기말시험해설

경제수학 2020 겨울학기

조남운

Namun Cho/ mailto:eyeofyou@korea.ac.kr

1a

(a) (10 points) 다음 함수의 그래프를 볼록성(convexity)까지 정확하게 스케치하라

$$f = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$$

- tail 극한 제대로 표시 안할 경우 -1
- 볼록성 스케치 오류 -2

1a (최용준)

$$f = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$$

1 -1

$x^2 - x + 1 > 0$

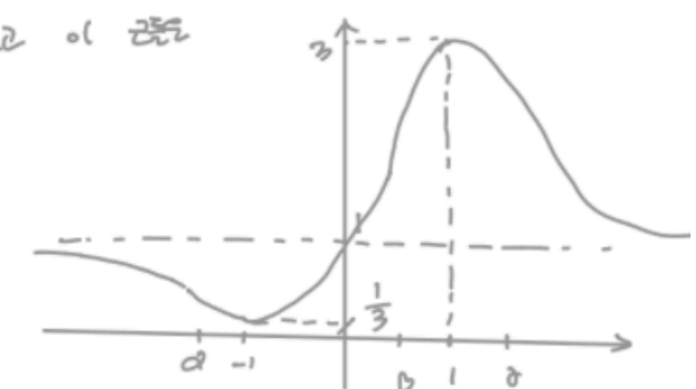
$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - x + 1} + 1 \qquad f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2 - 2x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2\{2x(x^2-x+1)^2 - (x^2-1)(2x-1)(x^2-x+1)\cdot 2\}}{(x^2-x+1)^4} = \frac{-4(x^3-x^2+x-2x^3+x^2+2x-1)}{(x^2-x+1)^3} = \frac{4(x^3-3x+1)}{(x^2-x+1)^3}$$

		α		-1		β		1		γ	
f'	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−
f''	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+
f	↘		↘		↗		↗		↘		↘

$g(x) = x^3 - 3x + 1$ 이라고 하면 $g(-2) = -1$, $g(-1) = 3$, $g(0) = 1$, $g(1) = -1$, $g(2) = 3$ 이므로
-2와 -1 사이에 근 한 개, 0과 1 사이에 한 개, 1과 2 사이에 한 개를 가진다는 것을 알 수 있고 이 근들은
$f''(x)$의 근과 동일하다. 이 세 근들을 크기 순으로 α, β, γ 라 하자.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ 이고 그래프는 다음과 같다.



(b) (10 points) 다음 함수와 주어진 정의역 (domain) D_1, D_2 에 대해서 global maximum.

1b

(b) (10 points) 다음 함수와 주어진 정의역 (domain) D_1, D_2 에 대해서 global maximum, global minimum, local maximum, local minimum, boundary maximum, boundary minimum 이 존재하는지 판단하고 존재한다면 모두 기술하라.

$$f = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$$

- $D_1 = [0, 10]$
- $D_2 = (0, \infty)$

- D1, D2 각각 5점

$0 \le x \le 10$ 일때

g.max : $f(1) = 3$
g.min : $f(0) = 1$
l.max : $f(1) = 3$
l.min : X
b.max :
b.min : $f(0)$, $f(10)$

$0 < x$ 일때

g.max : $f(1) = 3$
g.min : X
l.max : $f(1) = 3$
l.min : X
b.max : X
b.min : X

1c

(c) (10 points) 다음 함수의 도함수를 구하라 (참고: $\sin' x = \cos x$)

$$f(x) = \sin\left(\sqrt{\ln[(x^2+x+1)^{100}+x^3+1]} \cdot e^{x^2+ln(x+1)}\right)$$

- 주요 오류 항목당 -2 - -3
- 지수함수를 곱하지 않고 더한 (기출문제와 동일 버전) 경우: 5점
- 최경현 작성

so

$$f'(x) = \cos\left(\sqrt{\ln\left[(x^2+x+1)^{100}+x^3+1\right]}\cdot e^{x^2+\ln(x+1)}\right)\cdot e^{x^2+\ln(x+1)}$$

$$\times\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{100(x^2+x+1)^{99}\cdot(2x+1)+3x^2}{\sqrt{\ln\left[(x^2+x+1)^{100}+x^3+1\right]}\cdot\left\{(x^2+x+1)^{100}+x^3+1\right\}}\right.$$

$$\left.+\sqrt{\ln\left[(x^2+x+1)^{100}+x^3+1\right]}\cdot\left\{2x+\frac{1}{x+1}\right\}\right]$$

