기말시험 해설

ECON173 경제수학

담당: 조남운, 2020년 여름학기 고려대학교

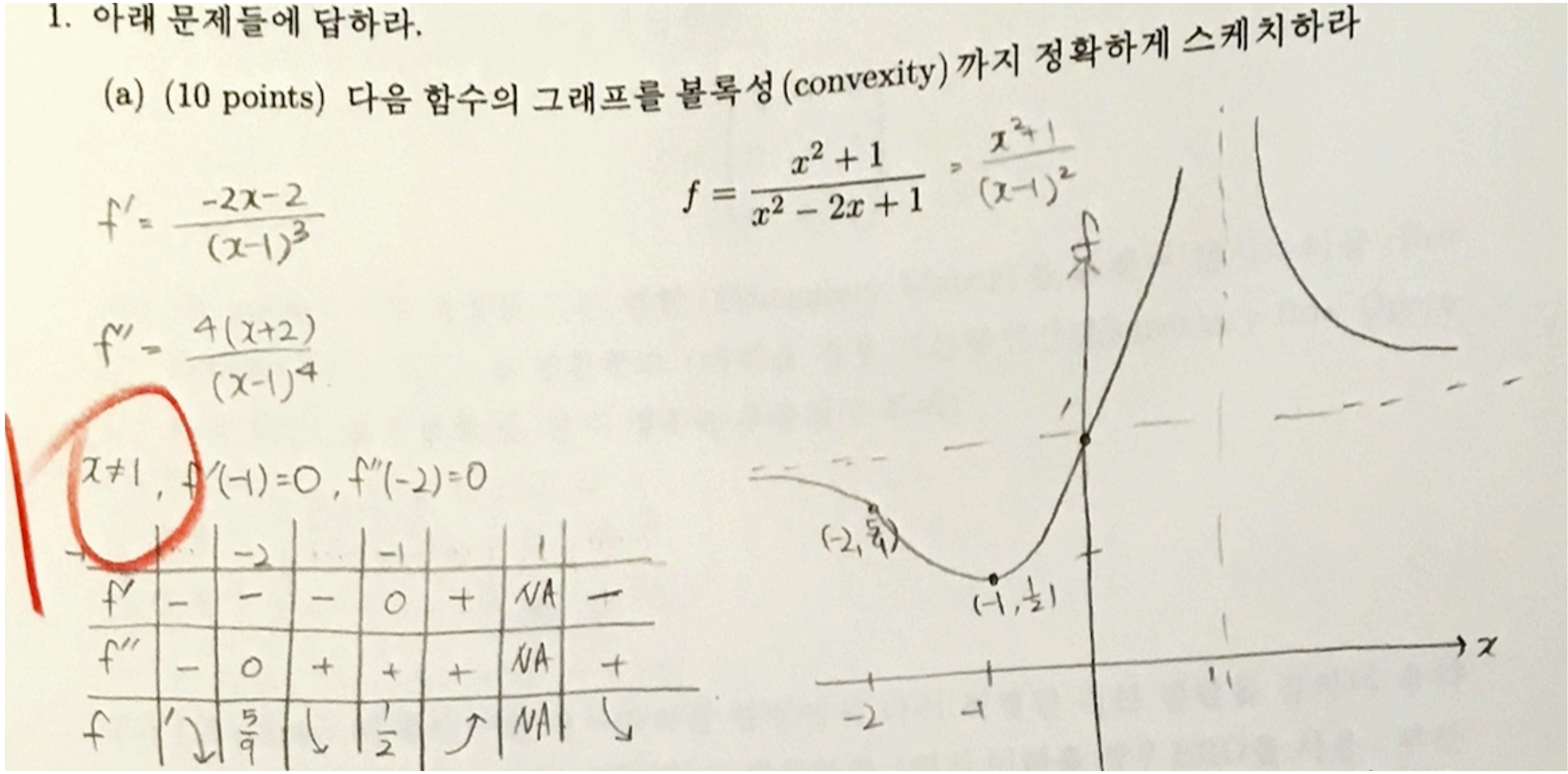
1a

- tail 오류: -2
- 오목/볼록성 오류: -2
- 기타 오류항목별로 -1 ~ -3

1. 아래 문제들에 답하라.

