경제수학 기말시험 해설

ECON205-03 (2016 가을)

조남운

Nam-Un, Cho/KIAS/ mailto:namun@snu.ac.kr

1a

1. 아래 질문에 답하라.

   (a) (10 points) 다음 유리함수(rational function) f의 그래프 개형을 그려라 (오목성, 볼록성까지 표현할 것.)

$$f = f(x) = 16\frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}$$

- 양 끝 tail이 16에 수렴함에 유의할 것.

1a

ECON205(03) 경제수학 기말시험 조남운

1. 아래 질문에 답하라.

(a) (10 points) 다음 유리함수(rational function) f 의 그래프 개형을 그려라 (오목성, 볼록성까지 표현할 것.)

$$f = f(x) = 16\frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}$$

① $f(x) = 16 \cdot \frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}$ 에서 $x^* = 2$ (N/A)

② $f'(x) = 16 \cdot \frac{2(x+1)\cdot(x-2)^2 - (x+1)^2\, 2(x-2)}{(x-2)^4} = 16 \cdot \frac{(x+1)(x-2)(2x-4-2x-2)}{(x-2)^4} = -96 \cdot \frac{x+1}{(x-2)^3} = 0$ 에서 $x^* = -1$

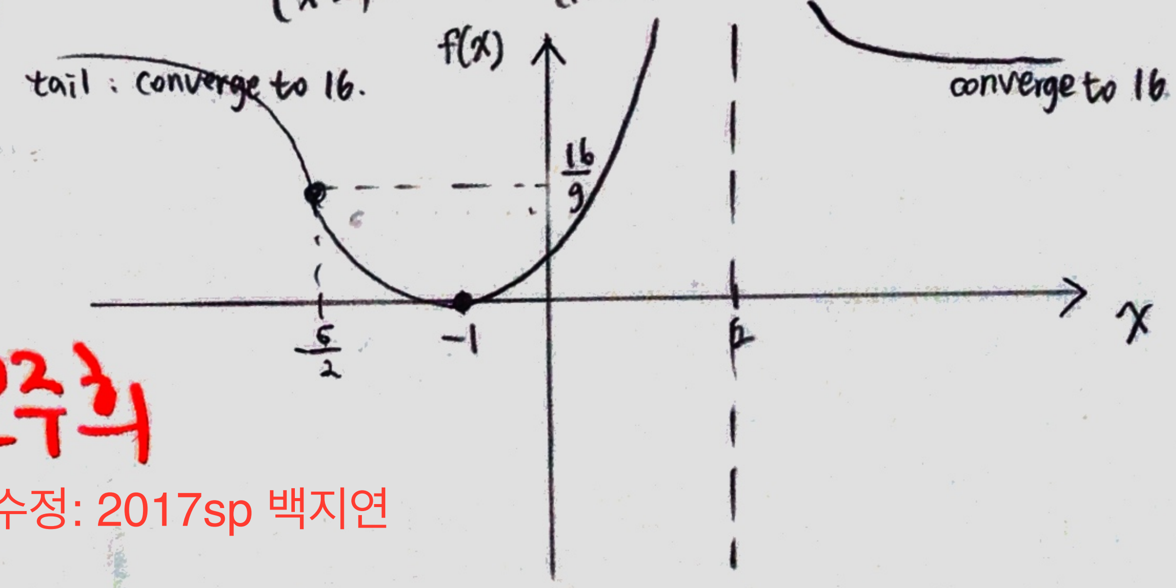
10

③ $f''(x) = -96 \cdot \frac{(x-2)^3 - (x+1)\; 3\cdot(x-2)^2}{(x-2)^6} = -96 \cdot \frac{(x-2)^2\,(x-2-3x-3)}{(x-2)^6} = -96\frac{(-2x-5)}{(x-2)^4} = 96 \cdot \frac{2x+5}{(x-2)^4}$ 에서 $x^* = -\frac{5}{2}$.

$x_1^* = -\frac{5}{2}$. $x_2^* = -1$. $x_3^* = 2$ 라고 놓으면,

	...	$-5/2$	...	-1	...	2	...
f'	−	−	−	0	+	N/A	−
f''	−	0	+	+	+	N/A	+
f	16 ↘	$\frac{16}{9}$	↘	0	↗	N/A	↘ 16.

$f(-\frac{5}{2}) = 16 \cdot \frac{\frac{9}{4}}{\frac{81}{4}} = \frac{16}{9}$.



오주희

수정: 2017sp 백지연

1b

(b) (10 points) 다음 정의역(domain)에서 위 함수 f의 local min/max, global min/max가 존재한다면 기술하고, 없다면 없음을 명확하게 기술하라.

- $x \in (2, \infty)$
- $x \in \mathbb{R} - 2$

1b

- R-2 는 R-{2} 의 오기임
- 알 수 없다: -3
  - “알 수 없다” 라는 진술과 “존재하지 않는다는 것을 알고 있다” 라는 진술은 다른 것임.
  - 이는 1c에도 해당. 존재하지 않는다면 존재하지 않는다고 명확하게 기술해야 함.
- 1a 의 그래프가 잘못된 것이어도 그에 기반하여 정확하게 논리 도출했으면 감점 없음

1b

(b) (10 points) 다음 정의역(domain)에서 위 함수 f의 local min/max, global min/max가 존재한다면 기술하고, 없다면 없음을 명확하게 기술하라.

10

- $x \in (2, \infty)$
- $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

	계속 커지는중 global max	global min	계속 커지는중 local max	local min
• $2 < x$ 때에서는	X (없음)	X	X	X.
• $x \in \mathbb{R} - \{2\}$	X	$x = -1$일 때 $f(-1) = 0$	X	$x = -1$일 때 $f(-1) = 0$

→ $x=2$ 제외한 실수전체인 정의역

즉, 함수전체

우태린.

1c

(c) (10 points) 다음 극소화 문제를 풀라.

$$\arg\min_{x} f(x)$$

1c

- 역시 잘못된 앞문제에 기반하여 논리적으로 결론을 도출했다면 감점하지 않음. (이후 문제들도 모두 마찬가지 원칙을 적용할 것임)
- argmax 혹은 maximize problem 의 solution은 object function의 최대값 그 자체가 아니라 최대값을 갖게 하는 input 값임. 따라서 반드시 이 문제에서 input의 정보가 완전히 누락되어 있는 경우에는 부분 감점 (1b도 해당)
  - f(x) has a global min at x=-1 : OK
  - f(-1): OK (input 정보가 들어있음)
  - 0 : Not OK

1c

(c) (10 points) 다음 극소화 문제를 풀라.

$$\arg\min_x f(x)$$

양수오ㄴ

10

위 그래프에서 $f(x)$ 값이 가장 작을 때는 $x=-1$ 일 때.

