ímpares, a transformação inversa (INTT) percorre o caminho oposto: combina resultados de subproblemas menores para recuperar o vetor original. O esquema de Gentleman–Sande pode ser visto como a versão "transposta" (em ordem de operações) da decomposição de Cooley–Tukey.

1. Paridade e o sistema linear local

Na NTT negacíclica por partição par/ímpar, escrevemos

$$A(x) = A_e(x^2) + x\,A_o(x^2), \qquad A_e(t) = \sum_{i=0}^{N/2-1} a[2i]t^i, \quad A_o(t) = \sum_{i=0}^{N/2-1} a[2i+1]t^i.$$

A avaliação ocorre nos pontos ímpares $x_k = \psi^{2k+1}$, $k = 0, \ldots, N-1$. Definindo o *twiddle factor* do nível como

$$w_k = x_k = \psi^{2k+1},$$

e denotando por $Y_e[k] = A_e(x_k^2)$ e $Y_o[k] = A_o(x_k^2)$ (retornados pela recursão), a combinação (borboleta direta) é:

$$\begin{cases} Y[k] = Y_e[k] + w_k\,Y_o[k], \\ Y[k+N/2] = Y_e[k] - w_k\,Y_o[k], \end{cases} \qquad 0 \le k < N/2.$$

Na etapa inversa, conhecemos $Y[k]$ e $Y[k+N/2]$ e queremos recuperar $Y_e[k]$ e $Y_o[k]$.

2. A lógica da recuperação (inversão do 2×2)

Somando e subtraindo as equações acima, obtemos:

$$Y[k] + Y[k+N/2] = 2Y_e[k], \qquad Y[k] - Y[k+N/2] = 2w_k\,Y_o[k].$$

Como p é primo ímpar, 2 é invertível em $\mathbb{Z}_p$ e podemos escrever:

$$\boxed{\begin{aligned} Y_e[k] &= 2^{-1}\big(Y[k] + Y[k+N/2]\big) \pmod p, \\ Y_o[k] &= 2^{-1}\big(Y[k] - Y[k+N/2]\big)\, w_k^{-1} \pmod p. \end{aligned}}$$

Assim, a borboleta inversa recupera os dois vetores de entrada do nível, que então alimentam as recursões de tamanho $N/2$.

3. Por que a recursão usa ψ^2 novamente

Na ida, ao avaliar em $x_k = \psi^{2k+1}$, temos

$$x_k^2 = (\psi^{2k+1})^2 = \psi^{4k+2} = (\psi^2)^{2k+1},$$

ou seja, os subproblemas são novamente NTTs negacíclicas em $N/2$ pontos ímpares, mas agora com parâmetro ψ^2. Na volta, o mesmo vale: após aplicar a borboleta inversa no nível corrente, chamamos recursivamente a INTT nos blocos correspondentes usando ψ_{inv}^2 (em completa simetria com o pseudocódigo).

4. Ordem das operações: CT vs GS

A diferença estrutural entre as duas direções pode ser resumida assim:

1. Na **Ida (CT / DIT)**, primeiro resolvemos recursivamente e *depois* combinamos com o fator w_k.
2. Na **Volta (GS)**, primeiro desfazemos a combinação local (somar/subtrair e multiplicar por w_k^{-1}) e *depois* prosseguimos recursivamente.

Nota de implementação: o fator 2^{-1} pode ser acumulado ao longo das camadas e aplicado como um único fator global N^{-1} ao final, reduzindo o número de multiplicações escalares.

