

기말시험 해설

2014 겨울학기 경제수학
212.214-001 (담당: 조남운)

(a) (5 points) 다음 함수 f, g, h, i, j, k, l, m 중 동일한 함수가 존재한다면 어떤 함수들이 그러한지 기술하라. 변수나 상수의 범위에 대해서는 특별한 기술이나 명백한 제약이 없을 경우 a 를 제외하면 모두 실수로 간주하라. a 가 가질 수 있는 값의 범위는 다음과 같다: $a > 0$

$$f(a, b) = ax + b$$

$$g(x) = ax + b$$

$$h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x} + b$$

$$i(a, b, c) = ax + b$$

$$j(b, c) = bx + c$$

$$k(\ln x) = a \ln x + b$$

$$l^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$$

$$m(\ln a, b) = x \ln a + b$$

(a) 토성의 궤도 주기 80년

$$f(x) = ax + b$$

$$\text{gör } \left(\begin{array}{l} f(x) = ax + b \\ l(x) = ax + b \quad (l^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}) \\ k(\ln x) = a \ln x + b \end{array} \right)$$

1. *Phragmites* (Common Cattail) - A tall, reed-like plant with long, narrow leaves and a dense, spike-like flower head at the top.

독립번수 174, 정의역 실수 전체

독립연도 100주년 기념사업회

$h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x} + b$ 는 정의역이 다른 {0. 미포함}

71896

$$f(a,b) = ax^b$$

독립변수 $2 \geq n$, 정의역 $a > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$f(a, b, c) = ax + b$$

독립변수 3개 정의해 $a > 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$j(b,c) = bd + c$$

독립변수 2개 자유자 $b, c \in \mathbb{R}$

$$m(\ln a, b) = a \ln a + b$$

독립선수 274 김의연 Ma, b EIR

1a

- 아래 두 그룹의 함수가 동일함 (같은 범위에서 정의되고 대응관계가 동등)
 - j, m 은 서로 동등 (i 는 domain이 R^3 이므로 다른 함수)
 - g, k, l 는 서로 동등 (h 는 domain이 0 아닌 실수)
- 점수부여
 - 위 두 쌍을 제외한 다른 쌍이 지적된 경우 요소별 감점
 - 단, 최소한 하나라도 맞는 쌍을 지적하면 0점은 아님
 - 한 쌍도 맞지 않는 경우는 0점

(b) (5 points) $\mathbf{x}^* = (1, 2, 3, 4)$ 에서 함수 f 의 x_3 에 대한 탄력성 (elasticity)을 도출하라. (Hint: 1변수 함수의 탄력성 정의에서 미분식 대신 편미분을 사용하라. 이 계산이 불가능할 경우 감점을 감수하고 $f(x) = Ax^\alpha$ 일때 $x = 1$ 에서 f 의 x 에 대한 탄력성을 구할 것)

$$f(\mathbf{x}) = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}$$

이제는

$$f(x) = A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = A \cdot \cancel{x_3} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3-1} \cancel{x_4}^{\alpha_4}$$

$$e = \frac{x_3}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{3}{A \cdot 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3-1} 4^{\alpha_4}} \cdot A \alpha_3 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3-1} 4^{\alpha_4}$$

$$= \alpha_3$$

Plan B (1변수 버전): 4점만점

$$f(x) = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}$$

정수로

$$f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = A \cdot \alpha x^{\alpha-1} \cdot \frac{x}{Ax^\alpha} \rightarrow \text{여기서 } x=1 \text{ 대입}$$

= α

(c) (10 points) 어떤 국가의 거시경제 체계가 아래 IS-LM 모형과 같은 특성을 띠고 있다고 한다. 현 상태에서 세율 t 만 약간 인상되었을 때 Y 에 미치는 영향을 기술하라. 아래 모형에서 괄호는 함수의 input, 또는 열린 구간(open interval)을 의미한다. r 은 이자율이다.

