

EJERCICIOS DE FALLA ESTÁTICA

SAMUEL DAVID SANCHEZ CARDENAS
JUAN DIEGO SÁENZ ARDILA

Taller

Profesor
Ricardo Emiro Ramírez Heredia

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y MECATRÓNICA
DISEÑO MECATRÓNICO
BOGOTÁ (COLOMBIA)
2024

CONTENIDO

	pág.
1. PRIMER EJERCICIO	3
1.1 USANDO LA TEORÍA DE LA ENERGÍA DE DISTORSIÓN	3
1.2 USANDO LA TEORÍA DEL ESFUERZO CORTANTE MÁXIMO	5
2. SEGUNDO EJERCICIO	7
3. TERCER EJERCICIO	10
BIBLIOGRAFÍA	12

1. PRIMER EJERCICIO

Un elemento diferencial está sometido a los esfuerzos (en kpsi): $\sigma_1 = 10$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -20$. El material es **dúctil** y tiene resistencias (en kpsi): $S_{ut} = 50$, $S_y = 40$, $S_{uc} = 50$. Calcule el factor de seguridad y elabore los diagramas $\sigma_1 - \sigma_3$ de cada teoría que muestre el estado de esfuerzos:

1.1 USANDO LA TEORÍA DE LA ENERGÍA DE DISTORSIÓN

Según Robert Norton en su libro de Diseño de Máquinas, la Teoría de Von Mises-Hencky o de energía de distorsión dictamina que para un material dúctil el criterio de falla está determinado por:

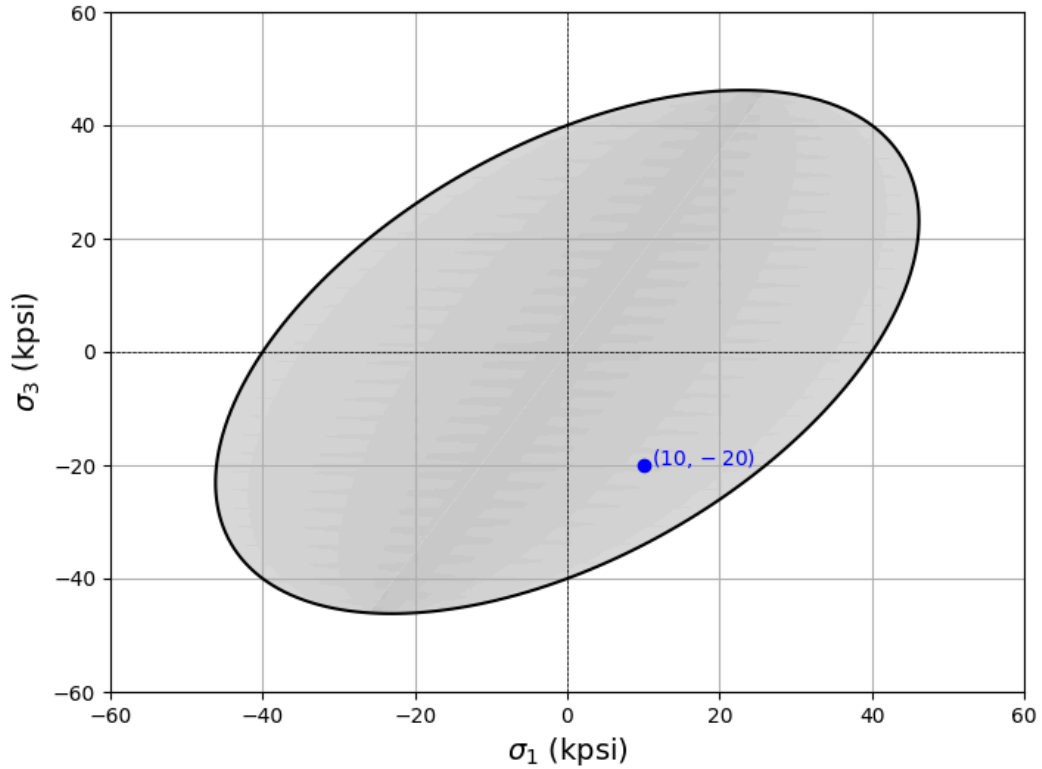
$$S_y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \quad (1)$$