   (a) (10 points) 다음 함수의 그래프를 볼록성 (convexity) 까지 정확하게 스케치하라

$$f = \frac{x^2+1}{x^2-2x+1}$$



윤혜인 작성

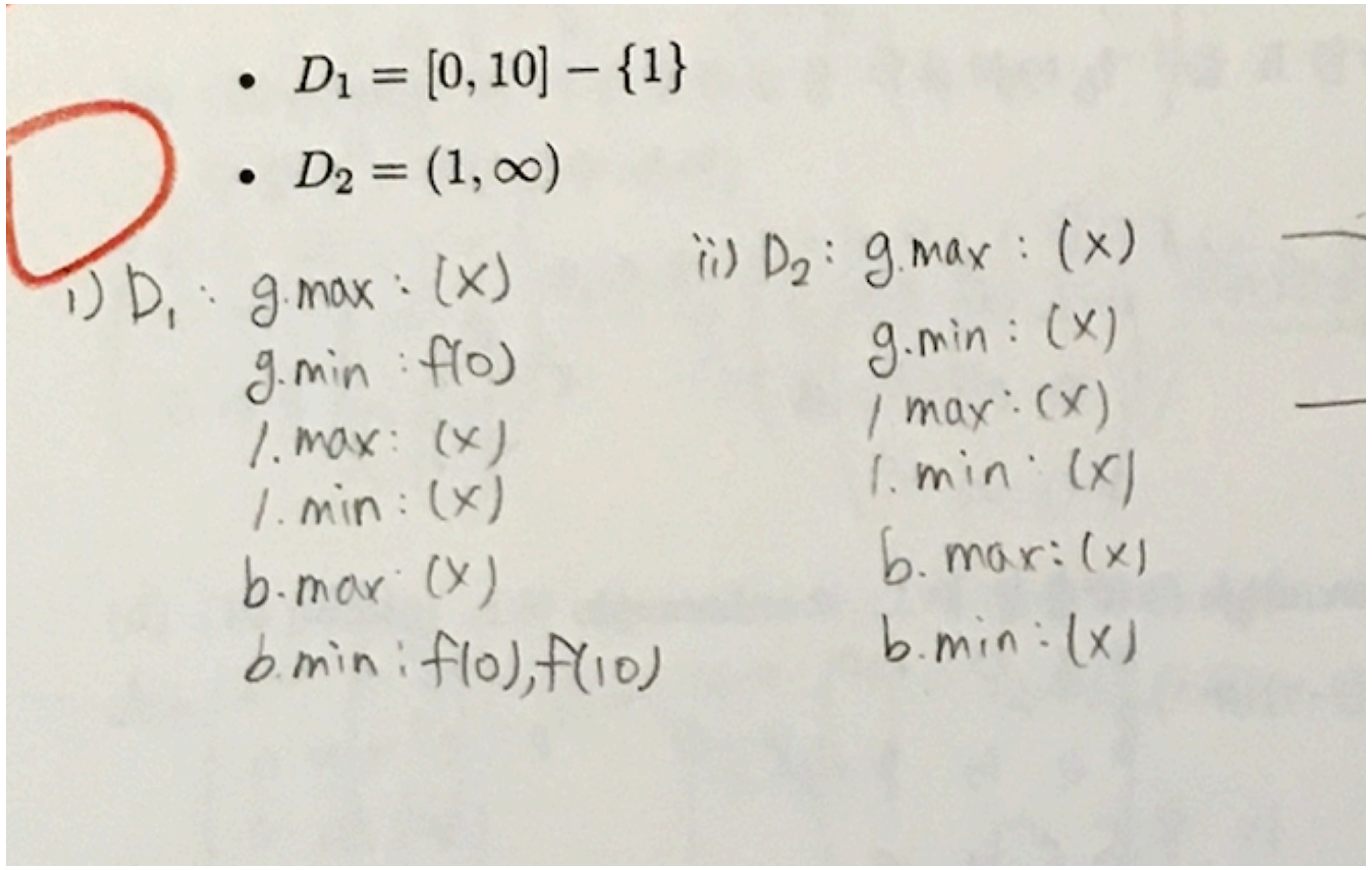
1b

- boundary min이 2개 포인트에 있음에 유의.
- 1개 포인트만 적을 경우 (-2)

(b) (10 points) 다음 함수와 주어진 정의역(domain) D_1, D_2에 대해서 global maximum, global minimum, local maximum, local minimum, boundary maximum, boundary minimum이 존재하는지 판단하고 존재한다면 모두 기술하라.

$$f = \frac{x^2+1}{x^2-2x+1}$$

- $D_1 = [0, 10] - \{1\}$
- $D_2 = (1, \infty)$



- $D_1 = [0, 10] - \{1\}$
- $D_2 = (1, \infty)$

i) D_1 : g.max : (X)
g.min : f(0)
l.max : (X)
l.min : (X)
b.max : (X)
b.min : f(0), f(10)

ii) D_2 : g.max : (X)
g.min : (X)
l max : (X)
l.min : (X)
b.max : (X)
b.min : (X)