$$Y = C + I + G \quad (\text{GDP})$$

$$C'(Y - T) \in (0, 1) \quad (\text{Consumption Spending})$$

$$I'(r) < 0 \quad (\text{Investment Spending})$$

$$T'(t) \in (0, 1) \quad (\text{Tax})$$

$$G'(t) \in (0, 1) \quad (\text{Government Spending})$$

$$C'T' < G'$$

$$M_s = M_d(Y, r) \quad (\text{Money Supply \& Demand})$$

$$\frac{\partial M_d}{\partial Y} > 0$$

$$\frac{\partial M_d}{\partial r} < 0$$

Sol)

$$Y = C(Y-T) + I(r) + G(t)$$

$$dY = \frac{\partial C(Y-T)}{\partial Y} \cdot dY + \frac{\partial C(Y-T)}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial I(r)}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial G(t)}{\partial t} \cdot dt$$

$$= \frac{\partial C(Y-T)}{\partial (Y-T)} \cdot \frac{\partial (Y-T)}{\partial Y} \cdot dY + \frac{\partial C(Y-T)}{\partial (Y-T)} \cdot \frac{\partial (Y-T)}{\partial T} \cdot \frac{\partial T(t)}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial J(r)}{\partial r} dr + \frac{\partial G(t)}{\partial t} \cdot dt$$

