1 semanario NTT

2 A Dualidade entre Tempo e Frequência

A Transformada de Fourier é uma operação matemática que mapeia uma função do domínio do tempo (ou espaço) para o seu domínio dual: a frequência. Essa transição é extremamente útil, pois propriedades que são complexas de analisar no tempo tornam-se claras no espectro de frequências.

Além da análise, essa mudança de espaço possibilita a simplificação de operações fundamentais.

3 Aplicabilidade e Importância

Esta ferramenta é um pilar fundamental em diversas áreas do conhecimento:

- **Matemática Pura:** Essencial na Teoria Analítica dos Números e no estudo de Equações Diferenciais Parciais (EDPs).
- **Física Moderna:** É a base matemática do **Princípio da Incerteza de Heisenberg** na Mecânica Quântica, onde a posição e o momento de uma partícula formam um par de variáveis conjugadas de Fourier.
- **Engenharia:** Processamento de sinais, compressão de dados (MP3, JPEG) e telecomunicações.

4 Transformada de Fourier Contínua (CTFT)

Para uma função contínua $g(t)$, a transformada é definida pela integral:

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi i f t}\, dt$$

Ela pode ser entendida como um produto interno(uma projeção) do sinal com todos as frequencias da reta real $\langle g, e^{-2\pi i f t} \rangle$, que, devido a ortoganalidade das frequências diferentes e que funcoes bem comportadas podem ser decompostas em series de autofuncoes e^{-ift}, consegue extrair extamente as frequências do sinal. Apesar de sua elegância teórica, a CTFT apresenta desafios para a aplicação prática em sistemas digitais:

1. **Natureza Analítica:** A resolução de integrais impróprias exige uma manipulação simbólica que é difícil de implementarz em computadores comuns.
2. **Limite Infinito:** A definição pressupõe que conhecemos o sinal de $-\infty$ a $+\infty$, o que é impossível em cenários reais.
3. **Amostragem Finita:** Na prática, os sinais são capturados de forma discreta (amostras) e por um tempo limitado, o que torna a integral contínua inaplicável.

5 Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Para viabilizar o processamento em computadores, utilizamos a **DFT**. Ela opera sobre uma sequência finita de N amostras, mapeando dados discretos no tempo para dados discretos na frequência:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

Para $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Diferente da versão contínua, a DFT lida com somatórios e vetores numéricos, permitindo que a teoria de Fourier seja aplicada em qualquer dispositivo digital. Eh possivel provar que a DFT eh um transformacao linear, logo, pode ser representada matricialmente.

Seja $\zeta_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$. A representação matricial da DFT para $n = 0, 1, \dots, N-1$ é:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta_N^1 & \zeta_N^2 & \dots & \zeta_N^{N-1} \\ 1 & \zeta_N^2 & \zeta_N^4 & \dots & \zeta_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_N^{N-1} & \zeta_N^{2(N-1)} & \dots & \zeta_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

5.1 Definição da IDFT

A reconstrução do sinal original no domínio do tempo a partir de suas amostras de frequência é realizada pela IDFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \zeta_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Onde $\zeta_N^{-nk} = e^{i\frac{2\pi}{N}nk}$. Matricialmente, a IDFT é dada por:

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta_N^{-1} & \zeta_N^{-2} & \dots & \zeta_N^{-(N-1)} \\ 1 & \zeta_N^{-2} & \zeta_N^{-4} & \dots & \zeta_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_N^{-(N-1)} & \zeta_N^{-2(N-1)} & \dots & \zeta_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

Percebe-se que nesse caso discreto, a DFT e IDFT atuam como uma matriz mudanca de base, saindo da base do tempo e indo para base das raizes unitarias

A DFT pde ser vista de outra óptica, como avalição de polinomios. Seja

$$a(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$$

e tome $\zeta_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ seja uma N-ésima raiz primitiva da unidade. Define

$$A_k := a(\zeta_N^k).$$

Então

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} a_n (\zeta_N^k)^n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \, \zeta_N^{kn},$$

o que é exatamente a formulação da DFT, para $a_n \equiv x[n]$ e $A_n \equiv X[n]$, opostamente, a IDFT é interpretada como interpolção de polinômios:

Dados os valores $\{A_k\}_{k=0}^{N-1}$, ela reconstrói os coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{N-1}$ do único polinômio de grau $< N$ que satisfaz $a(\zeta_N^k) = A_k$ para todo k. Explicitamente,

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k \, \zeta_N^{-kn}.$$

Assim, DFT é *avaliar* em raízes da unidade e IDFT é *interpolar* (recuperar os coeficientes) a partir dessas avaliações.

