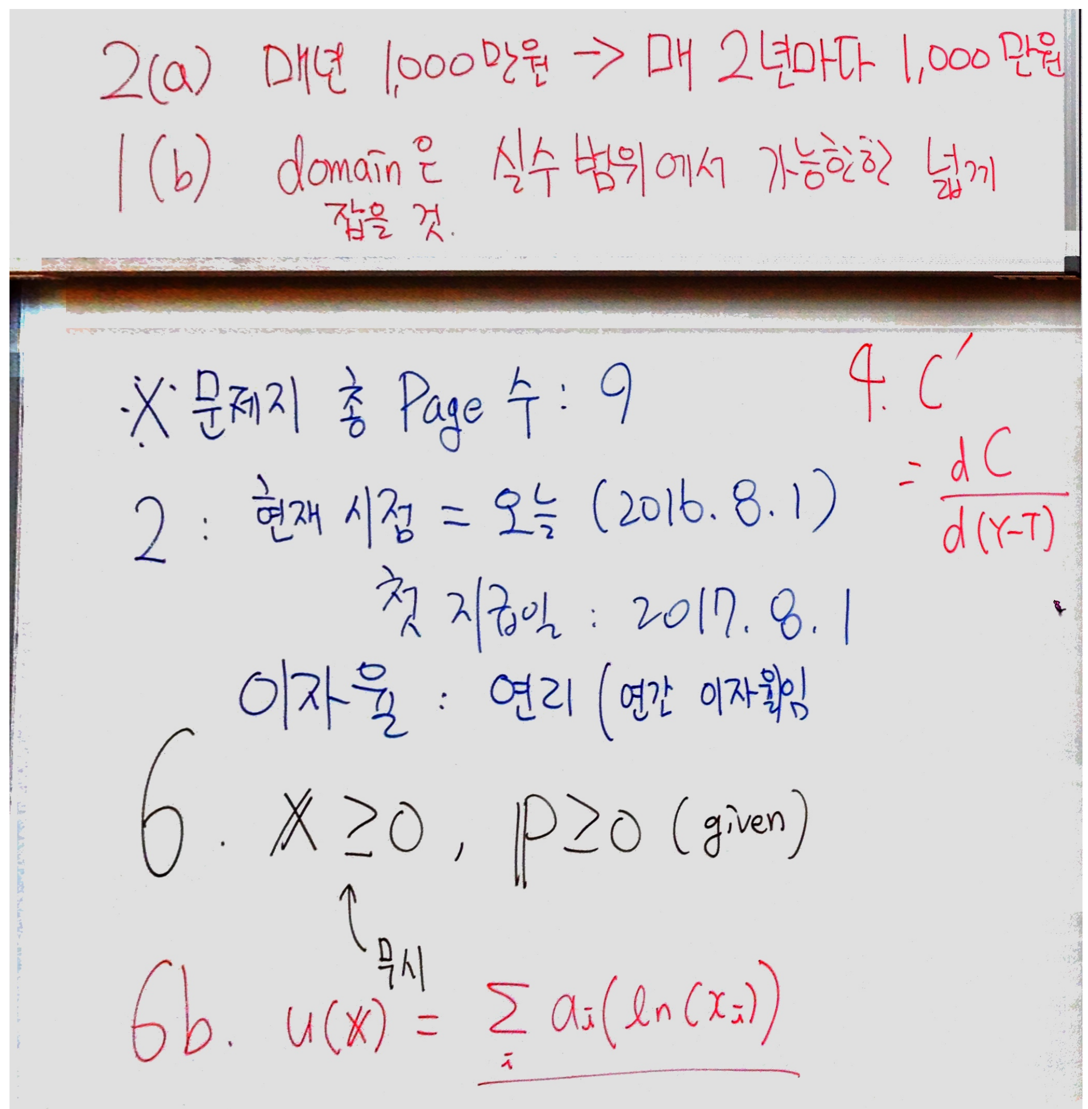
경제수학 기말해설 +기초통계

212.214-001
조남운 (2016 여름학기)

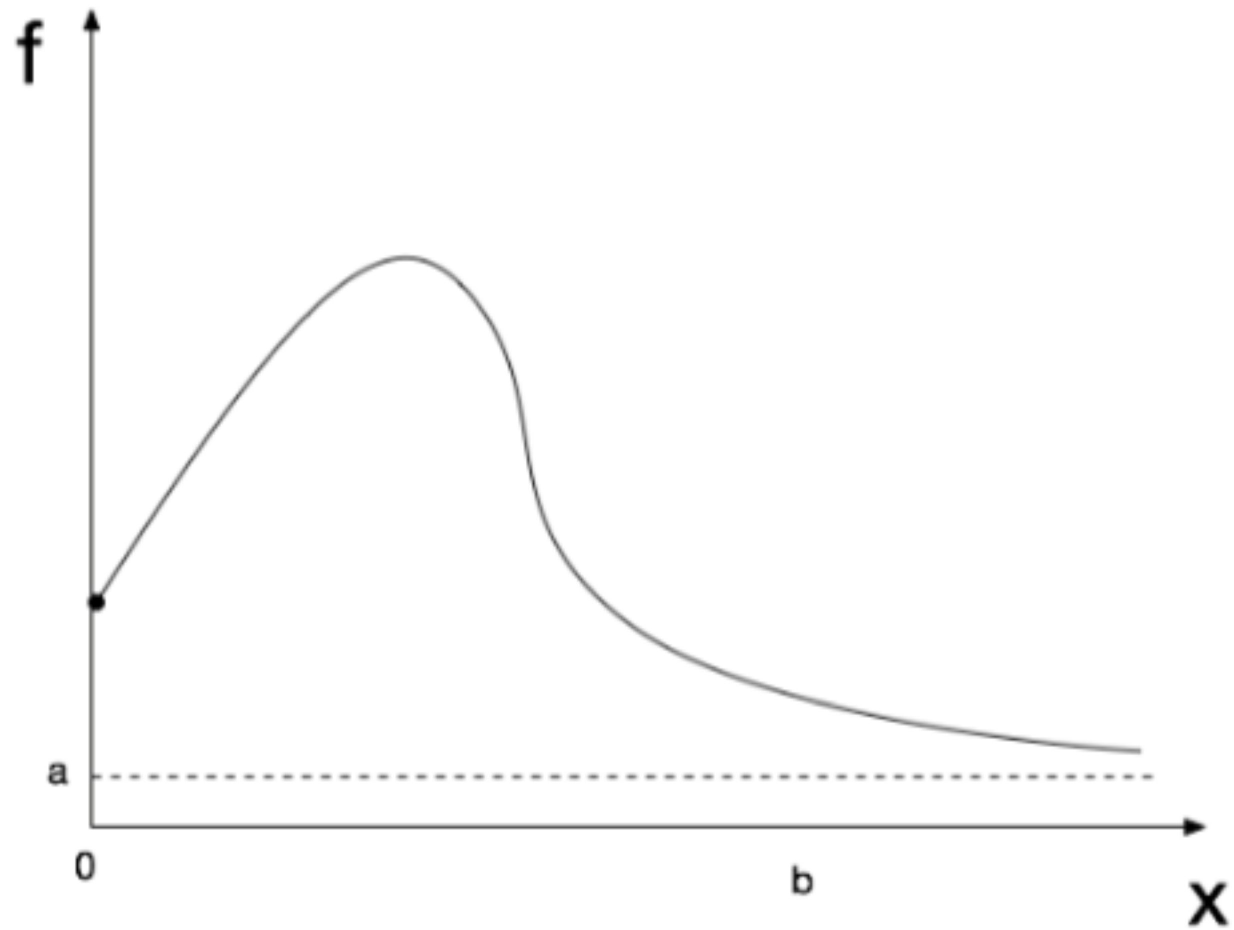
Nam-Un, Cho/Center for Distributive Justice/ mailto:namun@snu.ac.kr

