경제수학 기말시험 해설

2015 겨울학기. 212.214-001 (담당:조남운)

목차

- 해설
- 기초통계

공통사항

- 그래프를 그릴 때는 축의 의미를 명시해야 합니다. (감점은 하지 않았지만 앞으로는 주의해주시길)
- 사소한 오류: 오류당 1점 감점
- 중대한 오류: 정도에 따라 오류당 2-4점 감점
- 앞문제의 결과를 사용하는 문제의 경우 앞문제의 잘못된 결론에 의거하더라도 뒷 문제의 논리가 문제 없을 경우에는 정답 처리 될 수 있음
- 근거 없이 답만 제시하는 경우에는 감점 혹은 점수 없음

(a) (5 points) 어떤 기업이 자신의 이윤 f와 제조량 x간의 관계를 조사한 결과 아래와 같은 결론에 도달하였다. 이 기업의 이윤함수 f의 그래프를 x에 대해 오목성과 볼록성까지 명확하게 스케치하라.

$$f = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

1a

- 1a: domain을 양의 실수로 본 경우도 인정 (문제 맥락상 그렇게 추론할 수 있는 여지가 있음)

$f = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$

$$f' = \frac{(2x+1)(x^2+1) - (x^2+x+1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} + x^2 + \cancel{2x} + 1 - \cancel{2x^3} - 2x^2 - \cancel{2x}}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \quad \therefore x = \pm 1 \text{ 일때 극점}$$

$$f'' = \frac{-2x(x^2+1)^{\cancel{2}} - (-x^2+1)\cdot 2\cancel{(x^2+1)}\cdot 2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}} = \cancel{-2x(x^4+2x^2 \cdots}$$

$$= \frac{-2x^3 - 2x + (x^2-1)\cdot 4x}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

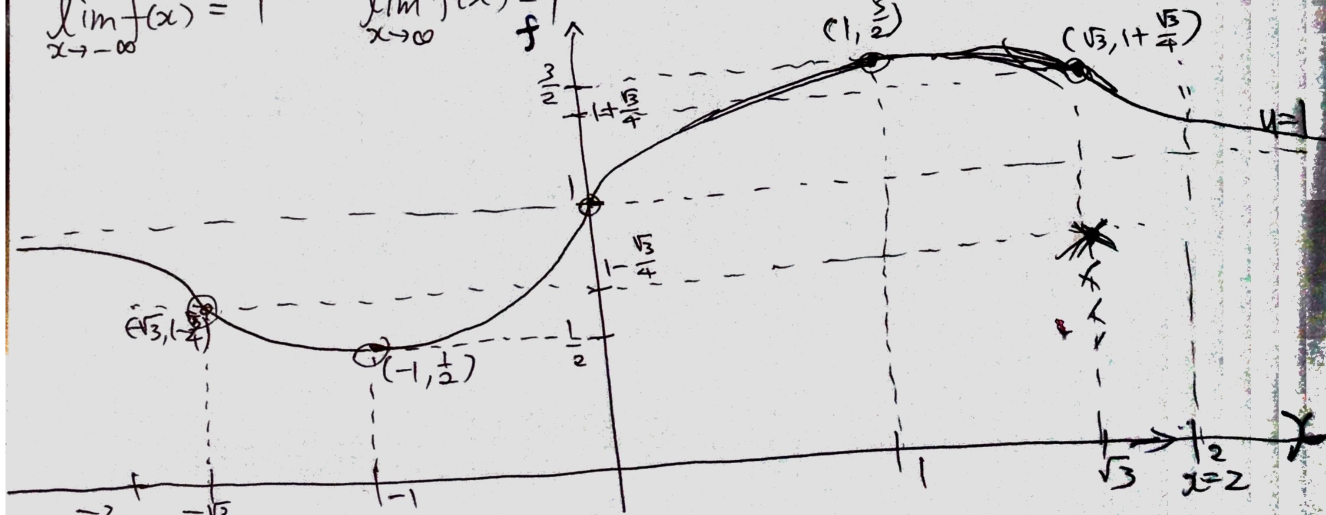
$\therefore x = 0,\ \pm\sqrt{3}$ 일 때 극점

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	1 ↘	$1-\frac{\sqrt{3}}{4}$ $=0.56698\cdots$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$1+\frac{\sqrt{3}}{4}$ $=1.433\cdots$	↘ 1

김재관

~~$f(x(-\sqrt{3}))\neq$~~

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$



(b) (5 points) 위 문제 a의 함수에서 $x \geq 2$일 때 이윤을 가장 높게 만들어주는 x값이 존재하는가? 존재한다면 얼마인가? 이 문제는 아래와 같은 극대화문제를 푸는 것과 동일하다.

$$\arg\max_{x} \quad f(x) \quad s.t. \quad x \geq 2$$

1b

- 1b: 왜 2에서 최대인지 이유가 기술되어 있어야 함

기업의 제조량에 대한 이윤의 탄력성을

b) $x \geq 2$일 때 $f' < 0$이므로 해당영역에서 f는 단조 감소이다.
따라서 경계값인 $f(2) = \frac{7}{5}$에서 이윤이 가장 높다. (문제O)

Δf

(c) (5 points) 위에서 구한 최적 x값에서 이 기업의 제조량에 대한 이윤의 탄력성을 구하라.