$\arg\min_x f(x) \rightarrow x=-1$ 일때 $f(x)=0$.

Page 2

2a

2. 어떤 기업의 투입요소 L에 대한 생산량 x의 관계를 의미하는 생산함수가 아래와 같다고 한다. 이어지는 물음에 답하라.

$$x = x(L) = \alpha \ln L, \quad \alpha > 0$$

(a) (10 points) 위 생산함수 기술에서 맨 처음 등장한 x와 두번째로 등장한 $x(L)$의 x는 같은 의미를 가진 기호 (symbol) 인가? 이에 대해 논하라.

2a

- 같은 기호인지 물어보는 것과 그 의미가 같은 것인지 물어보는 것은 다름.
    - 이 경우 두 x는 symbol을 동일하게 썼지만, 첫번째는 변수의 symbol, 두번째는 함수의 symbol임
- 그런데 문제에는 같은 “의미”를 가진 “기호”인지를 물음으로써 혼란의 여지가 생김
    - 문제에서 “의미”가 무엇의 symbol인지라는 뜻인지, 그 symbol이 의미하는 것 (생산량)이라는 뜻인지 불분명
- 어떤 쪽으로 해석하던 내적 논리 정합성에 문제가 없다면 정답의 취지로 해석함.

2a

ECON205(03) 경제수학 기말시험 조남운

2. 어떤 기업의 투입요소 L에 대한 생산량 x의 관계를 의미하는 생산함수가 아래와 같다고 한다. 이어지는 물음에 답하라.

$$x = x(L) = \alpha \ln L, \quad \alpha > 0$$

(a) (10 points) 위 생산함수 기술에서 맨 처음 등장한 x와 두번째로 등장한 $x(L)$의 x는 같은 의미를 가진 기호(symbol)인가? 이에 대해 논하라.

다르다. 편의상 $x = x(L) = \alpha \ln L$ 에서 앞의 x를 $\bar{x}_1$, $x(L)$의 x를 x_2라고 다시 정한다고 하면, $\bar{x}_1$은 x_2라는 함수에 (L)만큼의 투입량을 넣었을때

$\rightarrow \bar{x}_1 = x_2(L)$

생산되는 생산량이다. 즉 x_2라는 함수에 투입량 (L) 만큼을 투입하면 이 기업은 $\alpha \ln L = \bar{x}_1$ 만큼 생산한다.

10

김빛나라

2b

(b) (10 points) 위 생산함수에서 주어진 (given) 매개변수 (parameter) 로 간주할만한 변수가 있는가? 이에 대해 논하라.

0 points) 위 생산함수에서 주어진 (given) 매개변수 (parameter) 로 간주할만한 변수가
는가? 이에 대해 논하라.

L은 투입요소이므로 주어진 매개변수가 아니다. 또한 x도 $x(L)(=\alpha \ln L)$에 의하여 결정되어 나오는 종속변수이므로 주어진 매개변수가 아니다. α만이 주어진 매개변수이다.

배르테

$\boxed{\alpha}$

2c

(c) (10 points) 위 기업이 생산하는 상품의 가격이 p이고, 투입요소 L의 단위당 가격이 w라고 할 때, 아래 극대화 문제를 풀어라.

$$\arg\max_{x} \Pi(x), \quad \Pi(x) := px - wL$$

2c

- 1계조건만 검토: 6pt
- global max인지 판별해야함:
  - 1변수함수이므로 그래프로도 가능
  - SOC는 필요조건임. 보장하는 것은 그 점이 local max이라는 것 밖에 없음: 8pt
    - 그래프로 보이던 모든 점에서 2계도함수가 음일 때에는 local max가 유일하고 그 점이 global max임을 진술하던 global max 여부를 판별하려는 시도가 반드시 있어야 함

2c

(C). $\Pi(x) = px - wL$

위에 주어진 식 $x = \alpha \ln L$ 에 의하여 $L = e^{\frac{x}{\alpha}}$.

Thus $\Pi(x) = px - w \cdot e^{\frac{x}{\alpha}}$

$\Pi'(x) = p - \frac{w}{\alpha} \cdot e^{\frac{x}{\alpha}}$

$e^{\frac{x}{\alpha}} = \frac{p\alpha}{w}$

$\frac{x}{\alpha} = \ln\left(\frac{p\alpha}{w}\right)$

$\Pi'(x^*) = 0$ 일때 $x^* = \alpha \cdot \ln\left(\frac{p\alpha}{w}\right)$ 이고

x		x^*	
f'	$+$	0	$-$

이므로

x^*에서 극대

$$\therefore \underset{x}{\arg\max}\, \Pi(x) = \Pi\left(\alpha \cdot \ln\left(\frac{p\alpha}{w}\right)\right) = p \cdot \left\{\alpha \cdot \ln\left(\frac{p\alpha}{w}\right)\right\} - w \cdot e^{\ln \frac{p\alpha}{w}}$$

$$= p \cdot \left\{\alpha \cdot \ln\left(\frac{p\alpha}{w}\right)\right\} - p\alpha$$

$$= p\alpha \cdot \left(\ln\left(\frac{p\alpha}{w}\right) - 1\right)$$

100

300

3a

3. 아래에 열거하는 수학적 진술들을 증명하라.