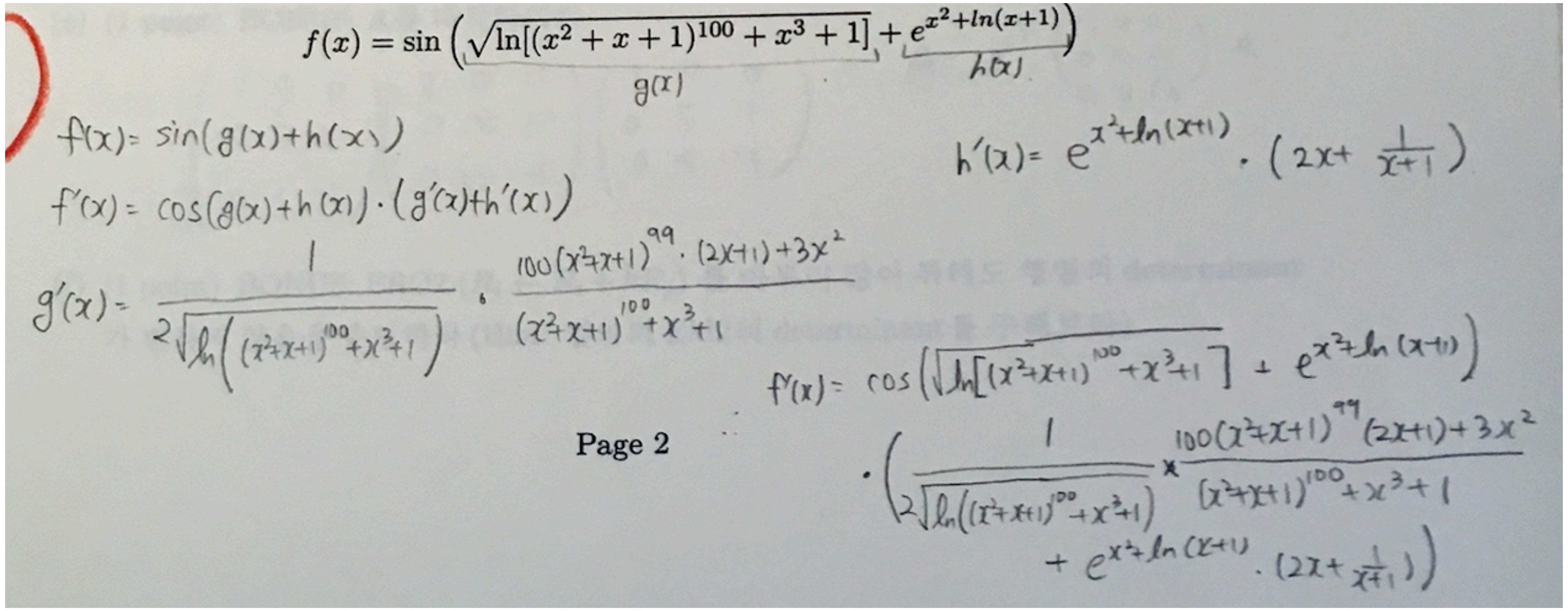
윤혜인 작성

1c

(c) (10 points) 다음 함수의 도함수를 구하라 (참고: $\sin' x = \cos x$)

$$f(x) = \sin\left(\sqrt{\ln[(x^2+x+1)^{100}+x^3+1]} + e^{x^2+ln(x+1)}\right)$$

- 부분함수별 오류당 -2 ~ -3
- 괄호 표현이 모호할 경우 -1



$$f(x) = \sin\left(\underbrace{\sqrt{\ln[(x^2+x+1)^{100}+x^3+1]}}_{g(x)} + \underbrace{e^{x^2+ln(x+1)}}_{h(x)}\right)$$

$$f(x) = \sin(g(x)+h(x))$$

$$f'(x) = \cos(g(x)+h(x)) \cdot (g'(x)+h'(x))$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{ln\left((x^2+x+1)^{100}+x^3+1\right)}} \cdot \frac{100(x^2+x+1)^{99} \cdot (2x+1)+3x^2}{(x^2+x+1)^{100}+x^3+1}$$

$$h'(x) = e^{x^2+ln(x+1)} \cdot \left(2x+\frac{1}{x+1}\right)$$

$$f'(x) = \cos\left(\sqrt{ln[(x^2+x+1)^{100}+x^3+1]} + e^{x^2+ln(x+1)}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{ln\left((x^2+x+1)^{100}+x^3+1\right)}} \times \frac{100(x^2+x+1)^{99}(2x+1)+3x^2}{(x^2+x+1)^{100}+x^3+1} + e^{x^2+ln(x+1)} \cdot \left(2x+\frac{1}{x+1}\right)\right)$$

