

경제수학 기말해설 +기초통계

212.214-001
조남운 (2016 여름학기)

참고사항

2(a) 매년 1,000만원 \rightarrow 매 2년마다 1,000만원
| (b) domain은 실수 범위에서 가능하 \rightarrow 넓기
 잡을 것.

X. 문제지 총 Page 수: 9 4. C'
? : 현재 시점 = 오늘 (2016. 8. 1) $= \frac{dC}{d(Y-T)}$

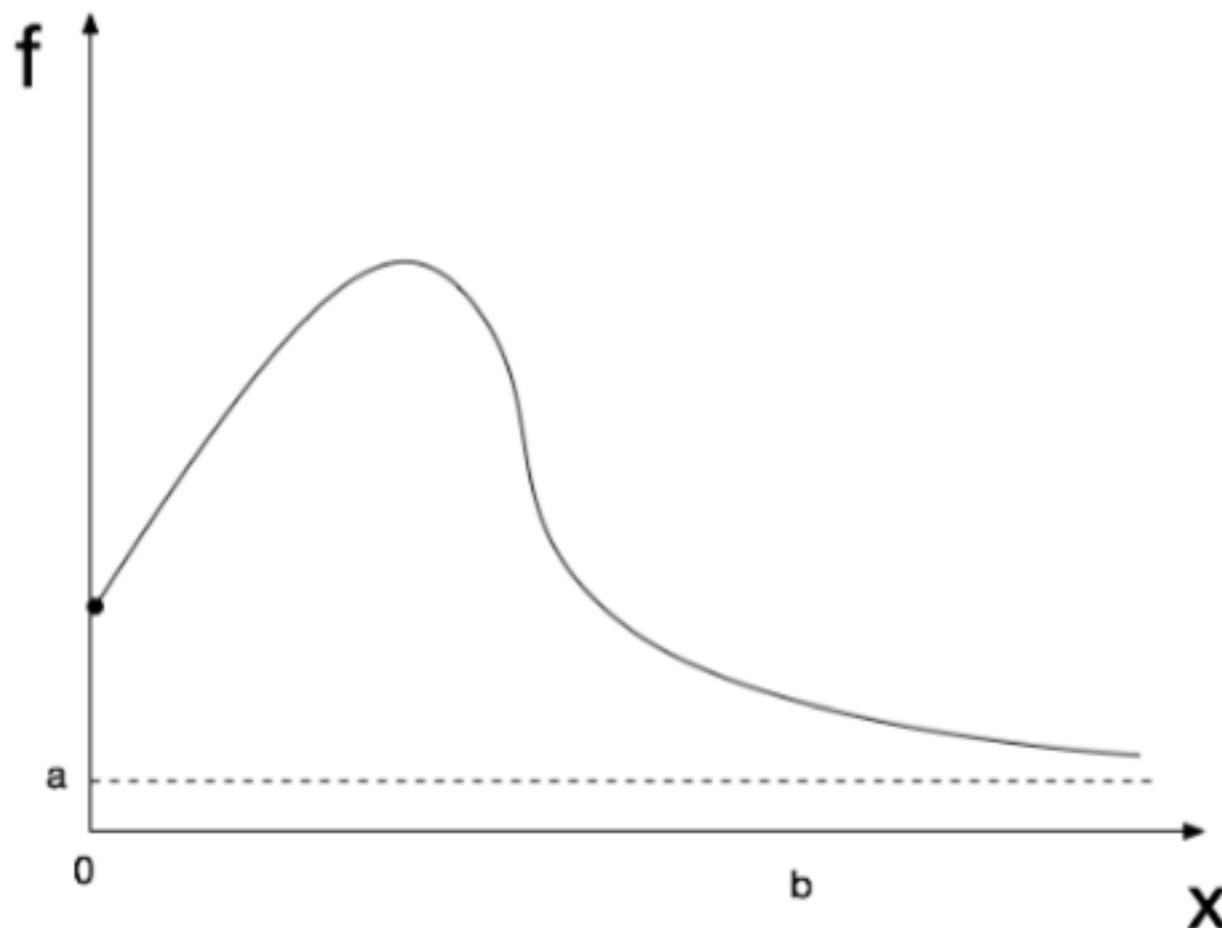
첫 지급일 : 2017. 8. 1

이자율 : 연리 (연간 이자율임)

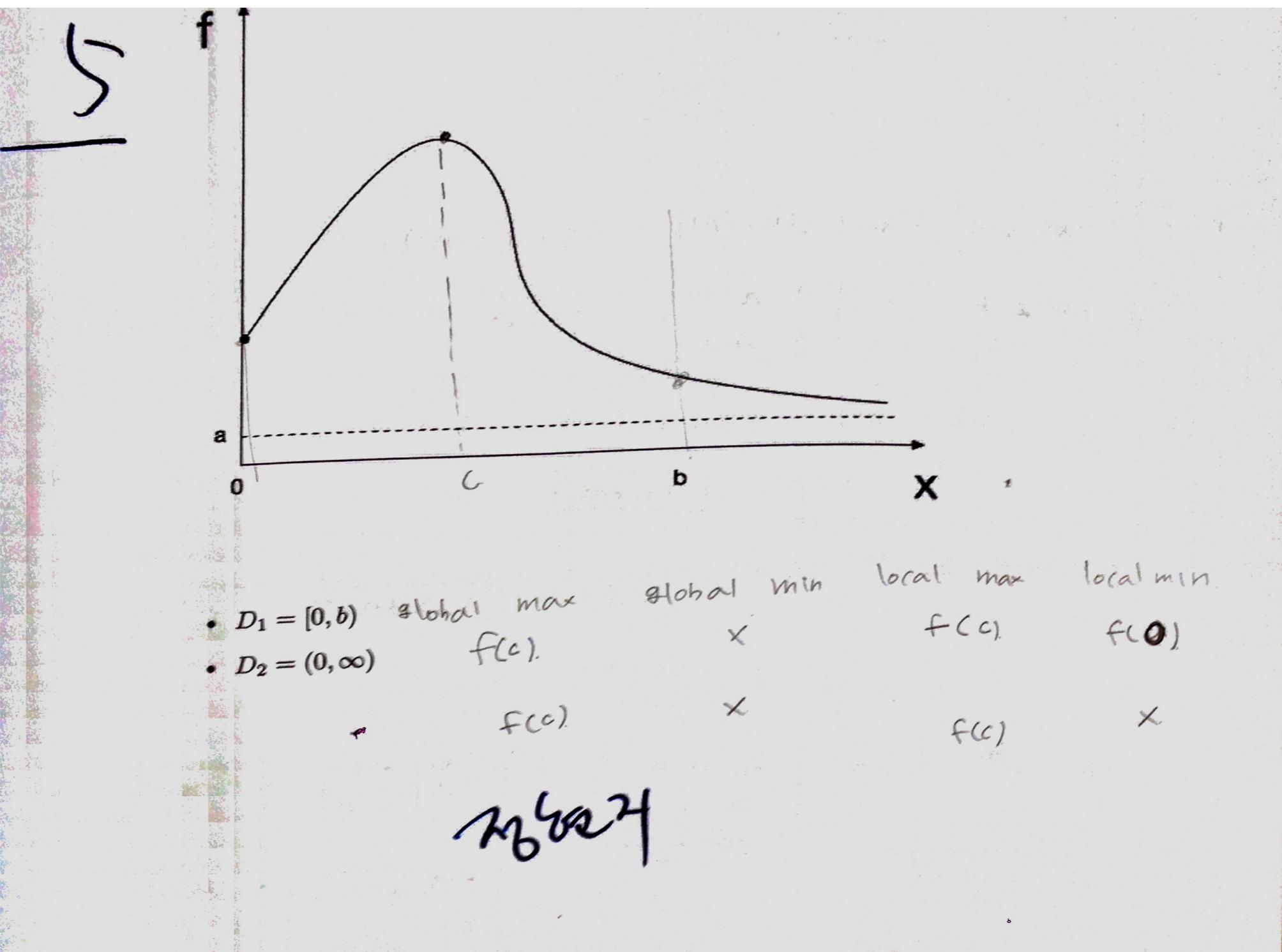
6. $X \geq 0$, $P \geq 0$ (given)

