게임이론 Part 1

게임의 기본 개념들 (게임이론, 진화, 그리고 협력)

허준석→ 이동한→조남운

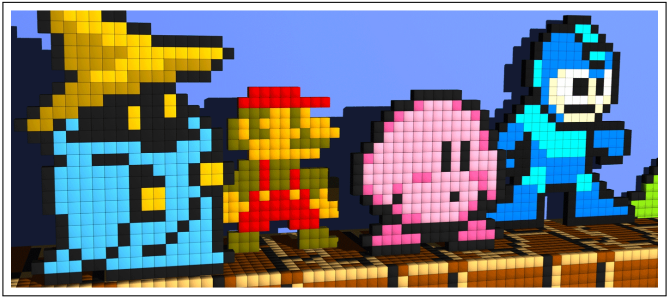
mailto:experiment.namun+2016f@gmail.com

2016년 9월 22일

목차

게임의 4가지 구성요소

1. 참가자 (Players, or Participants)
2. 전략 (Actions, or Strategies)
3. 결과 (Outcomes)
4. 보수 (Payoffs)



Players

- 선수들은 2명 이상 (일반적으로 N 명)
- 선수들은 '합리적' 이라고 가정 (economic rationality)
- 여기서 합리적이란 두가지 의미
  1. 각자 자신의 이득을 극대화한다.
  2. common knowledge

Common Knowledge

- 논리학 용어로 “상식”과는 다른 의미
- 게임 참가자들에 대한 특별한 종류의 지식구조

어떤 집단의 선수들이 p라는 내용을 을 알고 있다. 이들은 모두가 p를 알고 있다는 사실을 알고 있고, 이 사실 (p를 알고 있다는 사실을 알고 있다는 사실)을 알고 있다는 것을 알고 있고...

모자를 쓴 아이

- 아이 3명이 서로 마주보고 있다 (아이1, 아이2, 아이3)
- 각 아이들은 빨간색 모자를 쓰고 있거나 흰색 모자를 쓰고 있다
- 각 아이들은 다른 아이들의 모자 색을 볼 수 있지만, 자기가 쓴 모자의 색은 볼 수 없다.
- (일단 아이들이 쓰고 있는 모자가 모두 빨간색이라고 가정하자)
- 교사가 들어와 자기가 쓴 모자의 색을 알겠는지 물어본다.

모자를 쓴 아이 (계속)

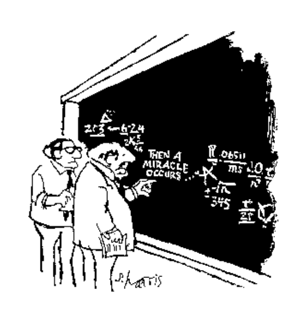
- 이제 선생님이 다시 이렇게 말한다.

  “적어도 한 명은 빨간 색 모자를 쓰고 있다!”

- 이제 아이 1,2,3이 차례로 답한다.
- 아이 1의 대답은? “잘 모르겠다.”
- 아이 2의 대답은? “잘 모르겠다.”
- 아이 3의 대답은? “알겠다! 나는 빨간색 모자를 쓰고 있다!”

Common Knowledge

- 만일 소녀 2,3의 모자가 모두 흰색이었다면 소녀 1의 답은?
- 만일 소녀 3의 모자가 흰색이었다면 소녀 2의 대답은?
- 그래서, 소녀 3은 자신이 빨간 모자를 써다는 점을 알 수 있다!



"I THINK YOU SHOULD BE MORE EXPLICIT HERE IN STEP TWO."

