

# **경제수학 기말시험 해설**

ECON205-03 (2016 가을)

조남운

# 1a

1. 아래 질문에 답하라.

(a) (10 points) 다음 유리함수 (rational function)  $f$ 의 그래프 개형을 그려라 (오목성, 볼록성까지 표현할 것.)

$$f = f(x) = 16 \frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}$$

- 양 끝 tail이 16에 수렴함에 유의할 것.

# 1a

ECON205(03)

경제수학 기말시험

조남운

1. 아래 질문에 답하라.

- (a) (10 points) 다음 유리함수(rational function)  $f$ 의 그래프 개형을 그려라 (오목성, 볼록성까지 표현할 것.)

$$f = f(x) = 16 \frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}$$

①  $f(x) = 16 \cdot \frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}$ 에서  $x^* = 2$  (N/A)

②  $f'(x) = 16 \cdot \frac{2(x+1) \cdot (x-2)^2 - (x+1)^2 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = 16 \cdot \frac{(x+1)(x-2)(3x-4-2x-2)}{(x-2)^4} = -96 \cdot \frac{x+1}{(x-2)^3} = 0$ 에서  $x^* = -1$

③  $f''(x) = -96 \cdot \frac{(x-2)^2 - (x+1) \cdot 3 \cdot (x-2)^2}{(x-2)^6} = -96 \cdot \frac{(x-2)^2 (x-2-3x-3)}{(x-2)^6} = -96 \cdot \frac{(-2x-5)}{(x-2)^4} = 96 \cdot \frac{2x+5}{(x-2)^4}$ 에서  $x^* = -\frac{5}{2}$ .

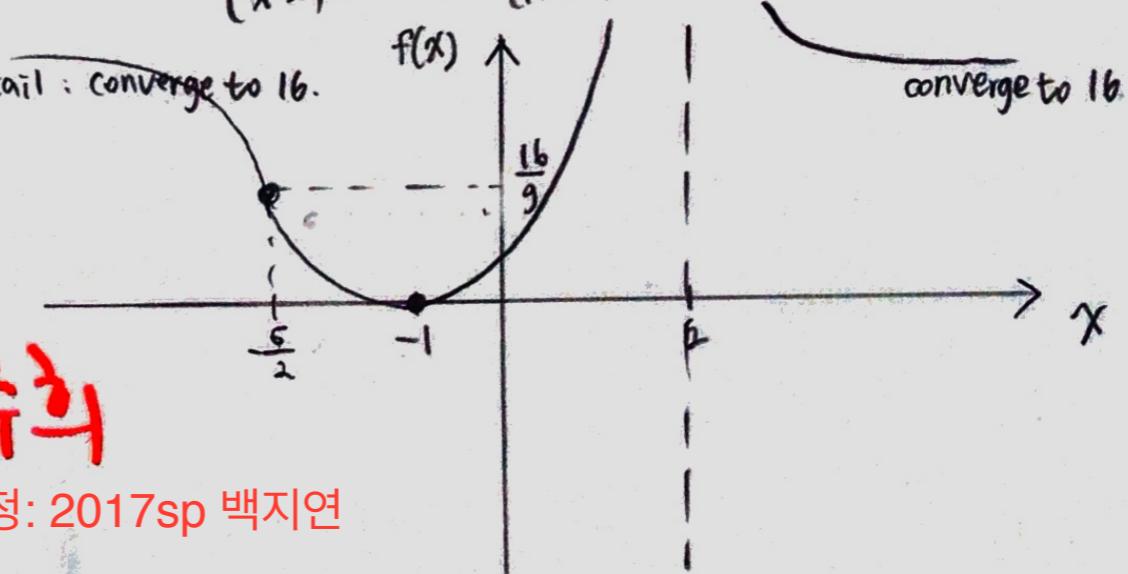
10  $x_1^* = -\frac{5}{2}, x_2^* = -1, x_3^* = 2$  라고 놓으면,

|       | ... | $-\frac{5}{2}$ | ... | -1 | ... | 2   | ...  |
|-------|-----|----------------|-----|----|-----|-----|------|
| $f'$  | +   | -              | -   | 0  | +   | N/A | -    |
| $f''$ | -   | 0              | +   | +  | +   | N/A | +    |
| $f$   | ↓   | $\frac{16}{9}$ | ↓   | 0  | ↑   | N/A | ↑ 16 |

$$f(-\frac{5}{2}) = 16 \cdot \frac{\frac{9}{4}}{\frac{81}{4}} = 16 \cdot \frac{9}{81} = \frac{16}{9}$$

오류

수정: 2017sp 백지연



# 1b

(b) (10 points) 다음 정의역 (domain)에서 위 함수  $f$  의 local min/max, global min/max가 존재한다면 기술하고, 없다면 없음을 명확하게 기술하라.

- $x \in (2, \infty)$
- $x \in \mathbb{R} - 2$

# 1b

- $R-2$  는  $R-\{2\}$  의 오기임
- 알 수 없다: -3
  - “알 수 없다”라는 진술과 “존재하지 않는다는 것을 알고 있다”라는 진술은 다른 것임.
  - 이는 1c에도 해당. 존재하지 않는다면 존재하지 않는다고 명확하게 기술해야 함.
- 1a 의 그래프가 잘못된 것이어도 그에 기반하여 정확하게 논리 도출했으면 감점 없음

**1b**

(b) (10 points) 다음 정의역 (domain)에서 위 함수  $f$ 의 local min/max, global min/max가 존재한다면 기술하고, 없다면 없음을 명확하게 기술하라.