$$6b. \quad u(x) = \sum_i a_i (\ln(x_i))$$

(a) (5 points) 다음 함수와 주어진 정의역 (domain) D_1, D_2 에 대해서 global maximum, global minimum, local maximum, local minimum이 존재하는지 판단하고 존재한다면 모두 기술하라. (boundary max/min 은 모두 local max/min 으로 간주하라. 수평선(horizontal line) a 는 f 의 점근선(asymptote) 이다.)



- $D_1 = [0, b)$
- $D_2 = (0, \infty)$



(b) (5 points) 다음 함수들 중 동일한 함수들을 무리지울 것.

$$f(x) = ax + b, \quad g(1/x) = a(1/x) + b, \quad h(\ln x) = a \ln x + b$$

$$i(a) = ax + b, \quad j(1/a) = (1/a)x + b, \quad k(\ln a) = a \ln a + b$$

$$l(a) = a \cdot a + b, \quad m(b) = ax + b, \quad n(\ln b) = ax + \ln b$$

1b

- input이 헷갈린다면 제 3의 symbol (가령 t)를 input으로 통일하고 domain을 명시하여 검토하면 됨.

(b) (5 points) 다음 함수들 중 동일한 함수들을 무리지을 것.

0/246+

답: $f(x)$ 와 $h(x)$ / $m(b)$ 및 $n(\ln b)$

5

~~$f(x) = ax + b, \quad g(1/x) = a(1/x) + b, \quad h(\ln x) = a \ln x + b$~~

~~$i(a) = ax + b, \quad j(1/a) = (1/a)x + b, \quad k(\ln a) = a \ln a + b$~~

~~$l(a) = a \cdot a + b, \quad m(b) = ax + b, \quad n(\ln b) = ax + \ln b$~~

$m(b), n(\ln b)$ /. $f(x), h(x)$ 는 한수며 Domain이 같고, 차수(\mathbb{R}^1)이 같으므로 같은 항수.

$g(x)$ 는 $1/x$ 의 값이 0이 될 수 없기 때문에 f, h 와 다른 항수다.

Page 2

$i(a)$ 와 $j(a)$ 역시 f, g 와 같은 이유로 같은 항수가 아니다.

$k(\ln a)$ 와 $l(a)$ 는 0의 부위가 0보다 커야하기 때문에 다른 항수다.

(c) (5 points) 다음 두 행렬 A_2, A_3 의 정부호성 (definiteness)이 음정부호 (negative definite, ND)가 되기 위한 조건을 기술하라.

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ a & -1 & a \\ a & a & -1 \end{pmatrix}$$

1c

- 인수분해 실패 -1
- 부등식에 등호조건 포함 -2
- $|pm$ 은 교집합으로 합쳐져야 함

(d) (5 points) 위 결과를 통해 위와 같은 형태의 $n \times n$ 행렬이 ND가 되게 하기 위한 a 의 범위를 유추하고, $n = 4$ 일때 유추한 조건에 부합하는 적당한 0이 아닌 수를 a 에 대입하여 ND가 성립하는지 확인하라.

1d

- 지수적으로 유추 -1
- 유추의 근거가 불분명 -2
- 대입과정 검토 오류 -1 - -2
- 단, 일반적 조건을 증명한 경우는 굳이 대입할 필요
없음

(e) (5 points) 다음 두 행렬 A_2, A_3 의 정부호성 (definiteness)이 음정부호 (negative definite, ND)가 되기 위한 조건을 기술하라.

5

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ a & -1 & a \\ a & a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{LPM}_2(A_2) = 1-a^2 > 0 \quad | > a^2$$

$$\text{LPM}_1(A_2) = -1 < 0$$

$$\therefore -1 < a < 1$$

$$\begin{aligned} \text{LPM}_3(A_3) &= (-1) \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad + a(-1)^3 \begin{vmatrix} a & a \\ a & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad + a(-1)^4 \begin{vmatrix} a & a \\ -1 & a \end{vmatrix} \\ &= (-1)(1-a^2) - a(-a-a^2) + a(a^2+a) \\ &= -1 + a^2 + a^2 + a^3 + a^3 + a^2 \\ &= 2a^3 + 3a^2 - 1 < 0 \Rightarrow a < -1, -1 < a < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{LPM}_2(A_3) &= 1-a^2 > 0 \Rightarrow -1 < a < 1 \\ \text{LPM}_1(A_3) &= -1 < 0. \quad \therefore -1 < a < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

김소연

(d) (5 points) 위 결과를 통해 위와 같은 형태의 $n \times n$ 행렬이 ND가 되기 위한 a의 범위를 유추하고, $n=4$ 일 때 유추한 조건에 부합하는 적당한 0이 아닌 수를 a에 대입하여 ND가 성립하는지 확인하라.

