경제수학 기말시험 해설

2017년 1학기
202.214-004
조남운

Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

Errata

1b. $f' = 0$, or $f'' = 0$ or undefined.

4b. ..... 여기에서 정방행렬은 x^TAx 에서 ...

4c. eigenvector 의 길이를 1로 normalize 할 것.

4e. 이때 A는 symmetric임

1. 다음 일변수 함수 $f : U \to \mathbb{R}$에 관한 질문들에 답하라.

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

(a) (10 points) f', f'' 을 계산하라.

(b) (10 points) $f' = 0, f'' = 0$을 만족하는 모든 점들과 실수 전체에서 이 함수의 정의역에 들어갈 수 없는 (즉, 정의되지 않는) 점들을 찾아라.

(c) (10 points) 위 정보에 기반하여 f 의 그래프를 오목성, 볼록성 (convexity, concavity)까지 모두 스케치하라

1a

- https://www.wolframalpha.com/input/?i=(x%5E3%2F(1-x^2))'(x%5E3%2F(1-x^2))'
- https://www.wolframalpha.com/input/?i=(x%5E3%2F(1-x^2))''

1c

- https://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+(x%5E3%2F(1-x²)
- 축에 변수명이 명시되어 있어야 함. (-1)
  - Note: 간혹 관습적으로 세로축에 y를 부여하는 경우가 있는데, 엄밀하게 하자면 y=f(x) 와 같은 의미부여 표현이 있어야 맞는 표현임. (감점은 하지 않았음)

1. 다음 일변수 함수 $f : U \to \mathbb{R}$에 관한 질문들에 답하라.

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

$\frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$

(a) (10 points) f', f''을 계산하라.

10

$$f' = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-3x^2+2x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$f'' = \frac{(6x-4x^3)(1-x^2)^{\cancel{2}} - (3x^2-x^4)\cdot 2\cancel{(1-x^2)}(-2x)}{(1-x^2)^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{(6x-4x^3)(1-x^2) + 4x(3x^2-x^4)}{(1-x^2)^3} = \frac{+2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$

(b) (10 points) ① $f' = 0, f'' = 0$을 만족하는 모든 점들과 ② 실수 전체에서 이 함수의 정의역에 들어갈 수 없는 (즉, 정의되지 않는) 점들을 찾아라.

10

① $f' = 0$으로 만드는 점

$x = 0, \pm\sqrt{3}$

$f'' = 0$으로 만드는 점

$x = 0$

② 분모를 0으로 만드는

$x = \pm 1$

이다용

(c) (10 points) 위 정보에 기반하여 f의 그래프를 오목성, 볼록성 (convexity, concavity) 까지 모두 스케치하라

$\frac{-3\sqrt{3}}{1-3} = \frac{+3\sqrt{3}}{-2}$

10

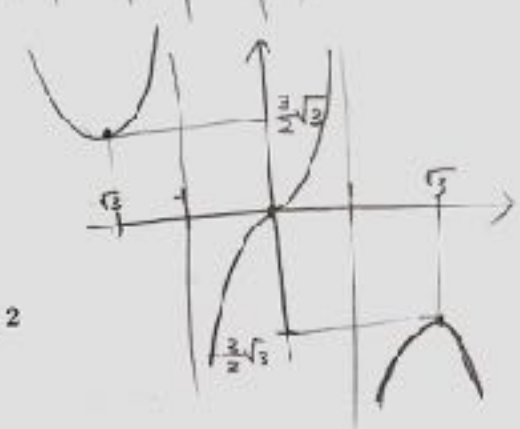
x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
f'	$-$	0	$+$	NA	$+$	0	$+$	NA	$+$	0	$-$
f''	$+$	$+$	$+$	NA	$-$	0	$+$	NA	$-$	$-$	$-$
f	$\searrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\nearrow$	NA	$\nearrow$	0	$\nearrow$	NA	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow$ $-\infty$

\+ −

$\lim_{x \to -\infty} = \infty$ $\lim_{x \to \infty} = -\infty$

$\lim_{x \to -1^-} = \infty$ $\lim_{x \to -1^+} = -\infty$

$\lim_{x \to 1^-} = \infty$ $\lim_{x \to 1^+} = -\infty$



(d) (10 points) 이 함수 f의 정의역 U가 아래와 같을 때 대해서 local/global min/max를 모두 찾아 아래 표에 기술하라. (없을 경우 없음을 명시해야 함. boundary min/max 는 local min/max 로 간주할 것)

x	local min	global min	local max	global max
$U = (1, \infty)$				
$U = \{-1, 1\}^{\complement}$				
$U = (-1, 1)$				
$U = [5, 10]$				

1d

- 각 문항당 2-3점
- boundary min/max를 local min/max로 간주할 것이 명시되어 있으므로 그렇게 처리해야 함 (-1)
- local min/max 를 찾으라는 문제는 x의 위치에 대한 정보가 명확히 존재해야 함. f(x) 값만 적혀 있는 경우는 감점
- 1c의 그래프가 틀렸더라도 그에 기반하여 정확히 찾은 경우는 문제 없음.