$$= C' \cdot l \cdot dY + C' \cdot (-1) \cdot T' dt + I' dr + G' dt$$

$$dM_S = \frac{\partial M_S}{\partial Y} dY + \frac{\partial M_S}{\partial r} dr$$

박지영

$$(1 - C'(Y-T))dY - I'(r) \cdot dr = -C'(Y-T) \cdot T' dt + G'(t) dt$$

$$\frac{\partial M_p}{\partial Y} dY + \frac{\partial M_p}{\partial r} dr = dM_s$$

$$\left(\begin{array}{c} dY \\ dr \end{array} \right)' = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \frac{\partial M_d}{\partial r} & I'(r) \\ -\frac{\partial M_d}{\partial Y} & I - C'(Y-T) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G(t)dt - C'(Y-T) \cdot T'dt \\ dM_s \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{\partial M_d}{\partial r} (1 - C'(r-T)) + I'(r) \cdot \frac{\partial M_d}{\partial r} < 0$$

$$dY = \frac{1}{D} \cdot \left[\frac{\partial M_D}{\partial r} \cdot (G'(R)dt - C'(Y-T)T'dt) + \frac{I(r) dMs}{D} \right]$$

Page 3 $\int G(t) dt > C(Y-T) T' dt \rightarrow Y 증가$

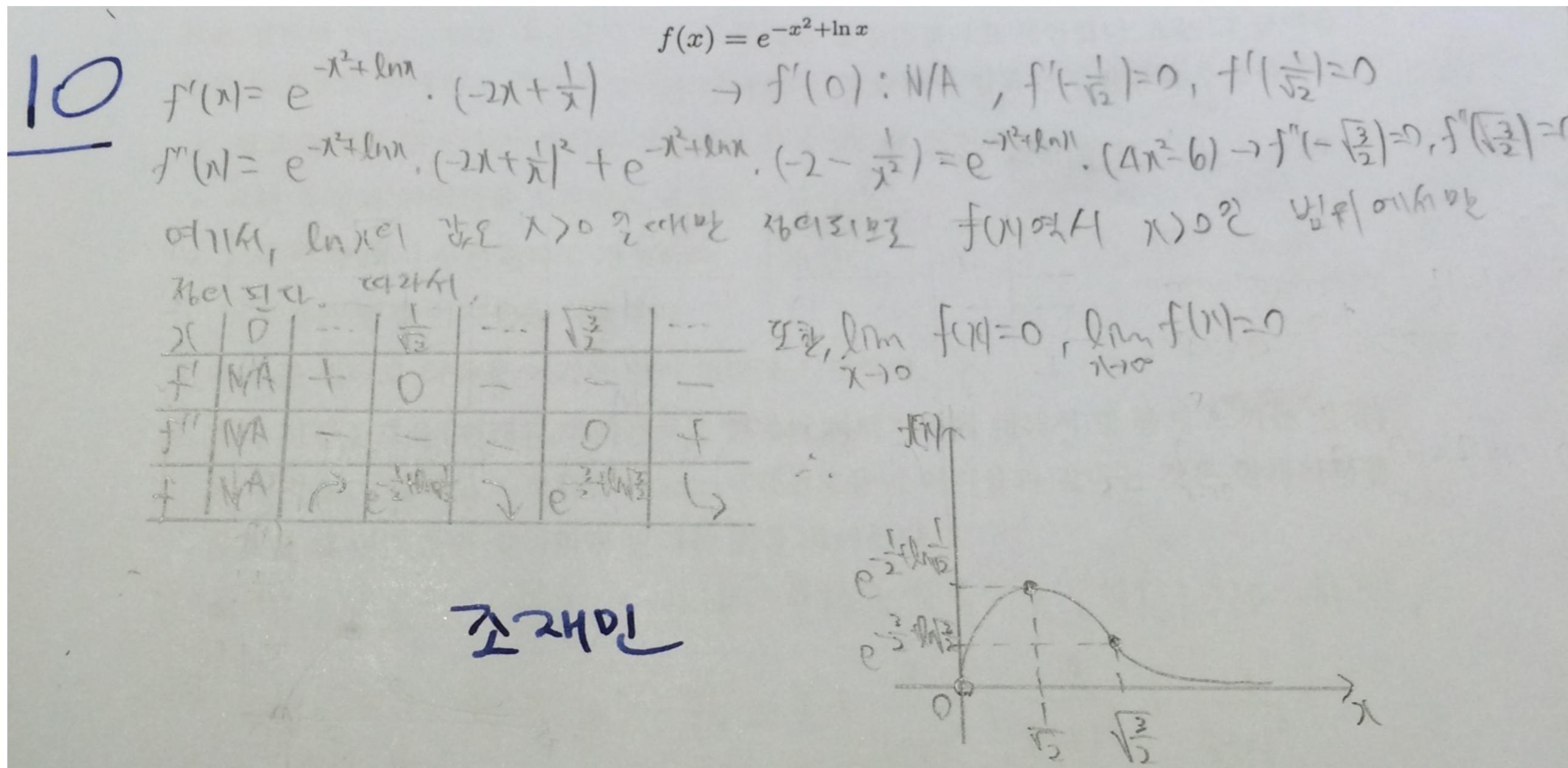
$$\int_{\Gamma} \cdot G'(\theta) dt < c'(x-T)T^{\alpha} dt \rightarrow x \text{ 감자}$$