Common Knowledge (계속)

- 어떻게 세번째 소녀는 자신의 모자 색을 맞출 수 있었는가?
- Common Knowledges (CKs)

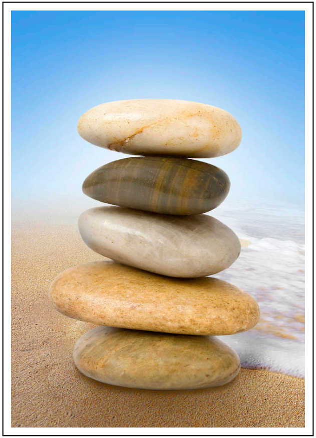
  CK1 교사가 공표한 사실 (최소 1명은 빨간모자 쓰고 있다)

  CK2 위 공표한 사실을 모두가 알고 있다는 사실

  CK3 이 사실을 모두가 알고 있기 때문에 내릴 수 있는 결론을 알고 있다는 사실
- 하지만, 아이1이나 아이2가 가령 확실히 알 수 있는 상황(대답하지 않은 아이들이 모두 흰색모자를 쓴 상황)에서도 잘 모르겠다고 대답했다면?
  - CK3 위배 - 이 사실을 모르는 아이3의 추론은 틀릴 수 있게 됨

Strong Rationality

- 게임이론은 '균형'을 탐구
- 균형이 계산가능하게 되기 위한 전제들
  - 사람들은 자신의 이익을 극대화한다
  - 이를 위해 사람들은 자신이 지닌 정보를 최대한 논리적으로 활용한다
- 현실에서 사람들은 정말로 이렇게 추론할까?
- 위 가정들은 굉장히 강한 가정이라는 점을 염두에 둬야함



Actions, or Strategies

- Action: 현 상황에서 내가 취할 수 있는 행동의 집합
- Strategy: “사전적” 으로 정의되는 가능한 모든 상황들에 대한 Action Plan
- 게임 플레이 전에 가능한 모든 상황에 대해 검토하고 결론을 내려둬야 함
- 실제 플레이 : ult1, ult2

Strategic Ultimatum Game

- 실제로 해보자!
- Phase I: 단순 ultimatum game 3회 실시
- Phase II: ultimatum game version2 : strategic form
  - 제안자(Proposer)는 동일
  - 수용자(Responder)는 제안자의 전략을 알지 못하는 상태에서 자신이 제안받을 수 있는 모든 경우에 대해서 응답을 설정함

Strategy

- 단 한 번 하는 죄수의 딜레마라면?
- 만일 동일 상대와 죄수의 딜레마를 3회에 걸쳐서 한다면?
- 이 게임을 시작하기 전에 나의 게임 플랜은?
- 이렇게 게임을 시작하기 전에 정의하는 것이 전략

Strategy (Example)

- 타자가 타석에 들어섰다. 투수가 제1구를 던졌다. (타자는 타구를 읽을 수 있는 것으로 가정)
- 타자의 전략?
  - “직구면 크게 휘두른다!” 만으로는 전략이 되지 않음
- 타자의 전략 (완전한 버젼)
  - 직구일 경우 크게 휘두름
  - 변화구일 경우 밀어 침
  - $\cdots$
  - ((모든 가능성에 대해서 Action이 정해져 있어야 함))

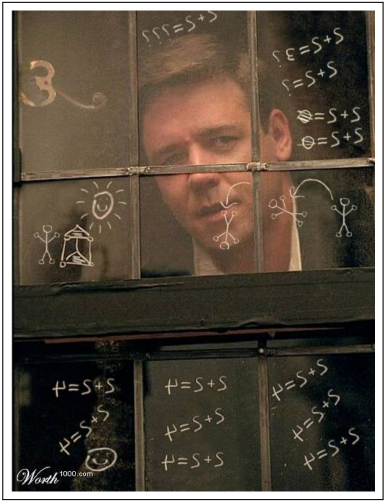
죄수의 딜레마 다시 보기

	C	D
C	R, R	S, T
D	T, S	P, P

1. 선수는?
2. 선수들의 전략은?
3. 결과는?
4. 보수는?