1d

(d) (10 points) $f' = 0, \quad f'' = 0$ 인 점은 local max 혹은 local min 이라고 할 수 있는가? 근거를 통해 자신의 주장을 입증하라. (Hint: 참일 경우: 증명, 거짓일 경우: 반례를 들 것)

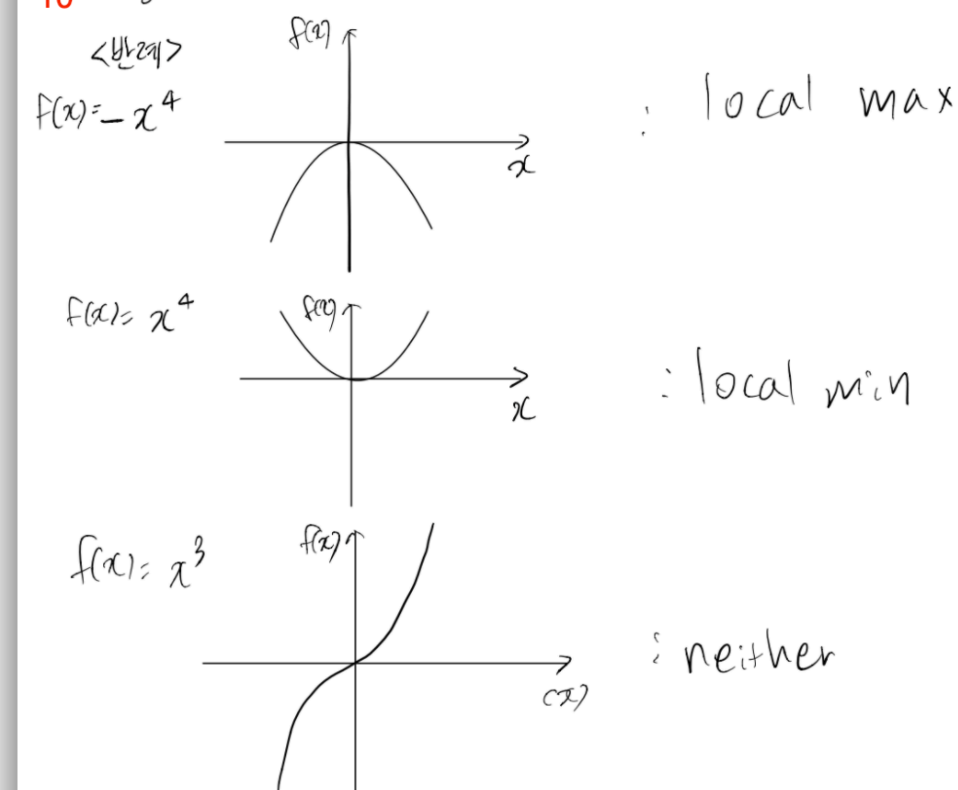
- 천민경 작성 →

(d) (거짓)

$f'=0$, $f''=0$ 인 점은 local max, local min, neither 모두 가능하다.

10

<반례>



2a

2. 다음 행렬에 대해서 이어지는 물음에 답하라

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (10 points) A에 적절한 기본 행렬 (Elementary Matrix)을 곱하여 행사다리꼴 (Row Echelon Form; REF)로 변환하라. (어려울 경우 기본행연산(Elementary Row Operation; ERO)을 사용할 것. 단 이 경우는 부분점수 부여)

- ERO로 풀면 7점

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

정재헌 작성

2b

(b) (10 points) 위에서 구한 행사다리꼴 행렬에서 다시 적절한 기본 행렬을 곱하여 축약 행사다리꼴 (Reduced REF; RREF) 로 변환하라. (역시 어려울 경우 ERO를 사용 - 부분 점수 부여)

- ERO: 7점

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&-2&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&-2&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-2&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-2&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Page 3

정재헌

2c

(c) (10 points) 위 기본행렬들을 이용하여 A^{-1}을 표현하라. (어려울 경우 ERO로 A^{-1}을 구할 것 - 부분점수 부여)