5

$$\text{LPM}_4(A_4) = -3a^4 - 8a^3 - 6a^2 + 1 > 0$$

$$n=4, \text{ if } a=\frac{1}{4}$$

$$-1 < a < \frac{1}{m-1}$$

$$-3\left(\frac{1}{4}\right)^4 - 8\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(-\frac{3}{16} - 8\right) - \frac{6}{16} + 1$$

$$= \frac{1}{64} \left(-\frac{35}{4}\right) - \frac{96}{16^2} + 1$$

$$= \frac{-131}{256} + 1 > 0 \quad \therefore \text{ND 성립}$$

(e) (5 points) 다음 함수의 도함수를 구하라. (Hint: $\cos' x = -\sin x$)

$$f(x) = \sqrt{\cos[(x^2 + x + 1)^{100} + x^3 + 1]}$$

(e) (5 points) 다음 함수의 도함수를 구하라. (Hint: $\cos' x = -\sin x$) 이 문제 생략함.

5

$$f(x) = \sqrt{\cos[(x^2 + x + 1)^{100} + x^3 + 1]}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin[(x^4+x+1)^{100} + x^3 + 1]}{2\sqrt{\cos[(x^4+x+1)^{100} + x^3 + 1]}} \cdot [100(x^4+x+1)^{99} \cdot (4x^3+1)]$$

Page 3

0 | 100%

$$\cdot [100(x^4+x+1)^{99} \cdot (4x^3+1) + 3x^2]$$

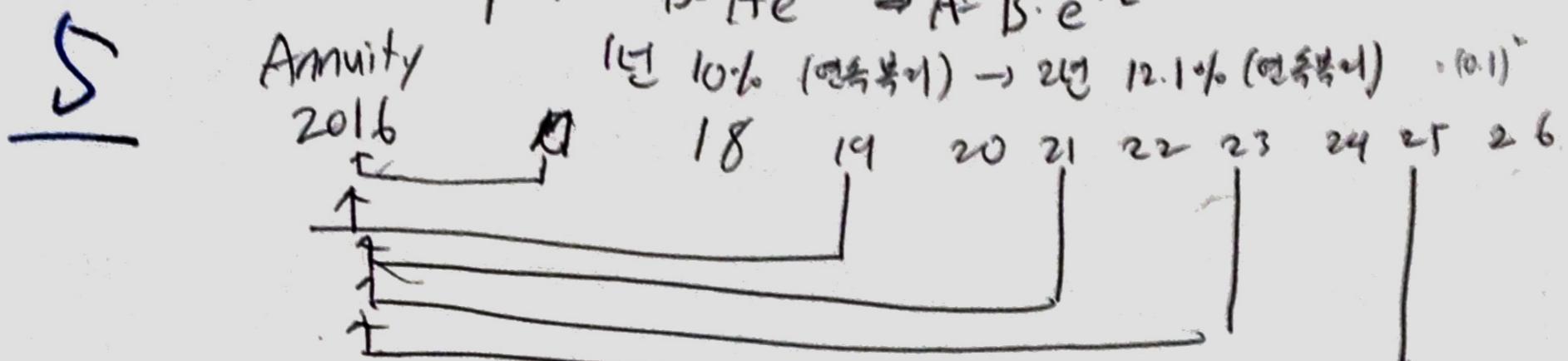
2. 10%의 이자율을 연속적 복리 (continuous compound interest)로 계산하는 상황을 가정하고 이어지는 물음에 답하라. (연속적으로 다루는 것에 어려움을 느낀다면, 감점을 감수하고 이산적으로 다루도록 한다.)
- (a) (5 points) 2016년 현재 시점 (8.1) 부터 향후 10년간 (2017년 8월 1일에 처음 지급하여 5회 지급) 매 2년마다 1000만원을 지급하는 연금의 현재가치는 얼마인가?
- (b) (5 points) 위와 동일하지만 무한히 지급하는 연금의 현재가치는 얼마인가?

2

- 금액 지불이 이산적이므로 등비급수의 형태가 됨
- discrete compounding -1
- $1+r=1.1$ 임
- 등비급수는 풀어야 함

1000만원을 지급하는 연금의 현재가치는 얼마인가?

Continuous compound: $B = Ae^{rt} \rightarrow A = B \cdot e^{-rt}$



$$PV = 1000 \times e^{-0.1 \times 1} + 1000 \times e^{-0.1 \times 2} + 1000 \times e^{-0.1 \times 3} + 1000 \times e^{-0.1 \times 4} + 1000 \times e^{-0.1 \times 5}$$

조형인

(b) (5 points) 위와 동일하지만 무한히 지급하는 연금의 현재가치는 얼마인가?

5

$$PV = 1000 \cdot e^{-0.1} (1 + e^{-0.2} + e^{-0.4} + \dots) \quad (\sim)$$

$$e^{-0.2} \cdot PV = 1000 \cdot e^{-0.1} (e^{-0.2} + e^{-0.4} + \dots) \quad (\sim)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{(0.1) \times n} = 0 \quad \text{따라서}$$

$$(1 - e^{-0.2}) PV = 1000 \cdot e^{-0.1}$$

$$PV = \frac{1000 \cdot e^{-0.1}}{1 - e^{-0.2}}$$

이산적 복리계산

$$PV = \frac{1000\text{원}}{(1+0.1)} + \frac{1000\text{원}}{(1+0.1)^2} + \frac{1000\text{원}}{(1+0.1)^3} + \frac{1000\text{원}}{(1+0.1)^4} + \frac{1000\text{원}}{(1+0.1)^5}$$

4

OK ~ (-1)

→ 1100원

(b) (5 points) 위와 동일하지만 무한히 지급하는 연금의 현재가치는 얼마인가?

4

$$PV = \frac{1000\text{원}}{1 - \frac{1}{(1.1)^2}} = \frac{1100\text{원}}{(1.1)^2 - 1} = \frac{1100\text{원}}{0.21}$$

$$= \frac{1100}{0.21} \approx 5244\text{원}$$

3. 다음 방정식에 대해서 이어지는 물음에 답하라.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 1 & 9 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) (5 points) 위 방정식을 기본행연산 (Elementary Row Operation) 으로 풀어라.