게임이론에서의 균형

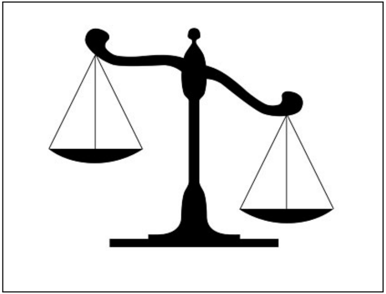
- 게임이론의 강점은 문제/갈등의 구조를 서술하는 데 있지 않고
- 그 구조에서 어떤 결과나 나올 것인지를 예측하는 데 있음
- 따라서 균형 개념이 몹시 중요



강우월전략(Strong Dominant Strategy

- 강우월전략이란 상대의 선택과 관계없이 나에게 항상 높은 보수를 보장하는 전략
- 일단 "높은" 이라는 말의 의미는 $\geq$가 아닌 $>$임

  그래서 "강强우월전략" 이라고 정의



우월전략을 통한 균형 찾기

- 일단, 나는 상대의 눈치를 볼 필요가 없이 전략을 결정하고
- 다른 모든 플레이어어도 마찬가지라면 강우월 전략이 균형일 수 있음
- 앞서 배웠던 CK (Common Knowledge)를 이용해서 균형을 찾아본다면?

열등전략을 지워나가기

	C	D
C	R, R	S, T
D	T, S	P, P

열등전략을 지워나가기

	C	D
~~C~~	~~R, R~~	~~S, T~~
D	T, S	P, P

열등전략을 지워나가기

	C	D
C	R, R	S, T
D	T, S	P, P

	C	D
C	R, R	S, T
D	T, S	P, P

열등전략을 지워나가기

	C	D
C	R, R	S, T
D	T, S	P, P

	C	D
C	R, R	S, T
D	T, S	P, P

열등전략을 지워나가기

	C	D
C	R, R	S, T
D	T, S	P, P

	C	D
C	R, R	S, T
D	T, S	P, P

연습문제

- 두 명의 선수들 $(P1, P2)$ 이 있고 각각 0에서 100 사이의 정수를 적는다.
- a_1 이 선수1이 적어낸 수, a_2 는 선수 2가 적어낸 수라고 하자.
- 보수는 다음과 같은 룰에 따라서 결정된다.
  1. 만일 $a_1 + a_2 \leq 100$, 각각 a_1, a_2 를 챙겨간다.
  2. 만일 $a_1 + a_2 > 100$ 이고 $a_1 > a_2$, $P1$ 은 $100 - a_2$, $P2$ 는 a_2
  3. 만일 $a_1 + a_2 > 100$ 이고 $a_1 < a_2$, $P1$ 은 a_1, $P2$ 는 $100 - a_1$
  4. 만일 $a_1 + a_2 > 100$ 이고 $a_1 = a_2$, $P1$ 과 $P2$ 는 모두 50

이 게임의 "균형" 은 무엇인가?

약우월전략 (Weakly Dominant Strategy)

	L	M	R
U	$1,\ 0$	$-2,\ -1$	$0,\ 1$
D	$1,\ 2$	$-5,\ -1$	$0,\ 0$

- 어떤 순서에 따라 지우느냐에 따라서 균형이 달라짐
- 따라서 약우월전략에 따를 경우 균형 개념으로서의 효용은 떨어짐

우월전략으로 균형을 찾는 방식의 문제점

- 약弱우월전략이라면?
- (아예) 우월전략이 없다면?
- 옆의 게임에서 우월 전략이 있는가?

	L	R
L	1, 1	0, 0
R	0, 0	2, 2

이럴 경우 우리는 이 게임의 결과를 어떤 기준에서 예측해야 하는가?

Before Nash

- von Neumann's concept of equilibrium
- 다음의 제로섬 게임을 살펴보자.

	B1	B2	B3
A1	3	-2	2
A2	-1	0	4
A3	-4	-3	1

- 왜 보수를 하나만 썼을까?
- 제로섬 게임의 특징을 고려해보자.

Minimax Theorem

- 유한한 숫자의 전략을 지닌 두 명의 제로섬 게임에서 다음과 같은 V가 존재한다.
  1. 선수2의 전략이 주어졌을 때 선수 1의 가장 좋은 보수는 V이고,
  2. 선수1의 전략이 주어졌을 때 선수 2의 가장 좋은 보수는 $-V$다.