Page 2

윤혜인 작성

2a

- 오른쪽으로 EM을 곱하면 기본 "열" 연산 (Elementary Column Operation)이 되어 결과가 달라짐: -3
- 행렬의 곱은 교환법칙이 성립하지 않기 때문에 오른쪽 곱과 왼쪽 곱을 주의 깊게 구분해야 함
- EM미사용 부분점수: 8

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) (10 points) A에 적절한 기본 행렬 (Elementary Matrix)을 곱하여 행사다리꼴 (Row Echelon Form; REF)로 변환하라. (어려울 경우 기본행연산(Elementary Row Operation; ERO)을 사용할 것. 단 이 경우는 부분점수 부여)

작성: 이수빈

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&5\\0&4&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&5\\0&4&3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&5\\0&0&-2\end{pmatrix}}_{\text{REF}}\longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{5}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&5\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

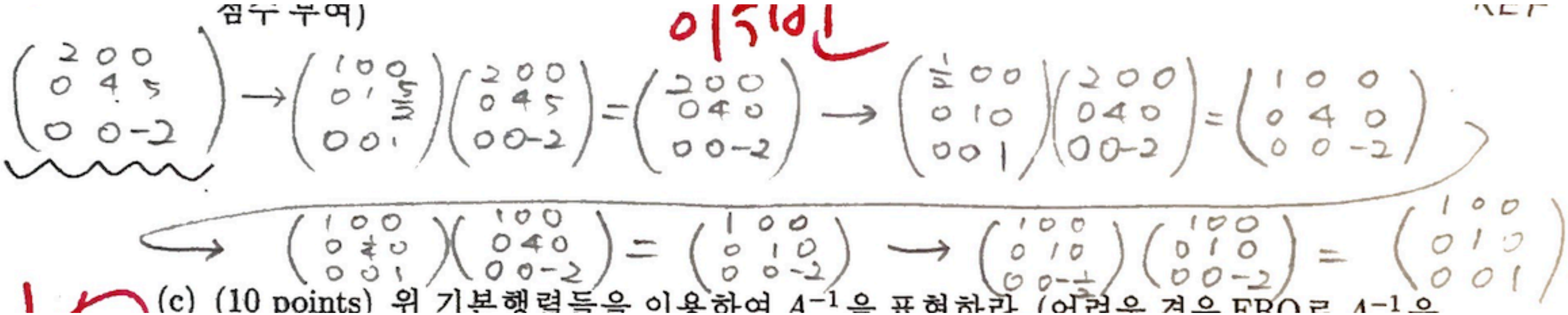
(여기까지 해도 됨) $=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

(b) (10 points) 위에서 구한 행사다리꼴 행렬에서 다시 적절한 기본 행렬을 곱하여 축약

2b

(b) (10 points) 위에서 구한 행사다리꼴 행렬에서 다시 적절한 기본 행렬을 곱하여 축약 행사다리꼴 (Reduced REF; RREF) 로 변환하라. (역시 어려울 경우 ERO를 사용 - 부분 점수 부여)

- 오른쪽곱: -3
- 변환에서 곱셈 과정 표현이 누락된경우: -3
- EM미사용 부분점수: 8



$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&5\\0&0&-2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{5}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&5\\0&0&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

2c

- 오른쪽 곱: -3
- EM미사용 부분점수: 8

2c (계속)

답안: 이수빈

(c) (10 points) 위 기본행렬들을 이용하여 A^{-1}을 표현하라. (어려울 경우 ERO로 A^{-1}을 구할 것 - 부분점수 부여)

- 오른쪽 곱: -3
- EM미사용 부분점수: 8

구할 것 - 부분점수 부여)

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{5}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&5\\0&4&3\end{pmatrix}$$

$$IA^{-1} = A^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{5}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-\frac{3}{8}&\frac{5}{8}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(d) (10 points) A의 eigenvalue와 그에 상응하는 eigenvector를 모두 구하라

2d

(d) (10 points) A의 eigenvalue와 그에 상응하는 eigenvector를 모두 구하라

- eigenvalue: 5점
- eigenvector: 5점
  - 1개 틀리면 -3
  - 2개 틀리면 -4
  - 매개변수에 수치 대입하지 않은경우: -1
- 산출 과정 없이 결과만 제시할 경우 -2

2d

- 이수빈 작성

2.(d) $A - rI = \begin{pmatrix} 2-r & 0 & 0 \\ 0 & 4-r & 5 \\ 0 & 4 & 3-r \end{pmatrix}$

$\det(A - rI) = (2-r)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4-r & 5 \\ 4 & 3-r \end{vmatrix}$