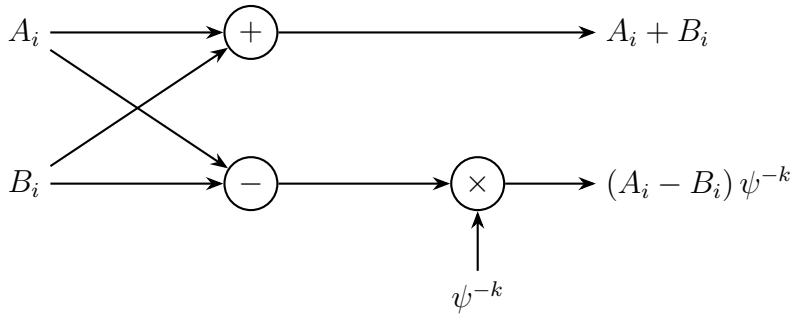


Figure 6: Butterfly INTT

A implementa da NTT negacíclica está no pseudocódigo a seguir

Algorithm 3: NTT Negacíclica (CT)

Input: $a \in \mathbb{Z}_p^N$ (Coeficientes de entrada)
Input: $N = 2^m$ e Módulo p
Input: ψ: Raiz primitiva $2N$-ésima da unidade

```
len ← N/2
for l ← m − 1 down to 0 do
    num_gr ← 2^{m−1−l}
    for i ← 0 to num_gr − 1 do
        ζ ← ψ^{brv_m(num_gr+i)}
        for j ← i · 2^{l+1} to ... + 2^l − 1 do
            t_0 ← a[j]
            t_1 ← ζ · a[j + 2^l]  (mod p)
            a[j] ← t_0 + t_1  (mod p)
            a[j + 2^l] ← t_0 − t_1  (mod p)

        end for

    end for

end for
return a (bit-reversed)
```

Algorithm 4: NTT Inversa (GS)

Input: $\hat{a}$ (Vetor em ordem *bit-reversed*)
Input: $N = 2^m$ e Módulo p
Input: ψ: Raiz primitiva $2N$-ésima da unidade

```
for l ← 0 to m − 1 do
    num_gr ← 2^{m−1−l}
    for i ← 0 to num_gr − 1 do
        ζ ← ψ^{−brv_m(num_gr+i)}
        for j ← i · 2^{l+1} to ... + 2^l − 1 do
            t_0 ← a[j]
            t_1 ← a[j + 2^l]
            a[j] ← t_0 + t_1  (mod p)
            a[j + 2^l] ← (t_0 − t_1)ζ  (mod p)
        end for
    end for
end for
invN ← N^{−1}  (mod p)
for i ← 0 to N − 1 do
    a[i] ← a[i] · invN
end for
return a (Ordem normal)
```

8 Testes comparativos

A comporação computacional dessas ferramentas pode ser vista na tabela a seguir, onde calculou-se o maior número de Fibonacci obtido em menos de um segundo. Todos os testes foram executados em single-core.

Nos algoritmos da FFT e da NTT, o n-ésimmo número de Fibonacci foi calculado pela seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

sendo a multiplicação que ocorre tanto na exponenciação quanto no procuto interno foram otimizadas com o devido método.

Além disso, como o foco foi apenas em comparar a velocidade dos métodos, utilizou-se de scrpites para a geração de macros com os valores das raízes primitivas, raizes da unidade, entres outras constantes, para mais informações veja o repositório.

(GMP é uma biblioteca otimizada para operações com inteiros extremamente grandes)

Setup:

CPU: 13th Gen Intel(R) Core(TM) i7-1365U (12) @ 5.20 GHz

GPU: Intel UHD Graphics @ 1.30 GHz [Integrated]

Algoritmo	n-ésimo nº de Fibonacci
Algoritmo Naive	44
Algoritmo iterado	566'053
Algoritmo FFT	3'145'816
Algoritmo NTT	24'178'839
Algoritmo GMP	238'961'323

fonte: `https://github.com/SheafificationOfG/Fibsonisheaf`

9 NTT incompleta e a restrição de parâmetros no caso negacíclico

Na multiplicação negacíclica de polinômios no anel

$$\mathbb{Z}_p[x]/(x^N + 1),$$

com N potência de dois, a utilização de uma **NTT completa** exige a existência de uma raiz primitiva de ordem $2N$ módulo p. Quando p é primo, essa condição é equivalente a

$$p \equiv 1 \pmod{2N}.$$

Em aplicações criptográficas baseadas em reticulados, em especial em esquemas de Fully Homomorphic Encryption o valor de N é tipicamente muito grande. Como consequência, a condição acima impõe fortes restrições sobre a escolha do primo p, frequentemente forçando o uso de módulos grandes ou pouco flexíveis, o que impacta tanto a eficiência quanto o ajuste fino de parâmetros de segurança.