1c

- “위에서 구한 최적값”이므로 critical point 1 을 사용한 경우는 감점 (boundary solution 역시 global maximum인 한 최적값이 될 수 있음. a, b를 통틀어 최적값은 1b 에서 구했던 것이 유일하기 때문에 1을 최적값으로 해석할 여지가 없음.)

- 탄력성을 절대치를 씌운 것과 씌우지 않은 것 모두 정답처리

  - 참고: 실제로는 case by case. 탄력성의 부호가 자명한 경우에는 절대값을 사용하지만, 부호가 의미를 가지는 종류의 탄력성에는 절대값을 사용하지 않음. 문제의 경우, 탄력성이 양일 때도 있고 음일 때도 있으므로 엄밀히 보자면 절대값을 사용하지 않는 것이 타당함.

에서 이윤이 가장 크다.(존재

c) $$e = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{x}{\frac{x^2+x+1}{\cancel{x^2+1}}} \Bigg|_{x=2}$$

$$= \frac{x(-x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+x+1)} \Bigg|_{x=2}$$

$$= \frac{2 \cdot (-3)}{5 \cdot 7} = \frac{-6}{35}$$

(d) (5 points) 아래 행렬들의 Rank를 구하고, 구할 수 있다면 행렬식(Determinant)도 구하라.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1d

- REF 변환 과정에서 ERO1 (Row exchange) 를 했을 경우에는 부호가 바뀔 수도, 바뀌지 않을 수도 있음.
- Determinant를 부호까지 보존하는 ERO는 ERO2만 사용했을 때 뿐임
- Determinant를 REF에서 구했으되, ERO1을 사용했음에도 불구하고 이에 관해 언급하지 않았거나 부정확한 기술을 했을 경우 감점

2. $(1,0), (2,3), (1,3), (0,1)$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 6R_1 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

이경민

완전한 pivot으로 나타내주기 위해 스칼라곱을 해주면

(rank : REF에서 non-zero의 개수)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5}R_3 \to R_3]{\frac{1}{3}R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: pivot이 3개 나타나므로 rank = 3

: REF

이때 행렬식은 $2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 15$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_4 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: pivot이 2개 나타나므로 rank = 2

: REF

행렬식은 구할 수 없다. ($\because$ 4×2 행렬이므로)

(e) (5 points) 다음 벡터들이 생성(generate)할 수 있는 공간이 몇차원인지 기술하고 해당되는 모든 점을 지나는 (초) 평면 ((hyper)plane) 이 존재한다면 그 평면을 나타내는 벡터를 매개변수(parameter)를 사용하여 기술하라.

1. $(2, 3, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (6, 3, 0, 0)$
2. $(1, 0), (2, 3), (1, 3), (0, 1)$

1e

- 1에서 모든 벡터들이 4차원이므로 3차원 초평면의 식을 구성할 때에도 4차원 벡터로 기술되어야 함.

- 2에서 벡터가 4개이지만, 4개 점을 모두 지나는 평면은 R^2 그 자체이므로 임의의 선형 독립인 2차원 벡터 두 개로 기술할 수 있음.

    - 매개변수를 주어진 4개 벡터에 대해서 사용한 경우는 더 적은 매개변수로 표현할 수 있으므로 감점

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ (by (i)) $\Rightarrow$ rank $\Rightarrow \underset{\uparrow \ \text{dim}}{3}$ $\Rightarrow$ 3차원공간 생성가능.

$\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = (-1, -3, 0, 0) = \vec{x}_1$ $\quad \vec{u}_3 - \vec{u}_1 = (4, 0, -1, 0) = \vec{x}_2$

권지윤

$\therefore \vec{u}_1 + s\vec{x}_1 + t\vec{x}_2 = (2\ 3\ 1\ 0) + s(-1\ -3\ 0\ 0) + t(4\ 0\ -1\ 0)$

$= (2-s+4t \quad 3-3s \quad 1-t \quad 0)$를 만족하는 hyperplane (단, $s,t \in \mathbb{R}$)

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ rank $\Rightarrow \underset{\uparrow \ \text{dim}}{2}$ $\Rightarrow$ 2차원공간 생성가능.