$= (2-r)\begin{vmatrix} 4-r & 5 \\ 4 & 3-r \end{vmatrix} = (2-r)\left((4-r)(3-r)-20\right)$

이수빈

$= -(r-2)(r-8)(r+1) = 0$ $\quad r = -1, 2, 8$

eigenvalues

① $r = -1$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

② $r = 2$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

③ $r = 8$ $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

각 eigenvalue에 상응하는 eigenvector

(e) A를 대각화 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

2e
bonus

(e) (1 point) BONUS: A를 대각화하라

(e) A를 대각화

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2f
bonus

(f) (1 point) BONUS: ERO2 ($R_i \leftarrow R_i + \bar{k}R_j$) 를 아무리 많이 취해도 행렬의 determinant 가 변하지 않음을 증명하라 (Hint: 임의의 EM2의 determinant를 구해보라)

EM2 는 삼각행렬이므로 $\det EM_2 = \prod_i a_{ii}$. (대각성분의 곱.)

Page 3

그러나 ERO 에서 대각성분, 즉 a_{ii} 는 1로 변하지 않음. $\therefore \det EM_2 = 1 \quad \forall i j$

$\det(AB) = \det A \det B$ 이므로 $\det(EM_2 \times A) = \det EM_2 \times \det A = \det A$. determinant 변화X

배현영 작성

3a

3. 다음 방정식에 대해서 이어지는 물음에 답하라.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 1 & 9 & -6 & 4 \\ 2 & 15 & -13 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

(a) (10 points) 위 방정식을 기본행연산 (Elementary Row Operation) 으로 풀

- 해없음 등 오류: -2 ~ -5
- RREF까지 도출했지만 정작 해를 구하지 않은 경우 -3
- 다른 연관문제에서라도 해를 도출했을 경우는 본 문항의 정답을 인정

작성: 김동우

- (a) (10 points) 위 방정식을 기본행연산 (Elementary Row Operation) 으로 풀어라

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 1 & 9 & -6 & 4 \\ 2 & 15 & -13 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$

  $\hat{A} = (A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 9 \\ 2 & 15 & -13 & 7 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow -2R_1 + R_3]{\text{ERO}_2 : R_2 \leftarrow -R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

  $\xrightarrow{\text{ERO}_2 : R_3 \leftarrow -R_2 + R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{ERO}_1 : R_2 \leftarrow \frac{1}{3} R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -7 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{ERO}_2 : R_1 \leftarrow -6R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  ∴ x_3, x_4가 free variable이고 x_1, x_2가 종속변수 ($x_1 = -3 + 9x_3 - x_4$, $x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$)

  ∴ $X = t_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

  (b) (10 points) 위 방정식을 system of implicit functions로 간주하고 유일한 (unique) 해가 도출될 수 있게 하기 위해 방정식을 재구성하라

  $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 7x_3 - 3x_4 \\ 9 + 6x_3 - 4x_4 \end{pmatrix}$

  (∵ free variable을 모두 우변으로 넘긴다)

3b

(b) (10 points) 위 방정식을 system of implicit functions로 간주하고 유일한(unique) 해가 도출될 수 있게 하기 위해 방정식을 재구성하라

- rank 2 이므로 미지수 2로 취급해야 함
- 미지수 3개 취급할 경우: -5

김동우 작성

(b) (10 points) 위 방정식을 system of implicit functi
도출될 수 있게 하기 위해 방정식을 재구성하라

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 9 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+7x_3-3x_4 \\ 9+6x_3-4x_4 \\ 14+13x_3-7x_4 \end{pmatrix}$$

3c

(c) (10 points) 위 재구성한 방정식의 해를 구하라

- 앞에서 구한 방정식에 오류가 있 하더라도 그 방정식을 잘 풀었을 경우에는 감점 없음

(c) (10 points) 위 재구성한 방정식의 해를 구하라

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 5+7x_3-3x_4 \\ 1 & 9 & 9+6x_3-9x_4 \\ 2 & 15 & 14+13x_3-7x_4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3+9x_3-7x_4 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3}-\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}x_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \text{답}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+9x_3-x_4 \\ \frac{4}{3}-\frac{1}{3}x_3-\frac{1}{3}x_4 \end{pmatrix}$$