참고사항



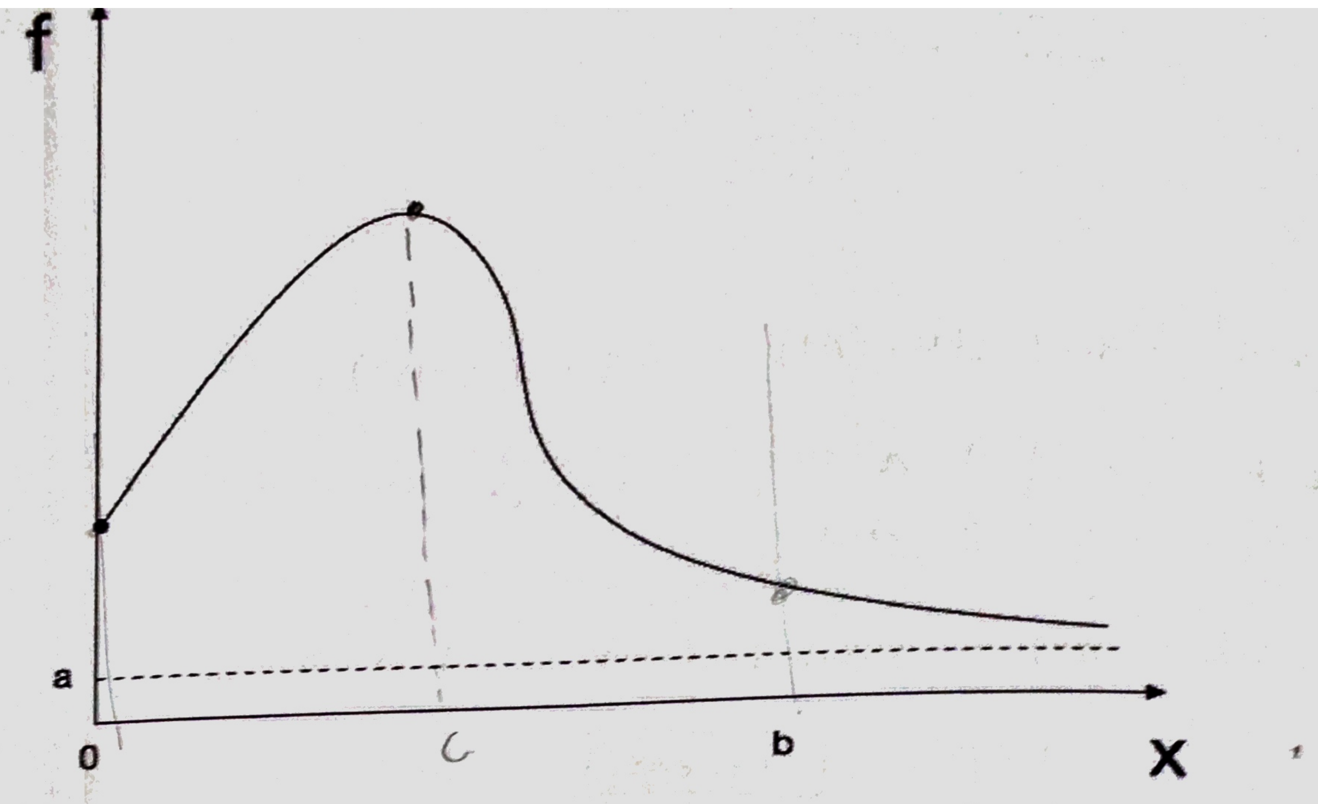
Nam-Un, Cho/Center for Distributive Justice/ mailto:namun@snu.ac.kr

(a) (5 points) 다음 함수와 주어진 정의역 (domain) D_1, D_2 에 대해서 global maximum, global minimum, local maximum, local minimum이 존재하는지 판단하고 존재한다면 모두 기술하라. (boundary max/min 은 모두 local max/min 으로 간주하라. 수평선 (horizontal line) a 는 f 의 점근선 (asymptote) 이다.)



- $D_1 = [0, b)$
- $D_2 = (0, \infty)$

5



	global max	global min	local max	local min
• $D_1 = [0, b)$	$f(c)$	X	$f(c)$	$f(0)$
• $D_2 = (0, \infty)$	$f(c)$	X	$f(c)$	X

장남거

(b) (5 points) 다음 함수들 중 동일한 함수들을 무리지을 것.

$$f(x) = ax + b, \quad g(1/x) = a(1/x) + b, \quad h(\ln x) = a \ln x + b$$

$$i(a) = ax + b, \quad j(1/a) = (1/a)x + b, \quad k(\ln a) = a \ln a + b$$

$$l(a) = a \cdot a + b, \quad m(b) = ax + b, \quad n(\ln b) = ax + \ln b$$

1b

- input이 헷갈린다면 제 3의 symbol (가령 t)를 input으로 통일하고 domain을 명시하여 검토하면 됨.

이재하

(b) (5 points) 다음 함수들 중 동일한 함수들을 무리지을 것.

답: f(x)와 h(x) / m(b)와 n(ln b)

5

$$f(x) = ax + b, \quad \cancel{g(1/x) = a(1/x) + b}, \quad h(\ln x) = a \ln x + b$$

$$i(a) = ax + b, \quad j(1/a) = \cancel{(1/a)x + b}, \quad \cancel{k(\ln a) = a \ln a + b}$$

a>0

$$l(a) = a \cdot a + b, \quad m(b) = ax + b, \quad n(\ln b) = ax + \ln b$$

m(b), n(ln b) / f(x), h(x)는 함수의 Domain이 같고, 치수($\mathbb{R}^2$)이 같으므로 같은 함수.

g(x)는 1/x의 값이 0이 될수 없기 때문에 f, h와 다른 함수다.

i(a)와 j(a) 역시 f, g와 같은 이유로 같은 함수가 아니다.

k(ln a)와 l(a)는 a의 범위가 0보다 커야하기 때문에 다른 함수다.