Uma forma natural de relaxar essa restrição é empregar a chamada **NTT ℓ-incompleta**. A ideia consiste em interromper o algoritmo da NTT antes de executar todos os $\log_2 N$ estágios do esquema radix-2. Mais precisamente, ao parar após $\log_2 N - \ell$ estágios, a existência da transformada passa a requerer apenas uma raiz da unidade de ordem $2N/2^\ell$ em $\mathbb{Z}_p$, o que resulta na condição mais fraca

$$p \equiv 1 \pmod{2N/2^\ell}.$$

Dessa forma, o conjunto de primos admissíveis torna-se significativamente maior, permitindo escolhas de parâmetros mais flexíveis.

Do ponto de vista algébrico, a NTT ℓ-incompleta não avalia o polinômio em todas as N raízes da unidade, mas o mapeia para um vetor de $N/2^\ell$ polinômios de menor grau, cada um pertencente a um quociente do tipo

$$\mathbb{Z}_p[x]/(x^{2^\ell} - \psi_i),$$

onde ψ_i são potências apropriadas da raiz disponível. A multiplicação passa então a ser realizada componente a componente nesses anéis menores, seguida de uma transformada inversa incompleta.

O principal custo adicional desse método está na *multiplicação de base* dentro dos anéis $\mathbb{Z}_p[x]/(x^{2^\ell} - \psi_i)$, que, para valores maiores de ℓ, tende a ser implementada por algoritmos quadráticos. No entanto, o trabalho de Paiva et al. [7] mostra que, no contexto de bootstrapping amortizado para esquemas do tipo FHEW/TFHE, esse custo pode sera eliminado. Os autores reformulam a NTT inversa como o produto de duas matrizes de borboleta (controladas por um parâmetro de divisão α) e demonstram que a multiplicação de base da NTT incompleta pode ser *incorporada* ao primeiro estágio dessa decomposição matricial, sem aumento no número assintótico de operações.