벡터가 생성할수 있는 dimension과 벡터의 공간 dimension이 같다. 따라서 vector들은 벡터공간(전체)을 span 한다

$\Rightarrow (k, l)$ (단, $k, l \in \mathbb{R}$)

(f) (5 points) 다음 행렬의 행렬식(Determinant)과 Rank, 그리고 역행렬(Inverse Matrix)이 존재한다면 그 역행렬을 구하라

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

5

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\1&2&3&1&1\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\3&1&2&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{13}{6}&\frac{1}{3}&\frac{5}{3}&-\frac{7}{3}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&0&0\\-\frac{7}{6}&-\frac{1}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{4}{3}&\frac{1}{2}\end{pmatrix} = I$$

ok.

(i) $\begin{vmatrix}1&0&1&1\\1&1&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&1&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{vmatrix} = 0.$ det=0. 역행렬 존재x. rank=3

(ii) $\begin{vmatrix}1&1&0&0&1\\1&2&3&1&1\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\3&1&2&4&5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&3&1&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&-2&2&4&2\end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix}1&3&1&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\-2&2&4&2\end{vmatrix} = 1\times2\times\begin{vmatrix}1&3&1\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}$

$= 2\times\{1\times(3-0)\} = \boxed{6}.$

방3중

rank 5. 역행렬.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&1&0&0&1&1&0&0&0&0\\1&2&3&1&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\3&1&2&4&5&0&0&0&0&1\end{array}\right) \begin{array}{l}\times -1\\ \\ \\ \\ \times -3\end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&1&0&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&3&1&0&-1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&-2&2&4&2&-3&0&0&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&1&0&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&3&1&0&-1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&-2&2&4&2&-3&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&1&1&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&3&0&0&-1&1&-1&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&2&0&2&-3&0&-4&2&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&1&1&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&-\frac{3}{2}&0&-2&1&\frac{1}{2}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&1&1&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&-\frac{7}{6}&-\frac{1}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{4}{3}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{c|ccccc} & \frac{13}{6}&\frac{1}{3}&\frac{5}{3}&-\frac{7}{3}&-\frac{1}{2}\\ &0&0&0&1&0\\ I &-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\\ &0&0&1&0&0\\ &-\frac{7}{6}&-\frac{1}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{4}{3}&\frac{1}{2}\end{array}\right) \to \text{역행렬}$$

(g) (5 points) 다음 연립방정식의 해를 구하라(Hint: 일부 문제는 앞 문제 f의 결과를 이용 가능)

1.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\
x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\
x_4 &= 1 \\
x_1 + x_3 + 2x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_5 &= 1 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\
x_4 &= -1 \\
x_2 &= 2 \\
3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 &= 1 \\
x_4 + 2x_5 + x_6 &= 1 \\
x_1 + 3x_4 + 4x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

1g-1,2

- 각각 1점씩 배점
- 과정이 옳을 경우, 단순 산술 오류에 대해서는 감점하지 않음

(9) 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1$ 이 성립하지 않으므로 해가 없다.

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

정민지

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{17}{3} \\ 2 \\ -\frac{2}{3} \\ -1 \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix}, \quad x_1 = -\frac{17}{3},\ x_2 = 2,\ x_3 = -\frac{2}{3},$$

$$x_4 = -1,\ x_5 = \frac{14}{3}$$

1g-3 (3 points)

- 단순히 “해가 무수히 많다” 로는 불충분.
    - 어떤 변수가 free variable인지, 그리고 어떤 변수가 그러한 변수에 종속되어 있는지 명확하게 기술되어야 함
    - 일부 변수는 임의의 실수일 수 있으며 (free variable)
    - 나머지 변수들은 free variable의 조합으로 종속되어 있음
- REF 변환한 세 가지 식을 만족하는 모든 실수라는 것도 잘못된 기술
    - REF 변환한 식은 단지 원래의 연립방정식을 재구성(reduced) 한 것일 뿐임. 그렇게 재구성한 뒤 “풀어야” 함

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_5 \; x_6$

$x_4 = 1 - 2x_5 - x_6$

$x_2 + x_3 = 4 - 2x_5 - 2x_6$

$x_1 = -3x_4 - 4x_5$

$= -3(1 - 2x_5 - x_6)$ - 4x_5

2020su 이경민

$= -3 + 2x_5 + 3x_6$

$$\begin{bmatrix} -3 + 6x_5 + 3x_6 \\ 4 - x_3 - 2x_5 - 2x_6 \\ x_3 \\ 1 - 2x_5 - x_6 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$ 의 집합

$x_3, x_5, x_6 \in \mathbb{R}$ "

각각 독립변수

(2017sp 윤희찬)

권지윤

2. 다음 명제들을 증명하라

(a) (5 points) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to \bar{x}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \to \bar{y}$ 일때, $\{x_n + 2y_n\}_{n=1}^{\infty} \to \bar{x} + 2\bar{y}$ 이다. (수렴의 엄밀한 정의를 사용해야 함)

(b) (5 points) 1차원에서의 임의의 open interval $(\bar{a}, \bar{b})$ 는 open이다.