3a

- free, basic variable이 명확히 구분되어 있어야 함
- free, basic variable은 정하기에 따라 다양할 수 있지만 각각 두 개를 넘지는 않음

(b) (5 points) 위 방정식을 system of implicit functions로 간주하고 유일한(unique) 해가
도출될 수 있게 하기 위해 방정식을 재구성하여 그 해를 구하라

3b

- free variable을 주어진 수로 취급하여 내생 변수
가 외생 변수의 함수(implicit function)로 취급해야
함
- free variable에 임의의 수 대입: -2 - -3
- 선형화 -3 - -4

(c) (5 points) 위에서 도출한 해에 대해서 x_4 에 변화율에 대한 x_1 의 변화율(즉, elasticity)을 구하라.

3c

- 앞 문제의 오류 여부와 무관하게 탄력성 도출하면
정답처리

정답행렬, \hat{A} 는.

원행연산 (Elementary Row Operation) 으로 풀어라.

5

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) : \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ 이라고 하면.} \end{aligned}$$

free variable : $x_3 = t, x_4 = s$ ($t, s \in \mathbb{R}$)

basic variable : $x_1 = -3 + 9t - s$

$$x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}s$$

- (b) (5 points) 위 방정식을 system of implicit functions 로 간주하고 유일한 (unique) 해가
도출될 수 있게 하기 위해 방정식을 재구성하여 그 해를 구하라
 x_3, x_4 을 erroneous variable \therefore 간주하면.

$$x_1 + 6x_2 = 5 + 1x_3 - 3x_4$$

$$x_1 + 9x_2 = 9 + 6x_3 - 4x_4$$

$$3x_2 = 4 - x_3 - x_4. \quad \therefore \text{재구성할 수 있다.}$$

위식을 풀면.

여러가지

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{4 - x_3 - x_4}{3}, \quad x_1 = 9 + 6x_3 - 4x_4 - 12 + 3x_3 + 3x_4 \\ &= -3 + 9x_3 - x_4. \end{aligned}$$

5

- (c) (5 points) 위에서 도출한 해에 대해서 x_4 에 변화율에 대한 x_1 의 변화율 (즉, elasticity) 을
구하라.

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial x_1 / x_1}{\partial x_4 / x_4} = \frac{x_4}{x_1} \times \frac{\partial x_1}{\partial x_4} = \left(\frac{x_4}{-3 + 9x_3 - x_4} \right) x(-1) \\ &= \frac{x_4}{3 + 9x_3 + x_4} \end{aligned}$$

4. 다음 IS-LM 모형을 검토하라. 이 경제는 정부 지출이 없고, 모든 세금은 투자지출에서만 조달하는 경제이다.

$$Y = C + I$$

$$C = C(Y - T), \quad C' \in (0, 1)$$

$$I = I(r) \quad I' < 0$$

$$M^s = M(Y, r), \quad \frac{\partial M}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial M}{\partial r} < 0$$

$$T = tI \quad t \in (0, 1)$$

$$S = Y - C$$

- Y : 총소득, C : 총소비지출, I : 총투자지출, M^s : 총 화폐공급, T : 총 세금, S : 총저축, t : 투자에 대한 세율, r : 이자율
 - (a) (5 points) 위 모형을 Y, r 에 대한 모형으로 간주하고 현재 상태를 규정한 뒤 그 근방에서 선형화하라.
 - (b) (10 points) 만일 정부가 투자세율(t)만을 줄이고 나머지 정부가 통제 가능한 파라미터는 변동하지 않는 것으로 둘 경우 총소득과 이자율에 미치는 영향을 위 모형을 통해 추론하라.

4

- S 는 모형과 무관한 정의식
- C 는 Y, t, r 의 함수임. 체인룰 엄격히 적용해서 풀어야 함 (4b)
- T 는 소거되어 사라지고 t 만으로 표현되어야 함 (4b)
- 4a는 모형 세팅
- 4b는 모형 풀이로 채점함. 단, 수업의 is Im 모형으로 푼 것은 대폭 감점함

5

(a) (5 points) 위 모형을 Y, r 에 대한 모형으로 간주하고 현재 상태를 규정한 뒤 그 근방에서 선형화하라.

$$\frac{\partial I(r)}{\partial t} \cdot dr +$$

$$\begin{cases} Y = C(Y-T) + I(r) \\ M^S = M(Y, r) \end{cases} = C(Y-tI(r)) + I(r)$$

$$I(r) = S = Y - C(Y-tI(r)).$$

$$dY = \frac{\partial C}{\partial Y} \cdot dY + \frac{\partial C}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial C}{\partial r} \cdot dr =$$

$$dM^S = \frac{\partial M}{\partial Y} \cdot dY + \frac{\partial M}{\partial r} \cdot dr.$$

$$dY = C'dY - I \cdot C' \cdot dt - t \cdot I \cdot C' \cdot dr + I' \cdot dr$$

$$dM^S = \frac{\partial M}{\partial Y} \cdot dY + \frac{\partial M}{\partial r} \cdot dr.$$

$$+ \frac{\partial C(Y-tI(r))}{\partial(Y-tI(r))} \cdot \frac{\partial(Y-tI(r))}{\partial Y} \cdot dY$$

$$+ \frac{\partial C(Y-tI(r))}{\partial(Y-tI(r))} \cdot \frac{\partial(Y-tI(r))}{\partial t} \cdot dt$$

$$+ \frac{\partial C(Y-tI(r))}{\partial(Y-tI(r))} \cdot \frac{\partial(Y-tI(r))}{\partial r} \cdot dr + I' \cdot dr$$

$$L = C' \cdot dY - I(r) \cdot C' \cdot dt - t \cdot I' \cdot C' \cdot dr + I' \cdot dr$$

입체적

10

(b) (10 points) 만일 정부가 투자세율(t)만을 줄이고 나머지 정부가 통제 가능한 파라미터는 변동하지 않는 것으로 둘 경우 총소득과 이자율에 미치는 영향을 위 모형을 통해 추론하라.