3d

(d) (10 points) 아래 세 벡터가 생성하는 차원수를 도출하고, 이 벡터들의 선형 독립성을 검토하라

$$\mathbf{v_1} = (1, 6, -7, 3)$$

$$\mathbf{v_2} = (2, 15, -13, 7)$$

$$\mathbf{v_3} = (1, 9, -6, 4)$$

- 차원수 5점, 선형독립성 5점

$v_1 - v_2 + v_3 = 0$ 이므로 linearly dependent하다

$$\mathbf{v_1} = (1, 6, -7, 3)$$

$$\mathbf{v_2} = (2, 15, -13, 7)$$

$$\mathbf{v_3} = (1, 9, -6, 4)$$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 2 & 15 & -13 & 7 \\ 1 & 9 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow -R_1 + R_3]{\text{ERO}_2 \,:\, R_2 \leftarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

(0)와 같은 고려

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \operatorname{rank} A = 2 \quad \therefore L[v_1, v_2, v_3] \subset \mathbb{R}^2$

$\therefore$ 2차원 $\quad$ (v_1, v_2, v_3 중 임의의 하나를 제거하면 선형 독립임으로도 알 수 있다

4a

- 선형화된 연립방정식을 정확히 제시해야함

4. 다음 IS-LM 모형을 검토하라. 여기에서 정부는 그 해의 지출을 그 해의 조세량만큼 실시한다. (균형재정)

$$Y = C + I + G$$
$$C = C(Y - T), \quad C' \in (0,1)$$
$$I = I(r) \quad I' < 0$$
$$M^s = M(Y, r), \quad \frac{\partial M}{\partial Y} > 0, \frac{\partial M}{\partial r} < 0$$
$$G = T,$$
$$T = tY, \quad t \in (0,1) \qquad \text{(소득세)}$$
$$S = Y - C$$

- Y: 총소득, C: 총소비지출, I: 총투자지출, M^s: 총 화폐공급, T: 총 세금, G: 총 정부지출, S: 총저축, t: 소득세율, r: 이자율

(a) (10 points) 위 모형을 Y, r에 대한 모형으로 간주하고 현재 상태를 규정한 뒤 그 근방에서 선형화하라.

배재익 작성

$$dY = \frac{\partial C((Y-tY)}{\partial Y}dY + \frac{\partial C((Y-tY)}{\partial t}dt + I'dr + \frac{\partial(tY)}{\partial Y}dY + \frac{\partial(tY)}{\partial t}dt$$

$$= \frac{\partial C(Y-tY)}{\partial(Y-tY)}\cdot\frac{\partial(Y-tY)}{\partial Y}dY + \frac{\partial C((Y-tY)}{\partial(Y-tY)}\cdot\frac{\partial(Y-tY)}{\partial t}dt + I'dr + tdY + Ydt$$

$$= (1-t)C'dY - YC'dt + I'dr + tdY + Ydt$$

$$dY = \frac{I'dr + (1-C')Ydt}{(1-t)(1-C')}$$

$$dM^s = \frac{\partial M}{\partial Y}dY + \frac{\partial M}{\partial r}dr$$

4b

(b) (10 points) 위 모형의 매개변수(parameter)들을 빠짐없이 나열하고 이 중 정부가 통제할수 있는 정책변수가 어떤 것인지 분류하라.

- 정책변수 중 G는 균형재정으로 인해 종속되므로 통제 불가함 -3

수 있는 정책변수가 어떤 것인지 분류하라.

10/24일

매개변수는 MS, T, G, t, C, S 이다.

통제할수 없는 정책변수는 통화/화폐공급(MS)와 소득세율(t) 이다.

4c

(c) (10 points) 만일 정부가 소득세율을 소폭 감소시키고 나머지 정부가 통제 가능한 매개 변수는 변동하지 않는 것으로 둘 경우 총소득과 이자율에 미치는 영향을 위 모형을 통해 추론하라.

- 풀이 5점, 분석 5점
- 4a를 풀면 됨. (오류여부와 무관)
- 근거없이 결론만 제시한 경우 1점처리

배재익 작성

(c)

$$(1-t)(1-C')dY - I'dr = (1-C')Ydt$$

$$\frac{\partial M}{\partial Y}dY + \frac{\partial M}{\partial r}dr = dM^s$$

$$\begin{pmatrix} (1-t)(1-C') & -I' \\ \frac{\partial M}{\partial Y} & \frac{\partial M}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-C')Ydt \\ dM_s \end{pmatrix}, \quad D = (1-t)(1-C')\frac{\partial M}{\partial r} + I'\frac{\partial M}{\partial Y} < 0$$

$$\oplus \quad \oplus \quad \ominus \quad \ominus \quad \oplus$$

$$\begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \frac{\partial M}{\partial r} & I' \\ -\frac{\partial M}{\partial Y} & (1-t)(1-C') \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1-C')Ydt \\ dM_s \end{pmatrix}$$

$$dY = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial M}{\partial r}(1-C')Ydt + \underbrace{I'dM_s}_{=0}\right) < 0$$

$$\ominus \quad \ominus \quad \oplus \quad \oplus \ominus$$

$$dr = \frac{1}{D}\left(-\frac{\partial M}{\partial Y}(1-C')Ydt + \underbrace{(1-t)(1-C')dM^s}_{=0}\right) < 0$$

$$\ominus \quad \ominus \oplus \quad \oplus \oplus \ominus$$

4d bonus

(1 point) BONUS: 위 모형을 G, M^s 에 대한 모형으로 간주하고 풀어보라.