(c) (5 points) $\mathbb{R}^n$ 은 열린 집합(open set)이다.

(d) (5 points) $\mathbb{R}^n$ 은 닫힌 집합(closed set)이다.

(e) (5 points) $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 은 bounded set이다.

2-(a)

$\lim |x_n-\bar{x}| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(\forall n > n_1)$

$|y_n-\bar{y}| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(\forall n > n_2)$ 라고 하자. (from given condition)

$|x_n-\bar{x}| + |y_n-\bar{y}| + |y_n-\bar{y}| < 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ $(\forall n > \max\{n_1,n_2\})$

이 부분을 A라고 하면 삼각 부등식에 의하여

$|(x_n+2y_n)-(\bar{x}+2\bar{y})| \le A < \varepsilon$ $(\forall n > \max\{n_1,n_2\})$

$|(x_n+2y_n)-(\bar{x}+2\bar{y})| < \varepsilon$ $(\forall n > \max\{n_1,n_2\})$ 김재광.

$\therefore \{x_n+2y_n\}_{n=1}^{\infty} \to \bar{x}+2\bar{y}$ □

(b) $0<\varepsilon \le \min\{|x-\bar{a}|, |x-\bar{b}|\}$인 ε을 생각해보자.

$(\bar{a}<x<\bar{b})$이므로 $0<\min\{|x-\bar{a}|,|x-\bar{b}|\}$가 성립한다.

이 때 $I_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$가 된다.

$|x-\bar{a}| \le |x-\bar{b}|$라고 가정한다면. $(|x-\bar{a}| > |x-\bar{b}|)$

$\cancel{\varepsilon < |x-\bar{a}|}$, $x+\varepsilon < x+|x-\bar{a}| \le x+|x-\bar{b}| = \bar{b}$

$x-\varepsilon > x-|x-\bar{a}| = \bar{a}$ 이므로

$I_\varepsilon(x) \subset (\bar{a},\bar{b})$이다. ☒ 정답.

~~∴ 1차원에서의 임의의 인터벌 $(\bar{a},\bar{b})$는 open~~

$|x-\bar{b}| \le |x-\bar{a}|$라고 가정하면

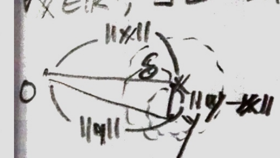
$x+\varepsilon < x+|x-\bar{b}| = \bar{b}$

$x-\varepsilon > x-|x-\bar{b}| \ge x-|x-\bar{a}| = \bar{a}$ 이므로

똑같이 $I_\varepsilon(x) \subset (\bar{a},\bar{b})$이다.

∴ 1차원에서의 임의의 interval $(\bar{a},\bar{b})$는 open이다.

(c) $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\exists \delta$ s.t. $B_\varepsilon(X) = \{s \in \mathbb{R}^n, \|X-s\|<\varepsilon\} \subset \mathbb{R}^n$ 임을 보이면 된다.



y는 $B_\varepsilon(X)$안의 임의의 점,

$\varepsilon = \|y-X\| < \delta$ 라 하면

$B_\varepsilon(X) \subset \mathbb{R}^n$ 이므로 $\mathbb{R}^n$은 open set.

김지원

(d) $\{X_k\}_k^{\infty} \in \mathbb{R}^n$ (X_k은 $\mathbb{R}^n$상의 vector), ~~$X_k = x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \cdots x_{nk}$~~ $X_k = (x_{1k}, x_{2k}, \cdots x_{nk})$

X_k가 수렴하면 x_{ik} $(i=1,2,\cdots n)$와 모든 i에서 수렴한다.

그렇다면 X_k 수렴값에서 모든 값들(vector component)이 ($\lim x_{ik}$) $\mathbb{R}^1$에 속하므로

$\lim_{k\to\infty} X_k \in \mathbb{R}^n$이다. ∴ $\mathbb{R}^n$은 닫힌 집합이다.

(e) 임의의 $X \in S$에 대하여 ($X = (x,y,z)$) $(S \in \mathbb{R}^3)$

$\|X\| = \cancel{\sqrt{(x_1-x)^2+(x_2-y)^2}}$ (S는 주어진 집합).

$= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \le 1$이다.

~~Bo~~ $1 \le b$ 인 b를 두면

$\|X\| \le 1$이고 $\forall X \in S$이다.

따라서 S는 bounded set이다.