(d) (10 points) 이 함수 f의 정의역 U가 아래와 같을 때 대해서 local/global min/max를 모두 찾아 아래 표에 기술하라. (없을 경우 없음을 명시해야 함. boundary min/max 는 local min/max 로 간주할 것)

10

이다솜

x	local min	global min	local max	global max
$U=(1,\infty)$	X (없음)	X	$f(\sqrt{3})=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$f(\sqrt{3})=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$
$U=\{-1,1\}^{C}$	$f(-\sqrt{3})=\frac{3}{2}\sqrt{3}$	X	$f(\sqrt{3})=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	X
$U=(-1,1)$	X	X	X	X
$U=[5,10]$	$f(10)=-\frac{1000}{99}$	$f(10)=-\frac{1000}{99}$	$f(5)=-\frac{125}{24}$	$f(5)=-\frac{125}{24}$

2. 어떤 기업이 생산하는 상품량 x와 그의 투입요소인 노동량 L 사이의 관계가 아래와 같다고

2. 어떤 기업이 생산하는 상품량 x와 그의 투입요소인 노동량 L 사이의 관계가 아래와 같다고 한다. 이어지는 물음에 답하라.

$$x = \ln(1 + L), \quad L \geq 0$$

(a) (10 points) 이 기업의 노동량에 대한 생산 상품량의 탄력성 (elasticity)를 구하라. (Hint: 노동량 변화율에 대한 생산량 변화율)

2a

- 탄력성 식만 표현한 경우 (-6)

$$\varepsilon = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dL}{L}} = \frac{dQ}{dL} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{\partial q}{\partial L} \cdot \frac{L}{q}$$

$$= \frac{1}{1+L} \cdot \frac{L}{\ln(1+L)}$$

(b) (10 points) 이 기업의 생산상품시장과 관련 노동시장은 완전경쟁 상태에 놓여 있다. (= 시장가격 p, w에 무한히 판매할 수 있지만 그보다 조금이라도 높으면 하나도 판매되지 않음을 의미). 생산 상품의 단위(개) 당 가격을 p, 노동량의 단위(시간) 당 가격을 w라고 할 때, 이 기업의 생산활동으로 인해 얻을 수 있는 수입과, 그에 따르는 비용을 도출하라

할 때, 이 기업의 생산활동으로 인해 얻을 수 있는 수입과, 그에 따르는 비용을 도출하라

완전경쟁 : $p = \bar{p}$. $W = \bar{w}$.

$TR = px$

$TC = wL$

[illegible]

$1 + L = e^{x}$.

$L = e^{x} - 1$

(c) (10 points) 위에서 구한 수입에서 비용을 뺀 함수를 이윤함수라고 하자. 이 이윤함수를 기업의 생산량 x의 함수로 기술할 수도 있고 L의 함수로 기술할 수도 있음을 보여라.

그리고 '수학적' 측면에서 이 두 함수가 동일한 함수라고 할 수 있는지 논하라. (Hint: 의미적 측면이 아님)

Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

2c

- 2b에서 도출한 [수입 - 비용] 을 x,L 의 함수로 각각 표현하면 됨 (5)
- 의미의 측면에서는 같은 함수이지만 수학적 측면에서는 input과 output의 관계가 다르므로 다른 함수임 (5)
  - 이것이 무슨 뜻인지 잘 이해가 가지 않는다면, 각 이윤함수의 input을 제3의 기호 (가령 t)로 치환하고 우항을 비교해 볼 것.

$$\pi(x) = p \cdot x - w(e^x - 1) \quad \cdots ①$$

$$\pi(L) = p \cdot \ln(1+L) - wL \quad \cdots ②$$

수예리

동일한 함수라고 할 수 없다. 두 함수의 현재 input이 각각 x와 L로 다르므로 통일시켜 보도록 하자.

정의역의 모든 점(t)에 대해 같지는 않다.

$$① \Rightarrow \pi(t) = pt - w(e^t - 1)$$
$$② \Rightarrow \pi(t) = p \cdot \ln(1+t) - wt$$

로 $pt - w(e^t - 1) \neq p \cdot \ln(1+t) - wt$ 이기 때문에 다른 함수이다

2d

(d) (10 points) 이 기업의 이윤극대화 문제를 x에 대해서 규정하여 표현하라. (Hint: $\arg\max$)

- $L \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$
- 위 제약이 표현되어 있어야 함 (-5)
  - 본 문항에서는 명시적으로 검토하지 않았다 할지라도 2e등 다른 문항에서 이 제약이 검토된 경우는 정답으로 간주함.