$T = G,\ Y = \frac{G}{t}$

$\frac{G}{t} = C\left(\frac{G}{t} - G\right) + I(r) + G$

$M^s = M\left(\frac{G}{t}, r\right)$

$\frac{1}{t} dG = \frac{\partial C}{\partial G}\left(\frac{1}{t} - 1\right) + \frac{\partial I}{\partial r} dr + dG + \left(-\frac{G}{t^2}\right)\frac{\partial C}{\partial t} dt$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{t} - 1\right)\left(1 - \frac{\partial C}{\partial Y}\right) dG = \frac{\partial I}{\partial r} dr - \frac{G}{t^2}\frac{\partial C}{\partial t} dt$

$dM^s = \frac{1}{t}\frac{\partial M}{\partial G} \cdot dG + \left(-\frac{G}{t^2}\right)\frac{\partial M}{\partial t} dt + \frac{\partial M}{\partial r} dr$

Page 5

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{t} - 1\right)\left(1 - \frac{\partial C}{\partial Y}\right) & 0 \\ -\frac{1}{t}\frac{\partial M}{\partial G} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dG \\ dM^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial r} dr - \frac{G}{t^2}\frac{\partial C}{\partial t} dt \\ -\frac{G}{t^2}\frac{\partial M}{\partial t} dt + \frac{\partial M}{\partial r} dr \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} dG \\ dM^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial r} dr - \frac{G}{t^2}\frac{\partial C}{\partial t} dt \\ \frac{1}{t}\frac{\partial M}{\partial G}\frac{\partial I}{\partial r} dr - \frac{G}{t^2}\frac{\partial C}{\partial t} dt + \left(\frac{1}{t} - 1\right)\left(1 - \frac{\partial C}{\partial Y}\right)\left(-\frac{G}{t^2}\frac{\partial M}{\partial t} dt + \frac{\partial M}{\partial r} dr\right) \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{b}\frac{\partial M}{\partial Y} Y > 0$ 이면

$dt < 0$ 이면 $dr < 0$

$\Rightarrow dt < 0$ 이면

$dr < 0,\ dY < 0$

즉, 통화수요의 이자율 탄력성 감소한다

5a

5. 아래 문제들에 답하라.

(a) (10 points) 아래 2차 다항함수를 행렬 형식으로 표현하라. 단 정방행렬은 대칭이어야 한다.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3 - x_2^2 - x_3^2$$

- X^T를 곱하지 않은 경우: -3
- 아예 계수행렬만 도출한 경우 5점처리

최현제 작성

(a) $Q = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(b) (10 points) 이 함수는 원점에서 local max인지, min인지, 둘 다 아닌지 판단하라

5b

- 정부호성 오류 최대 5점
- 판단결과만 제시하고 근거가 없는 경우 -5

(a) $Q = (x_1 \ \ldots$

$$\begin{pmatrix} \ldots \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

(b) $\det\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$, $\det\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}$, $\det(-1) = -1$ 이므로

이 행렬은 ND이다. 즉 FOC 조건을 만족하는 점에서 local max를 이룬다
(Q)

5c

(c) (10 points) 위 함수에 두 개의 제약 $x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 3$ 을 부여하자. 이 제약 하에서 위 다항함수를 극대화하기 위한 문제를 수학적으로 표현하라. (Hint: 무척 쉬운 문제임. arg max)

(Q)

최현제 작성

(c) $\underset{x}{\arg\max}\ Q(x)$ s.t. $x_1 - x_2 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 3$

5d

(d) (10 points) 위 문제의 1계조건을 만족하는 점을 모두 구하라.