Además, se conoce que el elemento diferencial está sometido a esfuerzos únicamente en 2 dimensiones. De modo que el criterio de falla se puede simplificar tal que:

$$S_y = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} \quad (2)$$

A estas ecuaciones se les conoce como la *ecuación de la energía de distorsión* tridimensional y bidimensional respectivamente. Para esta situación en específico, la ecuación describe una elipse que, al graficarse sobre los ejes de los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 , así como resaltando el punto con los esfuerzos de este caso en particular, resulta en:

Figura 1. Elipse de energía de distorsión bidimensional



Por otro lado, para determinar el factor de seguridad es necesario utilizar el esfuerzo efectivo de Von Mises σ' el cual se define, según Norton, como el esfuerzo de tensión uniaxial que crea la misma energía de distorsión que una combinación real de los esfuerzos aplicados o los esfuerzos principales. Dicho esfuerzo efectivo se define como:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \quad (3)$$

Que para el caso bidimensional se expresa como:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} \quad (4)$$

Nótese la similitud con las ecuaciones planteadas recientemente. Dicha similitud parte de que a condiciones de una tensión uniaxial máxima los esfuerzos σ' y S_y son exactamente iguales.

Así bien, para determinar el factor de seguridad se resuelve:

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{S_y}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2}} \quad (5)$$

De modo que:

$$N = \frac{40 \text{ kpsi}}{\sqrt{(10 \text{ kpsi})^2 - (10 \text{ kpsi})(-20 \text{ kpsi}) + (-20 \text{ kpsi})^2}} = 1.51 \quad (6)$$

1.2 USANDO LA TEORÍA DEL ESFUERZO CORTANTE MÁXIMO

La teoría del esfuerzo cortante máximo, según el libro de Norton, establece que el material no experimenta fluencia, siempre y cuando la tensión tangencial máxima no exceda el límite de fluencia del material. De modo que, la condición de resistencia, de acuerdo con el criterio de Tresca, puede expresarse matemáticamente como:

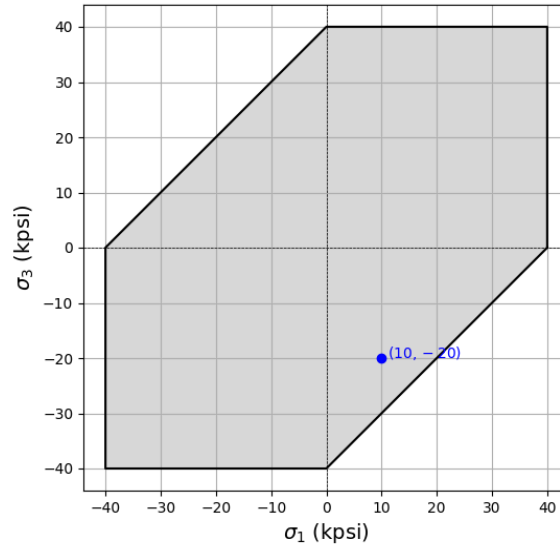
$$\sigma_1 - \sigma_3 < S_y \quad (7)$$

En esta teoría la falla ocurrirá cuando el esfuerzo cortante máximo exceda el esfuerzo cortante por fluencia en una muestra sujeta a tensión. Es decir:

$$S_{ys} = 0.50 S_y \quad (8)$$

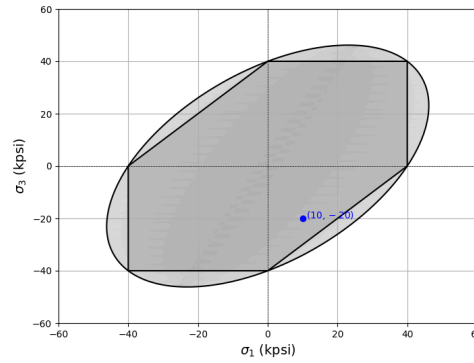
Así bien, al aplicar esta teoría en materiales dúctiles con esfuerzos bidimensionales y graficarla sobre los ejes de los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 se obtiene un hexágono (que está contenido por la elipse de la energía de distorsión) donde todas las combinaciones de esfuerzos principales σ_1 y σ_3 que se encuentran dentro de este hexágono se consideran seguras y la falla ocurre al alcanzar el límite hexagonal. A continuación se presenta la gráfica correspondiente a la teoría de falla:

Figura 2. Hexágono de la teoría del esfuerzo cortante bidimensional



De manera adicional se presenta una gráfica que contiene ambas teorías:

Figura 3. Teorías de falla estática



Finalmente, para el cálculo del factor de seguridad en la teoría del esfuerzo cortante máximo se debe calcular:

$$N = \frac{S_{ys}}{\tau_{m\acute{a}x}} = \frac{S_y/2}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2} = \frac{S_y}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (9)$$

De modo que:

$$N = \frac{40 \text{ kpsi}}{10 \text{ kpsi} - (-20 \text{ kpsi})} = 1.33 \quad (10)$$

2. SEGUNDO EJERCICIO

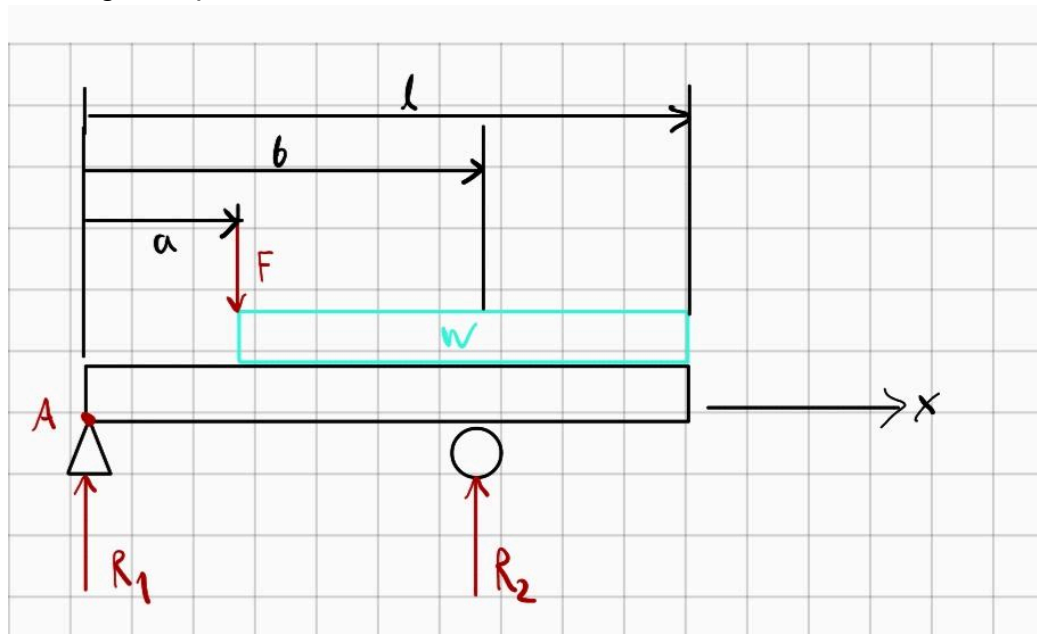
Una viga está apoyada y cargada como se indica en la figura . Para los datos que se dan en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P3-2, calcule el factor de seguridad *estático*:

a) Si la viga es un material dúctil con una $S_y = 300 \text{ MPa}$.

b) Si la viga es de un material frágil-fundido con una $S_{ut} = 150 \text{ MPa}$ y una $S_{uc} = 570 \text{ MPa}$.