…에서 규정하여 표현하라. (

$$\arg\max_{x} \left(\bar{p}x - \bar{w}(e^{x}-1)\right), \quad x \geq 0.$$

(나) [illegible]

(e) (10 points) 위 문제를 다변수함수 극대화 문제에서 다룬 라그랑지안의 접근방식으로 풀라. (Note: 이 단계는 대수적으로 풀 것. 자신 없을 경우 약간의 감점을 감수하고 그래프로 풀어도 됨)

2e

- 2d 의 오류 여부와 무관하게 2d에서 기술한 극대화 문제를 정확하게 라그랑지안 함수로 표현하면 됨.
- 2d에서 제약을 감안하지 않은 경우 라그랑지안 함수 = 목적함수임.

$\boxed{\text{FOC}}$ $\mathcal{L}(x,\lambda) = \bar{p}x - \bar{w}(e^x - 1) + \lambda(x - 0)$ 강예솔 .

10

i) $D\mathcal{L}_x(x^*, \lambda^*) = 0$ $\rightarrow \bar{p} - \bar{w}\cdot e^x + \lambda = 0 \Rightarrow \underline{\bar{p} + \lambda = \bar{w}\cdot e^x}$

ii) $\lambda^*(x^* - 0) = 0$

iii) $\lambda^* \geq 0$ ⇒ Answer $x^* = \ln(\frac{\bar{p}}{\bar{w}})$ 일때

열면 iiii) $x^* - 0 \geq 0$

$\pi(x)$가 극대화되며

그값은 $\bar{p}\cdot\ln(\frac{\bar{p}}{\bar{w}}) - \bar{w}(\frac{\bar{p}}{\bar{w}} - 1)$이다.

(f) (10 points) 위 문제에서 구한 local maximum는 global maximum이라 할 수 있는지 검토하라.

(e)

ii)에서 $\lambda = 0$ → i)로부터 $\bar{p} = \bar{w}\cdot e^x$ $\bar{w} \neq 0$ $e^x = \frac{\bar{p}}{\bar{w}}$ $x = \ln(\frac{\bar{p}}{\bar{w}})$

$\bar{w}$가 0이면 $\bar{p}$도 0이고 $\pi(x) = 0$이 됨

문제의 극대화 조건에 해당될수없음

$x = \ln(\frac{\bar{p}}{\bar{w}})$가

조건 iiii) 를 만족해야 하므로

$\ln\bar{p} - \ln\bar{w} \geq 0$ ($\bar{p} > \bar{w}$ 이어야함 (동호제외 → x가 존재하기위해)) $x^* = \ln(\frac{\bar{p}}{\bar{w}})$, $\lambda^* = 0$

강예솔 $\lambda \neq 0$ → iii)로부터 $x = 0$ $x = 0$이면 $\pi(0) = 0$가 됨

생산량이 없으므로 이윤도 0 이며 이는 문제에서 요구하는 바가 아님 → X

$\boxed{\text{FOC}}$

10

따라서 FOC를 만족하는 점은 $x^* = \ln(\frac{\bar{p}}{\bar{w}})$ 이고 $\lambda^* = 0$, $\bar{p} > \bar{w}$

열면

$\lambda = 0$일때이므로 NDCQ 할 필요X

10

SOC → 이는 x에 대한 일변수 문제. So Hessian $= L''(x)$가 됨

$L''(x) = \pi''(x)$ 이므로 $-\bar{w}\cdot e^x$ (i)로부터 계산) 이 된다.
$(\lambda = 0)$

$\bar{p}$가 가격이라 봤을때 → 특히 합리적인 추론 완전시장이므로 $\bar{p} \leq 0$라고 보는 것은 다소 위배

$\pi''(x^*) = -\bar{w} \times e^{\ln(\frac{\bar{p}}{\bar{w}})} = -\bar{w} \times \frac{\bar{p}}{\bar{w}} = -\bar{p}$ 이므로 $\bar{p} > 0$일때 $\pi''(x^*) < 0$ 이고 이는 SOC 충족

$x^* = \ln(\frac{\bar{p}}{\bar{w}})$

→ $x^* = \ln(\frac{\bar{p}}{\bar{w}})$ 일때 $\pi(x)$ 극대화 $\bar{p} \leq 0$이면 $\bar{w} \leq 0$ 이므로 문제의 조건과 X

2f

(f) (10 points) 위 문제에서 구한 local maximum는 global maximum이라 할 수 있는지 검토하라.