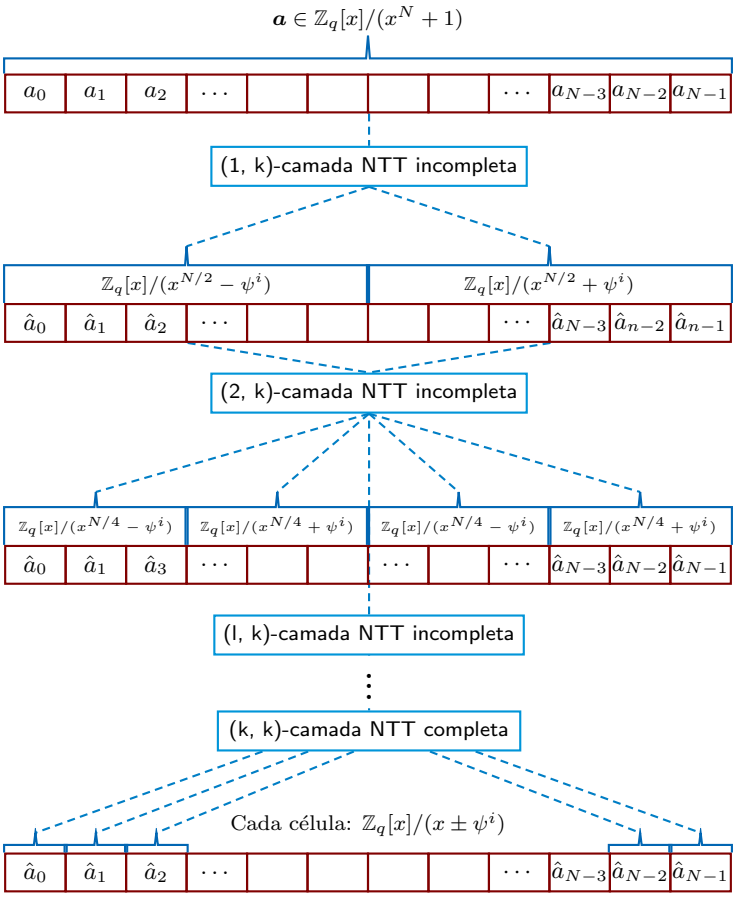


Figure 7: árvore de fracionameto da NTT

Como resultado, obtém-se o que os autores denominam *"NTT incompleta gratuita"*: para valores moderados de ℓ, é possível relaxar substancialmente a condição sobre o primo p sem penalidade computacional relevante, ao mesmo tempo em que se ampliam as opções de parâmetros e se melhora o compromisso entre desempenho e taxa de falha (decryption failure rate).

10 Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao professor doutor *Thales Paiva* pela chance de apresentar o seminário e pelos ensinamentos, gostaria de agradecer tambem o professor doutor *João Fernando da Cunha Nariyoshi* por esclarecer algumas dúvidas sobre a parte da matemática pura. Foi realmente divertido pesquisar, escrever, desenhar e animar para esse seminário.

11 Apêndice

11.1 DFT como transformação linear

Seja $\zeta = e^{-2\pi i/N}$ uma raiz primitiva N-ésima da unidade. Definimos a Transformada Discreta de Fourier (DFT) como a operação que mapeia um sinal discreto $x[n]$ de comprimento N em uma sequência $X[k]$ no domínio da frequência, dada por:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, \zeta^{kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Teorema 2. *A Transformada Discreta de Fourier é uma transformação linear. Ou Seja, para quaisquer sinais $x[n], y[n]$ e escalares $a, b \in \mathbb{C}$, vale:*

$$\mathrm{DFT}(ax + by) = a\,\mathrm{DFT}(x) + b\,\mathrm{DFT}(y).$$

Demonstração. Sejam $x[n]$ e $y[n]$ dois sinais e $a, b \in \mathbb{C}$ constantes. Definimos a combinação linear $z[n] = a\,x[n] + b\,y[n]$. Aplicando a definição da DFT ao sinal $z[n]$, obtemos $Z[k]$:

$$Z[k] = \sum_{n=0}^{N-1} z[n]\, \zeta^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} (a\,x[n] + b\,y[n])\, \zeta^{kn}.$$

Pela propriedade distributiva do somatório e pela linearidade da soma em $\mathbb{C}$:

$$Z[k] = \sum_{n=0}^{N-1} a\,x[n]\zeta^{kn} + \sum_{n=0}^{N-1} b\,y[n]\zeta^{kn}.$$

Como os escalares a e b não dependem do índice da soma n, podemos fatorá-los para fora dos somatórios:

$$Z[k] = a \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\zeta^{kn} + b \sum_{n=0}^{N-1} y[n]\zeta^{kn}.$$

Reconhecendo as expressões dentro dos somatórios como as definições de $X[k]$ e $Y[k]$, respectivamente, concluímos que:

$$Z[k] = a\,X[k] + b\,Y[k].$$

Portanto, a relação de linearidade é satisfeita para cada componente k, o que prova que a DFT é uma transformação linear. □

11.2 Exemplo de convolução negacíclica

Sejam dois sinais x e y de comprimento $N = 3$:

$$x = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Neste contexto, a frequência fundamental não é a raiz da unidade, mas sim a raiz de $x^N + 1 = 0$. Seja ψ tal que $\psi^N = -1$. Para $N = 3$, temos $\psi^3 = -1$.