10

- $x \in (2, \infty)$
  - $x \in \mathbb{R} - \underline{2}$

$f'(x) > 0$  global max       $f'(x) < 0$  global min  
 $f''(x) < 0$  local max       $f''(x) > 0$  local min

- $2 < x$  때에서는

× (銀色)

X

X

7

$x \in \mathbb{R} - \{2\}$

## $\chi=2$ 레이한 실수전체인정의역

즉. 항수적례

X

$$\alpha = -1^{\circ} 20' 00''$$

X

$$x = -1^{\circ} \text{h} 02\text{m}$$

$$f(A) = 0$$

우체국

# 1c

(c) (10 points) 다음 극소화 문제를 풀라.

$$\arg \min_x f(x)$$

# 1c

- 역시 잘못된 앞문제에 기반하여 논리적으로 결론을 도출 했다면 감점하지 않음. (이후 문제들도 모두 마찬가지 원칙을 적용할 것임)
- argmax 혹은 maximize problem 의 solution은 object function의 최대값 그 자체가 아니라 최대값을 갖게 하는 input 값임. 따라서 반드시 이 문제에서 input의 정보가 완전히 누락되어 있는 경우에는 부분 감점 (1b도 해당)
  - $f(x)$  has a global min at  $x=-1$  : OK
  - $f(-1)$ : OK (input 정보가 들어있음)
  - 0 : Not OK

1c

(c) (10 points) 다음 극소화 문제를 풀라.

10

$$\arg \min_x f(x)$$

양수오

위 2M번에서  $f(x)$  값이 가장 작을 때는  $x = -1$  일 때.

$$\arg \min_x f(x) \rightarrow x = -1 \text{ 일 때 } f(x) = 0.$$

# 2a

2. 어떤 기업의 투입요소  $L$ 에 대한 생산량  $x$ 의 관계를 의미하는 생산함수가 아래와 같다고 한다.  
이어지는 물음에 답하라.

$$x = x(L) = \alpha \ln L, \quad \alpha > 0$$

- (a) (10 points) 위 생산함수 기술에서 맨 처음 등장한  $x$ 와 두번째로 등장한  $x(L)$ 의  $x$ 는 같은  
의미를 가진 기호 (symbol)인가? 이에 대해 논하라.

# 2a

- 같은 기호인지 물어보는 것과 그 의미가 같은 것인지 물어보는 것은 다름.
  - 이 경우 두 x는 symbol을 동일하게 썼지만, 첫번째는 변수의 symbol, 두번째는 함수의 symbol임
- 그런데 문제에는 같은 “의미”를 가진 “기호”인지를 물음으로써 혼란의 여지가 생김
  - 문제에서 “의미”가 무엇의 symbol인지는 뜻인지, 그 symbol이 의미하는 것 (생산량)이라는 뜻인지 불분명
  - 어떤 쪽으로 해석하던 내적 논리 정합성에 문제가 없다면 정답의 취지로 해석함.

# 2a

ECON205(03)

경제수학 기말시험

조남운

2. 어떤 기업의 투입요소  $L$ 에 대한 생산량  $x$ 의 관계를 의미하는 생산함수가 아래와 같다고 한다.  
이어지는 물음에 답하라.

$$x = x(L) = \alpha \ln L, \quad \alpha > 0$$

- (a) (10 points) 위 생산함수 기술에서 맨 처음 등장한  $x$ 와 두번째로 등장한  $x(L)$ 의  $x$ 는 같은 의미를 가진 기호(symbol)인가? 이에 대해 논하라.

다르다. 퍼미상  $x = x(L) = \alpha \ln L$ 에서 앞의  $x$ 를  $\bar{x}_1$ ,  $x(L)$ 의  $x$ 를  $\bar{x}_2$ 라고 다시 지정한다고 하면,  $\bar{x}_1$ 은  $\bar{x}_2$ 라는 함수에  $(L)$ 만큼의 투입량을 넣었을 때

$$\rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2(L)$$

10 생산되는 생산량이다. 즉  $\bar{x}_2$ 라는 함수에 투입량  $L$  만큼은 투입하면  
이 기업은  $\alpha \ln L = \bar{x}_1$  만큼 생산한다.

김별우2m

## 2b

- (b) (10 points) 위 생산함수에서 주어진 (given) 매개변수 (parameter)로 간주할만한 변수가 있는가? 이에 대해 논하라.

0 points) 위 생산함수에서 주어진 (given) 매개변수 (parameter)로 간주할만한 변수가 있는가? 이에 대해 논하라.  $L$ 은 투입요소이므로 주어진 매개변수가 아니다. 또한  $\alpha$ 도  $\chi(L)$  ( $= \alpha R_m L$ )에 의하여 결정되며  $R_m$ 은 종속변수므로 매개변수가 아니다.  $\alpha$ 만이 주어진 매개변수이다.

내글

12

# 2c

- (c) (10 points) 위 기업이 생산하는 상품의 가격이  $p$ 이고, 투입요소  $L$ 의 단위당 가격이  $w$ 라고 할 때, 아래 극대화 문제를 풀어라.

$$\arg \max_x \Pi(x), \quad \Pi(x) := px - wL$$

# 2c

- 1계조건만 검토: 6pt
- global max인지 판별해야함:
  - 1변수함수이므로 그래프로도 가능
  - SOC는 필요조건임. 보장하는 것은 그 점이 local max이라는 것 밖에 없음: 8pt
  - 그래프로 보이던 모든 점에서 2계도함수가 음일 때에는 local max가 유일하고 그 점이 global max임을 진술하던 global max 여부를 판별하려는 시도가 반드시 있어야 함

# 2c

$$(C). \Pi(x) = px - WL$$

위에 주어진 식  $x = \alpha \ln L$ 에 의하여

$$L = e^{\frac{x}{\alpha}}$$

$$\text{Thus } \Pi(x) = px - W e^{\frac{x}{\alpha}}$$

$$\Pi'(x) = p - \frac{W}{\alpha} \cdot e^{\frac{x}{\alpha}}$$

$$e^{\frac{x}{\alpha}} = \frac{px}{W}$$

$$\frac{x}{\alpha} = \ln \left( \frac{px}{W} \right)$$

$$\Pi'(x^*) = 0 \text{ 일때 } x^* = \alpha \cdot \ln \left( \frac{px}{W} \right) \text{ 이고 } \begin{array}{c|c|c|c} x & | & x^* & | \\ f' & | + & 0 & - \end{array} \text{ 이다}$$

$x^*$ 에서 극대

Key

$$\therefore \arg \max_x \Pi(x) = \Pi \left( \alpha \cdot \ln \left( \frac{px}{W} \right) \right) = p \cdot \left\{ \alpha \cdot \ln \left( \frac{px}{W} \right) \right\} - W \cdot e^{\ln \frac{px}{W}}$$

$$= p \cdot \left\{ \alpha \cdot \ln \left( \frac{px}{W} \right) \right\} - px$$

$$= p\alpha \cdot \left( \ln \left( \frac{px}{W} \right) - 1 \right)$$

# 3a

3. 아래에 열거하는 수학적 진술들을 증명하라.