위의 결과를 정리하면,

$$(1-C')dY + (t \cdot I'C' - I')dr = -I \cdot C'dt$$

$$\frac{\partial M}{\partial Y} \cdot dY + \frac{\partial M}{\partial r} \cdot dr = dM^S$$

$$\left(\begin{array}{cc} 1-C' & t \cdot I'C' - I' \\ \frac{\partial M}{\partial Y} & \frac{\partial M}{\partial r} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} dY \\ dr \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -I \cdot C' \cdot dt \\ dM^S \end{array} \right)$$

$$dY = \frac{1}{D} \left\{ -\frac{\partial M}{\partial r} \cdot I \cdot C' \cdot dt - dM^S \cdot I' + dM^S \cdot t \cdot I'C' \right\}$$

$dM^S = 0$, dt 가 - 일 때 dY 는 ①

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial M}{\partial r} & I' - t \cdot I'C' \\ -\frac{\partial M}{\partial Y} & 1 - C' \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} -I \cdot C' \cdot dt \\ dM^S \end{array} \right)$$

∴ 총소득 증가

$$dt = \frac{1}{D} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial r} \cdot I \cdot C' \cdot dt + dM^S - C \cdot dM^S \right)$$

$dM^S = 0$, dt 가 - 일 때 dr 은 ②, \therefore 이자율 증가

Page 6

$$D = (1-C') \cdot \frac{\partial M}{\partial r} - \frac{\partial M}{\partial Y} (t \cdot I'C' - I')$$

$D < 0$

5. 아래 차분 방정식에 대해서 이어지는 물음에 답하라.

$$x_{1,t+1} = x_{1,t} + 2x_{3,t}$$

$$x_{2,t+1} = 5x_{2,t}$$

$$x_{3,t+1} = 3x_{1,t} + 2x_{3,t}$$

- (a) (5 points) 위 차분 방정식을 matrix form으로 나타내고, 대각화 가능한지 (diagonalizable) 검토하라.
- (b) (5 points) 대각화 가능할 경우, 위 coupled system을 uncoupled system으로 변환하여 기술하고, (변환한 system에 대한 symbol로는 y_t , 혹은 $y_{i,t}$ 를 사용하라.) $t = T$ 일 때의 일반식을 $x_{i,t}$ 에 대해 기술하라.

5

- 계수행렬(주로 A행렬로 많이 쓴)이 invertible 하다고 대각화 가능한 것은 아님. eigenvalue를 봐야 함

$$5.(a) \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ x_{3,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{3,t} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - rI) = 0 = \begin{vmatrix} 1-r & 0 & 2 \\ 0 & 5-r & 0 \\ 3 & 0 & 2-r \end{vmatrix} = (5-r) \cdot \begin{vmatrix} 1-r & 2 \\ 3 & 2-r \end{vmatrix} \\ = (5-r) \left[\frac{(1-r)(2-r)}{r^2-3r-4} - 6 \right] = (5-r)(r-4)(r+1)$$

$r = -1, 4, 5$ 를 서로 다른 세 실근을
가진다. 따라서 대각화 가능하다.

$$(b) i) r=1 : A - rI = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{이 가령}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + 2v_3 \\ 6v_2 \\ 3v_1 + 3v_3 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$ii) r=4 \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3v_1 + 2v_3 \\ v_2 \\ 3v_1 - 2v_3 \end{pmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$iii) r=5 \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4v_1 + 2v_3 \\ 0 \\ 3v_1 - 3v_3 \end{pmatrix} \rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$PDP^{-1} = A$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 + 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ x_{3,t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{3,t} \end{pmatrix} = PDP^{-1} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{3,t} \end{pmatrix} \xrightarrow{P^{-1}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{1,T} \\ x_{2,T} \\ x_{3,T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^T & 0 & 0 \\ 0 & (4)^T & 0 \\ 0 & 0 & (5)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ x_{3,0} \end{pmatrix}$$

6. 어떤 소비자의 효용이 소비상품묶음 x 에 대하여 $u(x)$ 로 표현되고 있다고 한다. 각 상품들의 가격은 p 이며, 이 소비자가 소비할 수 있는 최대 금액은 M 이다. $p \geq 0$

(a) (5 points) 이 소비자의 목표가 자신의 효용을 극대화하는 것이라고 할 때, 이 소비자의 최적화 문제를 수학적으로 기술하고, 이 문제를 풀기 위한 라그랑지안 함수를 제시하라.
(소비량이 0보다 커야 한다는 제약은 무시하라)

6a

- p 가 음이 아니어야 한다는 제약은 parameter의 제약이므로 라그랑지안에 제약식으로 들어가면 안됨. 제약식 역시 목적함수의 input의 함수임
- 합리성을 등제약으로 해석해선 안됨

5

(소비량이 0보다 커야 한다는 제약은 무시하라)

0 | 0

$$\underset{x}{\operatorname{argmax}} \quad u(x), \quad p \cdot x \leq M, \quad p \geq 0.$$

$$\Rightarrow L(x, \lambda) = u(x) + \lambda(M - p \cdot x)$$

(b) (5 points) 이 소비자의 효용함수가 다음과 같다고 할 경우, 1계조건을 만족하는 모든 점을 검토하라. (NDCQ도 검토할 것)

$$u(\mathbf{x}) = \sum_i \ln(x_i)$$

1.6.(b) Checking NDCQ, $DH_{\mathbf{x}} = 0$ 의 points 를 검토하자.

$DH_{\mathbf{x}} = 0 = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ only when $P_1 = P_2 = \dots = P_n = 0$

그러나 이 점은 문제와 무관하게 모든 점은 NDCQ 통과한다.

$$u(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

FOC ① $D L_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \lambda P_1, \quad \frac{\partial L}{\partial P_1} = x_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 = \frac{a_1}{x_1} - \lambda P_1 \rightarrow x_1^* = \frac{a_1}{\lambda P_1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 = \frac{a_2}{x_2} - \lambda P_2 \rightarrow x_2^* = \frac{a_2}{\lambda P_2}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 = \frac{a_n}{x_n} - \lambda P_n \rightarrow x_n^* = \frac{a_n}{\lambda P_n}$$

이제

$$② \lambda^*(M - P_1 x_1^* - \dots - P_n x_n^*) = 0$$

$$\lambda^*(M - P_1 \frac{a_1}{\lambda P_1} - \dots - P_n \frac{a_n}{\lambda P_n}) = \lambda^*(M - \frac{a_1}{\lambda} - \frac{a_2}{\lambda} - \dots - \frac{a_n}{\lambda})$$

$$= \lambda^* M - a_1 - a_2 - \dots - a_n = 0$$

$$③ M - P_1 x_1^* - \dots - P_n x_n^* \geq 0$$

$$④ \lambda^* \geq 0$$

네 조건을 모두 만족하는 점:

$$\lambda^* = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{M}$$

$$x_1^* = \frac{M}{\sum_{i=1}^n a_i} \cdot \frac{a_1}{P_1} = \frac{Ma_1}{P_1}$$

$$x_2^* = \frac{M}{\sum_{i=1}^n a_i} \cdot \frac{a_2}{P_2} = \frac{Ma_2}{P_2}$$

$$\vdots$$

$$x_n^* = \frac{M}{\sum_{i=1}^n a_i} \cdot \frac{a_n}{P_n} = \frac{Ma_n}{P_n}$$

(c) (5 points) 위 점(들) 중 하나를 선정하여 SOC를 검토하라. 그 점이 위 극대화 문제의 해가 될 수 있는지 (즉, global max가 될 수 있는지) 판단하고 그 근거도 함께 제시하라.