Según la tabla del libro de Norton, los valores son:
 $l = 0.5\text{m}$ $a = 0.18\text{m}$ $b = 0.4\text{m}$ $W = 450\text{N/M}$ $F = 950\text{N}$
 $I = 1.17 \times 10^{-8} \text{ m}^4$ $c = 1 \times 10^{-2} \text{ m}$

Figura 4: Viga del problema 3-26



Entonces, como primer paso a la solución del ejercicio se plantea la sumatoria de momentos en el punto A:

$$\sum M_A = 0 = -Fa + R_2b - \frac{W}{2}(l-a)(l+a) \quad (11)$$

De dónde conseguimos la reacción 2:

$$R_2 = \frac{1}{b} \left(Fa + \frac{W}{2}(l-a)(l+a) \right) = 549.90 \text{ N} \quad (12)$$

A continuación hacemos sumatoria de fuerzas en y:

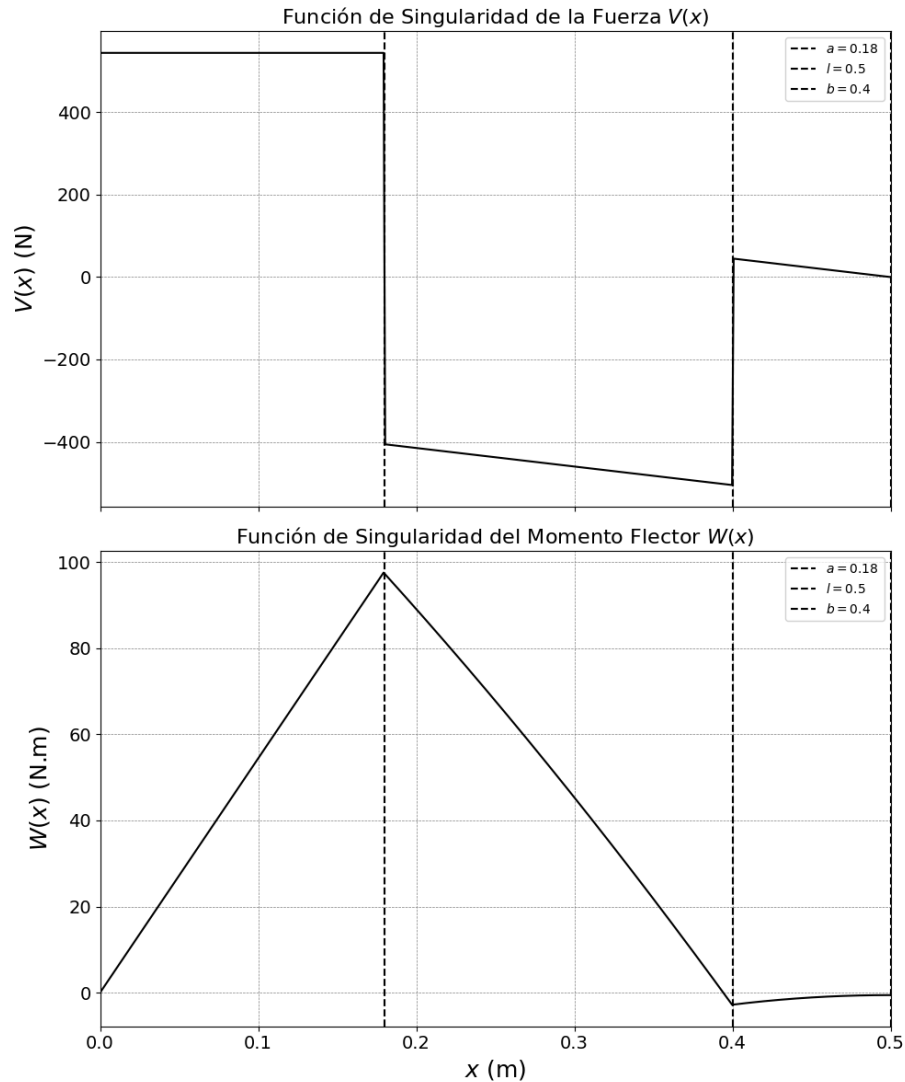
$$\sum F_y = 0 = R_1 + R_2 - F - W(l - a) \quad (13)$$