- 유일한 critical point이면서 모든 정의역(domain)에서 0보다 작으므로 해당 critical point는 global maximum임이 기술되어야 함.
  - 설명이 부족할 경우 -2 ~ -4 감점
  - 단순히 "**π**'' < 0 이므로 global maximum 임" 이라고 쓰면 감점

하라.

유일해서

주어진 정의역에서 $x^* = \ln \frac{p}{w}$ 는 유일한 변곡점이고, local max 이며,

주어진 정의역을 I라 할때 $\pi'' = -w \cdot e^x \leq 0 \quad \forall I \quad (\because w>0,\ e^x>0)$

이는 global maximum이 되기 위한 충분조건을 모두 만족하므로 x^*는 global maximum of π이라 할 수 있다.

(g) (10 points) 만일 이 기업이 생산하는 상품이 완전독점이라고 할 경우의 극대화 문제는 어떻게 수정해야 하는지 검토하라. 이를 위해 필요하다면 이 상품의 시장 수요 함수를 사용하라. $D(p)$는 그 상품의 시장수요량이다. (Hint:arg max)

$$D(p) = p^{-r}, \quad r > 0$$

2g

- p에 대한 maximization으로 볼 수도 있고, x에 대한 maximization으로 볼 수도 있음.
- 완전독점에서는 시장의 모든 공급량을 한 기업이 담당하므로 D(p) = x 가 성립함
  - Note: 이 경우에도 p, x, L 어떤 측면으로 보더라도 제약조건은 존재함. 하지만 이 제약을 고려하지 않은 경우는 2d의 경우에 비해 소폭 감점함 (문제의 초점은 아니기 때문)

$D(p)$

최인아

$$\pi = p\,D(p) - wL$$
$$= p\,D(p) - w(e^{x} - 1)$$
$$= p\,D(p) - w(e^{D(p)} - 1)$$
$$\underset{p}{\arg\max}\ \pi = p \cdot D(p) - w(e^{D(p)} - 1) \quad \text{s.t. } p \geq 0$$
$$= p^{1-r} - w(e^{p^{-r}} - 1)$$

2h

(h) (10 points) 위 독점 시장에서의 극대화 문제는 다변수 문제라고 할 수 있는지에 대해 논하라

- 다변수 문제가 되려면 둘 이상의 input들이 서로 독립 (즉, free) 이어야 함.
- p, x, L 은 함수관계로 서로 종속되어 있으므로 free variable 은 하나뿐임
- 단, 2e에서 "다변수 문제에서 다룬"이라는 부분을 x를 벡터로 다루라는 의미로 해석한 경우에는 다변수 문제가 되는 것이 자명함.

변수가 기 하나이므로 다변수함수라고 할 수 없다.
변수 p가 x에 대한 함수로 표현될 수 있기 때문이다.

2i

(i) (10 points) 위에서 구한 독점 시장에서의 극대화 문제를 풀라

- FOC 충족하는 점이 풀리지 않으므로 FOC까지 정확히 표현하면 정답으로 인정함

10

(i) (10 points) 위에서 구한 독점 시장에서의 극대화 문제를 풀라

$\arg\max_{x} \pi(x) = x^{-\frac{1}{r}} \cdot x - \bar{w}(e^{x}-1)$ s.t. $\boxed{x \geq 0}$

$\boxed{(\bar{w}x + \frac{1}{r}\ln x) = \ln(\frac{-1+r}{r})}$

L: $x^{-\frac{1}{r}+1} - \bar{w}(e^{x}-1) + \lambda x$

F.O.C

x $(-\frac{1}{r}+1)x^{-\frac{1}{r}} - \bar{w}e^{x} + \lambda = 0$

이윤희

① $\lambda = 0$

$\bar{w}e^{x} = (\frac{-1+r}{r}) \cdot x^{-\frac{1}{r}}$

$\bar{w}x = \ln(\frac{-1+r}{r}) - \frac{1}{r}\ln x$

② $\lambda \neq 0 \Rightarrow x = 0$

2. 아래의 기본행연산 (Elementary Row Operation) 관련 질문에 답하라 ($n \times n$ 행렬로 풀기

3. 아래의 기본행연산 (Elementary Row Operation) 관련 질문에 답하라. ($n \times n$ 행렬로 풀기 어려울 경우 약간의 감점을 감수하고 2×2 행렬 문제로 풀 것.)

   (a) (10 points) 세 가지 기본행연산을 일반적으로 기술하고, 그에 대한 기본행렬 (elementary matrix) 도 구하라.