1c

- 화폐식 고려하지 않음: -3
- 화폐식 선형화식 오류: -2 - -4
- 연립으로 풀지 않고 $dr=0$ 으로 간주: -5 - -7

(d) (10 points) 다음 함수의 그래프 스케치하되, 오목성 및 볼록성 (convexity, concavity) 까지 명시적으로 표현하라.

$$f(x) = e^{-x^2 + \ln x}$$



1d

- 축변수 누락: -1
- 단술산수오류: -1
- 주요계산오류: 정도에 따라 -2 - -5

(e) (10 points) 위 문제 d의 함수의 global maximum, local maximum, global minimum, local minimum을 아래에 주어진 domain에 대해서 판단하고, 답이 존재한다면 내부해 (inner solution) 인지, 경계해 (boundary solution) 인지도 함께 기술하라. (Hint: 필요하다면 $\ln 2 \approx 0.6931$ 을 사용하라. 최종 결과를 계산할 필요는 없고 식으로 정확하게 표현하면 됨)

- i) $x \in (1/2, 1)$
- ii) $x \in [1/2, 1]$
- iii) $x \in (0, \infty)$

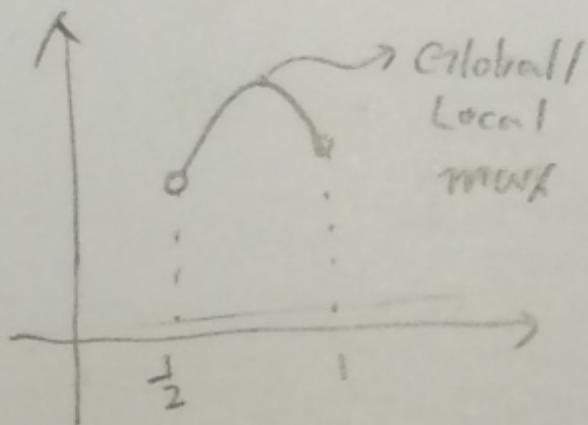
i) $x \in (1/2, 1)$

ii) $x \in [1/2, 1]$

iii) $x \in (0, \infty)$

7/10

i) $x \in (\frac{1}{2}, 1)$

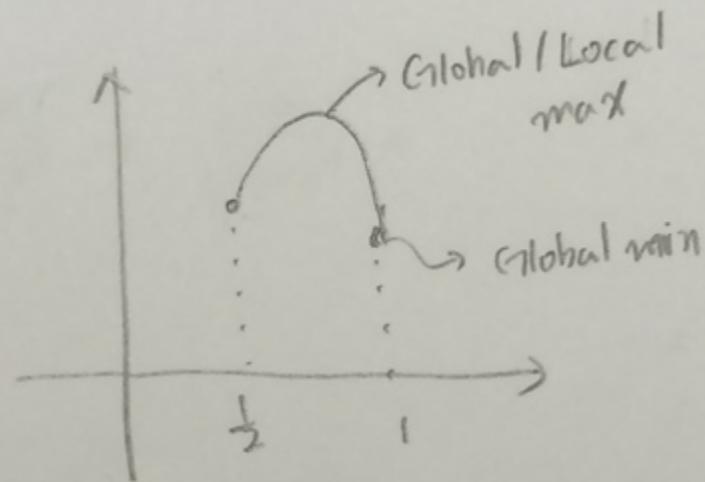


• Global/Local Max = $f(\frac{1}{\sqrt{2}})$
= $e^{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2)}$

• \Rightarrow 内부의 (inner)

• Global/Local Min은 존재 X

ii) $x \in [\frac{1}{2}, 1]$

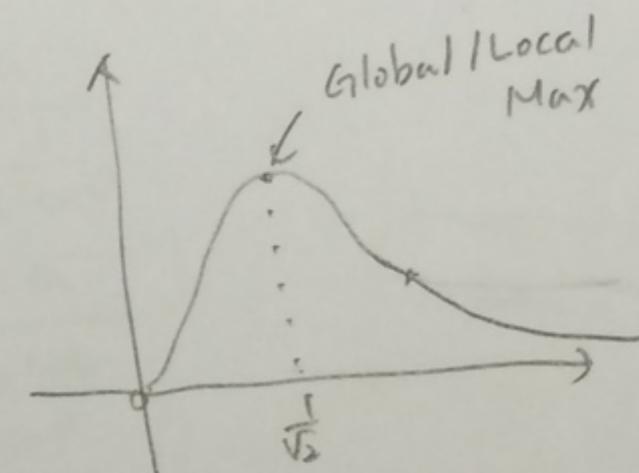


• Global/Local Max = $f(\frac{1}{\sqrt{2}})$
= $e^{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2)}$

• \Rightarrow 内부의 (inner)

• Global Min = $f(1)$
= e^{-1}
 \Rightarrow 외부의 (boundary)

iii) $x \in (0, \infty)$



• Global/Local Max = $f(\frac{1}{\sqrt{2}})$
= $e^{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2)}$

• \Rightarrow 외부의 (inner)