(a) (10 points)

$$\epsilon := \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dx}{x}} = \frac{d\ln f}{d\ln x}$$

3a

- 라이프니츠식 미분기술df/dx은 유리식의 형태를 띠고 있지만 df를 dx로 나눈 것과 동등한 기술이라고 생각하면 안됨 (단, 이에 대해서는 감점하지 않음)
- Chain Rule을 써서 증명해야 함. (주텍스트 102페이지 참고)

3a

3. 아래에

10

(a) (10 points)

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\epsilon := \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dx}{x}} = \frac{d\ln f}{d\ln x}$$

$$\frac{d\ln f}{d\ln x} = \frac{d\ln f}{df}\cdot\frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{d\ln x}$$

$$= \frac{1}{f}\cdot\frac{df}{dx}\cdot x = \underline{\underline{\frac{x}{f}\cdot\frac{df}{dx}}} = \epsilon$$

[illegible]

Page 3

3b

(b) (10 points) 임의의 $n \times m$ matrix인 A, B, C에 대하여

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

- … 으로 나열하여 증명한 경우: 8pt
- 모든 n,m 이 아닌 특정 n,m (가령 2x2) 으로 증명한 경우: 6pt

3b

ECON205(03) 경제수학 기말시험 조남운

(b) (10 points) 임의의 $n \times m$ matrix인 A, B, C에 대하여

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

10

A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}를 각각 A, B, C의 (i,j) 성분이라고 하자 $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le m)$

$(A_{ij}+B_{ij})+C_{ij} = A_{ij}+(B_{ij}+C_{ij})$ $\forall i, j$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

김경찬

3c

(c) (10 points) 임의의 수렴하는 두 수열 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$에 대하여,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

(수렴의 엄밀한 정의를 이용할 것)

3c

(c) (10 points) 임의의 수렴하는 두 수열 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$에 대하여,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

(수렴의 엄밀한 정의를 이용할 것)

10

$\lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\alpha}$ $\lim_{n\to\infty} b_n = \overline{\beta}$ $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

$|a_n - \overline{\alpha}| < \frac{\varepsilon}{2} \ (\forall n > n_1)$

윤종재

$|b_n - \overline{\beta}| < \frac{\varepsilon}{2} \ (\forall n > n_2)$ 라고 하자

$\underline{|a_n - \overline{\alpha}| + |b_n - \overline{\beta}|} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ (\forall n > \max\{n_1, n_2\})$

2017sp 백지연

↳ $|a+b| \le |a| + |b|$ 개념을 적용

$|a_n + b_n - (\overline{\alpha} + \overline{\beta})| \le |a_n - \overline{\alpha}| + |b_n - \overline{\beta}| < \varepsilon \ (\forall n > \{\max(n_1, n_2)\})$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$

4a

4. 아래의 선형 연립방정식을 풀고자 한다. 이어지는 물음들에 답하라.

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

(a) (10 points) 위 연립방정식을 matrix form으로 나타내라

박기흔

ㅓ라

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nam-Un, Cho/KIAS/ mailto:namun@snu.ac.kr

4b

(b) (10 points) 위 연렵방정식의 해를 구하라.

- free variable에 특정 숫자 대입: 6pt
- 단순히 “무수히 많다”: 6pt

4b

(b) (10 points) 위 연립방정식의 해를 구하라.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 0&1&1&0&2\\ 1&1&1&1&3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 0&1&1&0&2\\ 0&1&1&0&2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 0&1&1&0&2\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right).$$

$x_1 + x_4 = 1$

$x_2 + x_3 = 2$

free rariable → x_3, x_4 (pivot이 없는 c)

dependent rariable → x_1 (x_4에 종속)

x_2 (x_3에 종속)

10

오타클

4c

(c) (10 points) 위 연립방정식을 제한적으로나마 풀려고 한다. 이를 위해 이들 변수 중 일부를 다른 변수들의 음함수 (implicit function)로 나타내려고 한다. 어떤 변수를 어떤 변수의 음함수로 취급하면 문제를 풀 수 있는지 제시하고, 그렇게 하여 문제를 풀어보라.

- 음함수 그 자체가 해가 되는데, 음함수 형태가 해임이 명확히 기술되어 있어야 온전한 점수를 부여함

4c

(c) (10 points) 위 연립방정식을 제한적으로나마 풀려고 한다. 이를 위해 이들 변수 중 일부를 다른 변수들의 음함수 (implicit function)로 나타내려고 한다. 어떤 변수를 어떤 변수의 음함수로 취급하면 문제를 풀 수 있는지 제시하고, 그렇게 하여 문제를 풀어보라.

10

x_1, x_2를 x_3, x_4를 이용해 나타내면 된다.

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 \\ x_2 = 2 - x_3 \\ x_1 + x_2 = 3 - x_3 - x_4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_4 \\ 2 - x_3 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 1 - x_4$, $x_2 = 2 - x_3$.

최상급.

5a

5. 아래의 비선형 연립방정식에 대해서 이어지는 물음들에 답하라.

$$
\begin{aligned}
Y &= C + I \\
Y_D &= Y - T \\
M_S &= M_D(Y_D, r) \\
C &= C(Y_D) \\
I &= I(r) \\
C' &\in (0,1) \\
I' &< 0 \\
\frac{\partial M_D}{\partial Y_D} &> 0 \\
\frac{\partial M_D}{\partial r} &< 0
\end{aligned}
$$

(a) (10 points) 위 비선형 연립방정식의 모든 변수를 가능한한 줄인 뒤 나열하라

5a

- Y 혹은 YD 중 하나를 소거할 수 있음.
- 어느쪽을 소거하든 상관 없음.
- 본 문제에서 명시되지 않더라도 5b, 5c에서라도 명시되어 있는 경우 정답으로 간주함.

5a

변수 : Y, T, Ms, r

10

보통

5b

(b) (10 points) 위 비선형 연립방정식을 정리하라

(b) (10 points) 위 비선형 연립방정식을 정리하라

$$\begin{cases} Y = C(Y-T) + I(r) \\ M_S = M_D(Y-T,\ r) \end{cases}$$

로 정리할 수 있다.

10

박지훈

5c

(c) (10 points) 현재 상태를 상수로 규정하고 (가령 $(a, b, c) = (a^*, b^*, c^*)$ 같은 식으로 정리하라는 의미) 그 근방에서 선형화하라.

- 주어진 값은 Yd로 편미분되어 있으므로 연립방정식 또한 Yd로 편미분된 형태로 정리해야함 (-3 ~ -4)

Nam-Un, Cho/KIAS/ mailto:namun@snu.ac.kr

5c

(c) (10 points) 현재 상태를 상수로 규정하고 (가령 $(a, b, c) = (a^*, b^*, c^*)$ 같은 식으로 정리하라는 의미) 그 근방에서 선형화하라.