3a

- 일반적으로 기술하지 않고 특수한 연산에 대한 EM을 계산한 경우: -2 ~ -4
- 이하(3a-3c) 2x2 행렬로 푼 경우 최대 점수는 6점
- ERO만 정확히 열거한 경우 5점
- Column 중심으로 기술한 경우 EM의 Transpose 형태가 되며, 2c에서 일관성있게 사용 (이경우는 좌측이 아닌 우측에 곱해야 함)하지 않았을 경우 -2

$$E_3 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ ke_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

훌륭함

$$E_2 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \begin{pmatrix} & & & e_1 & & & \\ & & & e_2 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0\,0 & 1 \sim & k & 0\,0\,0 \\ & & & \vdots & & & \\ & & & e_n & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

i번째 j번째

(즉 e_i의 j번째 항을 0에서 k로)

Elementary matrix

i번째 column

$e_i = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$ 이라하면

$$E_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_j \\ e_i \\ e_n \end{pmatrix}$$ (즉 e_i와 e_j의 위치 바꾼것)

10

(a) (10 points) 세 가지 기본행연산을 일반적으로 기술하고, 그에 대한 기본행렬 (elementary matrix)도 구하라.

$ERO_1 = R_i \leftrightarrow R_j$

$ERO_2 = R_i \leftarrow R_i + kR_j$

Page 5

$ERO_3 = R_i \leftarrow kR_i$

MAX local MAX.

(b) (10 points) 위에서 구한 세 기본행렬들의 determinant를 구하라

3b

- ERO2,3의 경우 각각 삼각행렬이거나 대각행렬이므로 간단하게 도출 가능하지만 ERO1은 둘 다 아니므로 도출 과정이 구체적으로 기술되어 있어야 함
  - 이에 대한 도출 과정 진술이 부족한 경우 -1 ~ -3
  - ERO2,3의 경우도 도출에 대한 최소한의 진술이 필요함
- 일반형이 아닌 특수한 EM의 determinant를 구한 경우: 각각 -2
- 3b를 잘못 도출했으나 그 determinant는 제대로 구한 경우 감점하지는 않음 (n x n)

(b) ∴ $\det EM_1$ ⇒ i행과 j행을 제외한 나머지 행들에 대해 det를 구하면,

$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ 만 남는다

$= -1$

박강현

$\det EM_2 = \det \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \cdots & & 1 & k \\ \cdots & & & 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 \times \cdots 1 = 1$

(∵ 아래쪽반이 ⓪인 행렬의 det는 $\prod_i a_{ii}$ 이다.)
(Δ)

$= a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$ ($A \in M_n$)

$\det EM_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & & & & \text{Ⓞ} \\ & 1 & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ \text{Ⓞ} & & & & 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 \times \cdots \times k \times \cdots \times 1 = k$

(∵ 대각행렬의 det는 $\prod_i a_{ii}$ 이다)

$= a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$

($A \in M_n$)

(c) (10 points) 위 결과를 이용하여 아래 정리를 증명하라

Theorem 1 임의의 $n \times n$ 행렬 A에 대하여, 그 행렬의 행사다리꼴 *(Row Echelon Form)* A_{REF}는 행을 뒤바꾸거나 행에 스칼라곱을 하여 도출하지 않은 한 다음 등식이 성립한다

$$\det(A) = \det(A_{REF})$$

3c

- 최소한 아래 두 가지에 명제에 대한 이야기가 있어야 함
  - 행사다리꼴은 유한번의 ERO, 혹은 EM을 곱하여 얻을 수 있다
    - 단 한 번의 EM을 곱한 것으로 기술한 경우는 감점 (-3 ~ -5)
  - det(AB) = det(A)det(B)

$$\det(A) = \det(A_{REF})$$

김경민

행을 뒤바꾸거나 행에 스칼라곱을 하지 않고 Elementary Row Operation을 했다는 것은 ERO_2만 사용했다는 것이다.

이때 ~~A~~ $A_{REF} = E_{21}E_{22} \cdots E_{2n}A$로 나타낼 수 있음이 알려져있으며 (ERO는 Elementary matrix의 곱으로 표현가능.!)

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 이므로 $\det(A_{REF}) = \det(E_{21}) \cdots \det(E_{2n})\det(A)$

인데 $\det$ (ERO_2의 elementary matrix) $= 1$이므로 $\det(A_{REF}) = \det(A)$.

(d) (10 points) 위 정리를 이용하여 다음 행렬의 determinant를 구하라 (혹은 약간의 감점을

(d) (10 points) 위 정리를 이용하여 다음 행렬의 determinant를 구하라 (혹은 약간의 감점을 감수하고 그냥 이 행렬의 determinant를 구할 것)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 8 & -3 \\ 2 & 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

3d

- 변환없이 직접 determinant를 정확히 구한 경우 7 점

하고 그냥 이 행렬의 determinant를 구할 것)

$$R_3 \leftarrow R_3 + \frac{3}{4}R_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 8 & -3 \\ 2 & 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ERO2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{13}{2} & 10 & 14 & 0 \\ 2 & 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

김원희

det는 $1 \times 2 \times 14 \times 4$ ($\because$ LTM)