Minimax의 의미

- 상대는 자기 보수의 최대화를 추구 (나의 입장에서는 최소화)
- 나도 내 보수의 최대화를 추구 (상대의 입장에서는 최대화)
- 나는 최소화된 내 보수의 최대화를 추구하는 것이 바람직

Minimax Equilibrium

	B1	B2	B3
A1	3	-2	2
A2	-1	0	4
A3	-4	-3	1

- 균형 : $(A2, B2)$
- 하지만 이 균형은 안정적일까?
- 만일 선수1이 $A2$를 한다면 선수 2는 $B1$으로 이탈하고자 할 것!
- 따라서 안정적이지 않다!
- 균형은 존재여부 뿐만 아니라 안정성도 중요

열등전략 지우기

	B1	B2	B3
A1	3	-2	2
A2	-1	0	4
A3	-4	-3	1

- 먼저 (강) 열등전략을 지워보자.
- 선수1에게는 $A3$, 선수2에게는?
- 전략을 확률적으로 쓸 수 있다고 해두자.
- 즉, 두 개 혹은 그 이상의 전략을 확률적으로 내는 것이다.
- 이렇게 되면 B의 어느 전략이 열등해질까?

안정적인 전략 찾기

	B1	B2	B3
A1	3	-2	2
A2	-1	0	4
A3	-4	-3	1

- 이제 $A1, A2$ 그리고 $B1, B2$만 고려하도록 하자.
- 선수1이 $A1$을 p의 확률로 $A2$를 $1-p$의 확률로 구사할 때 상대가 어떤 전략을 쓰더라도 둘의 결과가 동일해지는 경우를 찾아보고 선수2에 대해서도 비슷하게 답을 찾아보자.
- 이러한 확률적인 대응은 안정적인가? 확인하는 방법은 이러한 전략적 대응에서 둘의 기대보수를 계산해보는 것.

John Nash: 1928-2015

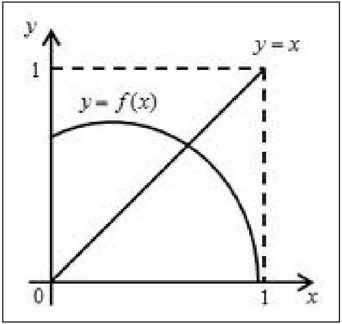
- 보다 일반적인 균형의 개념을 찾아서
- 일단 균형이 달성되었다고 가정한 후
- 그 균형이 어떤 특징을 가져야 할지 상상해보기
- 그리고 이러한 균형은 존재할까?

Nash Equilibrium: Main Idea

- 일단 어떤 전략 조합 상태 (전략 프로파일)에 있다고 가정
- 이때 다른 선들이 그 상태에 머무르는 상황에서 선1만 전략을 바꿔 이득을 볼 수 있는가?
  - 만일 YES라면: 그 전략 프로파일은 균형이 아님 (why?)
  - 만일 NO라면: 최소한 "선1"은 전략을 바꾸지 않을 것임
- 이런 식으로 나머지 모든 선들에 대해서 위 과정을 반복
- 만일 어떤 전략 프로파일이 모든 다른 선수들에 대해서도 모두 NO인 상태라면, 그 전략 프로파일이 바로 Nash Equilibrium (NE)

Nash's Contribution

- 균형 개념을 고안했다는 데에 있는 것이 아니라
- 유한한 수의 선수와 유한한 수의 전략이 있는 게임에서
- (안정적인) 내시 균형이 반드시 하나 이상 존재한다는 점을 증명했다는 데에 있음
- 게임이 연구할 가치가 있는 대상임을 입증!



조정게임 (Coordination Game)

- 선수들의 행동이 조정되어야 바람직한 상태에 도달
- 사회의 표준, 관습의 중요성
- 내시 균형은?