Nam-Un, Cho/Center for Distributive Justice/ mailto:namun@snu.ac.kr

(c) (5 points) 다음 두 행렬 A_2, A_3 의 정부호성 (definiteness) 이 음정부호 (negative definite, ND) 가 되기 위한 조건을 기술하라.

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ a & -1 & a \\ a & a & -1 \end{pmatrix}$$

1c

- 인수분해 실패 -1
- 부등식에 등호조건 포함 -2
- lpm은 교집합으로 합쳐져야 함

(d) (5 points) 위 결과를 통해 위와 같은 형태의 $n \times n$ 행렬이 ND가 되게 하기 위한 a의 범위를 유추하고, $n = 4$ 일때 유추한 조건에 부합하는 적당한 0이 아닌 수를 a에 대입하여 ND가 성립하는지 확인하라.

1d

- 지수적으로 유추 -1
- 유추의 근거가 불분명 -2
- 대입과정 검토 오류 -1 - -2
- 단, 일반적 조건을 증명한 경우는 굳이 대입할 필요 없음

(c) (5 points) 다음 두 행렬 A_2, A_3의 정부호성(definiteness)이 음정부호(negative definite, ND)가 되기 위한 조건을 기술하라.

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ a & -1 & a \\ a & a & -1 \end{pmatrix}$$

5

$LPM_2(A_2) = 1-a^2 > 0 \quad 1 > a^2$

$LPM_1(A_2) = -1 < 0$

$\therefore -1 < a < 1$

$LPM_3(A_3) = (-1)\cdot(-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{vmatrix} + a(-1)^3 \begin{vmatrix} a & a \\ a & -1 \end{vmatrix} + a(-1)^4 \begin{vmatrix} a & a \\ -1 & a \end{vmatrix}$

$= (-1)(1-a^2) - a(-a-a^2) + a(a^2+a)$

$= -1+a^2+a^2+a^3+a^3+a^2$

$= 2a^3+3a^2-1 < 0 \Rightarrow a<-1, -1<a<\frac{1}{2}$

$LPM_2(A_3) = 1-a^2 > 0 \Rightarrow -1<a<1$

$LPM_1(A_3) = -1 < 0$. $\therefore -1<a<\frac{1}{2}$

김소연

(d) (5 points) 위 결과를 통해 위와 같은 형태의 $n \times n$ 행렬이 ND가 되게 하기 위한 a의 범위를 유추하고, $n = 4$ 일때 유추한 조건에 부합하는 적당한 0이 아닌 수를 a에 대입하여 ND가 성립하는지 확인하라.

5

$-1 < a < \frac{1}{n-1}$

$LPM_4(A_4) = -3a^4-8a^3-6a^2+1 > 0$

$n=4$, if $a=\frac{1}{4}$

$-3\left(\frac{1}{4}\right)^4-8\left(\frac{1}{4}\right)^3-6\left(\frac{1}{4}\right)^2+1$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^3\left(-\frac{3}{4}-8\right) - \frac{6}{16}+1$

$= \frac{1}{64}\left(\frac{-35}{4}\right) - \frac{96}{16^2}+1$

$= \frac{-131}{256}+1 > 0$ $\therefore$ ND 성립

(e) (5 points) 다음 함수의 도함수를 구하라. (Hint: $\cos' x = -\sin x$)

$$f(x) = \sqrt{\cos[(x^2 + x + 1)^{100} + x^3 + 1]}$$

(4)(-4)>0 이므로 성립한다.

5

(e) (5 points) 다음 함수의 도함수를 구하라. (Hint: $\cos' x = -\sin x$)

$$f(x) = \sqrt{\cos[(x^2 + x + 1)^{100} + x^3 + 1]}$$

이믈용

$$f'(x) = \frac{-\sin[(x^2+x+1)^{100} + x^3+1]}{2\sqrt{\cos[(x^2+x+1)^{100}+x^3+1]}} \cdot [100 \cdot (x^2+x+1)^{99} \cdot (2x+1) + 3x^2]$$

2. 10%의 이자율을 연속적 복리 (continuous compound interest) 로 계산하는 상황을 가정하고 이어지는 물음에 답하라. (연속적으로 다루는 것에 어려움을 느낀다면, 감점을 감수하고 이산적으로 다루도록 한다.)

   (a) (5 points) 2016년 현재 시점 (8.1) 부터 향후 10년간 (2017년 8월 1일에 처음 지급하여 5회 지급) 매 2년마다 1000만원을 지급하는 연금의 현재가치는 얼마인가?

   (b) (5 points) 위와 동일하지만 무한히 지급하는 연금의 현재가치는 얼마인가?

2

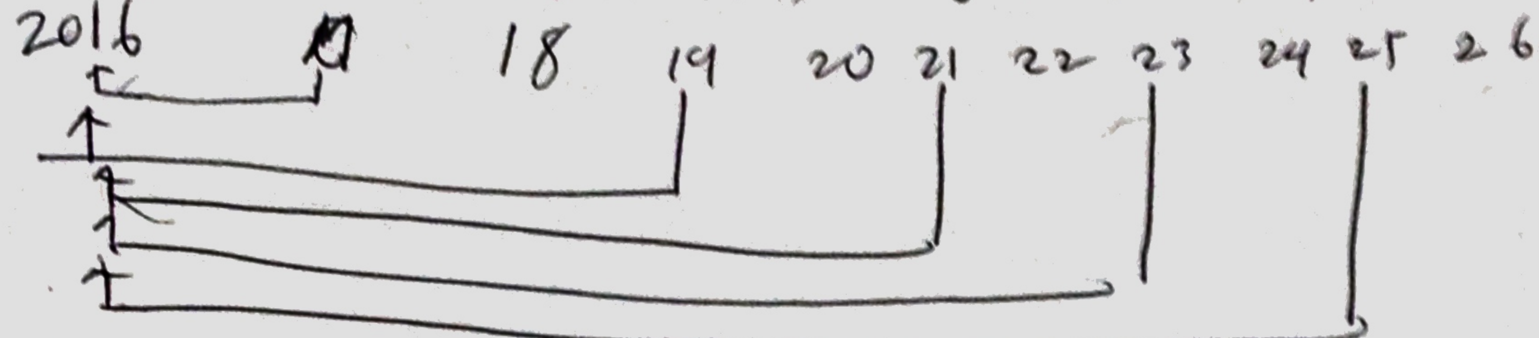
- 금액 지불이 이산적이므로 등비급수의 형태가 됨
- discrete compounding -1
- 1+r=1.1 임
- 등비급수는 풀어야 함

1000만원을 지급하는 연금의 현재가치는 얼마인가?

continuous compound : $B = Ae^{rt} \Rightarrow A = B \cdot e^{-rt}$

5

Annuity 1년 10% (연속복리) → 2년 12.1% (연속복리) $(0.1)^2$



$$PV = 1000 \times e^{-0.1\times1} + 1000 \times e^{-0.1\times3} + 1000 \times e^{-0.1\times5} + 1000 \times e^{-0.1\times7} + 1000 \times e^{-0.1\times9}$$

조형민

(b) (5 points) 위와 동일하지만 무한히 지급하는 연금의 현재가치는 얼마인가?