A partir de lo cual conseguimos el valor de la reacción 1:

$$R_1 = F + W(l - a) - R_2 = 544.10 \text{ N} \quad (14)$$

Con estos valores se realizaron los diagramas de fuerza cortante y de momento flector utilizando python:

Figura 5: Diagrama fuerza cortante y momento flector



Estos diagramas se construyeron utilizando el método para vigas de las funciones de singularidad $\langle x - a \rangle^b$ de modo que:

$$V(x) = -w \langle x - a \rangle^1 + w \langle x - l \rangle^1 - F \langle x - a \rangle^0 + R_2 \langle x - b \rangle^0 + R_1 \quad (15)$$

Ahora, se conoce que $W(x) = \int V(x)dx$ y que $W(0) = 0$. Obteniendo que:

$$W(x) = -\frac{w}{2} \langle x - a \rangle^2 + \frac{w}{2} \langle x - l \rangle^2 - F \langle x - a \rangle^1 + R_2 \langle x - b \rangle^1 + R_1 x \quad (16)$$

Por otro lado, el valor máximo de $W(x)$ tiene lugar en $x = a$ (vea la gráfica), por lo tanto:

$$W_{\max} = W(a) = R_1 a = 544.10 \text{ N} \cdot 0.18 \text{ m} = 97.94 \text{ Nm} \quad (17)$$

Mientras que el valor máximo de $V(x)$ es 544.10 N .

Ahora bien, como el ejercicio es un caso de una viga a flexión y no se conoce la sección transversal de la viga, para el cálculo del esfuerzo máximo se calcula el esfuerzo normal máximo causado por la flexión.

$$\sigma = \frac{M \cdot c}{I} = \frac{97.94 \text{ Nm} \cdot 1 \times 10^{-2} \text{ m}}{1.17 \times 10^{-8} \text{ m}^4} = 83.71 \text{ MPa} \quad (18)$$

Al considerarse el esfuerzo normal máximo a flexión, se tiene que:

$$\sigma_1 = 83.71 \text{ MPa}; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (19)$$

Con lo cual se procede a calcular los factores de seguridad:

a) Factor de seguridad para el material dúctil:

$$N = \frac{300 \text{ MPa}}{83.41 \text{ MPa}} = 3.58 \quad (20)$$

b) Factor de seguridad para el material frágil: Se utiliza el esfuerzo límite a la tensión, pues el esfuerzo último a tensión es menor que el de compresión:

$$N = \frac{150 \text{ MPa}}{83.71 \text{ MPa}} = 1.79 \quad (21)$$

3. TERCER EJERCICIO

La figura P3-23 muestra una bomba de óleo (o de varilla). El eje de la manivela conductora en O_2 está cargado a la torsión y a la flexión, con valores máximos de 6500 in-lb y 9800 in-lb, respectivamente. El punto sobre el eje con esfuerzo máximo se localiza lejos de la cuña que conecta al eje con la manivela. Usando un factor de seguridad de 2 contra la fluencia estática, determine un diámetro apropiado para el eje, si se hace con acero SAE 1040 rolando en frío.