- 1계조건만 기술한 경우 5점처리
- 계산 오류 -2

최현제 작성

(d) $\mathcal{L} = -x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3 - x_2^2 - x_3^2 + \mu_1(x_1 - x_2) + \mu_2(x_1 + x_2 + x_3 - 3) = 0$

FOC

5점처리

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -2x_1 + x_2 + \mu_1 + \mu_2 = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = x_1 + x_3 - 2x_2 - \mu_1 + \mu_2 = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = x_2 - 2x_3 + \mu_2 = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} = x_1 - x_2 = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$

연립하면 $x_1 = \frac{15}{14}, x_2 = \frac{15}{14}, x_3 = \frac{6}{7}, x_4 = \frac{3}{7}, x_5 = \frac{9}{14}$

$\therefore \left(\frac{15}{14}, \frac{15}{14}, \frac{6}{7}\right)$

5e

(e) (10 points) 위 문제의 2계조건을 기술하라

- 2계조건을 풀지 않고 원론만 제시한 경우: 3점처리
- NDCQ 누락 -2
- Hessian 산출하지 않은 경우 -5
- 미계산 -4

(e) NDCQ : rank $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ 이므로 성립.

SOC :

$$H = D^2 L_{\mu, x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$n = 3$
$m = 2$

$\text{sign}(\det(H)) = -1 = \text{sign}((-1)^n)$ 이므로 H는 ND이다. 즉

2계조건을 만족하는 점이 strict local max이다.

5f

(f) (10 points) 위 과정에 근거하여 이 극대화문제의 해가 존재하는지 여부를 검토하라.

- 극대화문제의 해는 global max 임. 이에 대해 논의하지 않았을 경우: -5
- 단, 이 경우는 모든 정의역에서 ND이므로 local max = global max임.

최현제 작성.

(f) x_1, x_2, x_3의 정의역이 실수 전체이므로 유일한 strict local max인 $\left(\frac{15}{14}, \frac{15}{14}, \frac{6}{7}\right)$에서의 값이

실수 전체에서 ND이므로

global max이므로, 극대화 문제의 해가 존재한다

6a

- 등제약: -5

6. 어떤 사람의 효용이 아래와 같다고 한다. 이어지는 물음에 답하라. x_i는 상품 i의 소비량을 의미한다.

$$U(\mathbf{x}) = 0.2\ln(x_1) + 0.4\ln(x_2)$$

(a) (10 points) 이 사람의 소득이 10이고, $p_1 = 3, p_2 = 1$일 때, 이 사람의 예산 제약을 수학적으로 표현하라

배현영 작성

$$3x_1 + x_2 \leq 10$$

6b

(b) (10 points) 이 사람의 예산 범위 안에서 효용을 가장 크게 만들 수 있는 상품 소비량 $\mathbf{x}$를 구하고자 한다. 이를 구하기 위한 극대화 문제를 규정하라. (Hint: argmax) 단, 편의를 위해 $x_i \geq 0$ 조건은 무시하라

배현영 작성

$$\underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmax}}\ U(\mathbf{x}) = 0.2\ln(x_1) + 0.4\ln(x_2)$$

$$\text{s.t. } 3x_1 + x_2 \leq 10$$

6c

(c) (10 points) 이 사람의 효용을 가장 크게 만들기 위한 1계 조건을 규정하고 이를 만족하는 모든 점을 구하라

배현영 작성

- 등제약 -5
- 1계조건 5점,
- 점 구하기 5점

$\mathcal{L} = 0.2\ln(x_1) + 0.4\ln(x_2) + \lambda(10 - 3x_1 - x_2)$

$(x_1, x_2) = \left(\frac{10}{9}, \frac{20}{3}\right)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{1}{5x_1} - 3\lambda = 0$ $\quad \lambda \geq 0 \quad \lambda(10 - 3x_1 - x_2) = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{2}{5x_2} - \lambda = 0$ $\quad 3x_1 + x_2 \leq 10$

6d

(d) (10 points) 위에서 구한 1계조건을 만족하는 모든 점들에 대해 2계 조건을 검토하라.

- Bordered Hessian 이 아닌 일반 Hessian 으로 분석: -6

배현영 작성

$$H = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccc} \lambda & x_1 & x_2 \end{array}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -3 & -\frac{81}{500} & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{9}{1000} \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - 3x_1 - x_2$ $n=2$, $m=1$ 이므로 LPM_3만 고려
변수 제약

$LPM_3 = \det H = \frac{245}{1000} > 0$

$\text{sign}(\det H) = \text{sign}(-1)^2 = \text{sign}(-1)^m$ 이므로 ND

6e

(e) (10 points) 위에서 1,2계 조건을 만족하는 점들 중에 global max 조건을 만족하는 점이 있는지 검토하고 근거를 설명하라.

- local max 조건만 검토한 경우: -5

배현영 작성

10

$DF(x^*)=0$, $D^2F(x^*)$가 NSD이면 global max.

$(x_1,x_2)=\left(\frac{10}{9},\frac{20}{3}\right)$에서 $DU(x^*)=0$, $D^2F(x^*)$가 ND이므로 global max.

(ND⊂NSD)

수고하셨습니다!