5

$$PV = 1000\, e^{-0.1}\left(1 + e^{-0.2} + e^{-0.4} + \cdots \sim\right)$$

$$e^{-0.2} \cdot PV = 1000 \cdot e^{-0.1}\left(e^{-0.2} + e^{-0.4} + \cdots \sim\right)$$

$\lim_{n\to\infty} e^{-(0.1)\times n} = 0$ 이므로

$$(1 - e^{-0.2})PV = 1000 \cdot e^{-0.1}$$

$$PV = \frac{1000 \cdot e^{-0.1}}{1 - e^{-0.2}}$$

이산적 복리계산

$$PV = \frac{1000만}{(1+0.1)} + \frac{1000만}{(1+0.1)^3} + \frac{1000만}{(1+0.1)^5} + \frac{1000만}{(1+0.1)^7} + \frac{1000만}{(1+0.1)^9}$$

4

아ㄴㄴ (-1)

김가현

(b) (5 points) 위와 동일하지만 무한히 지급하는 연금의 현재가치는 얼마인가?

4

$$PV = \frac{\frac{1000만}{1.1}}{1 - \frac{1}{(1.1)^2}} = \frac{1100만}{(1.1)^2 - 1} = \frac{1100만}{0.21}$$

$$= \frac{11억}{21} \fallingdotseq 약\ 5천2백4십8만$$

3. 다음 방정식에 대해서 이어지는 물음에 답하라.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 1 & 9 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) (5 points) 위 방정식을 기본행연산 (Elementary Row Operation) 으로 풀어라.

3a

- free, basic variable이 명확히 구분되어 있어야 함
- free, basic variable은 정하기에 따라 다양할 수 있지만 각각 두 개를 넘지는 않음

(b) (5 points) 위 방정식을 system of implicit functions로 간주하고 유일한(unique) 해가 도출될 수 있게 하기 위해 방정식을 재구성하여 그 해를 구하라

3b

- free variable을 주어진 수로 취급하여 내생 변수가 외생 변수의 함수(implicit function)로 취급해야 함
- free variable에 임의의 수 대입: -2 - -3
- 선형화 -3 - -4

(c) (5 points) 위에서 도출한 해에 대해서 x_4 에 변화율에 대한 x_1 의 변화율(즉, elasticity)을 구하라.

3c

- 앞 문제의 오류 여부와 무관하게 탄력성 도출하면 정답처리

...기본행연산 (Elementary Row Operation) 으로 풀어라.

첨삭행렬. $\hat{A}$는.

5

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -9 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -9 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) : \ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ 이라고 하면.}$$

free variable : $x_3=t,\ x_4=s \quad (t, s \in \mathbb{R})$

basic variable : $x_1=-3+9t-s$

$x_2=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}s$

5

(b) (5 points) 위 방정식을 system of implicit functions로 간주하고 유일한 (unique) 해가 도출될 수 있게 하기 위해 방정식을 재구성하여 그 해를 구하라

x_3, x_4를 exogenous variable로 간주하면.

$$x_1+6x_2=5+9x_3-3x_4$$
$$x_1+9x_2=9+6x_3-4x_4$$
$$3x_2=4-x_3-x_4.$$

여기서

로 재구성할 수 있다.

위식을 풀면.

$$x_2=\frac{4-x_3-x_4}{3}, \quad x_1=9+6x_3-4x_4-12+3x_3+3x_4$$
$$=-3+9x_3-x_4.$$

5

(c) (5 points) 위에서 도출한 해에 대해서 x_4에 변화율에 대한 x_1의 변화율 (즉, elasticity) 을 구하라.

$$\varepsilon=\frac{\partial x_1/x_1}{\partial x_4/x_4}=\frac{x_4}{x_1}\times\frac{\partial x_1}{\partial x_4}=\left(\frac{x_4}{-3+9x_3-x_4}\right)\times(-1)$$
$$=\frac{x_4}{3-9x_3+x_4}$$

Nam-Un, Cho/Center for Distributive Justice/ mailto:namun@snu.ac.kr

4. 다음 IS-LM 모형을 검토하라. 이 경제는 정부 지출이 없고, 모든 세금은 투자지출에서만 조달하는 경제이다.

$$
\begin{aligned}
Y &= C + I \\
C &= C(Y - T), \quad C' \in (0,1) \\
I &= I(r) \quad I' < 0 \\
M^s &= M(Y, r), \quad \frac{\partial M}{\partial Y} > 0, \frac{\partial M}{\partial r} < 0 \\
T &= tI \quad t \in (0,1) \\
S &= Y - C
\end{aligned}
$$

- Y: 총소득, C: 총소비지출, I: 총투자지출, M^s: 총 화폐공급, T: 총 세금, S: 총저축, t: 투자에 대한 세율, r: 이자율

(a) (5 points) 위 모형을 Y, r에 대한 모형으로 간주하고 현재 상태를 규정한 뒤 그 근방에서 선형화하라.

(b) (10 points) 만일 정부가 투자세율(t)만을 줄이고 나머지 정부가 통제 가능한 파라미터는 변동하지 않는 것으로 둘 경우 총소득과 이자율에 미치는 영향을 위 모형을 통해 추론하라.

Nam-Un, Cho/Center for Distributive Justice/ mailto:namun@snu.ac.kr

4

- S는 모형과 무관한 정의식
- C는 Y,t,r의 함수임. 체인룰 엄격히 적용해서 풀어야 함 (4b)
- T는 소거되어 사라지고 t만으로 표현되어야 함 (4b
- 4a는 모형 세팅
- 4b는 모형 풀이로 채점함. 단, 수업의 is lm 모형으로 푼 것은 대폭 감점함

5 (a) (5 points) 위 모형을 Y, r에 대한 모형으로 간주하고 현재 상태를 규정한 뒤 그 근방에서 선형화하라.