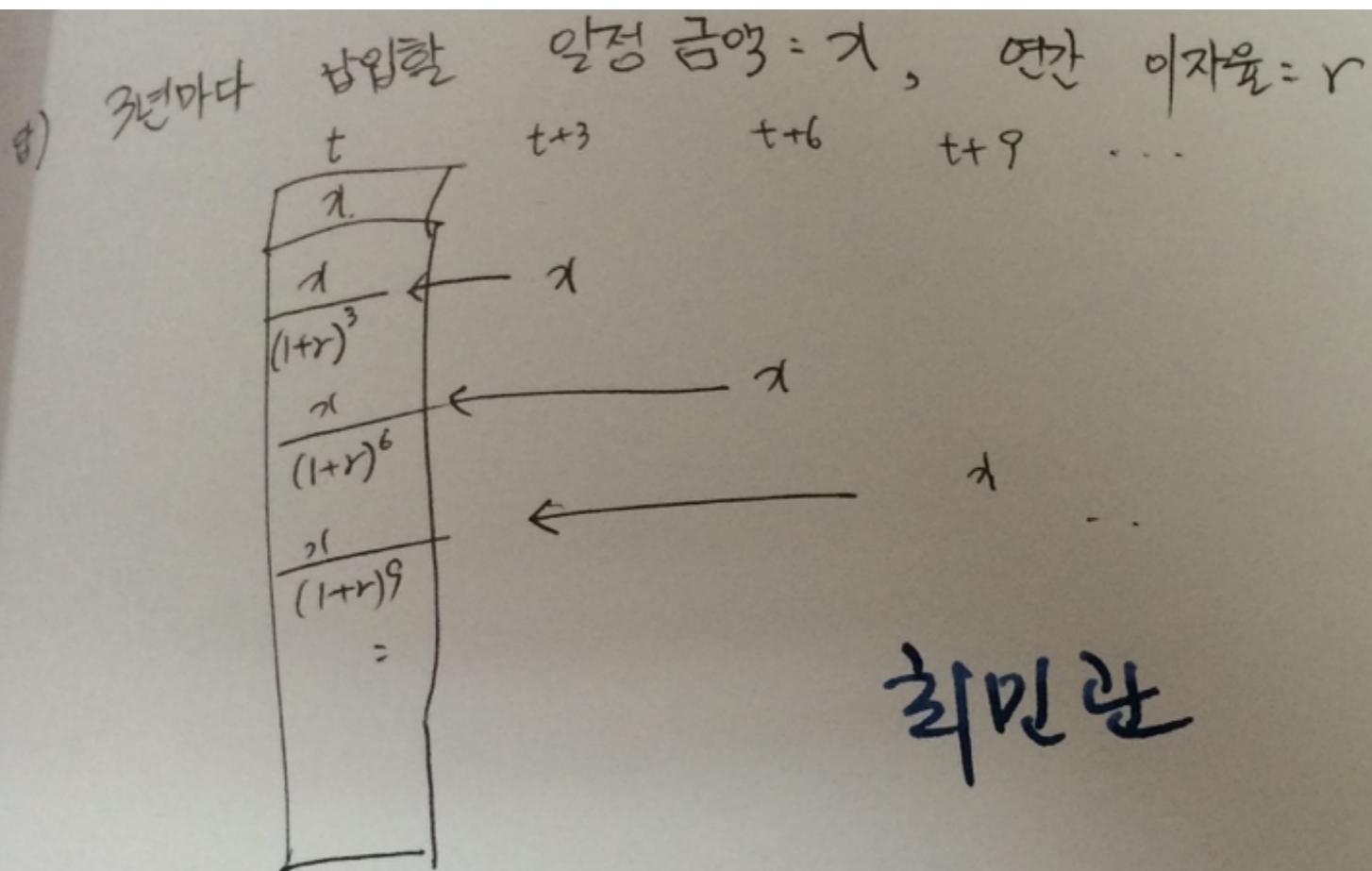
• Global/Local Min은 존재 X

1e

- 전 문제의 정답 여부와 무관하게, 전 문제에서 도 출한 그래프에 의하여 정답여부 판단
- global max/min 이 존재하더라도 local max/min 은 아닐 수 있으므로 명시해야 함. (-2)
 - 단, 간혹 경계해의 경우 local max/min으로 간주하는 경우가 있으므로 local로 간주함에 대해 명시할 경우는 답안으로 인정
- “존재하지 않는다”와 “알 수 없다”는 다른 의미임.

(f) (10 points) A는 수명이 무한한 어떤 사람 B에게 수명이 무한한 자동차 한 대를 판매하려고 한다. 이 자동차를 일시부로 판매할 경우 A가 생각하는 적정 가격은 1억원이다. 그런데 이 B는 영원히 리스 상태로 매 3년마다 일정 금액을 납입하겠다고 제안했다. A는 그 금액을 들자 일시부로 판매하는 것보다 낫다고 생각했다. 그 금액의 범위는 얼마인지 추정하라

- 필요한 변수나 상수가 있다면 정의내린 뒤 수식으로 표현하라.
- A는 금전적 이익만을 고려하는 경제적 인간이다.
- A의 수명 역시 무한하다고 가정하라.
- 이자율은 연간 이자율을 사용하라.
- A,B은 절대로 약속을 어기는 일이 없다고 가정하라.
- A의 시간선호율(미래의 화폐가치를 현재의 화폐가치에 대해서 덜 좋게 느끼는 성향)은 이자율과 같다고 가정하라 (Hint: 시간선호율이 이자율과 같다는 것은 현재가치를 산출할 때 이자율만 고려하면 된다는 것을 의미한다.)



$$x + \frac{x}{(1+r)^3} + \frac{x}{(1+r)^6} + \frac{x}{(1+r)^9} + \dots > 10^8$$

$$\therefore \frac{x}{1 - \frac{1}{(1+r)^3}} > 10^8$$

1f

- 매기초에 납입하는 것으로 가정할 경우는 다음과 같음 (매기말 버전으로 할경우 $1\text{억}^*[(1+r)^{3-1}]$)
- 불연속으로 풀면
 - 납입액 $\geq 1\text{억}^*(1-(1+r)^{-3})$
 - 연속버전으로 풀면 RHS를 아래와 같이 수정
 $1\text{억} \times (1 - e^{-3r})$

2. 어떤 변수들을 관찰한 결과 $t + 1$ 기와 t 기에서의 값이 다음과 같은 규칙을 띠고 있었다고 한다. 이어지는 물음에 답하라. (주의: 올바르게 문제를 풀기 위해서는 사용하는 모든 eigenvector의 길이가 1이어야 한다.)