10

윤동재

$$D_x Y\big|_{x=(Y^*, r^*, T^*, M_s^*)} = C(Y-T) + I(r)\big|_{x=(Y^*, r^*, T^*, M_s^*)}$$

$$dY = \frac{\partial C(Y-T)}{\partial Y}dY + \frac{\partial C(Y-T)}{\partial T}dT + I'dr = \frac{\partial C(Y-T)}{\partial (Y-T)}\cdot\frac{\partial (Y-T)}{\partial Y}\cdot dY + \frac{\partial C(Y-T)}{\partial (Y-T)}\cdot\frac{\partial (Y-T)}{\partial T}dT + I'dr$$

$$= C'dY + C'(-1)dT + I'dr$$

$$D M_s\big|_{x=(Y^*, T^*, r^*, M_s^*)} = M_D(Y-T, r)\big|_{x=(Y^*, T^*, r^*, M_s^*)}$$

$$dM_s = \frac{\partial M(Y-T)}{\partial Y}dY + \frac{\partial M(Y-T)}{\partial T}dT + \frac{\partial M}{\partial r}dr$$

$$= \frac{\partial M}{\partial (Y-T)}\cdot\frac{\partial (Y-T)}{\partial Y}\cdot dY + \frac{\partial M}{\partial (Y-T)}\frac{\partial (Y-T)}{\partial T}dT + \frac{\partial M}{\partial r}dr = \frac{\partial M}{\partial Y_D}dY - \frac{\partial M}{\partial Y_D}dT + \frac{\partial M}{\partial r}dr$$

Nam-Un, Cho/KIAS/ mailto:namun@snu.ac.kr

** Yd를 변수로 보고 푼 경우

(c) (10 points) 현재 상태를 상수로 규정하고 (가령 $(a,b,c) = (a^*,b^*,c^*)$ 같은 식으로 정리하라는 의미) 그 근방에서 선형화하라.

10

$$\bar{x}^* = (a^*, b^*, c^*, d^*) = (Y_D, r, T, M_s)$$

양숙 단

$$D_x Y_D \Big|_{x=\bar{x}^*} = D_x \left(C(Y_D) + I(r) - T \right) \Big|_{x=\bar{x}^*}$$

$$\rightarrow \left(\underset{1}{\frac{\partial Y_D}{\partial Y_D}} \ \underset{0}{\frac{\partial Y_D}{\partial r}} \ \underset{0}{\frac{\partial Y_D}{\partial T}} \ \underset{0}{\frac{\partial Y_D}{\partial M_s}} \right) \begin{pmatrix} dY_D \\ dr \\ dT \\ dM_s \end{pmatrix} \Bigg|_{x=\bar{x}^*} = \left(\underset{C'}{\frac{\partial C}{\partial Y_D}} \ \underset{0}{\frac{\partial C}{\partial r}} \ \underset{0}{\frac{\partial C}{\partial T}} \ \underset{0}{\frac{\partial C}{\partial M_s}} \right) \begin{pmatrix} dY_D \\ dr \\ dT \\ dM_s \end{pmatrix} \Bigg|_{x=\bar{x}^*} + \left(\underset{0}{\frac{\partial I}{\partial Y_D}} \ \underset{I'}{\frac{\partial I}{\partial r}} \ \underset{0}{\frac{\partial I}{\partial T}} \ \underset{0}{\frac{\partial I}{\partial M_s}} \right) \begin{pmatrix} dY_D \\ dr \\ dT \\ dM_s \end{pmatrix} \Bigg|_{x=\bar{x}^*}$$

$$- \left(\underset{0}{\frac{\partial T}{\partial Y_D}} \ \underset{0}{\frac{\partial T}{\partial r}} \ \underset{1}{\frac{\partial T}{\partial T}} \ \underset{0}{\frac{\partial T}{\partial M_s}} \right) \begin{pmatrix} dY_D \\ dr \\ dT \\ dM_s \end{pmatrix} \Bigg|_{x=\bar{x}^*}$$

$$\rightarrow dY_D = C' dY_D + I' dr + dT$$

$$\Rightarrow dY_D = C'(a^*, b^*, c^*, d^*)\, dY_D + I'(a^*, b^*, c^*, d^*)\, dr + dT$$

Page 6

(C) 이어서

$$D_x M_S \big|_{x=x^*} = D_x M_D(Y_D, r)\big|_{x=x^*}$$

$$\left(\cancel{\frac{\partial M_S}{\partial Y_D}} \quad \cancel{\frac{\partial M_S}{\partial r}} \quad \cancel{\frac{\partial M_S}{\partial T}} \quad \frac{\partial M_S}{\partial M_S}\right)\begin{pmatrix} dY_D \\ dr \\ dT \\ dM_S \end{pmatrix}\Bigg|_{x=x^*} = \left(\frac{\partial M_D}{\partial Y_D} \quad \frac{\partial M_D}{\partial r} \quad \cancel{\frac{\partial M_D}{\partial T}} \quad \cancel{\frac{\partial M_D}{\partial M_S}}\right)\begin{pmatrix} dY_D \\ dr \\ dT \\ dM_S \end{pmatrix}\Bigg|_{x=x^*}$$

$$\Rightarrow dM_S = \frac{\partial M_D}{\partial Y_D} \cdot dY_D + \frac{\partial M_D}{\partial r} \cdot dr$$

$$\to dM_S = \frac{\partial M_D}{\partial Y_D}(a^*, b^*, c^*, d^*)\, dY_D + \frac{\partial M_D}{\partial r}(a^*, b^*, c^*, d^*)\, dr$$

양수만

5d

(d) (10 points) 선형화한 연립방정식에 대해서 Y, r을 나머지 변수들에 대한 음함수 (implicit function)로 정리하고 위에서 규정한 현재 상태에서 비선형 연립방정식을 풀어라.

$$C'dY - dY + I'dr = C'dT$$

$$\frac{\partial M^D}{\partial Y_D} dY + \frac{\partial M^D}{\partial r} dr = dM_s + \frac{\partial M^D}{\partial Y_D} dT$$

10

$$\begin{pmatrix} C'-1 & I' \\ \frac{\partial M^D}{\partial Y_D} & \frac{\partial M^D}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C' \\ 1 & \frac{\partial M^D}{\partial Y_D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dM_s \\ dT \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C'-1 & I' \\ \frac{\partial M^D}{\partial Y_D} & \frac{\partial M^D}{\partial r} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & C' \\ 1 & \frac{\partial M^D}{\partial Y_D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dM_s \\ dT \end{pmatrix}$$