(a) (10 points)

$$\epsilon := \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dx}{x}} = \frac{d \ln f}{d \ln x}$$

# 3a

- 라이프니츠식 미분기술  $df/dx$ 은 유리식의 형태를 띠고 있지만  $df$ 를  $dx$ 로 나눈 것과 동등한 기술이라고 생각하면 안됨 (단, 이에 대해서는 감점하지 않음)
- Chain Rule을 써서 증명해야 함. (주텍스트 102페 이지 참고)

3a

10

3. 아래의 결과를 증명하세요.

(a) (10 points)

$$\frac{d \ln f}{d \ln x} = \frac{d \ln f}{df} \cdot \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{d \ln x}$$

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\epsilon := \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dx}{x}} = \frac{d \ln f}{d \ln x}$$

$$= \frac{f'}{f} \cdot \frac{df}{dx} \cdot x = \underline{\underline{\frac{x}{f}}} \cdot \underline{\underline{\frac{df}{dx}}} = \epsilon$$

100%

Page 3

# 3b

(b) (10 points) 임의의  $n \times m$  matrix인  $A, B, C$ 에 대하여

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

- ... 으로 나열하여 증명한 경우: 8pt
- 모든  $n, m$  이 아닌 특정  $n, m$  (가령  $2 \times 2$ ) 으로 증명한 경우: 6pt

# 3b

ECON205(03)

경제수학 기말시험

조남운

(b) (10 points) 임의의  $n \times m$  matrix인  $A, B, C$ 에 대하여

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

10

$A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$ 를 각각  $A, B, C$ 의  $(i,j)$  성분이라고 하자 ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ )

$(A_{ij} + B_{ij}) + C_{ij} = A_{ij} + (B_{ij} + C_{ij}) \quad \forall i, j$  이므로 증명할 수 있음.

김동현

# 3c

(c) (10 points) 임의의 수렴하는 두 수열  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ 에 대하여,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

(수렴의 엄밀한 정의를 이용할 것)

# 3C

(c) (10 points) 임의의 수렴하는 두 수열  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ 에 대하여,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

(수렴의 엄밀한 정의를 이용할 것)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{\alpha} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \bar{\beta} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$$

10

$$|a_n - \bar{\alpha}| < \frac{\epsilon}{2} (\forall n > n_1)$$

운동재

$$|b_n - \bar{\beta}| < \frac{\epsilon}{2} (\forall n > n_2) \text{라고 하자}$$

$$|a_n - \bar{\alpha}| + |b_n - \bar{\beta}| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon (\forall n > \max\{n_1, n_2\})$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$  개념을 적용

$$|a_n + b_n - (\bar{\alpha} + \bar{\beta})| \leq |a_n - \bar{\alpha}| + |b_n - \bar{\beta}| < \epsilon (\forall n > \max\{n_1, n_2\})$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$$

# 4a

4. 아래의 선형 연립방정식을 풀고자 한다. 이어지는 물음들에 답하라.

$$x_1 + x_4 = 1$$

$$x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

(a) (10 points) 위 연립방정식을 matrix form으로 나타내라

답지

$$\begin{array}{l} \text{라} \\ \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right. = \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right) \end{array}$$

# 4b

(b) (10 points) 위 연립방정식의 해를 구하라.

- free variable에 특정 숫자 대입: 6pt
- 단순히 “무수히 많다”: 6pt

# 4b

(b) (10 points) 위 연립방정식의 해를 구하라.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$$x_1 + x_4 = 1$$

free variable  $\rightarrow x_3, x_4$  (pivot이 없는 C)

$$x_2 + x_3 = 2$$

dependent variable  $\rightarrow x_1$  ( $x_4$ 이 종속)

$x_2$  ( $x_3$ 이 종속)

10

정답

# 4c

- (c) (10 points) 위 연립방정식을 제한적으로나마 풀려고 한다. 이를 위해 이들 변수 중 일부를 다른 변수들의 음함수 (implicit function)로 나타내려고 한다. 어떤 변수를 어떤 변수의 음함수로 취급하면 문제를 풀 수 있는지 제시하고, 그렇게 하여 문제를 풀어보라.

- 음함수 그 자체가 해가 되는데, 음함수 형태가 해  
임이 명확히 기술되어 있어야 온전한 점수를 부여함

# 4c

- (c) (10 points) 위 연립방정식을 제한적으로나마 풀려고 한다. 이를 위해 이들 변수 중 일부를 다른 변수들의 음함수 (implicit function)로 나타내려고 한다. 어떤 변수를 어떤 변수의 음함수로 취급하면 문제를 풀 수 있는지 제시하고, 그렇게 하여 문제를 풀어보라.

10

$q_1, q_2$  를  $q_3, q_4$  를 이용해 나타내면 된다.

{

$$q_1 = 1 - q_4$$

$$q_2 = 2 - q_3$$

$$q_1 + q_2 = 3 - q_3 - q_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - q_4 \\ 2 - q_3 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = 1 - q_4, \quad q_2 = 2 - q_3.$$

최성근.

# 5a

5. 아래의 비선형 연립방정식에 대해서 이어지는 물음들에 답하라.

$$Y = C + I$$

$$Y_D = Y - T$$

$$M_S = M_D(Y_D, r)$$

$$C = C(Y_D)$$

$$I = I(r)$$

$$C' \in (0, 1)$$

$$I' < 0$$

$$\frac{\partial M_D}{\partial Y_D} > 0$$

$$\frac{\partial M_D}{\partial r} < 0$$

(a) (10 points) 위 비선형 연립방정식의 모든 변수를 가능한한 줄인 뒤 나열하라

# 5a

- Y 혹은 YD 중 하나를 소거할 수 있음.
- 어느쪽을 소거하든 상관 없음.
- 본 문제에서 명시되지 않더라도 5b, 5c에서라도 명시되어 있는 경우 정답으로 간주함.