- ERO: 7점

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

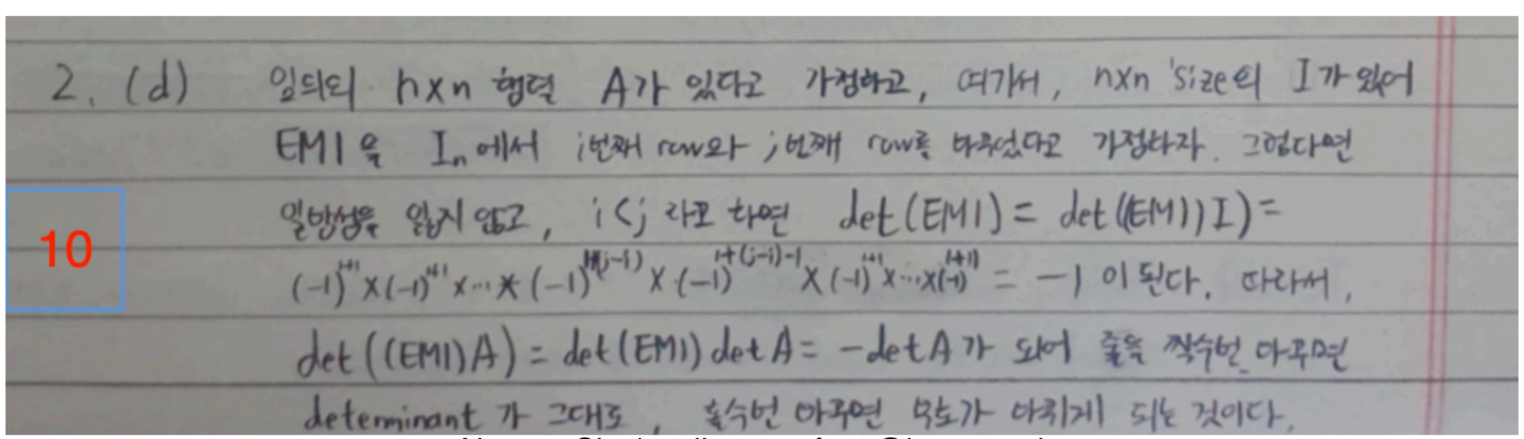
Inverse:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2d

(d) (10 points) ERO1 ($R_i \leftrightarrow R_j$) 를 짝수번 취하면 행렬의 determinant가 변하지 않고, 홀수번 취하면 determinant의 부호가 바뀜을 증명하라 (Hint: 임의의 EM1의 determinant를 구해보라)

- 특수한 경우도 푼 경우 5점
- det(EM1) = -1 을 증명하지 않고 받아들인 뒤, 기술한 경우는 3점으로 인정
- 김태형 작성 (아래 방법 말고도 다양한 방법으로 증명이 가능함)


10

2. (d) 임의의 n×n 행렬 A가 있다고 가정하고, 여기서, n×n size의 I가 있어 EM1을 I_n에서 i번째 row와 j번째 row를 바꾸었다고 가정하자. 그렇다면 일반성을 잃지 않고, i<j 라고 하면 $det(EM1) = det((EM1)I) = (-1)^{1+1} \times (-1)^{1+1} \times \cdots \times (-1)^{1+(j-i)} \times (-1)^{1+(j-i)-1} \times (-1)^{1+1} \times \cdots \times (-1)^{1+1} = -1$ 이 된다. 따라서, $det((EM1)A) = det(EM1) det A = -det A$ 가 되어 줄을 짝수번 바꾸면 determinant 가 그대로, 홀수번 바꾸면 부호가 바뀌게 되는 것이다.

Namun Cho/ mailto:eyeofyou@korea.ac.kr

3a

3. 다음 방정식에 대해서 이어지는 물음에 답하라.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 9 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

(a) (10 points) 위 방정식을 기본행연산 (Elementary Row Operation) 으로 풀어라.

- x3을 기술한 경우 -5
- 끝까지 풀지 않은 경우 -5

황인서 작성

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 9 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 5 \\ 1 & 9 & 9 \\ 2 & 15 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[: R_2 \leftarrow -R_1 + R_2]{ERO_2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 15 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[: R_3 \leftarrow -2R_1 + R_3]{ERO_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[: R_3 \leftarrow -R_2 + R_3]{ERO_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad x_1 = -3, \quad x_2 = \frac{4}{3}$

3b

(b) (10 points) 아래 세 벡터가 생성하는 차원수를 도출하고, 이 벡터들의 선형 독립성을 검토하라

$$\mathbf{v_1} = (1, 6, -7, 3)$$

$$\mathbf{v_2} = (2, 10, -1, 7)$$

$$\mathbf{v_3} = (1, 9, -6, 4)$$

(b) $A^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 2 & 10 & -1 & 7 \\ 1 & 9 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{: } R_2 \leftarrow -2R_1 + R_2]{\text{ERO}_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 0 & -2 & 13 & 1 \\ 1 & 9 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{: } R_3 \leftarrow -R_1 + R_3]{\text{ERO}_3}$

$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 0 & -2 & 13 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{: } R_3 \leftarrow \frac{3}{2} R_2 + R_3]{\text{ERO}_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 0 & -2 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{41}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$\text{rank}(A^T) = 3 = \text{rank}(A)$

따라서 차원수는 3 이고 v_1, v_2, v_3는 linearly independent 함.