조은아

$$= \frac{1}{(C'-1)\left(\frac{\partial M^D}{\partial r}\right) - I'\left(\frac{\partial M^D}{\partial Y_D}\right)} \begin{pmatrix} \frac{\partial M^D}{\partial r} & -I' \\ -\frac{\partial M^D}{\partial Y_D} & C'-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C' \\ 1 & \frac{\partial M^D}{\partial Y_D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dM_s \\ dT \end{pmatrix}$$

→ 뒷장

(e) (10 points) 다른 모든 조건이 변동 없는 상태에서 M_s만 증가할 경우 Y, r의 변동 방향을

5e

(e) (10 points) 다른 모든 조건이 변동 없는 상태에서 M_S 만 증가할 경우 Y, r 의 변동 방향을 기술하라. (방향이 명확하지 않을 경우 왜 명확하지 않은지 기술할 것)

- 앞문제가 오류일 경우라도 그에 기반하여 정확한 결론이 나오면 정답.
- 과정 설명 없이 결과만 기술하면 점수 없음.
- 선형화하여 풀지 않고 생으로(?) 결론을 도출한 경우도 정합성의 정도에 따라 부분점수 부여함.

5e

$$\begin{cases} dM_s > 0 \\ dT = 0 \end{cases} \rightarrow dY? \; dr?$$

$$dY = \frac{1}{\underbrace{(C'-1)\left(\frac{\partial M^D}{\partial r}\right)}_{+} - \underset{+}{I'}\left(\frac{\partial M^D}{\partial Y^D}\right)} \cdot \underset{+}{-I'dM_s}$$

$$dr = \frac{1}{(C'-1)\left(\frac{\partial M^D}{\partial r}\right) - I'\left(\frac{\partial M^D}{\partial Y^D}\right)} \cdot \underset{-}{(C'-1)dM_s}$$

$(C'-1) < 0$, $\frac{\partial M^D}{\partial r} < 0$, $I' < 0$, $\frac{\partial M^D}{\partial Y^D} > 0$ 이므로 $\frac{1}{(C'-1)\left(\frac{\partial M^D}{\partial r}\right) - I'\left(\frac{\partial M^D}{\partial Y^D}\right)} > 0$

$\therefore dY > 0$ Y는 증가하고 r은 감소한다.

$dr < 0$

6a

6. 다음 극대화 문제를 검토하고자 한다. 이어지는 물음들에 답하라. (답변이 곤란할 경우 감점을 감수하고 $n = 1$로 설정하고 문제를 풀 것. x, L 따위의 notation이 통상적 관습과 다르게 쓰이고 있음에 주의할 것.)

$$\arg\max_{L} \Pi(L) = \mathbf{p} \bullet \mathbf{x} - wL$$

$$\mathbf{x}(L) = (\alpha_1 \ln L, \cdots, \alpha_n \ln L), \quad \alpha_i > 0 \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

(a) (10 points) 위 생산함수에서 주어진 (given) 매개변수 (parameter)로 간주할만한 변수가 있는가? 이에 대해 논하라.

6. 다음 극대화 문제를 검토하고자 한다. 이어지는 물음들에 답하라. (답변이 곤란할 경우 감점을 감수하고 $n = 1$로 설정하고 문제를 풀 것. x, L 따위의 notation이 통상적 관습과 다르게 쓰이고 있음에 주의할 것.)

$$\arg\max_{L} \Pi(L) = \mathbf{p} \bullet \mathbf{x} - wL$$

$$\mathbf{x}(L) = (\alpha_1 \ln L, \cdots, \alpha_n \ln L), \quad \alpha_i > 0 \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

(a) (10 points) 위 생산함수에서 주어진 (given) 매개변수 (parameter)로 간주할만한 변수가 있는가? 이에 대해 논하라.

$\mathbb{p} \geq 0.$ $L > 0.$ $w \geq 0.$

10

L은 구하고자 하는 (극대화하고자 하는) 값이므로 주어지지 않음.

$x(L)$은 L에 의해 정해지는 값이므로 주어지지 않음.

∴ 주어진 매개변수는 $\mathbb{p}$. w. α_i

정희정

6b

(b) (10 points) 위 극대화 문제를 풀기 위한 라그랑지안 함수를 제시하라

- 제약은 오직 input에 관해서만 성립하므로 α>0은 제약이 아님
- 따라서 제약 없는 라그랑지안 함수는 목적함수 그 자체임.
- 제약이 없으므로 NDCQ 검토도 의미 없음.
- 단, L>0 제약을 포함하는 것은 감점하지 않음. (이 경우 등호 없는 부등식이므로 반드시 not binding 이며 lambda=0 을 의미하므로 동일 문제가 됨.

Nam-Un, Cho/KIAS/ mailto:namun@snu.ac.kr

6b

특별한 제약 조건이 없으므로,

$\pi(L) = \mathbb{p} \cdot \mathbb{x} - w \cdot L$

$= (p_1 \alpha_1 \ln L + p_2 \alpha_2 \ln L + \cdots + p_n \cdot \alpha_n \ln L) - w \cdot L$ 이 된다.

박지윤

6c

(c) (10 points) 위 극대화 문제를 풀기 위한 1계조건 (FOC)을 제시하고 이를 만족하는 점(들)을 모두 찾아라.

- 라그랑지안함수에 오류가 있더라도 그에 기반하여 제대로 도출하면 정답 혹은 부분점수 부여.

6c

$$\pi(L)=P_1^{\alpha_1}\ln L+P_2^{\alpha_2}\ln L+P_3^{\alpha_3}\ln L+\cdots+P_n\cdot\alpha_n\cdot\ln L-W\cdot L \qquad \mathbb{P}=(P_1 \cdots P_n)$$

$$=\ln L(P_1\alpha_1+P_2\alpha_2+\cdots+P_n\cdot\alpha_n)-W\cdot L$$

$$D\pi_L=0 \qquad \text{1계조건}$$

$$\frac{P_1\alpha_1+P_2\alpha_2+\cdots+P_n\alpha_n}{L}-W=0$$

$$L=\frac{P_1\alpha_1+P_2\alpha_2+\cdots+P_n\alpha_n}{W}$$

6d

(d) (10 points) 위에서 찾은 모든 점(들)에 대해 NDCQ 를 검토하라

- FOC가 잘못 설정되었더라도 그에 기반하여 NDCQ를 검토하기는 어려움
- binding 되어야만 NDCQ 검토가 성립하는데 그러한 경우는 존재하지 않기 때문임.
- 만일 제약식을 포함시키는 오류를 범한 경우라면 그에 기반하여 제대로 도출했을 경우는 정답으로 인정할 수 있음.
- 하지만 그렇더라도 NDCQ 검토가 필요 없다고 명확히 진술해야 함.