5a

Y, T, Ms, r

10

Er<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

# 5b

(b) (10 points) 위 비선형 연립방정식을 정리하라

(b) (10 points) 위 비선형 연립방정식을 정리하라

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = C(Y-T) + I(r) \\ M_S = M_D(Y-T, r) \end{array} \right. \text{로 정리할 수 있다.}$$

10

박지훈

# 5C

(c) (10 points) 현재 상태를 상수로 규정하고 (가령  $(a, b, c) = (a^*, b^*, c^*)$  같은 식으로 정리하는 의미) 그 근방에서 선형화하라.

- 주어진 값은  $Y_d$ 로 편미분되어 있으므로 연립방정식 또한  $Y_d$ 로 편미분된 형태로 정리해야함 (-3 - -4)

# 5C

- (c) (10 points) 현재 상태를 상수로 규정하고 (가령  $(a, b, c) = (a^*, b^*, c^*)$  같은 식으로 정리하는 의미) 그 근방에서 선형화하라.

10

운동학

$$D_x Y \Big|_{X=(Y^*, T^*, r^*, M_s^*)} = C(Y-T) + I(r) \Big|_{X=(Y^*, T^*, r^*, M_s^*)}, \text{ (Ms*)}$$

$$dY = \frac{\partial C(Y-T)}{\partial Y} dY + \frac{\partial C(Y-T)}{\partial T} dT + I' dr = \frac{\partial C(Y-T)}{\partial(Y-T)} \cdot \frac{\partial(Y-T)}{\partial Y} dY + \frac{\partial C(Y-T)}{\partial(Y-T)} \cdot \frac{\partial(Y-T)}{\partial T} dT + I' dr$$

$$D M_s \Big|_{X=(Y^*, T^*, r^*, M_s^*)} = M_b(Y-T, r) \Big|_{X=(Y^*, T^*, r^*, M_s^*)}$$

$$dM_s = \frac{\partial M(Y-T)}{\partial Y} dY + \frac{\partial M(Y-T)}{\partial T} dT + \frac{\partial M}{\partial r} dr$$

$$= \frac{\partial M}{\partial(Y-T)} \cdot \frac{\partial(Y-T)}{\partial Y} dY + \frac{\partial M}{\partial(Y-T)} \cdot \frac{\partial(Y-T)}{\partial T} dT + \frac{\partial M}{\partial r} dr = \frac{\partial M}{\partial Y_D} dY - \frac{\partial M}{\partial Y_0} dT + \frac{\partial M}{\partial r} dr$$

# \*\* $Y_d$ 를 변수로 보고 푼 경우

- (c) (10 points) 현재 상태를 상수로 규정하고 (가령  $(a, b, c) = (a^*, b^*, c^*)$  같은 식으로 정리하는 의미) 그 근방에서 선형화하라.

$$\bar{x}^* = (a^*, b^*, c^*, d^*) = (Y_p, r, T, M_s)$$

$$D_x Y_p \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^*} = D_x (C(Y_p) + I(r) - T) \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^*}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_p}{\partial Y_p} & \frac{\partial Y_p}{\partial r} & \frac{\partial Y_p}{\partial T} & \frac{\partial Y_p}{\partial M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY_p \\ dr \\ dT \\ dM_s \end{pmatrix} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial Y_p} & \frac{\partial C}{\partial r} & \frac{\partial C}{\partial T} & \frac{\partial C}{\partial M_s} \\ C' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY_p \\ dr \\ dT \\ dM_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial Y_p} & \frac{\partial I}{\partial r} & \frac{\partial I}{\partial T} & \frac{\partial I}{\partial M_s} \\ 0 & I' & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY_p \\ dr \\ dT \\ dM_s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial Y_p} & \frac{\partial T}{\partial r} & \frac{\partial T}{\partial T} & \frac{\partial T}{\partial M_s} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY_p \\ dr \\ dT \\ dM_s \end{pmatrix} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^*}$$

$$\Rightarrow dY_p = C' dY_p + I' dr + dT.$$

$$\Rightarrow dY_p = C'(a^*, b^*, c^*, d^*) dY_p + I'(a^*, b^*, c^*, d^*) dr + dT$$

양수 단

$\star$

연연

(C) 010M

$$D_{\alpha} M_s \Big|_{X=X^*} = D_{\alpha} M_D(Y_0, r) \Big|_{X=X^*}$$

$$\left( \frac{\partial M_s}{\partial Y_0} \frac{\partial M_s}{\partial r} \frac{\partial M_s}{\partial T} \frac{\partial M_s}{\partial M_s} \right) \begin{pmatrix} dY_0 \\ dr \\ dT \\ dM_s \end{pmatrix} \Big|_{X=X^*} = \left( \frac{\partial M_D}{\partial Y_0} \right) \frac{\partial M_D}{\partial r} \frac{\partial M_D}{\partial T} \frac{\partial M_D}{\partial M_s} \begin{pmatrix} dY_0 \\ dr \\ dT \\ dM_s \end{pmatrix} \Big|_{X=X^*}$$

$$\Rightarrow dM_s = \frac{\partial M_D}{\partial Y_0} \cdot dY_0 + \frac{\partial M_D}{\partial r} \cdot dr$$

$$\rightarrow dM_s = \frac{\partial M_D}{\partial Y_0} (a^*, b^*, c^*, d^*) dY_0 + \frac{\partial M_D}{\partial r} (a^*, b^*, c^*, d^*) dr$$

• 풍기단

# 5d

(d) (10 points) 선형화한 연립방정식에 대해서  $Y, r$ 을 나머지 변수들에 대한 읚함수 (implicit function)로 정리하고 위에서 규정한 현재 상태에서 비선형 연립방정식을 풀어라.

$$C' dY - dY + I' dr = C' dT$$

$$\frac{\partial M^D}{\partial Y_D} dY + \frac{\partial M^D}{\partial r} dr = dM_S + \frac{\partial M^D}{\partial Y_D} dT$$

10

$$\begin{pmatrix} C'-1 & I' \\ \frac{\partial M^D}{\partial Y_D} & \frac{\partial M^D}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C' \\ 1 & \frac{\partial M^D}{\partial Y_D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dM_S \\ dT \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C'-1 & I' \\ \frac{\partial M^D}{\partial Y_D} & \frac{\partial M^D}{\partial r} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & C' \\ 1 & \frac{\partial M^D}{\partial Y_D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dM_S \\ dT \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(C'-1)\left(\frac{\partial M^D}{\partial r}\right) - I'\left(\frac{\partial M^D}{\partial Y_D}\right)} \begin{pmatrix} \frac{\partial M^D}{\partial r} & -I' \\ -\frac{\partial M^D}{\partial Y_D} & C'-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C' \\ 1 & \frac{\partial M^D}{\partial Y_D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dM_S \\ dT \end{pmatrix}$$

主义

(10 points) 다른 모든 주제의 문제와 함께 주제를 완료하는 데 도움이 되는 범위 내에서 주제를 완료하는 경우에만 점수를 부여합니다.