Método 1: Convolução no Tempo (Matriz Negacirculante)

A convolução negacíclica $z = x *_{neg} y$ equivale à multiplicação de uma matriz negacirculante H_x pelo vetor y. Note que os elementos que "dão a volta" (acima da diagonal principal) têm sinal invertido:

$$H_x = \begin{bmatrix}x[0] & -x[2] & -x[1]\\ x[1] & x[0] & -x[2]\\ x[2] & x[1] & x[0]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Calculando $z = H_x y$:

$$z = \begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1(1) + 0 - 2(1)\\ 2(1) + 0 + 0\\ 0 + 0 + 1(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$$

Método 2: Diagonalização (Domínio da Frequência)

A matriz negacirculante H_x é diagonalizada por uma variante da DFT que utiliza potências ímpares de ψ (raízes de $x^N + 1$). Matematicamente:

$$H_x = \mathcal{F}^{-1}\Lambda_x\mathcal{F}$$

onde Λ_x contém os autovalores de H_x, que correspondem à avaliação do polinômio $x(z)$ nas raízes de $z^N = -1$.

Para verificar os autovalores (o espectro de x), calculamos o polinômio característico de H_x:

$$\det(H_x - \lambda I) = 0 \implies \det\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & -2\\ 2 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 2 & 1-\lambda\end{bmatrix} = 0$$

Expandindo o determinante (regra de Sarrus):

$$(1-\lambda)^3 - (2)(2)(2) = 0 \implies (1-\lambda)^3 = 8$$

As raízes para $(1-\lambda)$ são as raízes cúbicas de 8. Sabemos que $8 = 8 \cdot 1$, mas no contexto complexo as raízes são 2, $2\zeta_3$ e $2\zeta_3^2$. Logo:

$$\begin{aligned} 1-\lambda_0 = 2 &\implies \lambda_0 = -1 \\ 1-\lambda_1 = 2\zeta_3 &\implies \lambda_1 = 1-2\zeta_3 \\ 1-\lambda_2 = 2\zeta_3^2 &\implies \lambda_2 = 1-2\zeta_3^2 \end{aligned}$$

Estes valores λ_k correspondem à Transformada Negacíclica (NTT sobre x^N+1) do vetor x, permitindo calcular a convolução via produto ponto a ponto.

Verificação do Autovetor

Verificamos agora se o autovetor v_1 da base Negacíclica (coluna de $\mathcal{F}^{-1}$ associada à raiz ψ), dado por $v_1 = [1, \psi^{-1}, \psi^{-2}]^T = [1, -\psi^2, -\psi]^T$, satisfaz $H_x v_1 = \lambda_1 v_1$.
Lado esquerdo $(H_x v_1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\psi^2 \\ -\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2\psi \\ 2-\psi^2 \\ -2\psi^2-\psi \end{bmatrix}$$

Lado direito $(\lambda_1 v_1)$, onde o autovalor é $\lambda_1 = x(\psi) = 1+2\psi$:

$$(1+2\psi)\begin{bmatrix} 1 \\ -\psi^2 \\ -\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2\psi \\ -\psi^2-2\psi^3 \\ -\psi-2\psi^2 \end{bmatrix}$$

Utilizando a propriedade $\psi^3 = -1$, simplificamos o termo do meio: $-\psi^2 - 2(-1) = 2-\psi^2$. A igualdade é satisfeita, confirmando que as raízes de x^N+1 geram a base natural de H_x.

Representação Matricial da Diagonalização

Primeiro, calculamos os vetores transformados $X = \mathrm{NTT}(x)$ e $Y = \mathrm{NTT}(y)$ avaliando os polinômios nas raízes de $z^3 = -1$:

$$X = \begin{bmatrix} x(-1) \\ x(\psi) \\ x(\psi^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1+2\psi \\ 1+2\psi^2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y(-1) \\ y(\psi) \\ y(\psi^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\psi^2 \\ 1+\psi^4 \end{bmatrix}$$

**Nota: $y(\psi) = 1+0\psi+1\psi^2$. Para o terceiro termo, usamos $\psi^4 = -\psi$, logo $1-\psi$.*

Agora, construímos a matriz diagonal $\Lambda_x = \mathrm{diag}(X)$. A operação de convolução no domínio da frequência ($Z = \Lambda_x Y$) torna-se:

$$\mathbf{Z} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\psi^2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz Diagonal } (\Lambda_x)} \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\psi^2 \\ 1-\psi \end{bmatrix}$$