6d

points) 위에서 찾은 모든 점(들)에 대해 NDCQ 를 검토하라

제약식이 존재하지 않기 때문에 NDCQ를 굳이 검토할 필요가 없다

↳ NDCQ pass

바르다

Nam-Un, Cho/KIAS/ mailto:namun@snu.ac.kr

6e

(e) (10 points) 위에서 찾은 모든 점(들)에 대해 2계조건 (SOC)을 검토하라. (어려울 경우 감점을 감수하고 $n = 2$인 경우로 풀어라.)

- 사실 이 문제는 L 에대한 1변수 문제임.
- 따라서 SOC는 1x1 matrix로 나타나며, 이때 +이면 PD, -이면 ND와 동일함.

6e

$$\frac{d\mathcal{L}}{dL} = (p_1\alpha_1 + \cdots + p_n\alpha_n)L^{-1} - w$$

$$\frac{d^2\mathcal{L}}{dL^2} = -(p_1\alpha_1 + \cdots + p_n x_n)L^{-2} < 0$$

오태클

∴ 극대화 성립

대입 $-(p_1\alpha_1 + \cdots + p_n x_n) \cdot \dfrac{w^2}{(p_1\alpha_1 \cdots + p_n x_n)^2}$

$\rightarrow -\dfrac{w^2}{(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n)}$

7a

7. 다음 극대화 문제를 검토하고자 한다. 이어지는 물음들에 답하라.

$$\arg\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 x_3 \quad s.t. \quad \sum_i x_i^2 = 1, \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

(a) (10 points) 위 극대화 문제를 풀기 위한 라그랑지안 함수를 제시하라

(a) (10 points) 위 극대화 문제를 풀기 위한 라그랑지안 함수를 제시하라

$$\mathcal{L}(x, \mu, \lambda) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \mu(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + \lambda(1 - x_1 - x_2 - x_3)$$

10

7b

(b) (10 points) 위 극대화 문제를 풀기 위한 1계조건 (FOC)을 제시하고 (Mixed constraint 에 대해서 확신이 없을 경우 감점을 감수하고 모든 제약을 등제약으로 간주하여 풀 것)

(b) (10 points) 위 극대화 문제를 풀기 위한 1계조건 (FOC)을 제시하고 (Mixed constraint 에 대해서 확신이 없을 경우 감점을 감수하고 모든 제약을 등제약으로 간주하여 풀 것)

10

① $D\mathcal{L}(x, M, \lambda)_{x, M} = 0$

② $\lambda \geq 0$

③ $\lambda(-1 + x_1 + x_2 + x_3) = 0$

④ $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$

잘했기

Nam-Un, Cho/KIAS/ mailto:namun@snu.ac.kr

7c

(c) (10 points) 위 조건을 만족하는 점(들)을 모두 찾아라.

(c) (10 points) 위 조건을 만족하는 점(들)을 모두 찾아라.

10

i) if $\lambda > 0 \rightarrow x_1+x_2+x_3=1$.

$$(x_1+x_2+x_3)^2 = \underbrace{x_1^2+x_2^2+x_3^2}_{=1} + 2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3) = 1$$

$\therefore\ 2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=0$ —④

①식을 통해 정리하면

$x_2x_3 - x_1x_3 + 2\mu x_2 - 2\mu x_1 = 0.$

$(x_2-x_1)(x_3+2\mu)=0$

(뒷면)

ii) if $\lambda=0 \rightarrow x_1+x_2+x_3>1$.

then ①식은 $2\mu = \frac{x_2x_3}{x_1} = \frac{x_1x_3}{x_2} = \frac{x_1x_2}{x_3}$ 가 된다.

따라서 $x_1^2=x_2^2=x_3^2=\frac{1}{3}$ $\left(\because \sum_{1}^{3} x_i^2 = 1\right)$

$x_1+x_2+x_3>1$ 을 만족하기 위해서는

$x_1=x_2=x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$ only. $\left(\because \frac{1}{\sqrt{3}}<1\right)$

$$\underline{X^* = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

이정훈

only

if $x_1=x_2$

④식에 의해, $\rightarrow x_2^2+x_2x_3+x_2x_3=0$

$\rightarrow x_2(x_2+2x_3)=0$

if $x_2=0 \rightarrow x_1=0$. then $\lambda=0$ 로 contradiction!

if $x_2=-2x_3$ then $x_1=x_2=\frac{2}{3},\ x_3=-\frac{1}{3}$ contradiction!

but ④식에 의해 $\lambda<0$

if $x_3=-2\mu$

$(x_3\neq 0)$

$\therefore \mu>0.$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda = 2x_3^2 - x_1x_2 \\ \lambda = 2x_3x_2 - x_1x_3 = (2x_2-x_1)x_3 \\ \lambda = 2x_1x_3 - x_2x_3 = (2x_1-x_2)x_3 \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} 2x_2=x_1 \\ 2x_1=x_2 \end{matrix}\right)$ contradiction!

7d

(d) (10 points) 위에서 찾은 모든 점(들)에 대해 NDCQ 를 검토하라

$\lambda > 0$은 없으므로, $H_x = (1 \ 1 \ 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ rank$(DH_x) = 1$. (= $m = 1$)

이경훈 NDCQ. pass

7e

(e) (10 points) 위에서 찾은 모든 점(들)에 대해 2계조건 (SOC)을 검토하라

$$BH = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\mu & x_3 & x_2 \\ 1 & x_3 & -2\mu & x_1 \\ 1 & x_2 & x_1 & -2\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\mu & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2\mu & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2\mu \end{vmatrix}$$

$x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ & $\mu > 0$

$n-m=2$,

$$LPM_4 = \underbrace{1\cdot(-1)^3}_{<0} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -2\mu & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2\mu \end{vmatrix}}_{>0} + \underbrace{1\cdot(-1)^4}_{>0} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2\mu & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2\mu \end{vmatrix}}_{<0} + \underbrace{1\cdot(-1)^5}_{<0} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2\mu & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -2\mu & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}}_{>0} < 0$$