$$x_{1,t+1} = 2x_{1,t} - x_{2,t} - x_{3,t}$$

$$x_{2,t+1} = -x_{1,t} + 2x_{2,t} - x_{3,t}$$

$$x_{3,t+1} = -x_{1,t} - x_{2,t} + 2x_{3,t}$$

- (a) (5 points) 위 규칙을 matrix form으로 표현하라
- (b) (5 points) 위 matrix의 eigenvalue를 모두 구하라
- (c) (5 points) 위 matrix의 eigenvector를 모두 구하되, 각 vector의 길이가 반드시 1이 되도록 하라.

$$(a) \quad \mathbf{x}_{t+1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}_t$$

$$(b) \quad \begin{vmatrix} 2-r & -1 & -1 \\ -1 & 2-r & -1 \\ -1 & -1 & 2-r \end{vmatrix} = (2-r) \cdot (-1)^2 \left[(2-r)^2 - 1^2 \right] + (+1) \cdot (-1)^3 \cdot 1 + (2-r) + 1 + (-1) \cdot (-1)^4 \cdot 1 + (2-r)^3$$

$$= (2-r) \left[r^2 - 4r + 3 \right] - (3-r) - (3-r)$$

$$= 2r^2 - 8r + 6 - r^3 + 4r^2 - 3r - 6 + 2r$$

$$= -r^3 + 6r^2 - 9r$$

$$= -r(r^2 - 6r + 9)$$

$$= -r(r-3)^2$$

3중근

$$r = 0 \text{ or } 3$$

$$(c) \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad \mathbf{v}_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = 0 \quad \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0)$$

$$\quad \quad \quad \text{or } (0, 1, -1)$$

$$\quad \quad \quad \text{or } (1, 0, -1)$$

\mathbf{v}_2 노선이가 1이 되도록 해야 함. 즉, 각 벡터들에 $(1/\sqrt{2})$ 가 곱해져야 함.

(2017sp 박정현)

2a,b,c

- eigenvector normalize 안하면 → -1
- eigenvector를 최소한 하나 제시하지 않으면 → -3
- 원래 의도와 달리 2a-c에도 대안 matrix를 적용한 경우는 감점하지 않음

(d) (5 points) (택일)

- matrix를 대각화(diagonalize) 하라. (이 문제를 풀 경우 Bonus 5+5)
- 혹은 아래 matrix 를 대각화하라 (5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(e) (10 points) 위에서 대각화한 matrix에 대하여 $x_0 = (5, 8, 7)$ 일 때, x_n 을 구하라. (앞 문제에서 보너스 문제를 택하여 풀 경우 10+5, 아닐 경우 10)

$$(c) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x-y-z=0, \quad 2y-z=2 \Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ -x+2y-z=0 \\ -x-y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ -\left(\frac{y+z}{2}\right)+2y-z=0 \Rightarrow y=z=x \\ x=y=z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \Rightarrow -x+y+z=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} t_1 & -1 \\ t_2 & \frac{t_1^2+t_2^2+(t_1+t_2)^2}{2} \\ -t_1-t_2 & \end{pmatrix} \text{ (단, } t_1^2+t_2^2+(t_1+t_2)^2=1) \\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$$(d) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ 라 하면 } P^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Page 6

답당:

38 2. (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

X_n を 2 次元 $\tilde{X}_n = (5, 8, 1)$

(e) $X_{t+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} X_t$ とおき $X_t = (x_t, y_t, z_t)$

$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} - 2x_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t - 2x_t \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} - 2x_{t+1} + \frac{8}{3}y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t - 2x_t + \frac{8}{3}y_t \end{pmatrix} \xrightarrow{z_{t+1} - 2x_{t+1} + \frac{8}{3}y_{t+1} = 0} \begin{pmatrix} x_{t+1} - \frac{2}{3}y_{t+1} \\ y_{t+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Let $\tilde{X}_t = \begin{pmatrix} x_t - \frac{2}{3}y_t \\ y_t \\ z_t - 2x_t + \frac{8}{3}y_t \end{pmatrix}$ then $\tilde{X}_{t+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tilde{X}_t$.