6 A Multiplicação de Polinômios e a Complexidade Computacional

Um problema simplificado pela mudanca de domino eh a multiplicacao de polinomios. Tome os polinomios $f(x)$ e $g(x)$ de grau $n-1$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^{N-1} b_j x^j$$

Na abordagem clássica , o produto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ é obtido distribuindo-se cada termo de f sobre todos os termos de g. Este processo resulta em um novo polinômio de grau $2N-2$:

$$h(x) = \sum_{k=0}^{2N-2} c_k x^k$$

onde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Nesta metodologia, o cálculo de cada coeficiente c_k exige múltiplas operações de produto e soma, resultando em uma complexidade assintótica $O(n^2)$. Para polinômios com grandes volumes de coeficientes, este custo computacional torna o metodo inviavel.

7 O Teorema da Convolução

A conexão entre a multiplicação de polinômios e a análise de Fourier vem do fato de que, se $h(x) = f(x)g(x)$, então os coeficientes c_k de h são dados pela **convolução linear** dos coeficientes de f e g:

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i \, b_j.$$

Neste trabalho, devido ao foco na NTT e ao anel quociente $\mathbb{Z}_p[x]/(x^n-1)$, trabalhamos com a **convolução circular** (de comprimento n), definida por

$$c_k = \sum_{i=0}^{N-1} a_i\, b_{(k-i) \bmod n}, \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

Teorema da Convolução: a transformada de uma convolução no domínio do tempo (ou espaço) é o produto ponto a ponto (Hadamard) das transformadas no domínio da frequência:

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \odot \mathcal{F}(g).$$

Assim, o cálculo custoso da convolução é convertido em um produto ponto a ponto, pois a base de Fourier diagonaliza o operador de convolução (circulante). Com a transformada direta ingênua o custo ainda é $O(n^2)$, não há ganho da multiplicação clássica de polinômios.

8 A Fast Fourier Transform

A FFT (Fast Fourier Transform) eh uma maneira de otimizar o calculo da DFT.

O algoritmo da FFT foi redescoberta por Cooley e Tukey em 1965, uma vez que Gauss ja tinha utilzado um algoritmo semelhante para calcular a orbitas de asteroides em 1805.

O algoritmo se baseia em **dividir para conquistar**.

Relembrando

As raízes unitárias possuem propriedades cíclicas e certas simetrias que permitem a economia nos cálculos, vejamos um exemplo.

$$\zeta_4^1 = e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i90^\circ} = i$$

$$\zeta^1 = i \qquad \zeta^2 = -1$$

$$\zeta^3 = -i \qquad \zeta^4 = 1$$

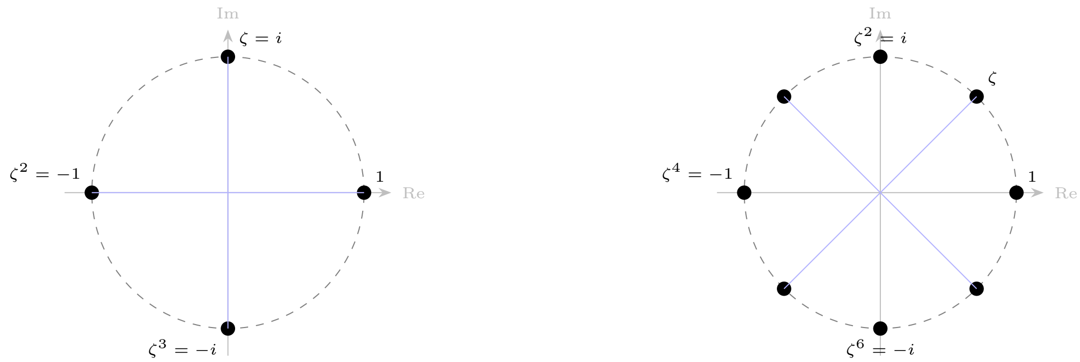
por isso, percebe-se que, a cada 2 "deslocamentos", o valor se torna o oposto, como ilustrado na figura:

De forma mais geral:

$\zeta_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$, uma raiz N-ésima primitiva da unidade. Então para todo inteiro a, $\zeta_N^{a+\frac{N}{2}} = -\,\zeta_N^a$.

Alem de que, pela periodicidade $\zeta_N^{a+N} = \zeta_N^a$. Para esse caso a DFT eh representada desse modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$



(a) 4-ésimas raízes da unidade

(b) 8-ésimas raízes da unidade

Figura 1: Comparação entre as raízes da unidade no plano complexo.

Voltandao a FFT, o algoritmo decompõe uma DFT de tamanho N em duas sub-transformadas de tamanho $N/2$, separando os índices pares e ímpares da sequência original:

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m]\,\zeta_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1]\,\zeta_N^{(2m+1)k} \\
\text{Usando } \zeta_N^2 = \zeta_{N/2} : &\qquad \zeta_N^{2mk} = (\zeta_N^2)^{mk} = \zeta_{N/2}^{mk} \\
&= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m]\,\zeta_{N/2}^{mk} + \zeta_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1]\,\zeta_{N/2}^{mk} \\
&= E[k] + \zeta_N^k O[k], \qquad k = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1.
\end{aligned}
$$

Esta estrutura permite calcular dois valores de saída ($X[k]$ e $X[k + N/2]$) utilizando os mesmos resultados intermediários, através da denominada **operação borboleta** (*butterfly operation*):

1. $X[k] = E[k] + \zeta_N^k O[k]$
2. $X[k + N/2] = E[k] - \zeta_N^k O[k]$

como pode ser visto na imagem

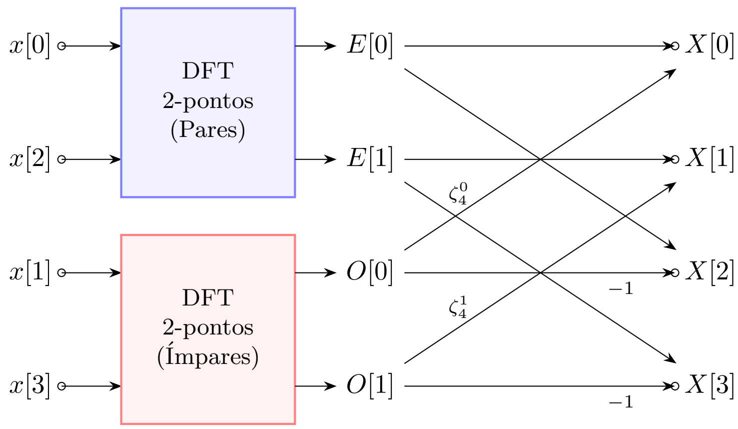


Figura 2: butterfly radix-2

o a implementacao em sage esta no codigo1

```
def fft(a, omega):
    n = len(a)
    if n == 1:
        return a[:]


    a_par = fft(a[0::2], omega^2)
    a_impar  = fft(a[1::2], omega^2)

    A = [0] * n
    w = 1
    half = n // 2
    for k in range(half):
        t = w * a_impar[k]
        A[k]           = a_par[k] + t
        A[k + half]    = a_par[k] - t
        w *= omega
    return A
```

Listing 1: Implementação do algoritmo FFT em SageMath

Desse modo, reduzimos a complexidade da transformada de $O(n^2)$ para $O(n \cdot \log n)$. Por causa disso, podemos utilizar a FFT, junto com o **teorema da convolucao**, para multiplicar polinomios em $O(n \cdot \log n)$

9 Problemas da FFT

Uns dos problemas da FTT eh que ela trabalha com ponto flutuante, o que, para computadores, eh um grande problemas que pode causar erro de arredondamentos e, assim causar um falha nos esquemas criptograficos. Alem disso, o polinomio dobram de tamanho a cada concolucao o que rapidamente torna-se um problema tanto computacional quanto de armazenamento .