$= 112$

Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

4. 아래의 다변수 함수Q에 대한 질문들에 답하라

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2.$$

(a) (10 points) $DQ_{\mathbf{x}}, D^2Q_{\mathbf{x}}$를 각각 구하라

(b) (10 points) 위 다변수 2차 함수를 행렬로 표기하되, 정방행렬은 대칭 (symmetric) 하게 표현하라 (Hint: 여기에서 정방행렬은 $\mathbf{x}^\intercal \mathbf{A}\mathbf{x})_{\mathbf{x}}$ 에서 A 행렬을 의미함)

(c) (10 points) 위 행렬의 eigenvalue들과 그에 상응하는 eigenvector를 구하라 (위의 A행렬을 의미)

$$DQ\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 & -x_1 - 2x_2 - x_3 & -x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$D^2Q\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

영정치

... 행렬은 $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})_{\mathbf{x}}$ 에서 A 행렬을 의미함)

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

양정치

4c

- eigenvalue: 5점
- eigenvector: 5점
  - 길이 1로 normalize (-1)
  - 잘못 도출한 eigenvalue에 근거하여 과정에 문제 없이 eigenvector를 도출한 경우에는 해당 부분 감점 하지 않음.

$$\det(A - rI) = 0,\quad \det\left(\begin{pmatrix} 1-r & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1-r & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1-r \end{pmatrix}\right) = (1-r)\left\{(-1-r)(1-r) - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right\} - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)(1-r)$$

$$= (1-r)\left(r^2 - 1 - \tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{4}(1-r)$$

$$= (1-r)\left(r^2 - \tfrac{3}{2}\right) = 0.$$

[illegible]

$r = 1, \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

4-(c)

i) $r=1$ 일때

$$A - rI = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-rI)v = 0$ 이려면, $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

[illegible]

ii) $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 일때

$$A - rI = \begin{pmatrix} 1-\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1-\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{6}}} \\ \left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{6}}} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{6}}} \end{pmatrix}$$

iii) $r = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ 일때

$$A - rI = \begin{pmatrix} 1+\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1+\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1+\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{6}}} \\ \left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{6}}} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{6}}} \end{pmatrix}$$

4d

(d) (10 points) 위 행렬을 대각화하고 정부호성을 판단하라. (위의 A 행렬을 의미)

- 대각화: 5, 정부호성판별: 5
- 4c에서 잘못 도출했더라도 그에 기반하여 정부호성을 도출했다면 감점하지 않음
- 정부호성(ID)만 직접(PM 등으로) 판단한 경우: 5점
- 3c의 정리를 응용하여 대각행렬을 기본행연산으로 나타낸 뒤 정부호성을 판단한 경우가 있는데, 이는 대각화가 아님.
- LPM으로 정부호성을 판단해도 상관 없음.

(…) …의 행렬을 대각화하고 정부호성을 판단하라. (위의 A 행렬을 의미)

O

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{12-4\sqrt{6}}} & \frac{1}{\sqrt{12+4\sqrt{6}}} \\ 0 & \frac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{12-4\sqrt{6}}} & \frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{12+4\sqrt{6}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{12-4\sqrt{6}}} & \frac{1}{\sqrt{12+4\sqrt{6}}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ 0 & & \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & & \end{pmatrix}^{-1}$$

박강원

// 같음

따라서

Page 7

$r_1>0$ $r_2>0$, $r_3<0$ 이므로 A는 ID이다.

(e) (10 points) 임의의 정방행렬에 대하여 다음 정리가 성립함을 증명하라 (일반 증명이 어려울 경우 약간의 감점을 감수하고 3×3 행렬에 대해 증명할 것)

$$D^2(\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x})_{\mathbf{x}} = \mathbf{2A}$$

4e

- 3x3 으로 증명: 최대 6점

A는 n×n 행렬, x는 n×1 행렬.

$$D^2(\mathbf{x}^\intercal \mathbf{A}\mathbf{x})_\mathbf{x} = 2\mathbf{A}$$

$x^T A x = Q(x)$ 라하면 $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i A_{ij} x_j$

$$\therefore \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} = 2A_{ii}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_j} = A_{ij} + A_{ji}.$$

천영빈

$A_{ij} = A_{ji}$, 즉 $A^T = A \Rightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_j} = 2A_{ij}.$

$$\therefore D^2(x^T A x)_x = 2A.$$

5. 다음 극대화 문제를 검토하고자 한다. 이어지는 물음에 답하라.

$$\arg\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad \text{subject to} \quad \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{x_i} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{x_i} \geq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x_1 x_2 x_3}$$