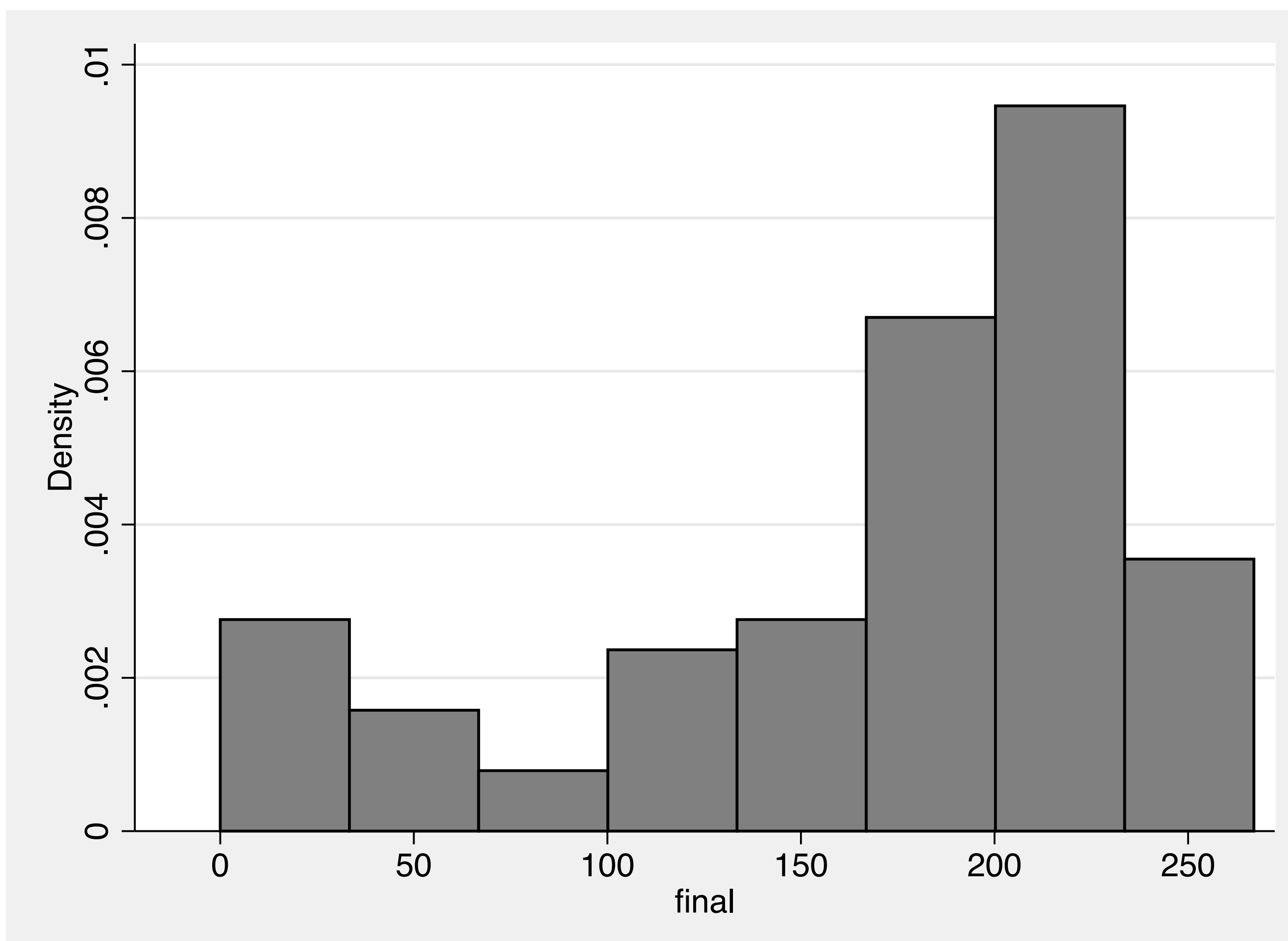
$$LPM_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2\mu & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2\mu \end{vmatrix} = \underbrace{1\cdot(-1)^3}_{<0} \underbrace{\left(-2\mu - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{<0} + \underbrace{1\cdot(-1)^4}_{>0} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\mu\right)}_{>0} > 0$$

Page 10

$\therefore$ ND! $\Rightarrow f(x^*) = \frac{1}{3}$ 이며 strict local max.