Executando o produto ponto a ponto:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -2 \\ (1+2\psi)(1+\psi^2) \\ (1+2\psi^2)(1-\psi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1+\psi^2+2\psi+2\psi^3 \\ 1-\psi+2\psi^2-2\psi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1+2\psi+\psi^2 \\ 3-\psi+2\psi^2 \end{bmatrix}$$

**Simplificações usando $\psi^3 = -1$.*

Retorno ao Tempo (INTT)

Finalmente, aplicamos a transformada inversa. O vetor resultante z deve coincidir com o cálculo temporal $[-1, 2, 1]^T$. Ao reconstruir o polinômio $z(\omega)$ a partir dos valores em $\mathbf{Z}$, obtemos os coeficientes:

$$z = \text{INTT}(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Isso verifica que:

$$z(\psi) = -1 + 2\psi + \psi^2$$

O que coincide exatamente com o segundo elemento do vetor $\mathbf{Z}$ calculado acima, fechando o ciclo da prova numérica.

11.3 Determinição unívoca do polinômio

Teorema 3 (Unicidade via matriz de Vandermonde)**.** *Sejam $x_0, \ldots, x_{N-1}$ escalares dois a dois distintos em um corpo $\mathbb{K}$ (e.g., $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_p$), e Sejam $y_0, \ldots, y_{N-1} \in \mathbb{K}$. Existe um **único** polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{N-1}x^{N-1} \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p(x_i) = y_i$ para todo $i = 0, \ldots, N-1$.*

Demonstração. Escreva $p(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k$. Impor as condições $p(x_i) = y_i$ para $i = 0, \ldots, N-1$ gera o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{N-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N-1} & x_{N-1}^2 & \cdots & x_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Denote essa matriz por V (matriz de Vandermonde,i.e. $V_{i,j} = x_i^{j-1}$ para todo os índices i,j), o vetor de coeficientes por a e o vetor de valores por y; então o sistema é

$$Va = y.$$

O determinante de Vandermonde é dado por

$$\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le N-1} (x_j - x_i).$$

Como os x_i são dois a dois distintos, temos $x_j - x_i \neq 0$ para $i \neq j$, logo $\det(V) \neq 0$. Portanto, V é invertível e o sistema $Va = y$ tem **solução única**, dada por

$$a = V^{-1}y.$$

Concluímos que existe um único vetor de coeficientes $(a_0, \ldots, a_{N-1})$, isto é, um **único** polinômio $p(x)$ de grau $\leq N-1$ que interpola os N pontos. □

11.4 Estrutura Cíclica de Grupos Multiplicativos de Corpos Finitos

Neste apêndice, justificamos a afirmação de que o grupo multiplicativo $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ é cíclico e analisamos a existência de elementos com ordens específicas, fundamentando a existência de raízes primitivas da unidade necessárias para a definição da Transformada.

Ciclicidade de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$

Seja $\mathbb{K}$ um corpo finito. O teorema a seguir estabelece que seu grupo multiplicativo é cíclico. No contexto do trabalho, aplicamos isso para $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Teorema 4. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo finito. Então o grupo multiplicativo $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K}\setminus\{0\}$ é um grupo cíclico.*

Demonstração. Seja $n = |\mathbb{K}^\times|$ a ordem do grupo. Sendo $\mathbb{K}^\times$ um grupo abeliano finito, Seja m a ordem máxima dentre os elementos de $\mathbb{K}^\times$. Uma propriedade fundamental de grupos abelianos finitos garante que a ordem de qualquer elemento do grupo divide a ordem máxima m.

Portanto, para todo $x \in \mathbb{K}^\times$, temos que:

$$x^m = 1.$$

Considere agora o polinômio $f(x) = x^m - 1$ com coeficientes no corpo $\mathbb{K}$. Sabemos que um polinômio de grau m sobre um corpo possui, no máximo, m raízes distintas.