($\text{rank}(A)$ = vector 개수 = 3 이므로)

4a

4. 다음 IS-LM 모형을 검토하라.

$$
\begin{aligned}
Y &= C + I + G \\
C &= C(Y - T_1), \quad C' \in (0,1) \\
I &= I(r, T_2), \quad \frac{\partial I}{\partial T_2} < 0, \frac{\partial I}{\partial r} < 0 \\
M^s &= M(Y, r), \quad \frac{\partial M}{\partial Y} > 0, \frac{\partial M}{\partial r} < 0
\end{aligned}
$$

- Y: 총소득, C: 총소비지출, I: 총투자지출, M^s: 총 화폐공급, T_1: 총 소득세, T_2: 총 법인세, G: 총 정부지출, r: 이자율

(a) (10 points) 위 모형을 Y, r에 대한 모형으로 간주하고 현재 상태를 규정한 뒤 그 근방에서 선형화하라.

- 가령 dG인데 G로 쓴 경우 (-2)

(a) $Y = C(Y - T_1) + I(r, T_2) + G$

$$\Rightarrow dY = \bar{C}' dY - \bar{C}' \cdot dT_1 + \frac{\partial I}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial I}{\partial T_2} \cdot dT_2 + dG$$

$M^S = M(Y, r)$

$$\Rightarrow dM^S = \frac{\partial M}{\partial Y} dY + \frac{\partial M}{\partial r} dr$$

i) $(\bar{C}' - 1) dY - \bar{C}' dT_1 + \frac{\partial I}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial I}{\partial T_2} \cdot dT_2 + dG = 0$

ii) $\frac{\partial M}{\partial Y} dY + \frac{\partial M}{\partial r} \cdot dr - dM^S = 0$

$$(\bar{C}' - 1) dY + \left.\frac{\partial I}{\partial r}\right|_{x = \bar{x}^*} \cdot dr = \bar{C}' dT_1 - \left.\frac{\partial I}{\partial T_2}\right|_{x = \bar{x}^*} \cdot dT_2 - dG$$

$$\left.\frac{\partial M}{\partial Y}\right|_{x = \bar{x}^*} \cdot dY + \left.\frac{\partial M}{\partial r}\right|_{x = \bar{x}^*} \cdot dr = \left. dM^S \right|_{x = \bar{x}^*}$$

$$\bar{x}^* = (Y^*, r^*, T_1^*, T_2^*, G^*, M^{S*})$$

4b

(b) (10 points) 위 모형의 매개변수(parameter)들을 빠짐없이 나열하고 이 중 정부가 통제 할수 있는 정책변수가 어떤 것인지 분류하라.

- 엄밀히 보자면 C는 함수이름으로 파라미터라고 하기 어려움
- I= I(r)에서 왼쪽 I는 변수(파라미터)이지만, 오른쪽 I 는 함수의 이름임
- Ms, T1, T2, G: 매개변수이자 정책변수

4c

(c) (10 points) 만일 정부가 법인세율을 소폭 증가시키고 나머지 정부가 통제 가능한 매개변수는 변동하지 않는 것으로 둘 경우 총소득과 이자율에 미치는 영향을 위 모형을 통해 추론하라. (추론되지 않을 경우에는 추론할 수 없는 이유를 기술하거나 경우의 수를 나누어 풀 것)

- 풀이 5점
- 정책해석 5점
- dT2 제외 나머지 정책변수는 모두 0임. 단, 경우의 수로 나누어 기술한 것은 인정할 수 있음
- dr 기술 안하면 -3