$\frac{\partial I(r)}{\partial r} \cdot dr +$

$$\begin{cases} Y = C(Y-T) + I(r) = C(Y - tI(r)) + I(r) \\ M^s = M(Y, r) \\ I(r) = S = Y - C(Y - tI(r)) \end{cases}$$

$$dY = \frac{\partial C}{\partial Y} \cdot dY + \frac{\partial C}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial C}{\partial r} \cdot dr = \frac{\partial C(Y-tI(r))}{\partial (Y-tI(r))} \cdot \frac{\partial (Y-tI(r))}{\partial Y} \cdot dY + \frac{\partial C(Y-tI(r))}{\partial (Y-tI(r))} \cdot \frac{\partial (Y-tI(r))}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial C(Y-tI(r))}{\partial (Y-tI(r))} \cdot \frac{\partial (Y-tI(r))}{\partial r} \cdot dr + I' \cdot dr$$

$$= C' \cdot dY - I(r) \cdot C' \cdot dt - t I' C' dI(r) + I' dr$$

$$dM_s = \frac{\partial M}{\partial Y} \cdot dY + \frac{\partial M}{\partial r} \cdot dr$$

$$\begin{cases} dY = C' dY - I \cdot C' \cdot dt - t \cdot I' \cdot C' \cdot dr + I' dr \\ dM_s = \frac{\partial M}{\partial Y} \cdot dY + \frac{\partial M}{\partial r} \cdot dr \end{cases}$$

10 (b) (10 points) 만일 정부가 투자세율 (t)만을 줄이고 나머지 정부가 통제 가능한 파라미터는 변동하지 않는 것으로 둘 경우 총소득과 이자율에 미치는 영향을 위 모형을 통해 추론하라.

임찬우

위의 결과를 정리하면,

$$\begin{cases} (1-C') dY + (t \cdot I'C' - I') dr = -I \cdot C' dt \\ \frac{\partial M}{\partial Y} \cdot dY + \frac{\partial M}{\partial r} dr = dM_s \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1-C' & t \cdot I'C' - I' \\ \frac{\partial M}{\partial Y} & \frac{\partial M}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I \cdot C' \cdot dt \\ dM_s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial M}{\partial r} & I' - t \cdot I' \cdot C' \\ -\frac{\partial M}{\partial Y} & 1 - C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I \cdot C' \cdot dt \\ dM_s \end{pmatrix}$$

$$D = (1-C') \cdot \frac{\partial M}{\partial r} - \frac{\partial M}{\partial Y} (t \cdot I'C' - I')$$

$D < 0$

$$dY = \frac{1}{D} \left\{ -\frac{\partial M}{\partial r} \cdot I \cdot C' \cdot dt - dM_s \cdot I' + dM_s \cdot t \cdot I'C' \right\}$$

$dM_s = 0$, dt가 $-$일 때 dY는 $+$

$\therefore$ $\boxed{\text{총소득 증가}}$

$$dr = \frac{1}{D} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial Y} \cdot I \cdot C' \cdot dt + dM_s - C' dM_s \right)$$

$dM_s = 0$. dt가 $-$일 때 dr은 $+$. $\boxed{\therefore \text{이자율 증가}}$

5. 아래 차분 방정식에 대해서 이어지는 물음에 답하라.

$$x_{1,t+1} = x_{1,t} + 2x_{3,t}$$
$$x_{2,t+1} = 5x_{2,t}$$
$$x_{3,t+1} = 3x_{1,t} + 2x_{3,t}$$

(a) (5 points) 위 차분 방정식을 matrix form으로 나타내고, 대각화 가능한지 (diagonalizable) 검토하라.

(b) (5 points) 대각화 가능할 경우, 위 coupled system을 uncoupled system으로 변환하여 기술하고, (변환한 system에 대한 symbol로는 $\mathbf{y}_t$, 혹은 $y_{i,t}$ 를 사용하라.) $t = T$ 일 때의 일반식을 $x_{i,t}$에 대해 기술하라.

5

- 계수행렬(주로 A행렬로 많이 쓴)이 invertible 하다고 대각화 가능한 것은 아님. eigenvlaue를 봐야 함

5.(a)
$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ x_{3,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{3,t} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - rI) = 0 = \begin{vmatrix} 1-r & 0 & 2 \\ 0 & 5-r & 0 \\ 3 & 0 & 2-r \end{vmatrix} = (5-r) \cdot \begin{vmatrix} 1-r & 2 \\ 3 & 2-r \end{vmatrix}$$

$$= (5-r)\big[\overbrace{\underbrace{(1-r)(2-r)-6}_{r^2-3r-4}}^{2-3r+r^2-6}\big] = (5-r)(r-4)(r+1)$$

$r = -1, 4, 5$ 로 서로 다른 세 실근을 가진다. 따라서 대각화 가능하다.

(b) i) $r_1 = -1$: $A - rI = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 이가영

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + 2v_3 \\ 6v_2 \\ 3v_1 + 3v_3 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ii) $r_2 = 4$
$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3v_1 + 2v_3 \\ v_2 \\ 3v_1 - 2v_3 \end{pmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

iii) $r_3 = 5$
$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4v_1 + 2v_3 \\ 0 \\ 3v_1 - 3v_3 \end{pmatrix} \rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = [v_1 \; v_2 \; v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad PDP^{-1} = A$$

$$D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{matrix}}_{P} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right.\right) \rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right.\right) \rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right.\right) \rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \underbrace{\begin{matrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}}_{P^{-1}} \right.\right)$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ x_{3,t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{3,t} \end{pmatrix} = PDP^{-1} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{3,t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{1,T} \\ x_{2,T} \\ x_{3,T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^T & 0 & 0 \\ 0 & (4)^T & 0 \\ 0 & 0 & (5)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ x_{3,0} \end{pmatrix}$$

6. 어떤 소비자의 효용이 소비상품묶음 $\mathbf{x}$에 대하여 $u(\mathbf{x})$로 표현되고 있다고 한다. 각 상품들의 가격은 $\mathbf{p}$이며, 이 소비자가 소비할 수 있는 최대 금액은 M이다. $\mathbf{p} \geq 0$

(a) (5 points) 이 소비자의 목표가 자신의 효용을 극대화하는 것이라고 할 때, 이 소비자의 최적화 문제를 수학적으로 기술하고, 이 문제를 풀기 위한 라그랑지안 함수를 제시하라. (소비량이 0보다 커야 한다는 제약은 무시하라)

6a

- p가 음이 아니어야 한다는 제약은 parameter의 제약이므로 라그랑지안에 제약식으로 들어가면 안됨. 제약식 역시 목적함수의 input의 함수임
- 합리성을 등제약으로 해석해선 안됨

5 (소비량이 0보다 커야 한다는 제약은 무시하라)

이영훈

$$\arg\max_{x} u(x), \quad p\cdot x \leq M, \quad p \geq 0.$$

$$\Rightarrow L(x, \lambda) = u(x) + \lambda(M - p\cdot x)$$

Nam-Un, Cho/Center for Distributive Justice/ mailto:namun@snu.ac.kr

(b) (5 points) 이 소비자의 효용함수가 다음과 같다고 할 경우, 1계조건을 만족하는 모든 점을 검토하라. (NDCQ도 검토할 것)

$$u(\mathbf{x}) = \sum_i \ln(x_i)$$

16.(b) Checking NDCQ, $DH_x = 0$ 인 points를 검토하자.