Solucao: utilizar um transformada que utiliza apenas numeros exatos

10 Number Theoretic Transform (NTT)

10.1 Fundamentos

As propriedades que usamos na FFT — em especial a existência de uma raiz N-ésima da unidade ζ_N e o fato de que suas potências percorrem uniformemente o círculo — têm um análogo perfeito em teoria dos números, dentro de corpos (ou anéis) finitos. Isso não é coincidência: a FFT nada mais é do que a transformada de Fourier no grupo cíclico $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, e a mesma construção existe em outros contextos algébricos.

Mais formalmente, se ζ_N é uma raiz N-ésima primitiva da unidade, então o conjunto de todas as N-ésimas raízes

$$\mu_N = \{1, \zeta_N, \zeta_N^2, \ldots, \zeta_N^{N-1}\}$$

forma um grupo multiplicativo cíclico de ordem N. Existe um isomorfismo natural de grupos

$$\varphi : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mu_N, \qquad \varphi([k]) = \zeta_N^k,$$

onde o lado esquerdo usa a soma módulo N e o lado direito usa multiplicação:

$$\varphi([k+\ell]) = \zeta_N^{k+\ell} = \zeta_N^k \zeta_N^\ell = \varphi([k])\,\varphi([\ell]).$$

Raiz primitva Diferente da DFT complexa, onde raízes da unidade sempre existem para qualquer n, a NTT exige que o corpo finito $\mathbb{Z}_p$ suporte a ordem da transformada.

Para que exista uma raiz primitiva n-ésima da unidade em $\mathbb{Z}_p$, o tamanho da sequência n deve dividir a ordem do grupo multiplicativo do corpo:

$$n \mid (p-1)$$

Agora, iremos tratar da estrutura aritimetica, na qual a NTT ocorre.

Ela eh definida da seguinte forma:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\omega^{nk} \pmod{p}$$

ou na forma matricial

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N\,\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{W}_N)_{k,n} = \omega^{kn}, \qquad 0 \leq k, n \leq N-1,$$

Ela opera no anel quociente

$$R = \mathbb{Z}_p[x]/(x^n - 1)$$

onde $\mathbb{Z}_p[x]$ representa o coeficientes do polinomio *mod* p e o $/(x^n - 1)$ faz com que a cadeia longa de polinomio dobre em si mesma formando um ciclo.

a imagem 3 ilustra a sequencia das duas operacoes visualmente.