# 5e

(e) (10 points) 다른 모든 조건이 변동 없는 상태에서  $M_S$ 만 증가할 경우  $Y, r$ 의 변동 방향을 기술하라. (방향이 명확하지 않을 경우 왜 명확하지 않은지 기술할 것)

- 앞문제가 오류일 경우라도 그에 기반하여 정확한 결론이 나오면 정답.
- 과정 설명 없이 결과만 기술하면 점수 없음.
- 선형화하여 풀지 않고 생으로(?) 결론을 도출한 경우도 정합성의 정도에 따라 부분점수 부여함.

# 5e

$$(dM_S > 0 \rightarrow dY? dr?)$$

$$dT = 0$$

$$dY = \frac{1}{\underbrace{(C'-1)\left(\frac{\partial M^D}{\partial r}\right)}_{+} - I'\left(\frac{\partial M^D}{\partial Y^D}\right)} \cdot -I'dM_S$$

$$dr = \frac{1}{\underbrace{(C'-1)\left(\frac{\partial M^D}{\partial r}\right)}_{-} - I'\left(\frac{\partial M^D}{\partial Y^D}\right)} \cdot (C'-1)dM_S$$

기

$$(C'-1) < 0, \frac{\partial M^D}{\partial r} < 0, I' < 0, \frac{\partial M^D}{\partial Y^D} > 0 \text{ 이므로 } \frac{1}{(C'-1)\left(\frac{\partial M^D}{\partial r}\right) - I'\left(\frac{\partial M^D}{\partial Y^D}\right)} > 0$$

$\therefore dY > 0$        $Y$ 는 증가하고       $r$ 은 감소한다.  
 $dr < 0$

# 6a

6. 다음 극대화 문제를 검토하고자 한다. 이어지는 물음들에 답하라. (답변이 곤란할 경우 감점을 감수하고  $n = 1$ 로 설정하고 문제를 풀 것.  $x, L$  따위의 notation이 통상적 관습과 다르게 쓰이고 있음에 주의할 것.)

$$\arg \max_L \Pi(L) = \mathbf{p} \bullet \mathbf{x} - wL$$

$$\mathbf{x}(L) = (\alpha_1 \ln L, \dots, \alpha_n \ln L), \quad \alpha_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- (a) (10 points) 위 생산함수에서 주어진 (given) 매개변수 (parameter)로 간주할만한 변수가 있는가? 이에 대해 논하라.

6. 다음 극대화 문제를 검토하고자 한다. 이어지는 물음들에 답하라. (답변이 곤란할 경우 감점을 감수하고  $n = 1$ 로 설정하고 문제를 풀 것.  $x, L$  따위의 notation이 통상적 관습과 다르게 쓰이고 있음에 주의할 것.)

$$\arg \max_L \Pi(L) = \mathbf{p} \bullet \mathbf{x} - wL \quad | P \geq 0, L \geq 0, W \geq 0.$$

$$\mathbf{x}(L) = (\alpha_1 \ln L, \dots, \alpha_n \ln L), \quad \alpha_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- (a) (10 points) 위 생산함수에서 주어진 (given) 매개변수 (parameter)로 간주할만한 변수가 있는가? 이에 대해 논하라.

L

L은 구하고자 하는 (극대화하고자 하는) 값이므로 주어지지 않음.

☞ x(L)은 L에 의해 정해지는 값이므로 주어지지 않음.

∴ 주어진 매개변수는 P, W.

정회정

# 6b

(b) (10 points) 위 극대화 문제를 풀기 위한 라그랑지안 함수를 제시하라

- 제약은 오직 input에 관해서만 성립하므로  $\alpha > 0$ 은 제약이 아님
- 따라서 제약 없는 라그랑지안 함수는 목적함수 그 자체임.
- 제약이 없으므로 NDCQ 검토도 의미 없음.
- 단,  $L > 0$  제약을 포함하는 것은 감점하지 않음. (이 경우 등호 없는 부등식이므로 반드시 not binding이며  $\lambda = 0$  을 의미하므로 동일 문제가 됨.)

# 6b

“특별한 제약 조건이 없으므로.”

$$f(L) = \mathbb{P} \cdot X - w \cdot L$$

$$= (p_1 \alpha_1 \ln L + p_2 \alpha_2 \ln L + \dots + p_n \alpha_n \ln L) - w \cdot L \text{ 이 된다.}$$

방식은

# 6c

(c) (10 points) 위 극대화 문제를 풀기 위한 1계조건 (FOC)을 제시하고 이를 만족하는 점(들)을 모두 찾아라.

- 라그랑지안함수에 오류가 있더라도 그에 기반하여 제대로 도출하면 정답 혹은 부분점수 부여.

# 6c

$$\pi(L) = P_1 \overset{\alpha_1}{l_n} L + P_2 \overset{\alpha_2}{l_n} L + P_3 \overset{\alpha_3}{l_n} L + \dots + P_n \alpha_n l_n L - W \cdot L \quad |P = (P_1, \dots, P_n)$$

$$= l_n L (P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 + \dots + P_n \alpha_n) - W \cdot L$$

$$D\zeta_L = 0$$

(try 2 En)

$$\frac{P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 + \dots + P_n \alpha_n}{L} - W = 0$$

$$L = \frac{P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 + \dots + P_n \alpha_n}{W}$$

# 6d

(d) (10 points) 위에서 찾은 모든 점(들)에 대해 NDCQ 를 검토하라

- FOC가 잘못 설정되었더라도 그에 기반하여 NDCQ 를 검토하기는 어려움
- binding 되어야만 NDCQ 검토가 성립하는데 그러한 경우는 존재하지 않기 때문임.
- 만일 제약식을 포함시키는 오류를 범한 경우라면 그에 기반하여 제대로 도출했을 경우는 정답으로 인정할 수 있음.
- 하지만 그렇더라도 NDCQ 검토가 필요 없다고 명확히 진술해야 함.