$DH_x = 0 = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ only when $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$

그러나 이 점은 문제와 무관하므로 모든 점은 NDCQ 통과한다

$u(x) = a_1 \ln x_1 + \dots + a_n \ln x_n$

$\frac{a_1}{x_1} = \lambda p_1 \quad \frac{a_1}{\lambda p_1} = x_1$

$\frac{x_1}{a_1} = \frac{1}{\lambda p_1}$

FOC ① $DL_x(x^*, \lambda^*) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 = \frac{a_1}{x_1} - \lambda p_1 \longrightarrow x_1^* = \frac{a_1}{\lambda^* p_1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 = \frac{a_2}{x_2} - \lambda p_2 \longrightarrow x_2^* = \frac{a_2}{\lambda^* p_2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 = \frac{a_n}{x_n} - \lambda p_n \longrightarrow x_n^* = \frac{a_n}{\lambda^* p_n}$$

이가영

② $\lambda^*(M - p_1 x_1^* - \dots - p_n x_n^*) = 0$

$$\lambda^*\left(M - p_1 \frac{a_1}{\lambda^* p_1} - \dots - p_n \frac{a_n}{\lambda^* p_n}\right) = \lambda^*\left(M - \frac{a_1}{\lambda^*} - \frac{a_2}{\lambda^*} - \dots - \frac{a_n}{\lambda^*}\right)$$

$$= \lambda^* M - a_1 - a_2 - \dots - a_n = 0$$

③ $M - p_1 x_1^* - \dots - p_n x_n^* \geq 0$

④ $\lambda^* \geq 0$

$\lambda^* = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{M} \geq 0$ 성립

네 조건을 모두 만족하는 점:

$x_1^* = \frac{M}{\sum_{i=1} a_i} \cdot \frac{a_1}{p_1} = \frac{Ma_1}{p_1}$

$x_2^* = \frac{M}{\sum_{i=1} a_i} \cdot \frac{a_2}{p_2} = \frac{Ma_2}{p_2}$

$\vdots$

$x_n^* = \frac{M}{\sum_{i=1} a_i} \cdot \frac{a_n}{p_n} = \frac{Ma_n}{p_n}$

(c) (5 points) 위 점(들) 중 하나를 선정하여 SOC를 검토하라. 그 점이 위 극대화 문제의 해가 될 수 있는지(즉, global max가 될 수 있는지) 판단하고 그 근거도 함께 제시하라.

(C)

이때.

$$LPM_{k+1}(H) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ k+1,1 \end{array}\begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ p_1 & -\lambda^2\frac{p_1^2}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & 0 & -\lambda^2\frac{p_2^2}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_k & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2\frac{p_k^2}{a_k} \end{vmatrix} \begin{array}{c} 1,k+1 \\ \\ \\ \\ \\ k+1,k+1 \end{array}$$

$$= -\lambda^2\frac{p_k^2}{a_k}(-1)^{(k+1)} LPM_k(H) + (-1)^{(k+2)} p_k \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ -\lambda^2\frac{p_1^2}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda^2\frac{p_2^2}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2\frac{p_k^2}{a_k} \end{vmatrix} \begin{array}{c} k,1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

여기서

$$= -\lambda^2\frac{p_k^2}{a_k} LPM_k(H) + (-1)^k p_k \left(\overbrace{\prod_{r=1}^{k-1}}^{(-1)^{k+1}} \cancel{(} (-\lambda^2\frac{p_r^2}{a_r})\right) \times \begin{vmatrix} p_{k-1} & p_k \\ 0 & -\lambda^2\frac{p_k^2}{a_k} \end{vmatrix} \text{-??} \; ee$$

$$k+k+1+k-1=3k$$

$$= -\lambda^2\frac{p_k^2}{a_k} LPM_k(H) + (-1)^{\cancel{k+1}} \underbrace{p_k}_{>0} \cancel{p_k} \underbrace{\prod_{r=1}^{k}(\lambda^2\frac{p_r^2}{a_r})}_{>0} \quad (k \geq 2)$$

또한 $LPM_1(H) = 0$ $\quad LPM_2(H) = p_1^2$.

$$(-1)^{3k} = 1$$

k가 짝수일때. $LPM_{k+1}(H) = -\left(\lambda^2\frac{p_k^2}{a_k} LPM_k(H) + p_k \cancel{p_k} \prod_{r=1}^{k}(\lambda^2\frac{p_r^2}{a_r})\right)$ ⋯ ①

이고,

$$(-1)^{3k} = -1$$

k가 홀수일때. $LPM_{k+1}(H) = \lambda^2\frac{p_k^2}{a_k}\left(\lambda^{2k} p_k \cancel{p_k} \prod_{r=1}^{k}\frac{p_r^2}{a_r} - LPM_k(H)\right)$ ⋯ ②

이다.

$LPM_2(H) = p_1^2$ 이므로 ① 에 따라 $LPM_3 < 0$, ②에 따라 $LPM_4 > 0$

이고,

일반화 하면 $LPM_{2m}(H) > 0$, $LPM_{2m+1}(H) < 0$ 이라고 할수 있다.

따라서 $LPM_m(H) = sign((-1)^m)$ 이 $m = 2, 3, \cdots, n$ 에서 성립한다.

$\therefore$ H는 ND 이다.

(d) (5 points) 효용함수가 아래와 같다고 할 경우, 1계조건을 나열하라.

$$u(\mathbf{x}) = -\sum_i (x_i - a)^2, \quad a > 0$$

5

(d) (5 points) 효용함수가 아래와 같다고 할 경우, 1계조건을 나열하라.

$$u(\mathbf{x}) = -\sum_i (x_i - a)^2, \quad a > 0$$

한계效음

$$L = -\left((x_1-a)^2 + (x_2-a)^2 + \cdots (x_n-a)^2\right) - \lambda(p_1x_1 + \cdots + p_nx_n - m)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1} = -(2(x_1-a)) - \lambda p_1 = 0 \qquad && \lambda(p_1x_1 + \cdots + p_nx_n - m) = 0 \\ &\vdots && \lambda \geq 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial x_n} = 2(x_n-a) + \lambda p_n = 0 && p_1x_1 + \cdots p_nx_n \leq m \end{aligned}}$$

(e) (5 points) 위 효용함수의 경우, solution이 binding 되지 않는 경우는 어떤 경우에 해당할 것인지 추론하고 그 근거를 제시하라. (Hint: 막막하다면 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ 일때 문제를 풀어본 뒤, n 차원으로 확장해볼 것.)

6e

- binding 되어 있지 않은 경우의 solution은 모든 xi 들이 a 와 같은 경우임
- 그런데 이 xi는 부등제약을 만족해야 함. 이것이 명백하게 기술되어 있어야만 온전한 점수를 받을 수 있음.