$\tilde{X}_0 = \begin{pmatrix} 5 - \frac{16}{3} \\ 8 \\ 7 - 10 + \frac{64}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 8 \\ \frac{55}{3} \end{pmatrix}$

$x_n - \frac{2}{3}y_n = -\frac{1}{3} \rightarrow x_n = \frac{2}{3}y_n - \frac{1}{3} = \frac{16}{3} \cdot 3^n - \frac{1}{3}$

$y_n = 8 \cdot 3^n$

$z_t - 2x_t + \frac{8}{3}y_t = \frac{55}{3} \cdot 2^n$

$z_t = 2x_t - \frac{8}{3}y_t + \frac{55}{3} \cdot 2^n$

$= \frac{32}{3} \cdot 3^n - \frac{2}{3} - \frac{64}{3} \cdot 3^n + \frac{55}{3} \cdot 2^n = \frac{55}{3} \cdot 2^n - \frac{32}{3} \cdot 3^n - \frac{2}{3}$

$X_n = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \cdot 3^n - \frac{1}{3} \\ 8 \cdot 3^n \\ \frac{55}{3} \cdot 2^n - \frac{32}{3} \cdot 3^n - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{ANSWER}}$

$$(e) \quad (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^n P = \begin{pmatrix} 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3^n}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^n}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{3^n}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \quad (e)' \quad \text{이거랑 같아요}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{n-1} & -3^{n-1} & -3^{n-1} \\ -3^{n-1} & 2 \cdot 3^{n-1} & -3^{n-1} \\ -3^{n-1} & -3^{n-1} & 2 \cdot 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \tilde{x}_n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ -2 \cdot 2^{n-1} & 2 \cdot 2 \cdot 3^{n-1} & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= 3^{n-1} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n = \begin{pmatrix} 5 + 8(3^{n-1}) \\ 8 \cdot 3^n \\ 5 \cdot (-2 + 2^{n-1}) + 8(2 \cdot 2 \cdot 3^{n-1}) + 1 \cdot 2^n \end{pmatrix}$$

보너스,
대안문
제풀어져
있음.

3. 어떤 소비자의 효용체계를 도출한 결과 소비상품묶음 (commodity bundle) \mathbf{x} 에 대한 효용 U 가 아래와 같았다고 한다.

$$U(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/4}$$

이 사람의 소득은 100, 각 상품의 가격은 $\mathbf{p} = (3, 2, 1, 4)$ 이라고 한다. 이 소비자가 주어진 소득 수준에서 최대한의 효용을 얻고자 한다. 실수량의 소비가 가능하다는 전제하에 이어지는 물음에 답하라. (Hint: 필요하다면 $(1000/3)^{-7/4} \approx 4 \times 10^{-5}$, $(1000/3)^{-3/4} \approx 4/300$ 를 사용하라.)

- (a) (5 points) 이 소비자의 효용 극대화 문제를 수리적으로 규정하고, 이 문제를 풀기 위한 라그랑지안을 구하라. (주의: $x_i \geq 0$)
- (b) (5 points) 위 문제의 1계조건 (FOC)을 써보고, 이 조건을 만족하는 모든 점을 구하라.
(Hint: 경우의 수 중 경계조건 ($x_i = 0$)은 검토하지 않고 해당 조건들에 대해서는 내부해를 가진다고 상정하면 경우의 수가 대폭 감소한다. 이 조건을 검토하지 않는 경우는 감점하지 않음)
- (c) (5 points) 위에서 구한 점(들)에 대한 유테 혜시안(Bordered Hessian)을 구하라.
- (d) (5 points) 이 소비자가 최대한의 만족을 얻을 수 있는 상품량을 도출할 수 있는가? 있다면 얼마인가?

(a) 효용 극대화.

$$\text{maximize } U(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/4} \quad \text{s.t}$$

$$x_i \geq 0 \text{ and } P \cdot x \leq I \rightarrow 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 100$$

$$L = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/4} + \lambda(100 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4)$$

한국어
+ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4

(b) $x_i = 0$ 일 때는 경로 $x \rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = 0$

$$L = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/4} + \lambda(100 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4)$$

<< F.O.C 는 다음 페이지에 쓰겠다. >>

(c)

| | λ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|
| | 0 | -3 | -2 | -1 | -4 |
| x_1 | -2 | | | | |
| x_2 | -2 | | | | |
| x_3 | -1 | | | | |
| x_4 | -4 | | | | |

(단수)

$n-m=3$

하나씩
(D) 추가, x_1, x_2, x_3, x_4 를 살 때
느끼는 효용은 같다. x_3 의 가격이
가장 싸니 x_3 을 100개 살 때
 U 는 10으로 max 일 것이다.