# 6d

points) 위에서 찾은 모든 점(들)에 대해 NDCQ 를 검토하라  
제약식이 존재하지 않기 때문에 NDCQ를 퀘션으로는 필요가 없다  
 $\hookrightarrow$  MPCQ  
PASS

내글

# 6e

(e) (10 points) 위에서 찾은 모든 점(들)에 대해 2계조건 (SOC)을 검토하라. (어려울 경우  
감점을 감수하고  $n = 2$ 인 경우로 풀어라.)

- 사실 이 문제는  $L$ 에대한 1변수 문제임.
- 따라서 SOC는  $1 \times 1$  matrix로 나타나며, 이때 +이면 PD, -이면 ND와 동일함.

6e

$$\frac{\partial d}{\partial L} = (P_1 \alpha_1 + \dots + P_n \alpha_n) L^{-1} - w$$

$$\frac{\partial^2 d}{\partial L^2} = -(P_1 \alpha_1 + \dots + P_n \alpha_n) L^{-2} < 0$$

$q \text{Nm}^2$

극대화 성립

$$d''(L) = (P_1 \alpha_1 + \dots + P_n \alpha_n) \cdot$$

$$\frac{w^2}{(P_1 \alpha_1 + \dots + P_n \alpha_n)^2}$$

$w^2$

$$(P_1 \alpha_1 + \dots + P_n \alpha_n)$$

# 7a

7. 다음 극대화 문제를 검토하고자 한다. 이어지는 물음들에 답하라.

$$\arg \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 x_3 \quad s.t. \quad \sum_i x_i^2 = 1, \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

(a) (10 points) 위 극대화 문제를 풀기 위한 라그랑지안 함수를 제시하라

(a) (10 points) 위 극대화 문제를 풀기 위한 라그랑지안 함수를 제시하라

~~def~~  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mu, \lambda) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \mu(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + \lambda(1 - x_1 - x_2 - x_3)$

10

365

# 7b

(b) (10 points) 위 극대화 문제를 풀기 위한 1계조건 (FOC)을 제시하고 (Mixed constraint에 대해서 확신이 없을 경우 감점을 감수하고 모든 제약을 등제약으로 간주하여 풀 것)

10 (b) (10 points) 위 극대화 문제를 풀기 위한 1계조건 (FOC)을 제시하고 (Mixed constraint에 대해서 확신이 없을 경우 감점을 감수하고 모든 제약을 등제약으로 간주하여 풀 것)

$$\textcircled{1} \quad D \nmid (\mathbf{x}, M, \lambda) \quad \mathbf{x}, M = \emptyset$$

$$\textcircled{2} \quad \lambda \geq 0$$

$$\textcircled{3} \quad \lambda (-1 + x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

$$\textcircled{4} \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

72%  
72%

# 7c

(c) (10 points) 위 조건을 만족하는 점(들)을 모두 찾아라.

(c) (10 points) 위 조건을 만족하는 점(들)을 모두 찾아라.

$$i) \text{ if } \lambda > 0 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}_{=1} + 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) =$$

$$\therefore 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) = 0 \quad \text{---} \textcircled{4}$$

10

① λ를 통해 x를 찾기

$$x_2 x_3 - x_1 x_3 + 2\lambda x_2 - 2\lambda x_1 = 0.$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 + 2\lambda) = 0$$

( $\neq 0$ )

0/26

$$ii) \text{ if } \lambda > 0 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 > 1.$$

then ① case 3λ =  $\frac{x_2 x_3}{x_1} = \frac{x_1 x_3}{x_2} = \frac{x_1 x_2}{x_3}$  가 된다.

$$\text{then } x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = \frac{1}{3} \quad (\because \sum x_i^2 = 1)$$

$x_1 + x_2 + x_3 > 1$  을 만족하기 위해서는  
 $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  only. ( $\because \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ )

$$\underline{\underline{X = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}}$$

only

If  $x_1 = x_2$

④ 식이 되는,

$$x_2^2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0$$

$$\rightarrow x_2(x_2 + 2x_3) = 0$$

$$\text{if } x_2 \geq 0 \rightarrow x_1 = 0.$$

$$\text{if } x_2 = -2x_3$$

then  $\lambda = 0$  is contradiction!

$$\text{then } x_1 = x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = -\frac{1}{3}$$

but ④ 식이 되는  $\lambda < 0$  contradiction!

If  $x_3 = -2\lambda$

( $x_1 \neq 0$ )

$\therefore \mu > 0$ .

$$\begin{cases} \lambda = 2x_3^2 - x_1 x_2 \\ \lambda = 2x_3 x_2 - x_1 x_3 = (2x_2 - x_1)x_3 \\ \lambda = 2x_1 x_3 - x_2 x_3 = (2x_1 - x_2)x_3 \end{cases}$$

$2x_2 = x_1$  ) contradiction!  
 $2x_1 = x_2$  ) contradiction!

# 7d

(d) (10 points) 위에서 찾은 모든 점(들)에 대해 NDCQ 를 검토하라

$x > 0$  은 없으므로,  $H_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$   $\text{rank}(H_x) = 1.$  (If  $m=1$ )

이 23<sup>30</sup>을

NDCQ. pass.