3. 아래의 IS-LM 모형을 검토하자. 아래에서 괄호는 모두 함수표기이다. 각 변수의 의미는 다음과 같다. (Y: GDP 혹은 총소득, C: 소비지출, I: 투자지출, M_s: 중앙은행의 화폐발행량, T: 소득세의 양, t: 소득세율, G: 정부지출, r: 금리)

$$Y = C + I + G$$

$$C = C(Y - T)$$

$$T = tY$$

$$I = I(r)$$

$$M_s = M(Y, r)$$

$$C' \in (0,1), \quad I' < 0, \quad \frac{\partial M}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial M}{\partial r} < 0, \quad t \in (0,1)$$

(a) (5 points) 현재 상태에 임의의 상수를 문자 형태로 부여하고 그 근방에서 선형화한 모형을 제시하라.

(b) (5 points) 다른 모든 조건은 변함이 없는 상태에서 정부가 소득세율을 10%p 인하했을 때 총소득과 금리에 미치는 효과를 최대한 자세히 기술하라. (Hint: 소득세율 10%p 인하는 t를 0.1 낮춘 것과 같음.)

3a

- 선형화의 과정도 기술되어야 함
- 문제에서 요구한 대로 현재 상태를 어떤 식으로든 명시적으로 기술해야 함.
- T=tY 이므로 T는 소거 가능
    - 소거하지 않고 T에 대해 풀 경우 감점

3b

- dt=-0.1, 그리고 그 외 나머지 dM, dMs, dG 는 모두 0인 상황임

- 현재 주어진 상수들에 대해 dY, dr은 위 상황이 대입되었을 때 구체적인 상수로 정해짐. 즉, Y와 r이 얼마나 변할 것인지 구체적으로 계산 가능하다는 뜻임. 이 계산까지 이루어져야 온전한 점수를 받을 수 있음.

- G를 t의 함수로 보는 경우에는 dY, dr의 부호가 불분명해짐 → 경우의 수로 나눠서 분석해야 함

$$Y = C + I + G = C(Y-T) + I(r) + G = C(Y - tY) + I(r) + G = C((1-t)Y) + I(r) + G$$

$$Ms = M(Y, r)$$

$$dY = C'((1-t)Y)\cdot(1-t)\,dY + I'(r)\,dr + dG + C'((1-t)Y)\cdot(-Y)\cdot dt$$

$$\{1 - C'((1-t)Y)\cdot(1-t)\}\,dY - I'(r)\,dr = dG + C'((1-t)Y)\cdot dt$$

$$\underset{1>>0}{\frac{\partial M}{\partial Y}}dY + \underset{1>>0}{\frac{\partial M}{\partial r}}dr = dMs$$

김지원

$$\begin{pmatrix} \underset{>0}{1 - C'((1-t^*)Y^*)\cdot(1-t^*)} & \underset{>0}{-I'(r^*)} \\ \underset{>0}{\frac{\partial M}{\partial Y}} & \underset{<0}{\frac{\partial M}{\partial r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dG - C'((1-t^*)Y^*)\cdot dt \\ dMs \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \underset{<0}{\frac{1}{D}} \begin{pmatrix} \frac{\partial M}{\partial r} & I'(r^*) \\ -\frac{\partial M}{\partial Y} & 1 - C'((1-t^*)Y^*)(1-t^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dG - C'((1-t^*)Y^*)\,dt \\ dMs \end{pmatrix}$$

(b) $dt = -0.1$

총소득 → 증가

금리 → 상승

$$dY = \overset{\text{증가분}}{\underset{<0}{\frac{1}{D}}\Big(\underset{<0}{\frac{\partial M}{\partial r}}\Big(dG - \overset{<0}{\underset{0<\ \ <1}{C'((1-t^*)Y^*)}\,\underset{-0.1}{dt}}\Big)} + \underset{<0}{I'(r^*)}\,dMs\Big)$$

$$dr = \underset{\text{증가분}}{\underset{<0}{\frac{1}{D}}\Big(\underset{<0}{-\frac{\partial M}{\partial Y}}\Big(dG - \overset{<0}{\underset{0<\ \ <1}{C'((1-t^*)Y^*)}\,\underset{-0.1}{dt}}\Big)} + (1 - C'((1-t^*)Y^*)\cdot(1-t^*))\,dMs\Big)$$

4. 스타크레파스의 경제학

스타크레파스라는 행성에 사는 외계 문명이 괴생명체의 습격을 받아 전쟁 상태에 있다고 한다. 그 문명은 두 종류의 전쟁병기 [$\mathbf{x} = (x_1, x_2) =$(해병부대의 수, 탱크부대의 수)]를 생산할 수 있고, 그러한 생산에는 두 종류의 자원 [$\mathbf{y} = (y_1, y_2) =$(광물의 양, 가스의 양)]을 필요로 한다고 한다. 해병과 탱크에 의한 화력의 크기를 나타내는 함수 f는 아래와 같은 특징이 있다고 한다.

$$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + x_1 + x_2^2$$

해병 한 부대를 생산하는 데에는 광물만 50단위가 들어가고, 탱크 한 부대를 생산하는 데에는 광물 100단위와 가스 50단위가 들어간다고 한다. 이러한 관계를 아래와 같은 수식으로 표현할 수 있다.