(a) (10 points) 이 문제를 풀기 위한 라그랑지안 함수를 구성하라

Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

5a

- 부등제약을 검토하지 않은 경우 (-4)

$$\mathcal{L}\ x, \mu, \lambda = x_1 x_2 x_3 + \mu(x_1 + x_2 + x_3 - 1) + \lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2) + \lambda_3(x_3)$$

감점

5b

(b) (10 points) 이 문제의 1계 조건을 모두 열거하라

- 5a를 틀리게 도출했다 할지라도 그에 기반하여 정확히 열거했다면 문제 없음

foc ① $D\mathcal{L}_{x,\mu}(x^*,\mu^*)=0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = x_2^* x_3^* + \mu^* + \lambda_1^* = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = x_1^* x_3^* + \mu^* + \lambda_2^* = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = x_1^* x_2^* + \mu^* + \lambda_3^* = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = x_1^* + x_2^* + x_3^* - 1 = 0$$

② $\lambda_1^* x_1^* = 0, \ \lambda_2^* x_2^* = 0, \ \lambda_3^* x_3^* = 0$

③ $\lambda_1^* \geq 0, \ \lambda_2^* \geq 0, \ \lambda_3^* \geq 0$

④ $x_1^* \geq 0, \ x_2^* \geq 0, \ x_3^* \geq 0$

Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

5c

(c) (10 points) 위 조건을 충족하는 모든 점들을 찾으라

- (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)을 찾지 못한 경우 (-2)

10

(c) (10 points) 위 조건을 충족하는 모든 점들을 찾으라

i) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ → $x_1+x_2+x_3=1$, $x_1x_2=x_2x_3=x_3x_1$ ⇒ $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

ii) $\lambda_1\neq0$, $\lambda_2\neq0$, $\lambda_3\neq0$ → 없음.

iii) λ 1개는 0, 2개 >0 → 없음

iv) λ 2개는 0, 1개 >0 → 없음

훌륭함.

$\therefore$ $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

(d) (10 points) 위에서 찾은 점들에 대해 제약식의 NDCQ를 검토하라

O

$x_1=x_2=x_3=\frac{1}{3}$ 일때 부등제약 binding 하지 않음.

등제약에 대해서만 NDCQ 검토.

rank $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$ = 제약의 갯수 ∴ NDCQ 통과한다.

임서영

5e

(e) (10 points) 위 점들에서 2계조건을 검토하라

- Hessian 도출하여 검토하지 않고 과정에 대한 진술만 정확히 한 경우 5점
- 정부호성의 판별 과정이 설명되어야 함.

nts) 위 점들에서 2계조건을 검토하라

ssian :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} \\ 1 & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} \\ 1 & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & x_3 & x_2 \\ 1 & x_3 & 0 & x_1 \\ 1 & x_2 & x_1 & 0 \end{array}\right)$$

i) $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 의 경우

$$\text{Bordered } H = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

3-1=2 이므로 $LMP_4(BH)$과 $LMP_3(BH)$을 확인

$$LMP_4(BH) = -1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} + 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} - 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= 3 \times \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = 3\left(1 \times \det\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \times \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right)$$

$$= 3 \times \det\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} < 0.$$ $(-1)^3$과 sign 같음

$$LMP_3(BH) = -1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} > 0$$

$\therefore$ BH는 ND이다. 따라서 $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 에서 극대

훌륭해요

ii) $x = (1, 0, 0)$ 의 경우

$$BH = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

$$LMP_4(BH) = -1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \times \left(1 \times \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1.$$

$\therefore$ BH 는 ND아님.

ii) $x = (0, 1, 0)$ 의 경우 $BH = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$LMP_4(BH) = -1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \times \left(0 - 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

$\therefore$ BH ND아님.

마찬가지로 $x = (0, 0, 1)$도 ND아니고 극대아님.

5f

(f) (10 points) 앞에서 푼 결과를 종합하여 극대화문제에 대한 결론을 도출하라

- 5e까지의 결론이 틀렸더라도 그에 기반하여 정확히 판단하면 문제 없음 (예: PD 이므로 극대값이 아니다 등)

5f

- ND이므로 strict local maximum이라는 결론에 관한 진술이 있어야 함. (-2 ~ -4)
- 엄밀히 말하자면 확실한 것은 앞에서 구한 critical point가 strict local maximum 이라는 것임
- 이 점이 극대화 문제의 해, 즉 global max인지는 5a-5e 까지의 과정 만으로는 확실하지 않음
  - 만일 임의의 x에 대해서 언제나 ND라면 유일한 critical point이므로 충족하지만
  - 설령 그렇지 않은 경우에는 global max인지 검토하는 것은 쉽지 않음
- 이 문제와 관련해서는 특별한 감점을 하지는 않았음