(c)

$$\text{이때, } LPM_{k+1}(H) =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & P_1 & P_2 & \cdots & P_k \\ P_k & -\lambda^2 \frac{P_k^2}{\partial \lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \frac{P_k^2}{\partial \lambda} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_k & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2 \frac{P_k^2}{\partial \lambda} \end{vmatrix}_{k+1, k+1}$$

$$= -\lambda^2 \frac{P_k^2}{\partial \lambda} (-1)^{(k+1)} LPM_k(H) + (-1)^{(k+2)} P_k$$

여기서

$$-\lambda^2 \frac{P_k^2}{\partial \lambda} LPM_k(H) + (-1)^k P_k \left(\prod_{i=1}^{k-1} \left(\lambda - \lambda^2 \frac{P_i^2}{\partial \lambda} \right) \right) \times \begin{vmatrix} P_{k+1} & P_k \\ 0 & -\lambda^2 \frac{P_k^2}{\partial \lambda} \end{vmatrix}_{k+1, k+1}$$

$\cancel{\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots = 3\lambda}$

$$= -\lambda^2 \frac{P_k^2}{\partial \lambda} LPM_k(H) + (-1)^{k+1} P_k \cancel{\left(\prod_{i=1}^{k-1} \left(\lambda - \lambda^2 \frac{P_i^2}{\partial \lambda} \right) \right)} \quad (k \geq 2)$$

$$\text{또한 } LPM_1(H) = 0 \quad LPM_2(H) = P_1^2.$$

$$\text{K가 짝수일 때. } -\left(\lambda^2 \frac{P_k^2}{\partial \lambda} LPM_k(H) + P_k \cancel{\left(\prod_{i=1}^{k-1} \left(\lambda - \lambda^2 \frac{P_i^2}{\partial \lambda} \right) \right)} \right) \sim \textcircled{1}$$

이고,

$$\text{K가 홀수일 때. } LPM_{k+1}(H) = \lambda^2 \frac{P_k^2}{\partial \lambda} \left(\lambda^2 \frac{P_k^2}{\partial \lambda} \cancel{\left(\prod_{i=1}^{k-1} \left(\lambda - \lambda^2 \frac{P_i^2}{\partial \lambda} \right) \right)} - LPM_k(H) \right) \sim \textcircled{2}$$

이다.

$$LPM_2(H) = P_1^2 \text{ 이므로 } \textcircled{1} \text{에 따라 } LPM_3 < 0, \textcircled{2} \text{에 따라 } LPM_4 > 0$$

이고, $\textcircled{1}$

일반화 하면 $LPM_{2m}(H) > 0, LPM_{2m+1}(H) < 0$ 이라고 할 수 있다.

따라서 $LPM_m(H) = \text{sign}((-1)^m)$ 이 $m=2, 3, \dots, n$ 에서 성립한다.

$\therefore H$ 는 ND이다.

(d) (5 points) 효용함수가 아래와 같다고 할 경우, 1계조건을 나열하라.

$$u(\mathbf{x}) = - \sum_i (x_i - a)^2, \quad a > 0$$

(d) (5 points) 효용함수가 아래와 같다고 할 경우, 1계조건을 나열하라.

5

$$u(\mathbf{x}) = - \sum_i (x_i - a)^2, \quad a > 0$$

한계수

$$L = - \left((x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2 \right) - \lambda (p_1 x_1 + \dots + p_n x_n - m)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = - (2(x_1 - a)) - \lambda p_1 = 0 \quad \lambda (p_1 x_1 + \dots + p_n x_n - m) = 0$$

:

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = 2(x_n - a) + \lambda p_n = 0$$

$$\lambda \geq 0$$

$$p_1 x_1 + \dots + p_n x_n \leq m$$

- (e) (5 points) 위 효용함수의 경우, solution이 binding 되지 않는 경우는 어떤 경우에 해당할 것인지 추론하고 그 근거를 제시하라. (Hint: 막막하다면 $x \in \mathbb{R}^2$ 일 때 문제를 풀어본 뒤, n 차원으로 확장해볼 것.)

6e

- binding 되어 있지 않은 경우의 solution은 모든 x_i 들이 a 와 같은 경우임
- 그런데 이 x_i 는 부등제약을 만족해야 함. 이것이 명백하게 기술되어 있어야만 온전한 점수를 받을 수 있음.

mm²

$$L(x, \lambda) = -(x_1^2 + x_2^2) + 2\alpha(x_1 + x_2) - 2\alpha^2 + \lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2)$$

① $\frac{\partial L}{\partial x_1} \Big|_{(x^*, \lambda^*)}$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1^* + 2\alpha - p_1 \lambda^* = 0$$

$$\textcircled{3} \quad x^*(M - p_1x_1^* - p_2x_2^*) = 0$$

② $\frac{\partial L}{\partial x_2} \Big|_{(x^*, \lambda^*)}$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2^* + 2\alpha - p_2 \lambda^* = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lambda^* \geq 0$$

$$\textcircled{5} \quad M - p \cdot x^* \geq 0$$

$\boxed{\lambda^* = 0}$

$\lambda^* = 0$ 일경 $\textcircled{5}$ 에서 $M - p \cdot x^*$ 이 아우란 구조라미 ~~제약조건~~ non-binding.

$$-2x_1^* + 2\alpha = 0$$

$$-2x_2^* + 2\alpha = 0$$

$$x_1^* = x_2^* = a$$

$$U(a) \geq -[(x_i - a)^2]$$

$\textcircled{3}$ 에서 $M - p_1x_1^* - p_2x_2^* \geq 0$

$$\therefore (p_1 + p_2)x^* \leq M$$

$$x_1^* \leq \frac{M}{p_1 + p_2}, \quad x_2^* \leq \frac{M}{p_1 + p_2}$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^n e_3$ 학장

x_i 의 값이 모두 서로 같고,

조인정
 $(x_i^* = a \quad \forall i)$

$x_i^* \leq \frac{M}{\sum p_i}$ on the solution of binding constraint.