# 7e

(e) (10 points) 위에서 찾은 모든 점(들)에 대해 2계조건 (SOC)을 검토하라

$$BH = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2n & x_3 & x_2 \\ 1 & x_3 & -2n & x_1 \\ 1 & x_2 & x_1 & -2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2n & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2n & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2n \end{pmatrix}$$

$X = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$  &  $n > 0$

$$n-m=2, \quad LPM_4 = 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -2n & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2n \end{vmatrix}_{<0} + 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2n & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2n \end{vmatrix}_{>0} + 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -2n & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2n \end{vmatrix}_{>0} < 0$$

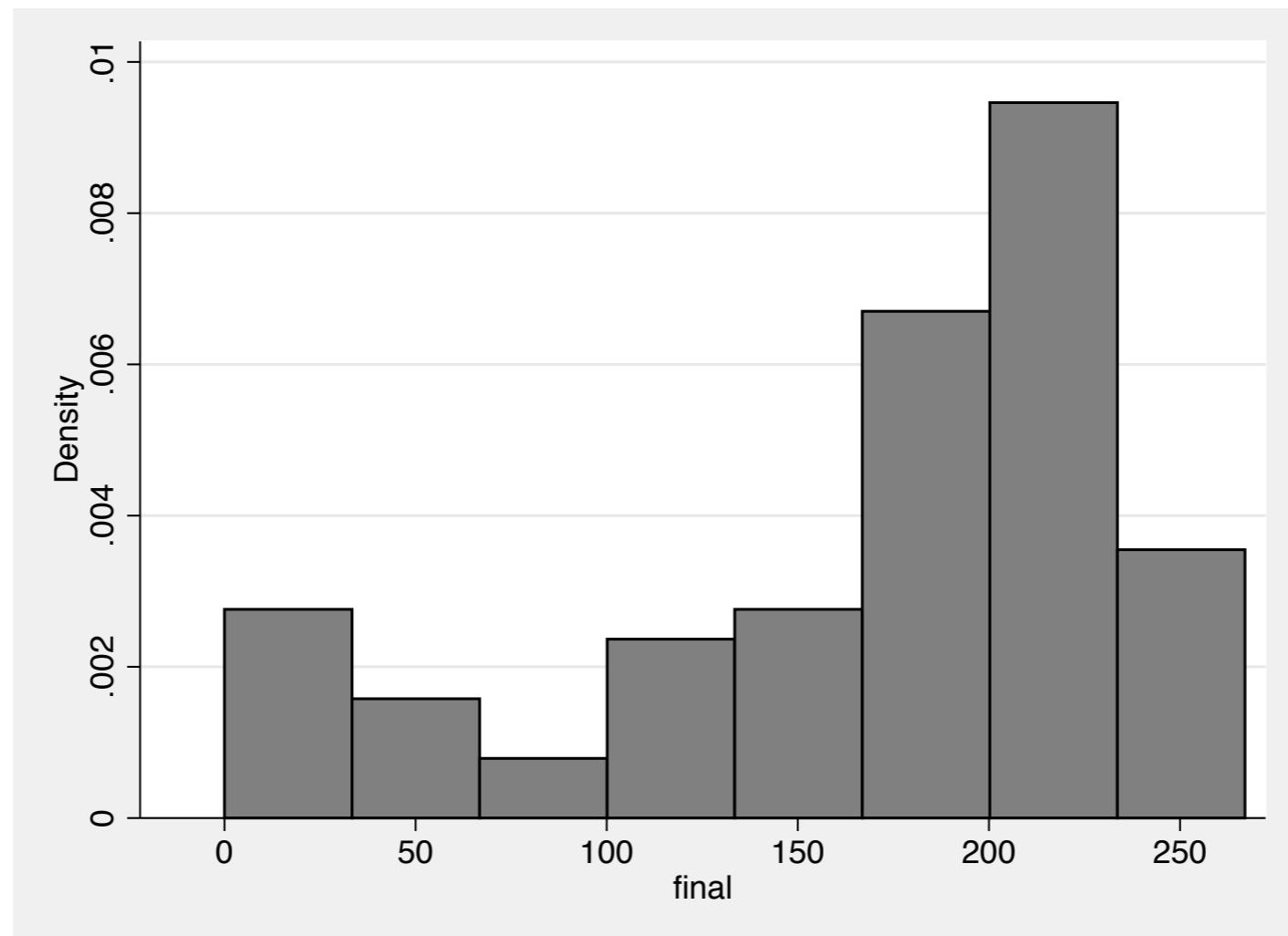
$$LPM_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2n & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2n \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^3 \underbrace{\left( -2n - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}_{<0} + 1 \cdot (-1)^4 \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{3}} + 2n \right)}_{>0} > 0$$

st. local

$$\therefore ND! \Rightarrow f(x^*) = \frac{1}{3} \text{ max}$$

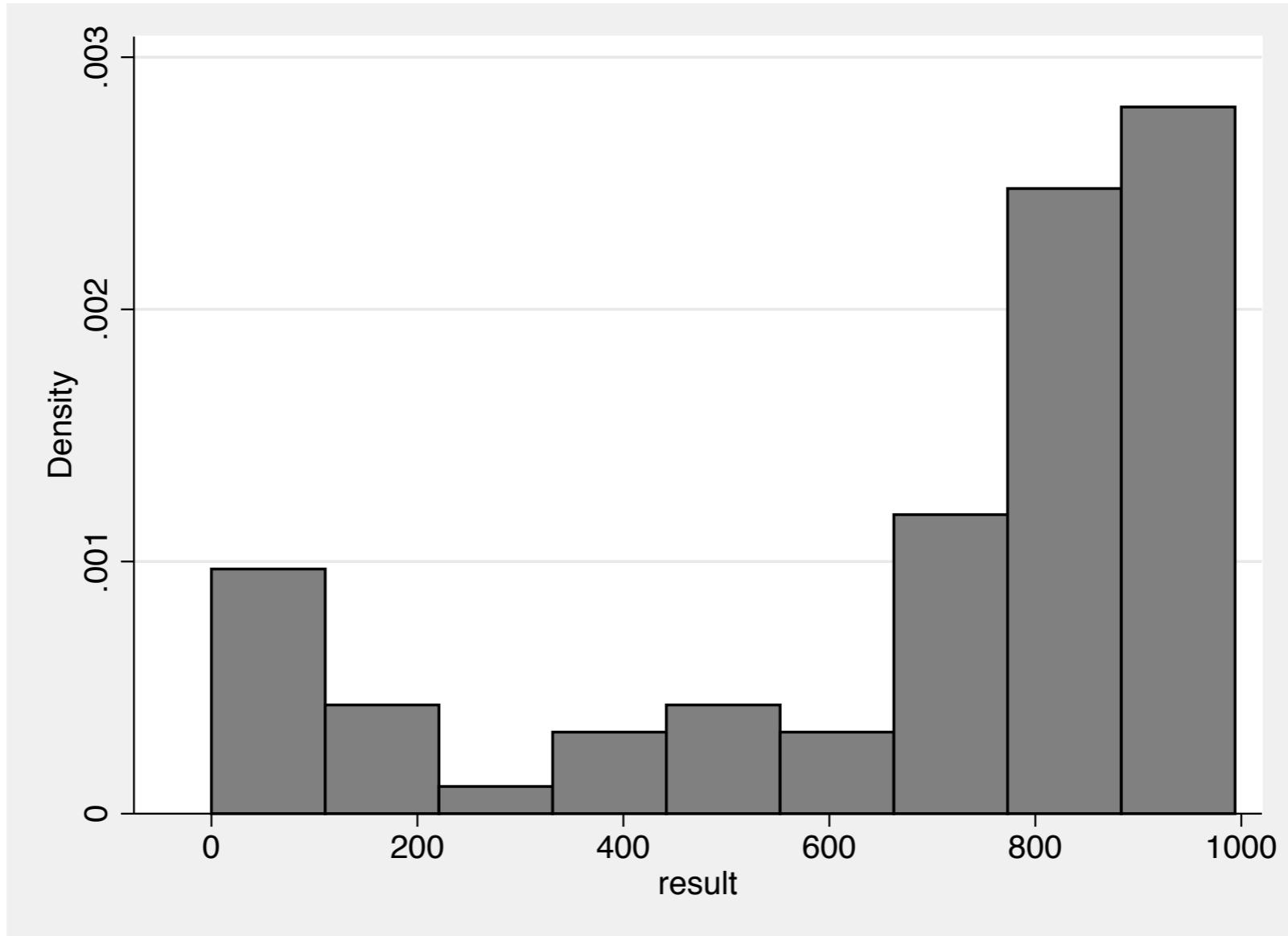
# 점수통계 (기말)