(e)에서 2계조건이 ND로 나왔으므로 local max 이라는 뜻이다

고로 $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$은 극대화 문제의 해답이 될수

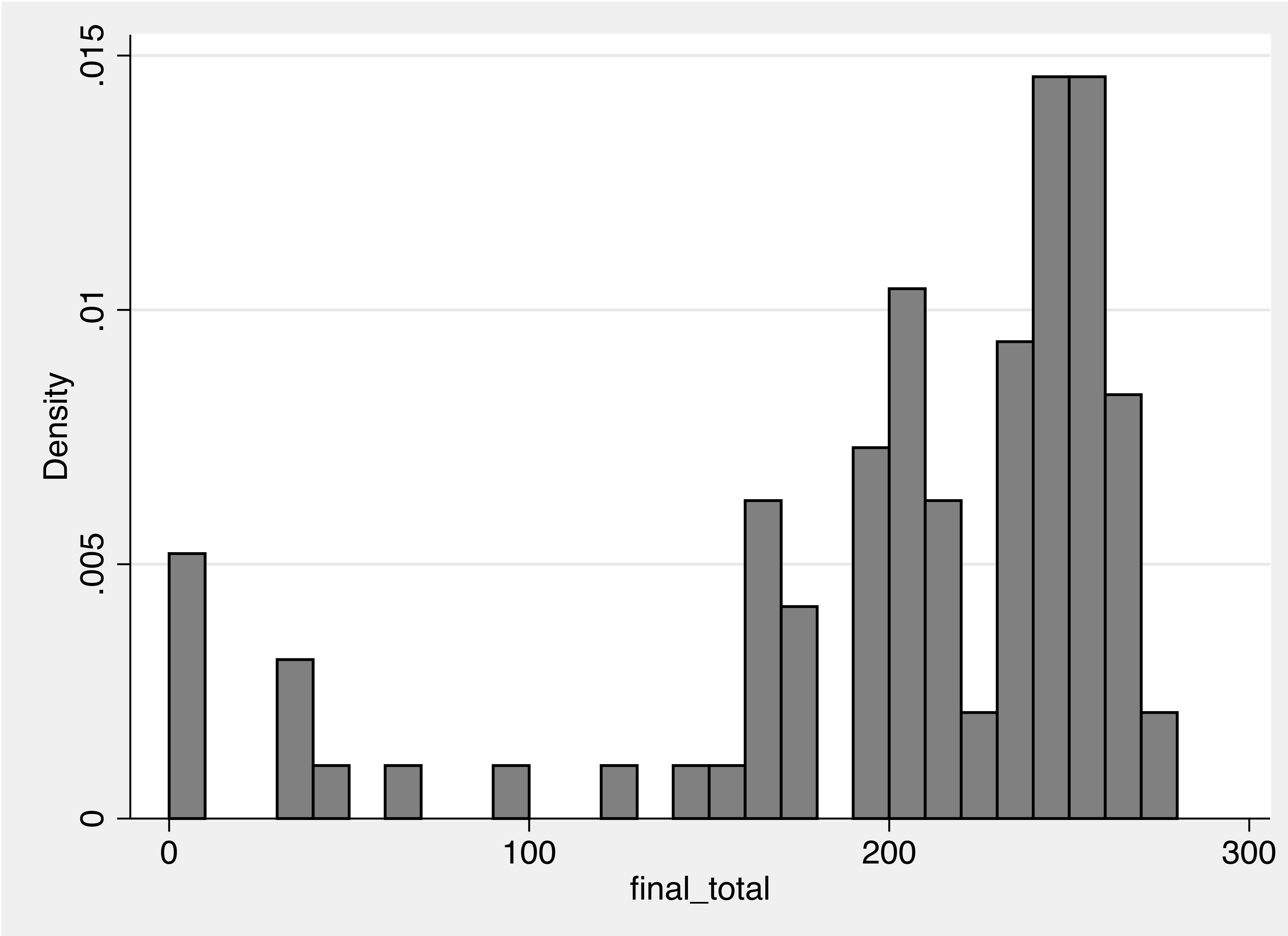
10 있는 가능성이 있다.

윤희찬

기초통계

```
. su final_total

    Variable |        Obs        Mean    Std. Dev.       Min        Max
-------------+---------------------------------------------------------
 final_total |         96    201.3438    71.34318          0        274

. su final_total ,detail

                         final_total
-------------------------------------------------------------
      Percentiles      Smallest
 1%            0              0
 5%            0              0
10%           65              0       Obs                  96
25%        184.5              0       Sum of Wgt.          96

50%          224                      Mean           201.3438
                        Largest       Std. Dev.      71.34318
75%        249.5            268
90%          260            268       Variance       5089.849
95%          267            273       Skewness       -1.67148
99%          274            274       Kurtosis       4.967369
```

점수분포



상위 퍼센타일
가로: 점수, 세로: 상위%