(C)

$$\begin{pmatrix} \bar{C}'-1 & \frac{\partial I}{\partial r} \\ \frac{\partial M}{\partial Y} & \frac{\partial M}{\partial r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}'\cdot dT_1 - \frac{\partial I}{\partial T_2}\cdot dT_2 - dG \\ dM^S \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \frac{1}{(\bar{C}'-1)\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial M}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial I}{\partial r}\right)}\begin{pmatrix} \frac{\partial M}{\partial r} & -\frac{\partial I}{\partial r} \\ -\frac{\partial M}{\partial Y} & \bar{C}'-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{C}' dT_1 - \frac{\partial I}{\partial T_2}\cdot dT_2 - dG \\ dM^S \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \frac{\partial M}{\partial r} & -\frac{\partial I}{\partial r} \\ -\frac{\partial M}{\partial Y} & \bar{C}'-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{C}'\cdot dT_1 - \frac{\partial I}{\partial T_2}\cdot dT_2 - dG \\ dM^S \end{pmatrix}$$

CamScanner로 스캔하기

6

$$dY = \frac{1}{D}\left\{ \frac{\partial M}{\partial r}\left(\bar{C}'\cdot dT_1 - \frac{\partial I}{\partial T_2}\cdot dT_2 - dG\right) - \frac{\partial I}{\partial r}\cdot dM^S \right\}$$

$$dr = \frac{1}{D}\left\{ -\frac{\partial M}{\partial Y}\left(\bar{C}' dT_1 - \frac{\partial I}{\partial T_2}\cdot dT_2 - dG\right) + (\bar{C}'-1)\, dM^S \right\}$$

$\bar{C}'-1<0$ $\frac{\partial M}{\partial r}<0$ $\frac{\partial M}{\partial Y}>0$ $\frac{\partial I}{\partial r}<0$ 이므로 $D>0$ 이다.

만약 정부가 다른 모든 것을 그대로 두고 법인세를 높이면 $dT_2>0$, $dT_1=0$ $dG=0$ $dM^S=0$ 이고

$dY = \frac{1}{D}\cdot\frac{\partial M}{\partial r}\left(-\frac{\partial I}{\partial T_2}\cdot dT_2\right)$, $dr = \frac{1}{D}\left(-\frac{\partial M}{\partial Y}\right)\cdot\left(-\frac{\partial I}{\partial T_2}\cdot dT_2\right)$

$\frac{\partial M}{\partial r}<0$ $\frac{\partial I}{\partial T_2}<0$ $\frac{\partial M}{\partial Y}>0$ 따라서 $dY<0$, $dr<0$ 이다.

즉 총소득 Y와 이자율 r이 모두 감소한다.

5a

5. 아래 문제를 풀고자 한다. 이어지는 물음들에 답하라

$$\arg\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 x_3 + x_3$$

$$s.t. \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 6 \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

(a) (10 points) 이 문제를 풀기 위한 라그랑지안 함수를 기술하라

(a)

$$L = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_3 + \mu(6 - x_1^2 - x_2^2 - x_3) + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$$

5b

(b) (10 points) 이 문제의 1계 조건을 열거하라

- lambda, mu 무시한 경우 (-4)

(b) FOC $D_{x,\mu} \mathcal{L} = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = x_2 \cdot x_3 - 2x_1 \cdot \mu + \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = x_1 \cdot x_3 - 2x_2 \mu + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = x_1 \cdot x_2 + 1 - \mu + \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 6 - x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0$$

$\lambda_1 \cdot x_1 = 0$, $\lambda_2 \cdot x_2 = 0$, $\lambda_3 \cdot x_3 = 0$

$x_1 \geq 0$ $\lambda_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$ $\lambda_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0$ $\lambda_3 \geq 0$

(c)

Namun Cho/ mailto:eyeofyou@korea.ac.kr

5c

(c) (10 points) 이 문제의 1계조건을 만족하는 모든 점을 찾아라

- multiplier 해를 안구한 경우 (-3)
- 해가 1개만 나온 경우 (-2)

(C)

case 1) $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$ X

$\Rightarrow \lambda_1 = -x_2 \cdot x_3$ (음수) but $\lambda_1 \geq 0$ 이어야하므로 모순.

$\lambda_2 = 2x_2\mu$

$\mu = 1 + \lambda_3$

$6 - x_2^2 - x_3 = 0$

case 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 \neq 0$ O

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ $\quad \lambda_2 = 0$ $\quad \mu = 1 + \lambda_3$

$x_3 = 6$ $\quad \lambda_3 = 0$ $\quad \mu = 1$

case 3) $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 \neq 0$ X

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ $\quad \lambda_2 = 2x_2 \cdot \mu$ $\quad \mu = 1 + \lambda_3$

$x_2^2 = 6 \Rightarrow x_2 = \sqrt{6}$ $\quad \lambda_2 = 2\sqrt{6} \cdot \mu$ $\quad \mu = 1 + \lambda_3 \Rightarrow \mu \neq 0$

$\lambda_2 \cdot x_2 \neq 0$ 이므로 모순

case 4) $x_1 \neq 0$, $x_2 = x_3 = 0$ X

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ $\quad \lambda_1 = 2x_1\mu$

$\lambda_2 = 0$ $\quad \mu = 1 + \lambda_3$ $\quad x_1 = \sqrt{6}$.