(d) 있으나, $x_i = 0$ 인 지점에서 나타날 것이라 생각한다. 왜냐하면
이 문제는 4차원 구역 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.
 $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 100$ 이 영역에서 같은 대각선 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$ 의 binding 하는 critical point는 최선값일 것이다.

$$L = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{\frac{1}{4}} + \lambda (100 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4)$$

① $D_{\bar{x}} L = 0$

$$\frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x_1 - 3\lambda = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x_2 - 2\lambda = 0 \quad \text{--- ②}$$

$$\frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x_3 - \lambda = 0 \quad \text{--- ③}$$

$$\frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x_4 - 4\lambda = 0 \quad \text{--- ④}$$

② $\lambda (100 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4) = 0 \quad \text{--- ⑤}$

③ $\lambda \geq 0$

4 ①, ②, ③, ④에서 $\frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{-\frac{3}{4}}$ 을 A 라 하면, ($x_i \neq 0$ 이라 했으면 $A \neq 0$)

$$x_1 = \frac{3\lambda}{A} \quad x_2 = \frac{2\lambda}{A} \quad x_3 = \frac{\lambda}{A} \quad x_4 = \frac{4\lambda}{A}$$

이것을 식 ⑤에 대입하면

$$\lambda \left(100 - \frac{30}{A} \lambda \right) = 0 \quad \text{이 된다.}$$

Case 1 : $\lambda = 0$

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \rightarrow ①, ②, ③, ④ \text{ 식이 성립하지 않음}$$

Case 2 : $\lambda \neq 0$

$$100 - \frac{30}{A} \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{10}{3} \cdot A \rightarrow x_1 = 10 \quad x_2 = \frac{20}{3} \quad x_3 = \frac{10}{3} \quad x_4 = \frac{40}{3}$$

$$\therefore (x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) = (10, \frac{20}{3}, \frac{10}{3}, \frac{40}{3},$$

$$\lambda = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{-\frac{3}{4}} = 0 \text{이 아닌 어떤 수}$$

(계산) 없이 구할 수 없음
 \therefore 단唯一的 경우 $(10, \frac{20}{3}, \frac{10}{3}, \frac{40}{3})$ 이고

NDCQ check. $\rightarrow 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 100$ binding 1개

$$\text{rank}(D_{\bar{x}} H(\bar{x}^*)) = (3, 2, 1, 4) = 1 = \cancel{\text{---}} \cdot \text{다른}$$

3. $\hat{U} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/4}$ 를 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ 의 min, max 점을 같다.
 (a) maximize $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ s.t. $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 100$
 $x_i \geq 0$
 $L = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \lambda(100 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4) + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4$

(b) F.O.C., $x_i \neq 0$ 이면 $\lambda_i = 0$
 $D_L L = (2x_1 - 3\lambda, 2x_2 - 2\lambda, 2x_3 - \lambda, 2x_4 - 4\lambda) = 0$
 $\lambda(100 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4) = 0$
 $\lambda \geq 0$

i) $\lambda = 0 \rightarrow x_i = 0$ 이면 (x) 242

ii) $\lambda > 0$
 $x_1 = \frac{3}{2}\lambda, x_2 = \lambda, x_3 = \frac{\lambda}{2}, x_4 = 2\lambda$ 이면 $100 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 0$
 $100 - \frac{9}{2}\lambda - 2\lambda - \frac{\lambda}{2} - 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{20}{3}$
 $x_1 = 10, x_2 = \frac{20}{3}, x_3 = \frac{10}{3}, x_4 = \frac{40}{3}$ NDCQ : $\text{rank}(-3 -2 -1 -4) = 1(\text{ok})$

(c) Bordered Hessian & binding
 $\begin{array}{c|ccccc} x & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 0 & -3 & -2 & -1 & -4 \\ x_1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ x_3 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ x_4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$ $n=4, m=1$

(d) $n=4, m=1$ 이면 $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 이 ND여야 $(10, \frac{20}{3}, \frac{10}{3}, \frac{40}{3})$ 가 max
 ND이려면 $\det(BH) = (-1)^n$ 과 같은 징후
 3개의 LPM 부른 alter.
 $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-8+18) < 0$

이여서 ND가 아니다
 \therefore 증명하지 않음.

$\begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$
 $= -2 + 2 \times (-(-8+18)) < 0$ (뒷면계속)

3

- 예산제약을 등제약으로 해석: -1
- $x_i \geq 0$ 제약 제외: -1
- NDCQ 부정확하거나 미언급: -1
- 과정설명X: -2 - -3