$n=2$ $\quad \mathcal{L}(x,\lambda) = -(x_1^2+x_2^2)+2a(x_1+x_2)-2a^2+\lambda(M-p_1x_1-p_2x_2)$

① $\left.\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right|_{(x^*,\lambda^*)} = -2x_1^*+2a-p_1\lambda^*=0$

$\left.\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right|_{(x^*,\lambda^*)} = -2x_2^*+2a-p_2\lambda^*=0$

② $\lambda^*(M-p_1x_1^*-p_2x_2^*)=0$

③ $\lambda^*\geq 0$

④ $M-p\cdot x^*\geq 0$

$\boxed{\lambda^*=0}$ $\lambda^*=0$ 이라면 ②식에서 제약조건인 $(M-p\cdot x)$가 아무런 구속력이 없으므로 non-binding.

$-2x_1^*+2a=0$

$-2x_2^*+2a=0.$

$x_1^*=x_2^*=a$

$u(x)=\sum -(x_i-a)^2$

④에서 $M-p_1x_1^*-p_2x_2^*\geq 0$

$\therefore (p_1+p_2)x_i^*\leq M$

$x_1^*\leq \dfrac{M}{p_1+p_2}$, $x_2^*\leq \dfrac{M}{p_1+p_2}$

⇒ $\mathbb{R}^n$으로 확장

x_i의 값이 모두 서로 같고, $(x_i^*=a \quad \forall i)$

조민경

$x_i^*\leq \dfrac{M}{\Sigma p_i}$ 일 때 solution이 binding 되지 않는다.

$a\leq \dfrac{M}{\sum_i p_i}$

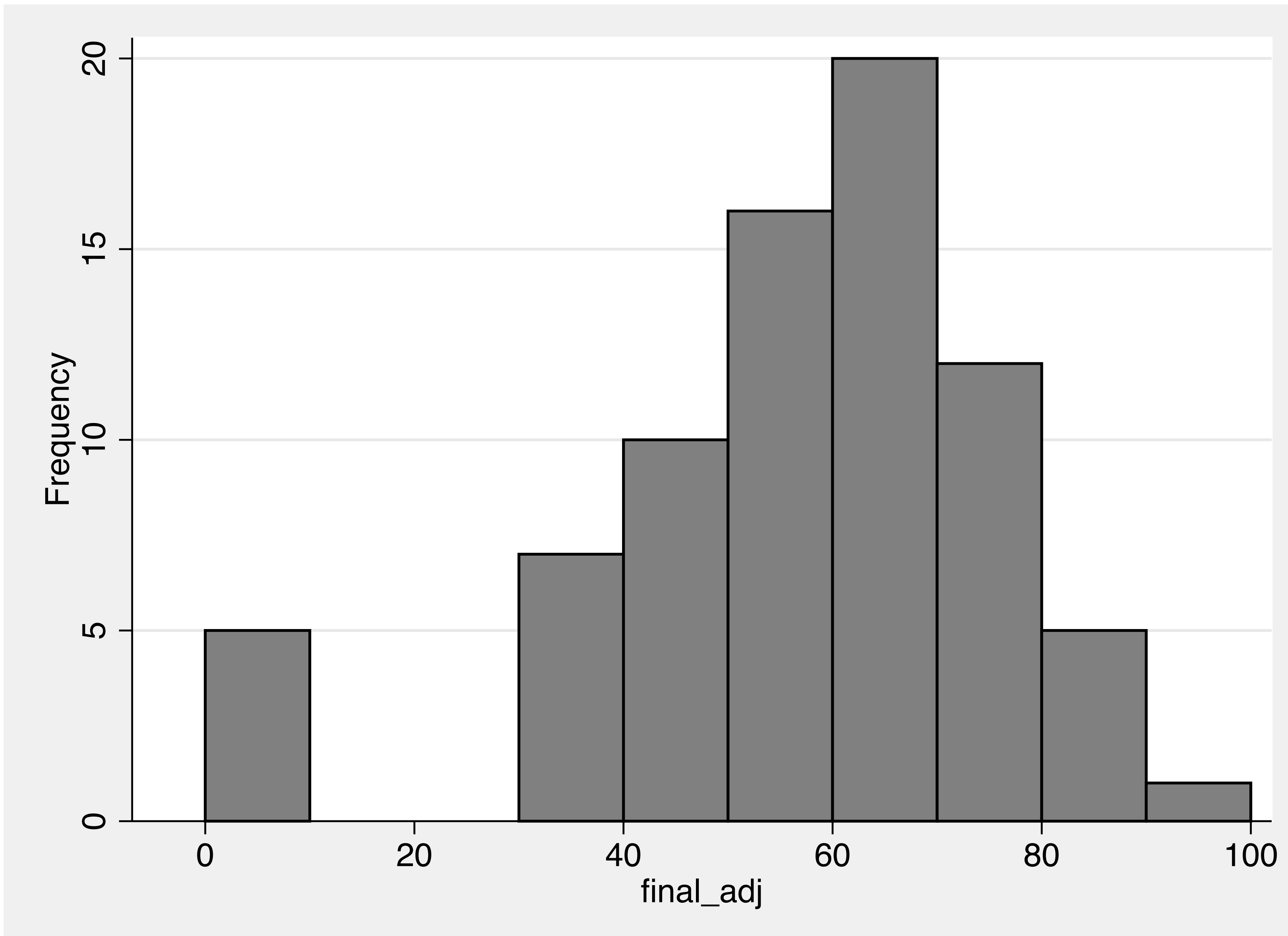
기초통계

Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
final_adj	76	55.63158	20.27073	0	91