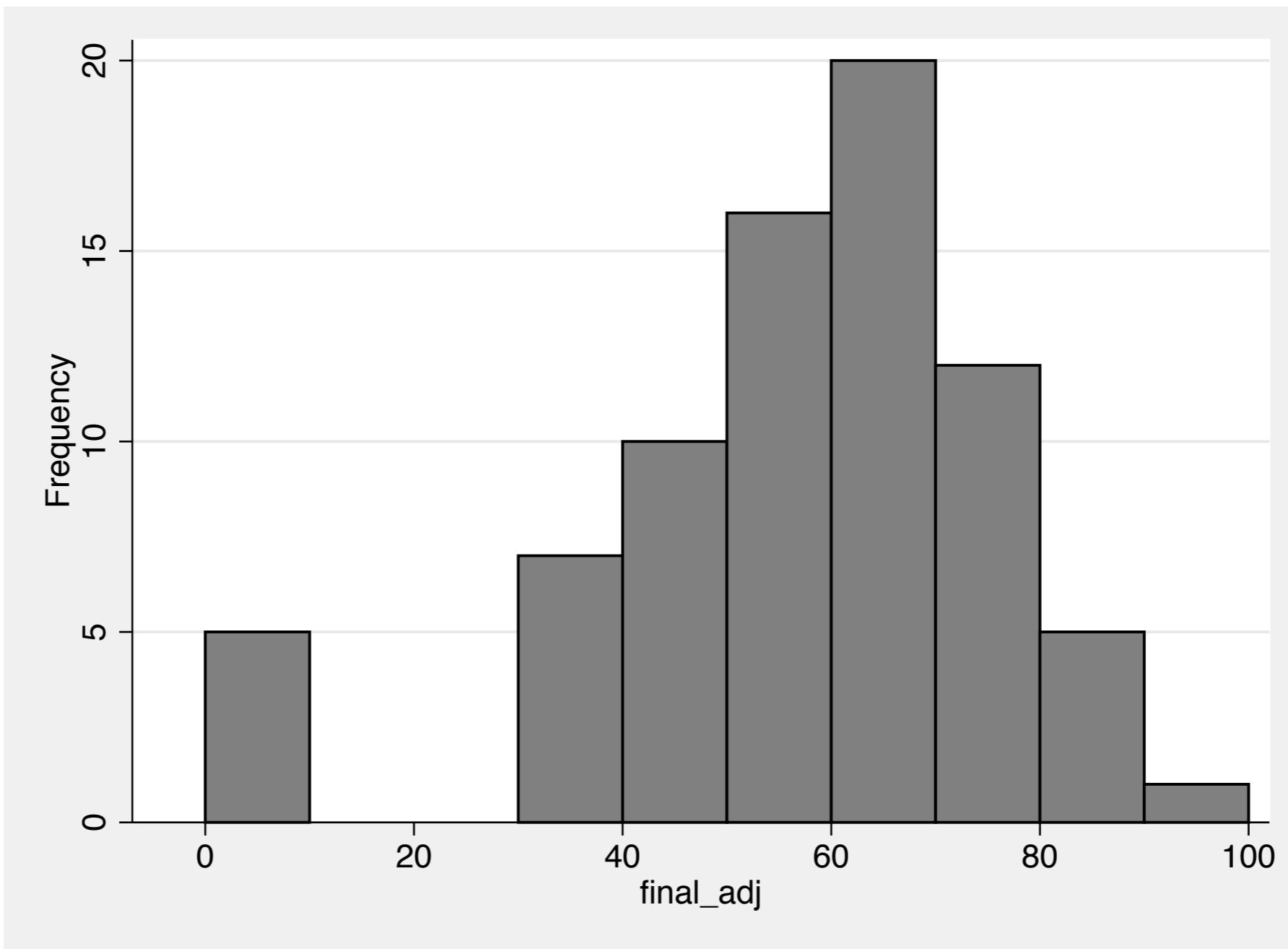
$$a \leq \frac{M}{\sum p_i}$$

기초통계

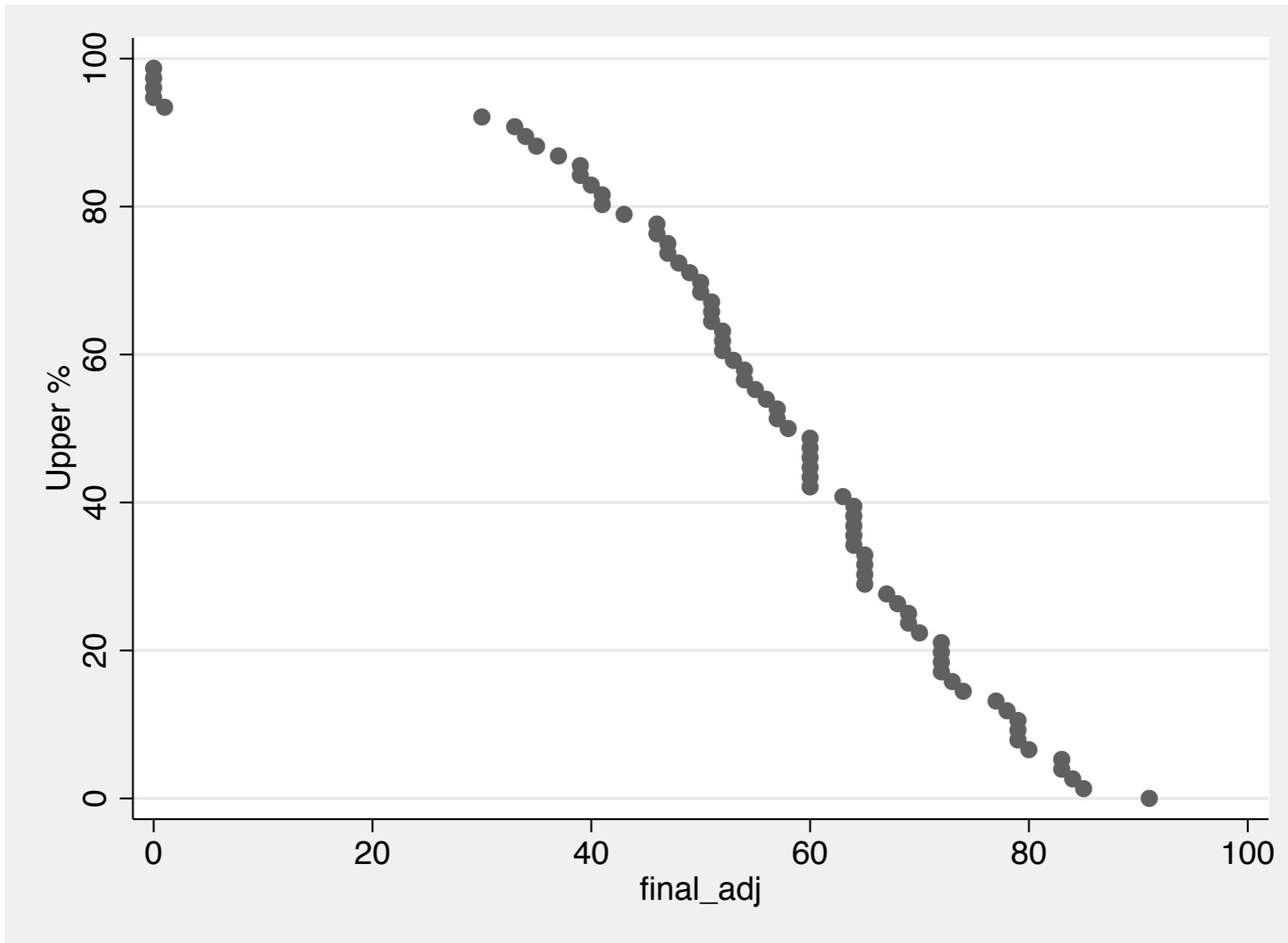
Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
final_adj	76	55.63158	20.27073	0	91

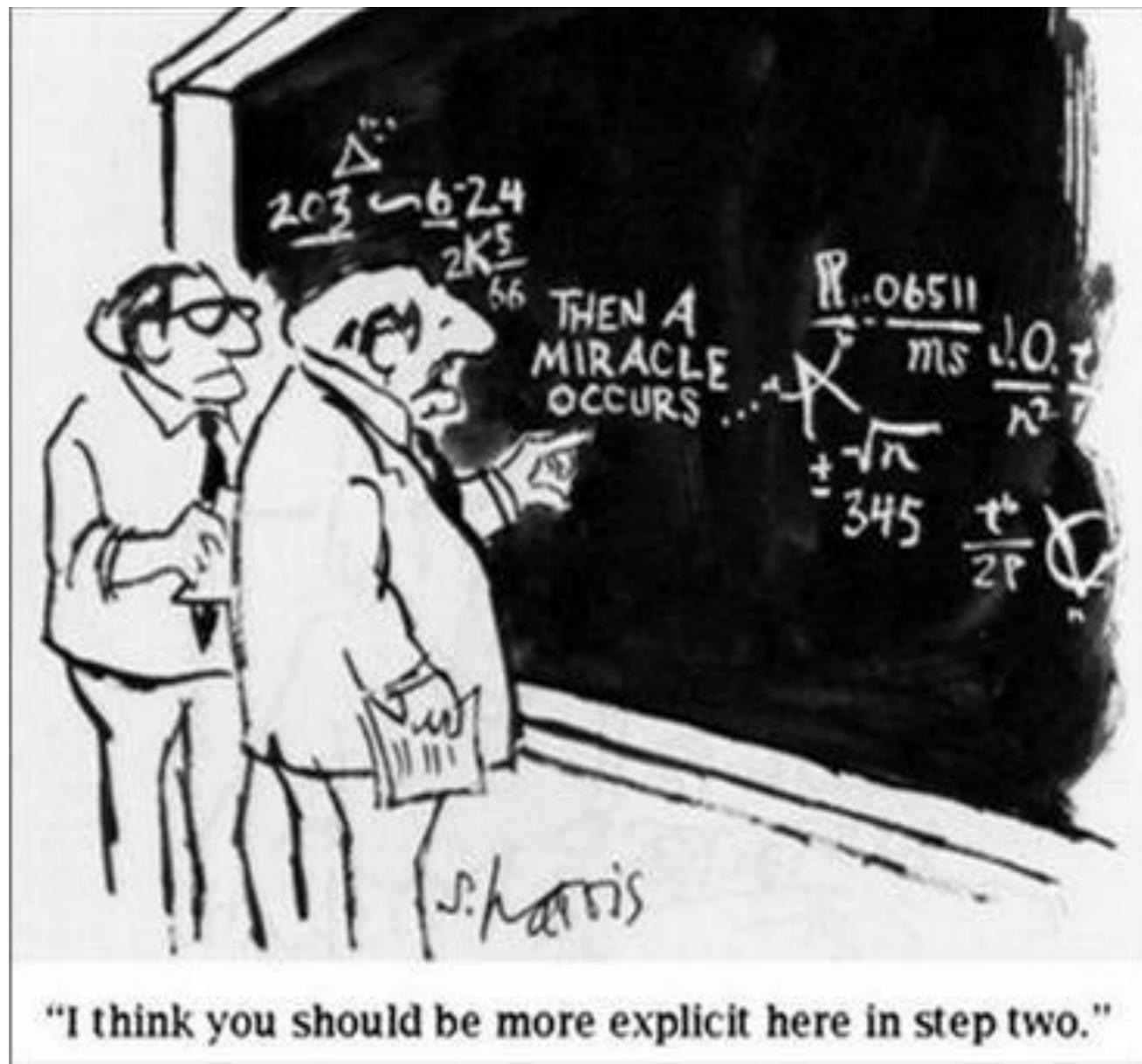
final_adj				
	Percentiles	Smallest		
1%	0	0		
5%	0	0		
10%	34	0	Obs	76
25%	47	0	Sum of Wgt.	76
50%	59		Mean	55.63158
		Largest	Std. Dev.	20.27073
75%	69	83		
90%	79	84	Variance	410.9025
95%	83	85	Skewness	-1.091175
99%	91	91	Kurtosis	4.424183

Histogram



Upper %





여름학기, 수고하셨습니다!