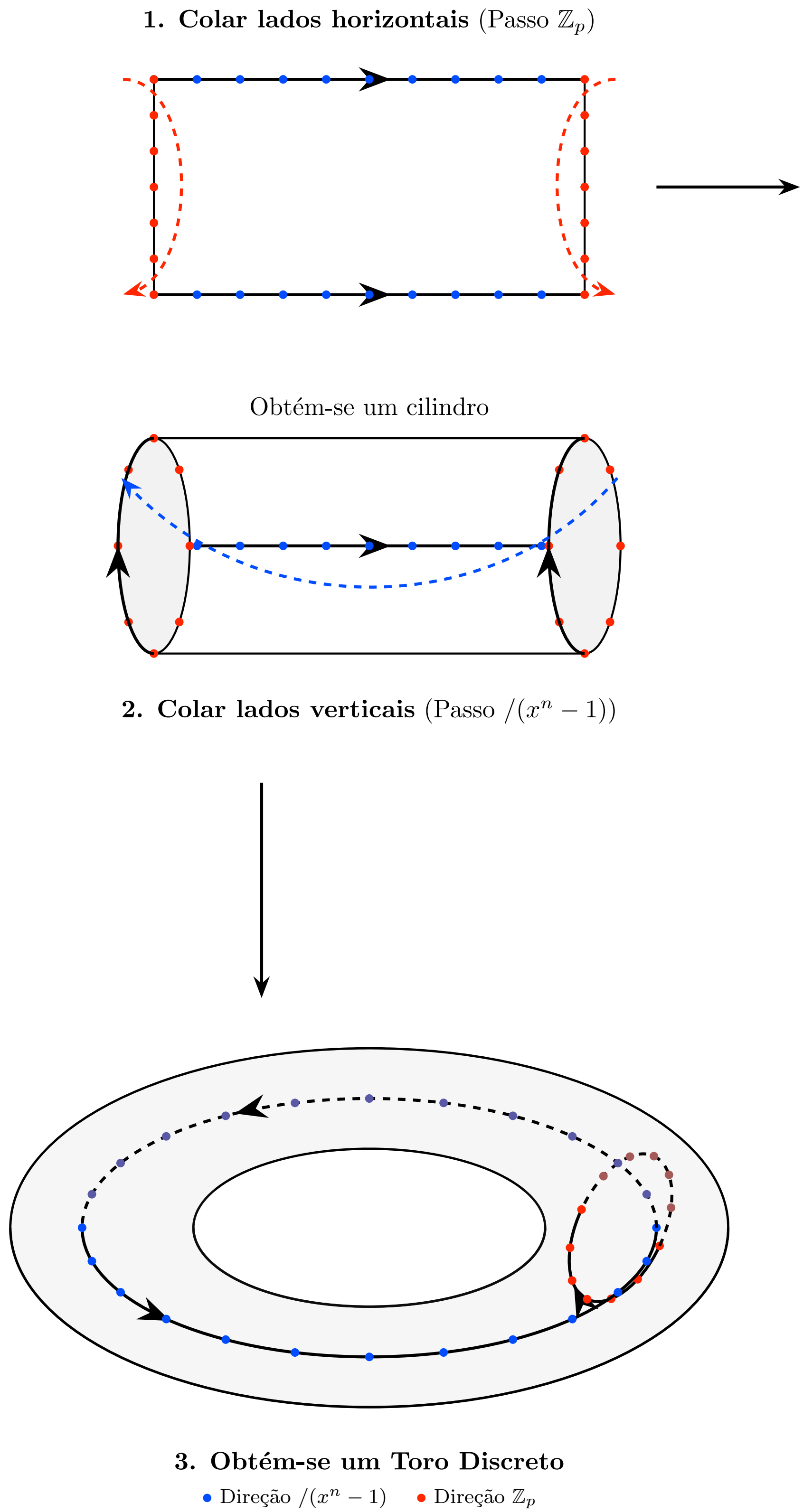


Figura 3: representação das transformacoes

Escolhemos modulo de um primo para que Z_p seja um field, i.e, para que a aritimedica tenha propiedades agradaveis e escolhemos $(x^n - 1)$ para que haja raizes distinta e se preserve as "informacoes"indepentes o que garante que ele possa ser decomposto completamente.

11 O Isomorfismo via Teorema Chinês dos Restos (CRT)

A fundamentação algébrica da NTT reside na decomposição do anel de polinômios. Se ω é uma raiz primitiva n-ésima da unidade no corpo finito $\mathbb{Z}_p$, o polinômio $x^n - 1$ pode ser fatorado completamente em binômios lineares distintos:

$$x^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1}(x - \omega^i)$$

Como cada termo $(x - \omega^i)$ é irredutível e todos são coprimos entre si, o **Teorema Chinês dos Restos (CRT)** garante a existência de um isomorfismo de anéis:

$$\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x^n - 1)} \cong \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x - \omega^0)} \times \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x - \omega^1)} \times \cdots \times \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x - \omega^{n-1})}$$

Este isomorfismo é o que permite interpretar a NTT não apenas como uma transformação de vetores, mas como uma mudança de representação.

A comporação computacional dessa ferramentas pode ser vista na tabela a seguir, onde calculou-se os números de Fibonacci.

Algorithm	Fibonacci index
Algoritmo Naive	44
Algoritmo Linear	566’053
Algoritmo FFT	3’145’816
Algoritmo NTT	24’178’839
Algoritmo GMP	238’961’323

fonte: https://github.com/SheafificationOfG/Fibsonisheaf