	L	R
L	1, 1	0, 0
R	0, 0	2, 2

순수전략 내쉬균형 (PSNE: Pure Strategy NE) 찾기

	L	R
L	1, 1	0, 0
R	0, 0	2, 2

1. 전략의 모든 조합이 4개 밖에 안되니까 4개를 다 체크. 각각의 상태에서 다른 상태로 이탈할 때 선수 누구에게든 이득이 발생하는지 확인한다.[a]
2. 각각의 플레이어에 대해서 상대의 행동이 내시 균형의 행동이라고 할 때 나의 행동은 어떤 것인지를 확인해준다. 이때 모든 사람의 행동이 이같은 원칙에 부합할 때 NE

[a]엄밀히는 곧 배우게 될 혼합전략까지 모두 고려해야 한다

최적 대응 (Best Response)

	L	R
L	1, 1	0, 0
R	0, 0	2, 2

1. 두번째 방법은 최적 대응 (Best response) 라고 한다.
2. 나에게 가장 이익이 되는 행위는 상대의 행동에 의존한다. 이때 상대의 행동/전략을 어떤 함수 혹은 관계의 x 라고 할 때, 이 x 에서 가장 최적의 대응을 만들어주는 전략 프로파일이 NE
3. 앞서의 예에서 $B_1(L) = L$, $B_1(R) = R$ 과 같이 나타낼 수 있다.

매-비둘기 게임 (= 겁쟁이 게임)

- 조정 게임과는 반대의 상황
- 다른 이름 : Chicken game, snow-drift game

	H	D
H	$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$1, 0$
D	$0, 1$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

죄수의 딜레마 (Prisoner's Dilemma) 게임

- 이미 우리가 살펴본 게임
- 우월 전략이 존재하고, 이는 PSNE과 동일

	C	D
C	2, 2	0, 3
D	3, 0	1, 1

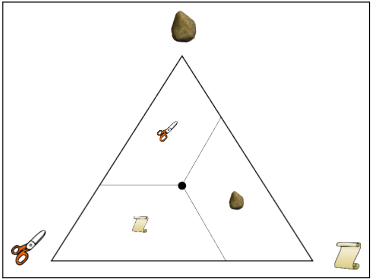
Matching Pennies

- 간단한 버전의 짤짤이
- 선수1이 백원짜리 동전의 앞뒤를 접고, 선수2가 맞춘다.
- 이 게임의 내시 균형은 있는가?

	H	T
H	$-1,\ 1$	$1,\ -1$
T	$1,\ -1$	$-1,\ 1$

혼합전략 (Mixed Strategy)

- 분명 Nash는 모든 게임에 균형이 있다고 했는데??
- 과연 이 문제를 어떻게 해결할 것인가?
- 앞서 ZSG (Zero Sum Game) 의 사례를 기억하는가?
- Nash가 염두한 전략은 전략들을 확률적으로 구사하는 것: 혼합전략



How to Find MSNE

- $P1$은 H를 p의 확률로, $P2$는 H를 q의 확률로 구사
- 각각의 페이오프를 식으로 적어보면

$$\begin{aligned}\pi_1 &= pq[-1] + p(1-q)[1] + (1-p)q[1] + (1-p)(1-q)[-1] \\ &= p(1-2q) - (1-p)(1-2q) \\ &= (1-2q)(2p-1)\end{aligned}$$

- 마찬가지로 구해보면 π_2?
- 앞서 배웠던 최적 대응의 개념을 여기에 적용해보자

MSNE를 찾는 좀 더 쉬운 방법

- 혼합전략 아래에서는 플레이어는 어떤 전략을 구사하더라도 동일한 보수를 얻어야 한다. 이를 이용하면 쉽게 p, q를 찾을 수 있다.
- 즉, 서로가 혼합전략을 구사한다고 하자. 이때 $P1$이 H와 T를 통해 얻는 보수는 각각 다음과 같다.

$$\pi_1(H) = q[-1] + (1-q)[1]$$

$$\pi_1(T) = q[1] + (1-q)[-1]$$

- $P1$에게 이 두 값이 같을 때에만, $\pi_1(H) = \pi_1(T)$, $P1$은 혼합전략을 구사하게 될 것이다. 만일 다르다면 당연히 100%의 확률로 보수가 더 높은 전략을 구사할 것이다.
- 따라서, $P2$의 최적의 전략은 $q^* = \frac{1}{2}$. 마찬가지로 $p^* = \frac{1}{2}$.