| Variable | Obs | Mean     | Std. Dev. | Min | Max |
|----------|-----|----------|-----------|-----|-----|
| final    | 76  | 167.1579 | 71.58586  | 0   | 267 |

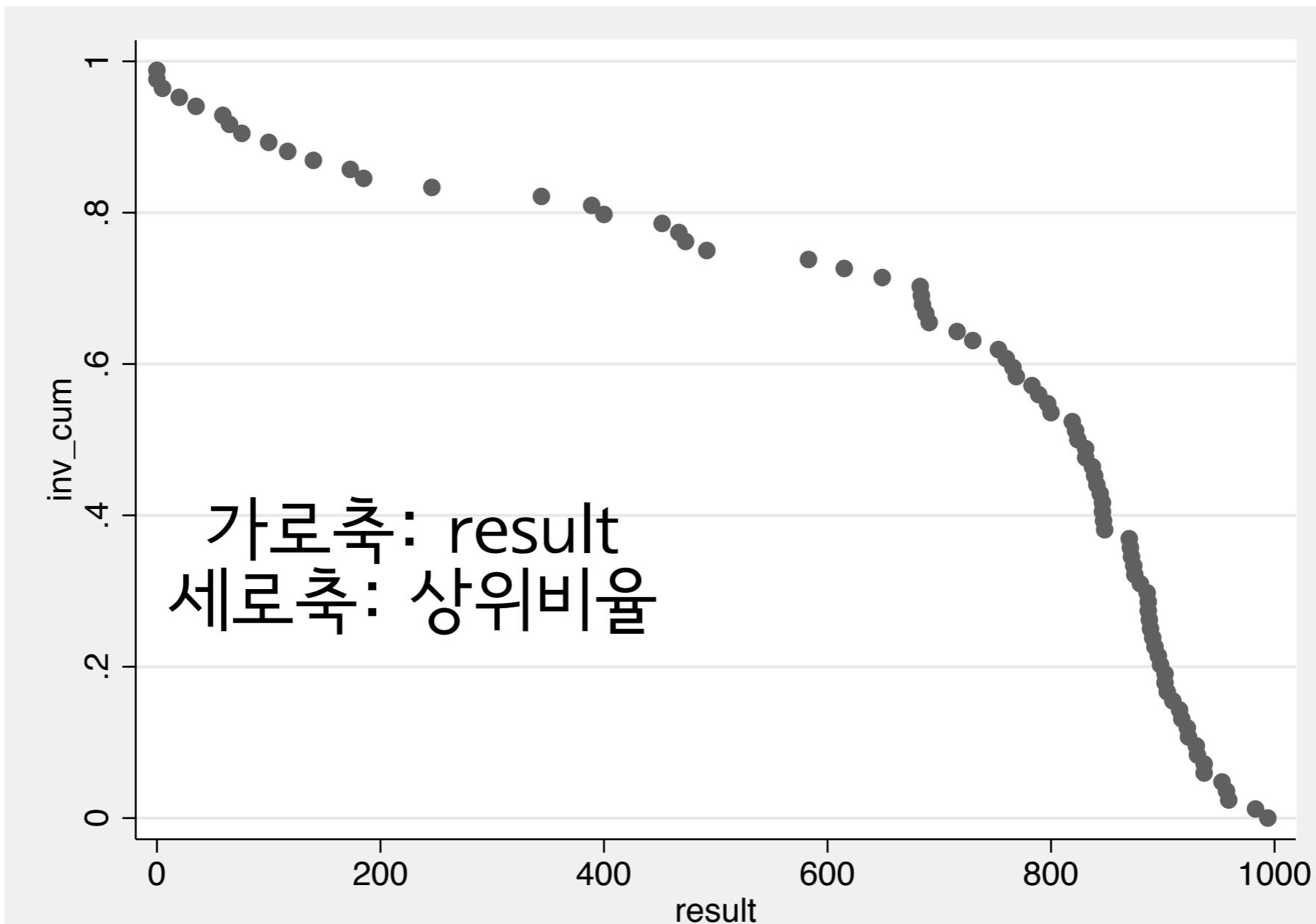


# 점수통계 (최종점수)

| Variable | 0bs | Mean     | Std. Dev. | Min | Max |
|----------|-----|----------|-----------|-----|-----|
| result   | 84  | 680.7857 | 302.5036  | 0   | 994 |



# 최종점수 분포 2



자신의 점수에 해당하는 세로축이 클래스 내 상대적 비율임.  
예: 800점 → 상위 약 55%

**한학기 동안  
수고하셨습니다!**