- x_1만큼의해병생산 : $(y_1^{\text{해병}}, y_2^{\text{해병}}) = x_1(50, 0) = (50x_1, 0)$
- x_2만큼의탱크생산 : $(y_1^{\text{탱크}}, y_2^{\text{탱크}}) = x_2(100, 50) = (100x_2, 50x_2)$

$$y_1 = y_1^{\text{해병}} + y_1^{\text{탱크}} \tag{1}$$

$$y_2 = y_2^{\text{해병}} + y_2^{\text{탱크}} \tag{2}$$

광물 (y_1)과 가스 (y_2)는 모두 합쳐 1000단위까지 생산할 수 있다.

$$y_1 + y_2 = 1000$$

이제, 위와 같은 자원의 제약 상황에서 화력을 극대화할 수 있는 해병 (x_1)과 탱크 (x_2)의 부대 수를 계산해보자. 이 별에서는 신비롭게도 실수량만큼의 해병부대와 탱크부대가 가동될 수도 있다고 한다. 물론 실수량만큼의 자원을 캘 수도 있다.(꼭 부대의 수나 자원의 양이 자연수가 아니어도 된다는 의미) 이어지는 물음에 답해보자.

(a) (5 points) 식1,2를 x_1, x_2의 식으로 고쳐보라.(Hint: y_1, y_2를 각각 x_1, x_2로 나타내라는 의미임)

(b) (5 points) 위 문제 a의 결과를 이용하여 제약하에서의 화력 극대화 문제를 설정하라. (Hint: arg max[극대화해야 하는 식] s.t. [제약식] 의 형태로 정리하라는 의미임)

(c) (5 points) 위 극대화문제를 풀기 위한 라그랑지안함수 $\mathcal{L}$를 설정하라.

(d) (5 points) 위 제약하에서의 극대화문제의 1계조건을 기술하고, 이 조건을 만족하는 점을 모두 찾으라.

(e) (5 points) $D^2_{\mu,\mathbf{x}}\mathcal{L}$을 구하라. (힌트 : μ에 대해 먼저 편미분해야 Bordered Hessian을 얻을 수 있다)

(f) (5 points) 위 Bordered Hessian을 이용하여 2계조건을 기술하고, 극대점인지의 여부를 판별하여 화력을 극대화할 수 있는 해병(x_1)과 탱크(x_2)의 양이 존재한다면 그 값을 구하라. 또한 이러한 최적 생산량이 존재한다면, 그러한 최적 생산을 위해 필요한 광물과

4

- 부등제약으로 기술하는 것은 문제가 없으나,
  - 일단 부등제약으로 문제를 설정했을 경우에는 부등제약으로 문제를 풀어야 온전한 점수를 얻을 수 있음.

(a) $Y_1 = Y_1^{\text{해명}} + Y_1^{\text{탱크}}$

$= (50x_1 \quad) + (100x_2)$

$= 50x_1 + 100x_2$

$Y_2 = 0 \cdot x_1 + 50x_2 = 50x_2$

(b) $\underset{x_1, x_2}{\operatorname{argmax}} \; x_1x_2 + x_1 + x_2^2 \quad \text{s.t} \quad 50x_1 + 150x_2 = 1000$, $x_1, x_2 \geq 0$.

(c) 등제약.

$L = x_1x_2 + x_1 + x_2^2 - \mu(50x_1 + 150x_2 - 1000)$.

$x_1, x_2 \geq 0 \quad \mu \geq 0$:

(d) $\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 1 - 50\mu = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 - 150\mu = 0$

$-\frac{\partial L}{\partial \mu} = 50x_1 + 150x_2 - 1000 = 0$.

(i) $\mu > 0$ 일때

$\Rightarrow$ $3x_2 + 3 = x_1 + 2x_2$

$x_2 = x_1 - 3$.

대입 $50x_1 + 150x_1 - 1450 = 0$

$200x_1 = 1450$

critical point : $x_1 = \frac{145}{20} = \frac{29}{4}$ $\quad x_2 = \frac{17}{4}$

(ii) $\mu = 0$ 일때

$x_2 = -1$ 이어야 하므로 모순. X

박석종

(e) $D^2_{\mu, x} L = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 50 & 150 \\ \hline 50 & 0 & 1 \\ 150 & 1 & 2 \end{array}\right)$.