No entanto, acabamos de ver que todos os n elementos de $\mathbb{K}^\times$ satisfazem a equação $x^m - 1 = 0$. Logo, o polinômio tem n raízes. Para que isso não viole o limite de raízes, devemos ter necessariamente:

$$n \leq m.$$

Por outro lado, pelo Teorema de Lagrange, a ordem de qualquer elemento (incluindo o elemento de ordem máxima m) deve dividir a ordem do grupo (n). Logo, $m \leq n$.

Concluímos que $m = n$. Isso significa que existe um elemento em $\mathbb{K}^\times$ cuja ordem é igual à ordem do grupo. Tal elemento é, por definição, um gerador de $\mathbb{K}^\times$. Portanto, o grupo é cíclico. □

Existência de Elementos de Ordem d

Tendo estabelecido que $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ é cíclico de ordem $p-1$, justificamos a recíproca mencionada no texto principal: para todo divisor da ordem do grupo, existe um elemento com aquela ordem.

Proposição 1. *Seja G um grupo cíclico finito de ordem M, gerado por g. Se d é um divisor de M, então existe um elemento em G com ordem exatamente d.*

Demonstração. Como $d \mid M$, podemos escrever $M = d \cdot k$ para algum inteiro k. Considere o elemento $h = g^k$. Calculando as potências de h:

$$h^d = (g^k)^d = g^{kd} = g^M = 1_G.$$

Portanto, a ordem de h divide d. Para ver que a ordem é exatamente d, suponha que $h^r = 1$ para $0 < r < d$. Então:

$$(g^k)^r = g^{kr} = 1.$$

Como a ordem de g é M, isso implicaria que $M \mid kr$, ou seja, $dk \mid kr$, o que implica $d \mid r$. Isso contradiz $r < d$.

Logo, $\text{ord}(h) = d$. □

Aplicando ao contexto do texto principal: como $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ tem ordem $M = p - 1$, se impusermos a condição $2N \mid (p-1)$, a proposição acima garante a existência de um elemento ψ de ordem $2N$ (uma raiz primitiva $2N$-ésima da unidade).

References

[1] Joachim von zur Gathen and Jürgen Gerhard. *Modern Computer Algebra*. 3rd. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

[2] Syed Mahbub Hafiz et al. "Incompleteness in Number-Theoretic Transforms: New Tradeoffs and Faster Lattice-Based Cryptographic Applications". In: *2025 IEEE 10th European Symposium on Security and Privacy (EuroS&P)*. 2025, pp. 565–584. DOI: 10.1109/EuroSP63326.2025.00039.

[3] Matthias J. Kannwischer. "Polynomial Multiplication for Post-Quantum Cryptography". Master's Thesis. Tallinn University of Technology, 2018.

[4] Patrick Longa and Michael Naehrig. "Speeding up the Number Theoretic Transform for Faster Ideal Lattice-Based Cryptography". en. In: *Cryptology and Network Security*. Ed. by Sara Foresti and Giuseppe Persiano. Vol. 10052. Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer International Publishing, 2016, pp. 124–139. ISBN: 978-3-319-48964-3. DOI: 10.1007/978-3-319-48965-0_8. URL: https://link.springer.com/10.1007/978-3-319-48965-0_8.

[5] Henri J. Nussbaumer. *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms*. 2nd ed. Springer Berlin, Heidelberg, 1982.

[6] Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schafer. *Discrete-Time Signal Processing*. 3rd. Prentice Hall, 2009.

[7] Thales B. Paiva et al. *Faster amortized bootstrapping using the incomplete NTT for free*. IACR Cryptology ePrint Archive, Report 2025/696. 2025. URL: https://eprint.iacr.org/2025/696.

[8] Ardianto Satriawan, Rella Mareta, and Hanho Lee. "A Complete Beginner Guide to the Number Theoretic Transform (NTT)". In: *arXiv preprint arXiv:2307.01944* (2023).