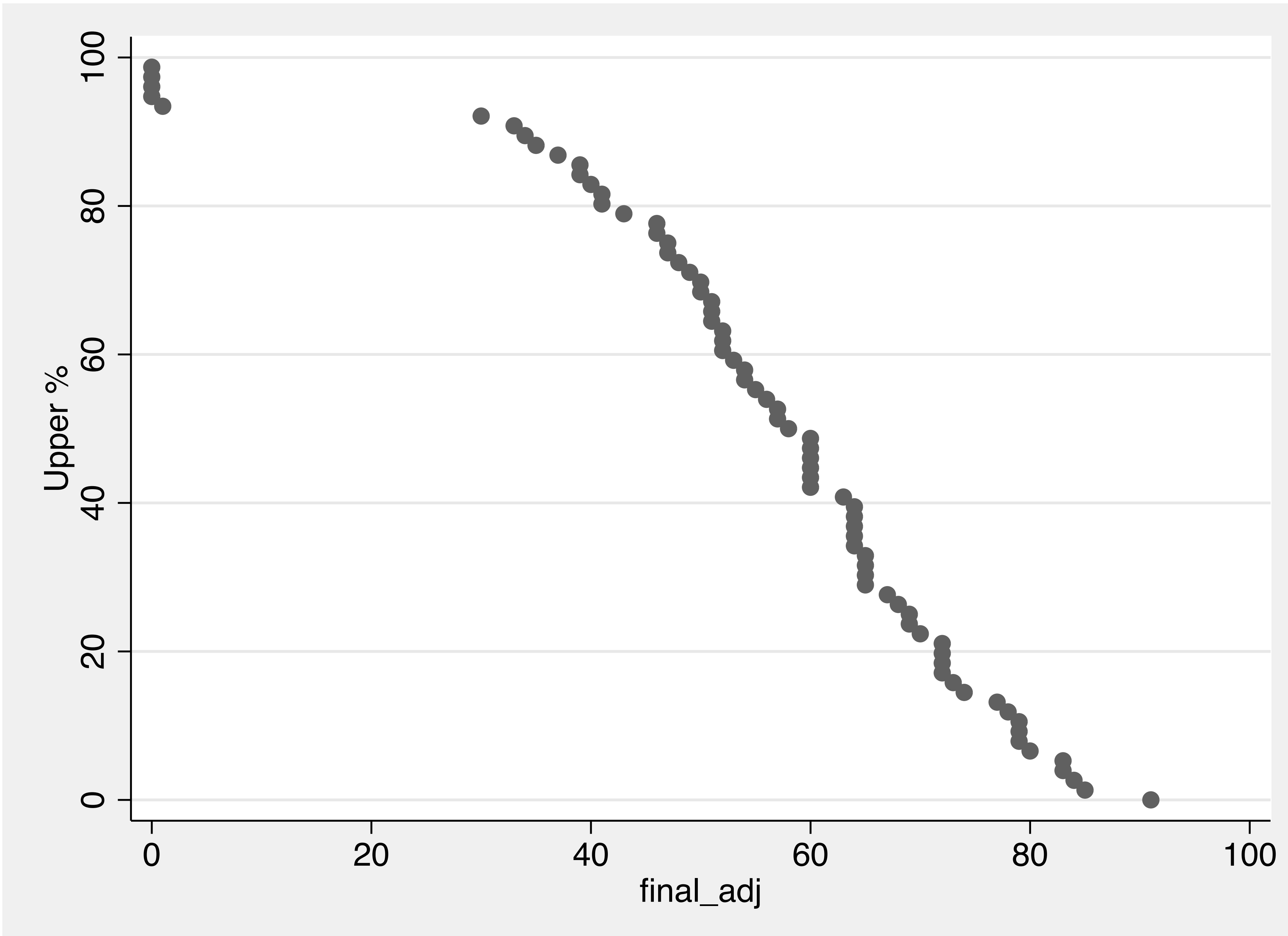
final_adj

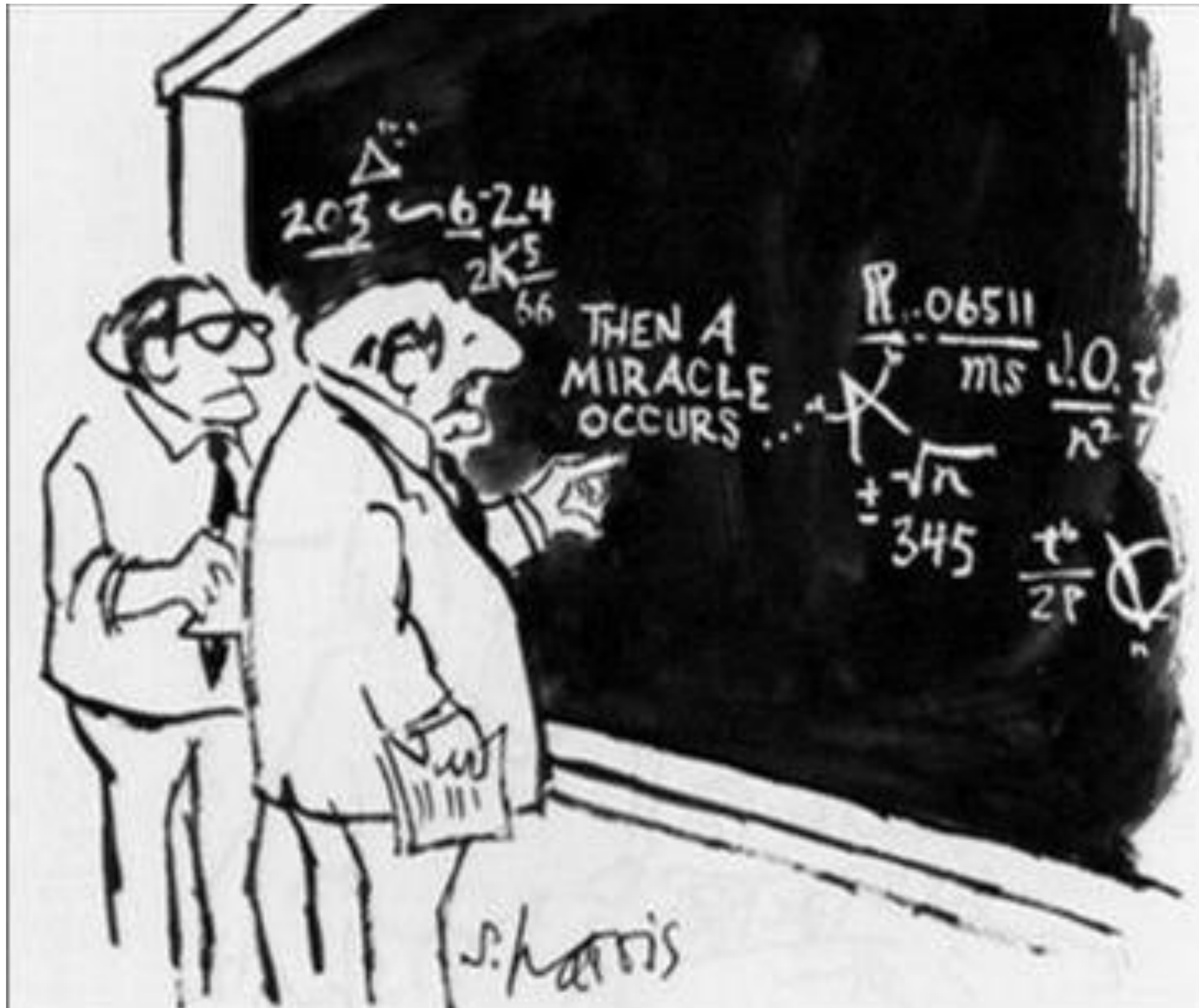
	Percentiles	Smallest		
1%	0	0		
5%	0	0		
10%	34	0	Obs	76
25%	47	0	Sum of Wgt.	76
50%	59		Mean	55.63158
		Largest	Std. Dev.	20.27073
75%	69	83		
90%	79	84	Variance	410.9025
95%	83	85	Skewness	-1.091175
99%	91	91	Kurtosis	4.424183

Histogram



Upper %





"I think you should be more explicit here in step two."

여름학기, 수고하셨습니다!

Nam-Un, Cho/Center for Distributive Justice/ mailto:namun@snu.ac.kr