(f). $n=2$. $m=1$ 이므로 1개의 제일큰 LPM의 부호를 보자.

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 50 & 150 \\ 50 & 0 & 1 \\ 150 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -50 \times (100 - 150) + 150 \times (\cancel{150 - 150})$

$= 2500 + 7500 > 0$ 이므로 $(-1)^n$의 부호와 같다.

$\Rightarrow$ ND 이므로. 극대점.

이때 $x_1 = \frac{29}{4}$, $x_2 = \frac{17}{4}$ 이므로

$Y_1 = 50x_1 + 100x_2 = \frac{1450 + 1700}{4} = \frac{3150}{4}$.

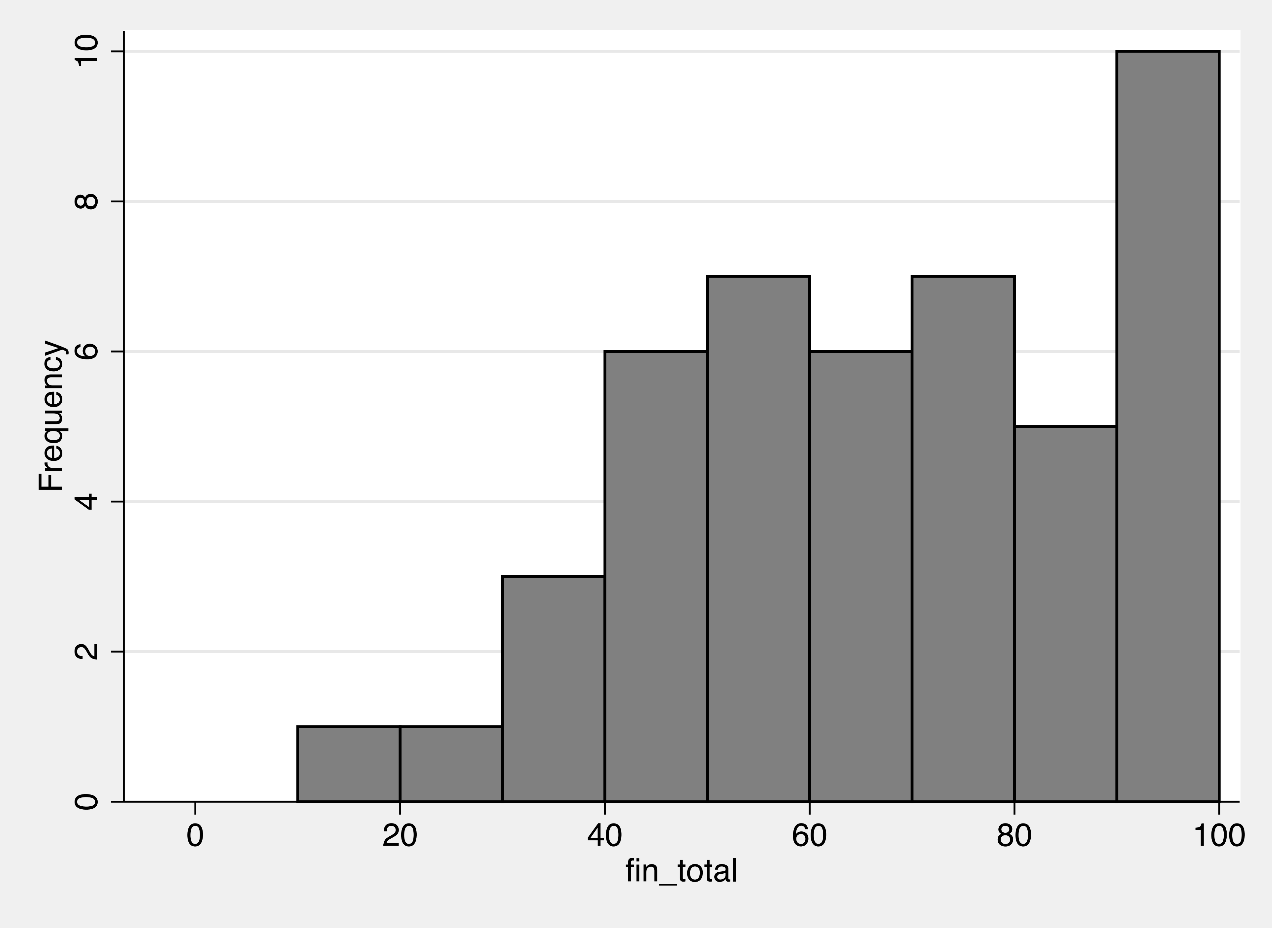
$Y_2 = 50x_2 = \frac{17}{4} \times 50 = \frac{850}{4}$

$Y_1 + Y_2 = \frac{4000}{4} = 1000$. ok.