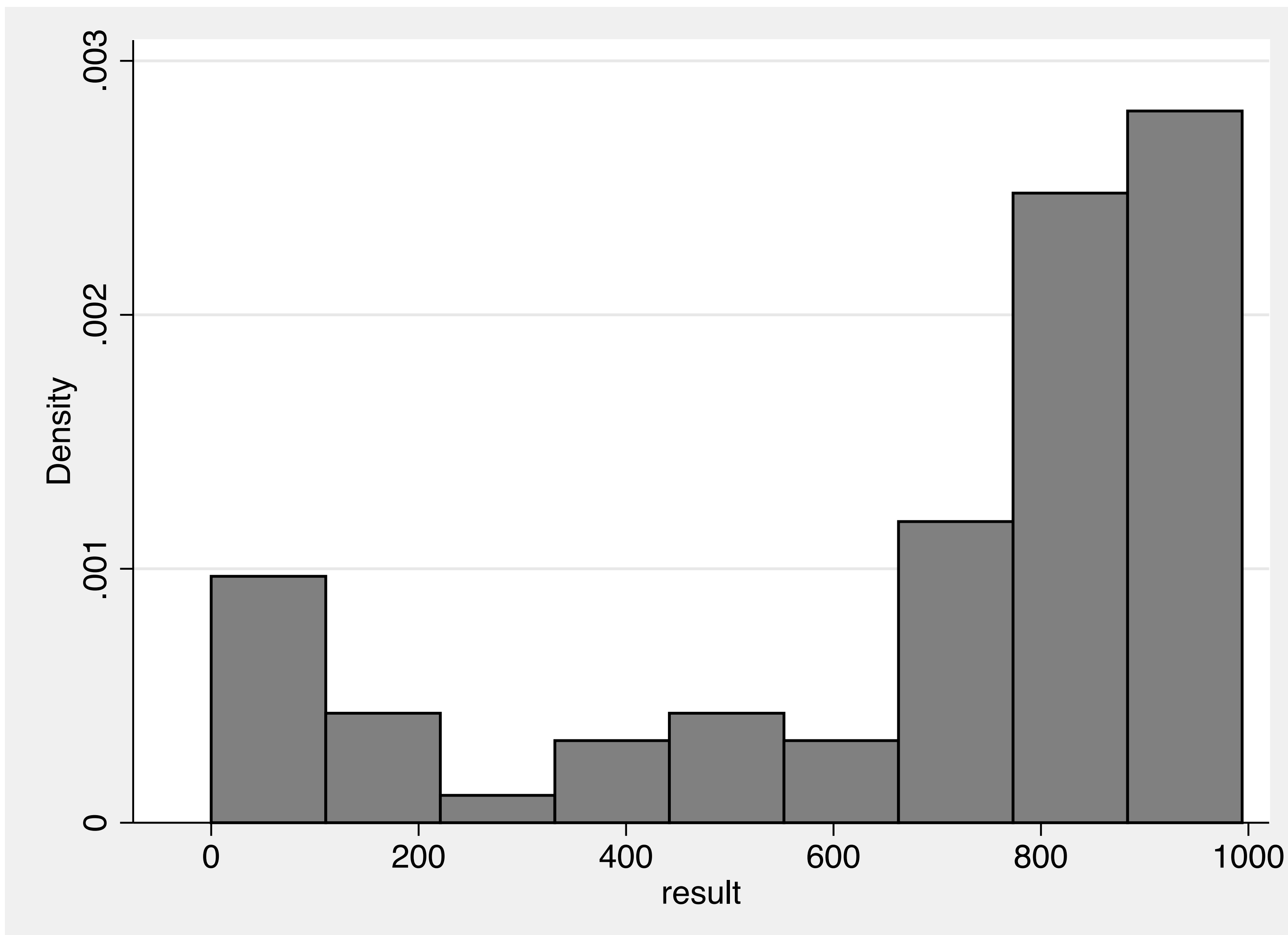
점수통계 (기말)

Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
final	**76**	**167.1579**	**71.58586**	**0**	**267**

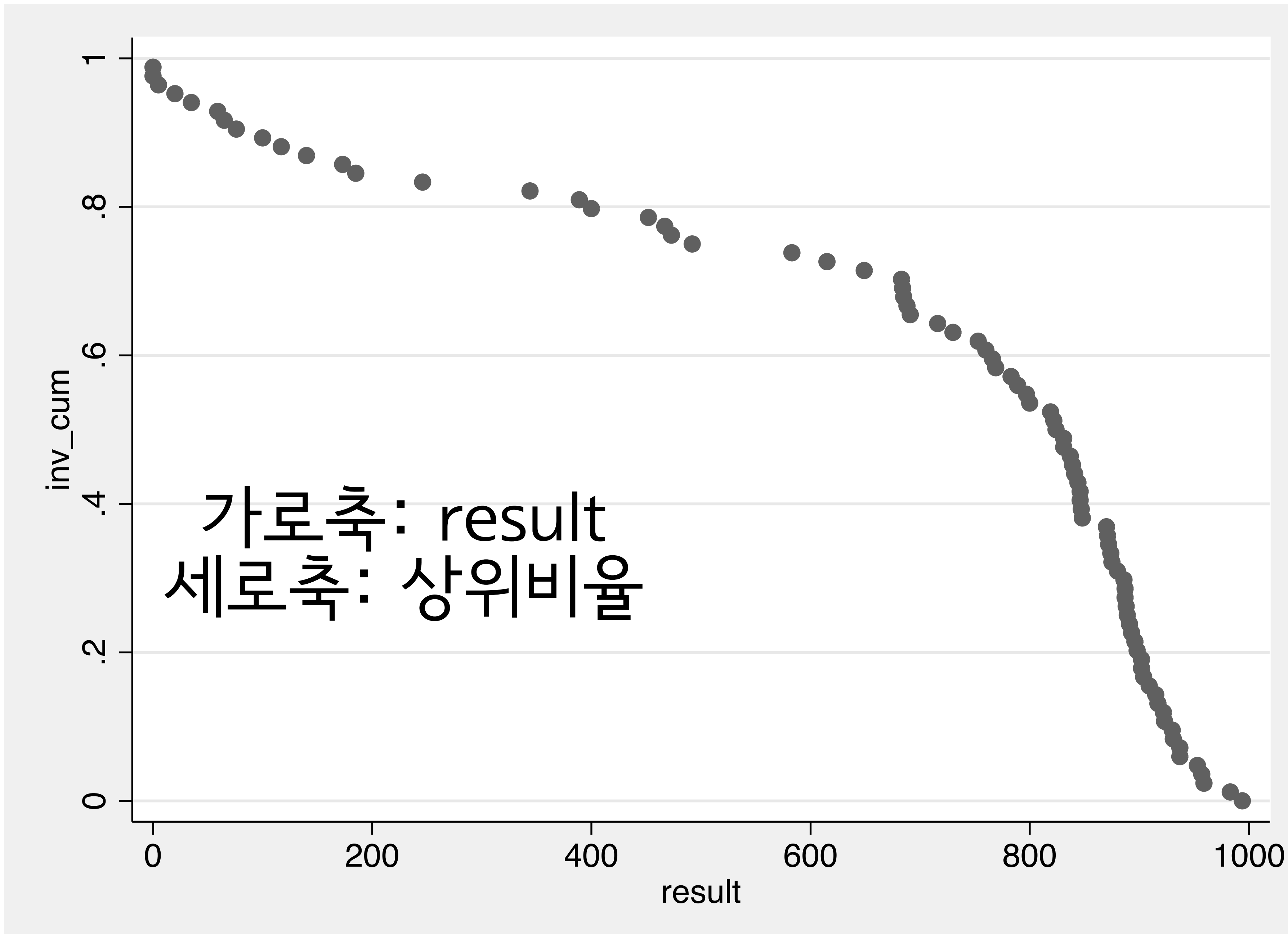


점수통계 (최종점수)

Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
result	**84**	**680.7857**	**302.5036**	**0**	**994**



최종점수 분포 2



자신의 점수에 해당하는 세로축이 클래스 내 상대적 비율임.
예: 800점 → 상위 약 55%

한학기 동안
수고하셨습니다!