Figura 6. Figura P3-23 libro de Norton Diseño de Máquinas

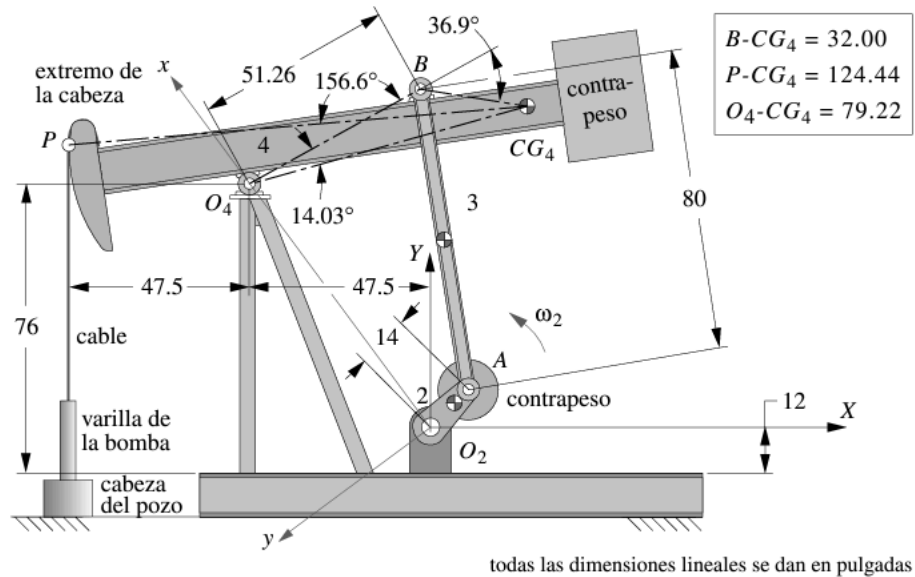


FIGURA P3-23

Se conoce que los esfuerzos generados por la situación de carga son esfuerzos normales causados por flexión y esfuerzos cortantes causados por torsión. El esfuerzo máximo causado por la flexión en el eje es:

$$\sigma = \frac{M \cdot c}{I} = \frac{M \cdot (d/2)}{\frac{\pi d^4}{64}} = \frac{32 M}{\pi d^3} \quad (22)$$

mientras que el esfuerzo máximo causado por la torsión es:

$$\tau = \frac{T \cdot r}{J} = \frac{T \cdot (d/2)}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{16 T}{\pi d^3} \quad (23)$$

Así bien, utilizando la teoría de Von-Mises, se calcula el esfuerzo equivalente para esfuerzos aplicados tal que:

$$\sigma' = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}} \quad (24)$$

Para este caso en particular sólo se ejercen 2 esfuerzos: un esfuerzo en dirección normal a la sección transversal del eje y un esfuerzo cortante tangencial a la cara transversal del eje. Por lo cual el cálculo del esfuerzo equivalente se simplifica a:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{32M}{\pi d^3}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2} \quad (25)$$

Ahora bien, se conoce que:

$$N = \frac{S_y}{\sigma'}; \quad \sigma' = \frac{S_y}{N} \quad (26)$$

Entonces, se plantea que:

$$(\sigma')^2 = \left(\frac{S_y}{N}\right)^2 = \left(\frac{32M}{\pi d^3}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2 \quad (27)$$

Despejando para d :

$$d = \sqrt[6]{\left(\frac{N}{\pi S_y}\right)^2 \left((32M)^2 + 3(16T)^2\right)} \quad (28)$$

$$d = \sqrt[6]{\left(\frac{2}{\pi \cdot 71 \text{ kpsi}}\right)^2 \left((32 \cdot 9800 \text{ in. lb})^2 + 3(16 \cdot 6500 \text{ in. lb})^2\right)} = 1.48 \text{ in} \quad (29)$$

Cabe resaltar que al realizar el cálculo de d únicamente se resuelve para obtener su raíz real positiva.

BIBLIOGRAFÍA

ROBERT L., Norton. Diseño de máquinas: Un enfoque integrado. 4 ed. México: Pearson Educación. 2011, capítulo 3. ISBN: 987-607-32-0589-4