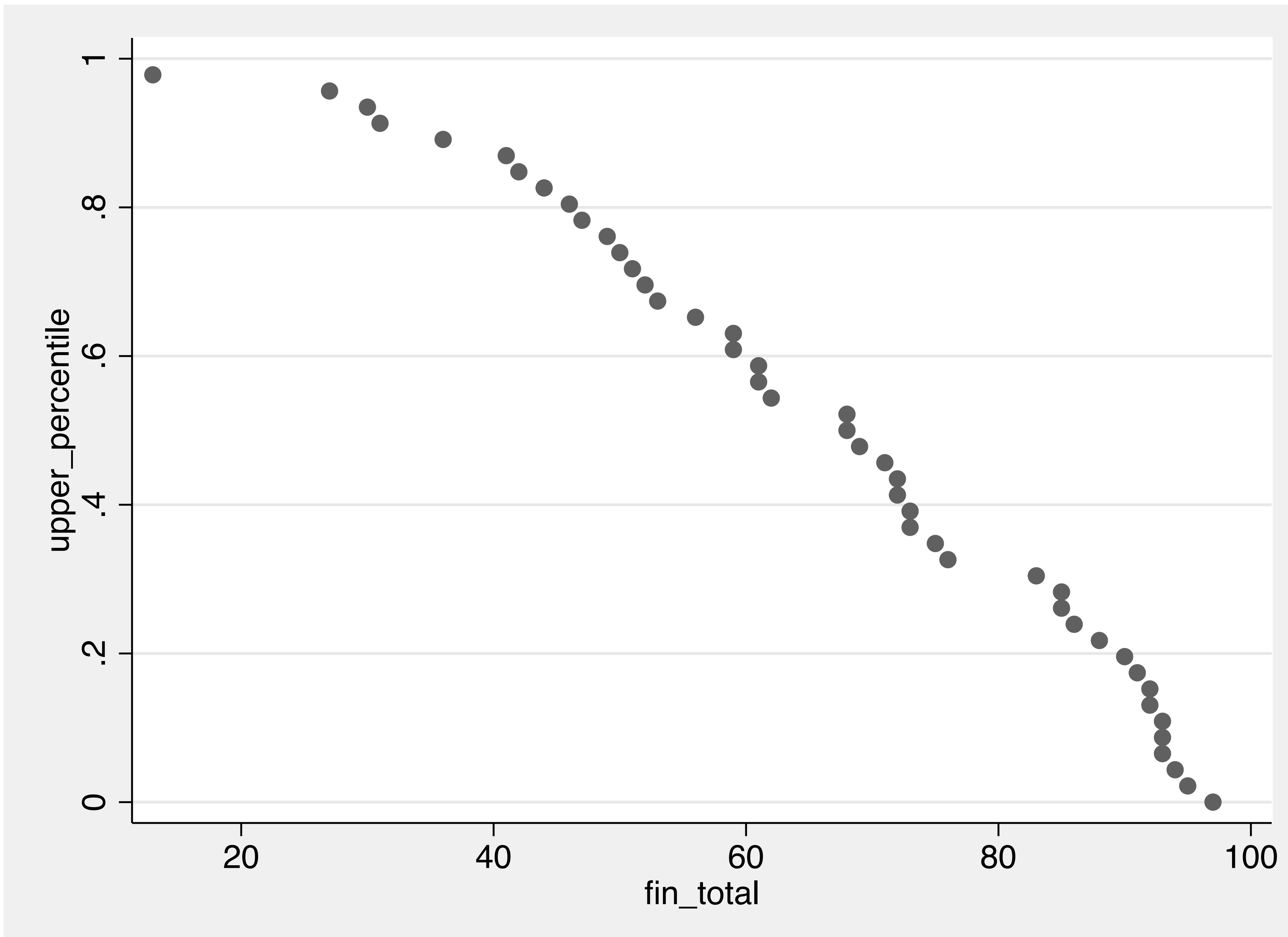
기초통계

```
. su fin_total

    Variable |       Obs        Mean    Std. Dev.       Min        Max
-------------+--------------------------------------------------------
   fin_total |        46    66.17391     21.7095         13         97

. su fin_total ,detail

                          fin_total
-------------------------------------------------------------
      Percentiles      Smallest
 1%           13             13
 5%           30             27
10%           36             30       Obs                  46
25%           50             31       Sum of Wgt.          46

50%         68.5                      Mean           66.17391
                        Largest       Std. Dev.       21.7095
75%           86             93
90%           93             94       Variance       471.3024
95%           94             95       Skewness      -.3732961
99%           97             97       Kurtosis       2.257816
```

Histogram



Percentile (Upper) Plot



가로: 자신의 기말 점수에 상응하는 세로 값이 자신의 상대적 위치