$\lambda_1 = 2\sqrt{6}\mu = 0$, so $\mu = 0$

but $\mu = 1 + \lambda_3$ 이므로 $\lambda_3 = -1$ (모순)

8

case 5) $x_1 \neq 0$ $x_2 = 0$ $x_3 \neq 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 0$ $\lambda_3 = 0$

x

$\lambda_1 = 2x_1 \mu$

$\lambda_2 = -x_1 x_3$ (음수이므로 모순).

case 6) $x_1 \neq 0$ $x_2 \neq 0$ $x_3 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 0$

x

$\lambda_1 = 2 \cdot x_1 \mu = 0$ $\qquad \mu = 0$

$\lambda_2 = 2x_2 \mu = 0$

$\lambda_3 = \mu - 1 - x_1 \cdot x_2$. (음수이므로 모순).

$x_1^2 + x_2^2 = 6$

case 7) $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$

O

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$x_2 \cdot x_3 - 2x_1 \mu = 0$

$x_1 \cdot x_3 - 2x_2 \mu = 0$

$x_1 \cdot x_2 + 1 - \mu = 0$.

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$.

$\mu = 1 + x_1 \cdot x_2$

$$\begin{cases} x_2 \cdot x_3 - 2x_1(1 + x_1 \cdot x_2) = 0 \\ x_1 \cdot x_3 - 2x_2(1 + x_1 x_2) = 0 \end{cases}$$

$x_3 = 6 - x_1^2 - x_2^2$.

→ 연립시

$(x_2 - x_1)\{x_3 + 2(x_2 - x_1)(1 + x_1 \cdot x_2)\} = 0$

$\Rightarrow (x_2 - x_1)\underbrace{\{x_3 + 2(1 + x_1 \cdot x_2)\}}_{\neq 0} = 0$

$\therefore x_1 = x_2$.

이를 대입시

$x_1 \cdot x_3 - 2x_1(1 + x_1^2) = 0$.

$\Rightarrow x_1(x_3 - 2 - 2x_1^2) = 0$.

$x_1 = 0$ or $x_3 = 2 + 2x_1^2$

($x_1 \neq 0$ 이므로 x)

이때 $x_3 = 2 + 2x_1^2 = 6 - 2x_1^2$ 이므로 $4x_1^2 = 4$ $x_1 = 1,\ x_2 = 1$

$x_3 = 4$

case 8) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$6 - x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0$ 이므로 모순

- (x, mu, lambda)= (0,0,6,1,0,0,0)
- (x, mu, lambda)= (1,1,4,1,0,0,0)

5d

(d) (10 points) 이 라그랑지안 함수의 유테헤시안(Bordered Hessian)을 구하라

- lambda=0 인 것 까지 모두 포함 할 경우 -5
- 최용준 작성

각 case에서 모든 i에 대해 $\lambda_i=0 \rightarrow k_0=0 \quad m=1$

$$D_2 f_{\mathcal{H}} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} \mu & x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mu \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -2x_1 & -2x_2 & -1 \\ -2x_1 & -2\mu & x_3 & x_2 \\ -2x_2 & x_3 & -2\mu & x_1 \\ -1 & x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = H$$

$$H|_{(0,0,6,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = H_1$$

$$H|_{(1,1,4,2)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = H_2$$

5e

(e) (10 points) 앞에서 구한 1계조건을 만족하는 모든 점에서 2계조건을 만족하는지 검토하라

- 앞에서 구한 bordered Hession에 오류가 있다 하더라도 그에 기반하여 정확히 계산절차를 밟으면 정답으로 인정
- n=3, m+k0=1+0=1 이므로 3-1=2개의 LPM을 검토해야 함 (3개 검토할 경우 -1)
- 원론적 일반론 기술 3점.

하라 $n=3,\ m=1,\ k_0=0 \longrightarrow LPM_{n+m}(H)$부터 $n-m$개, 즉 $LPM_4(H)$와 $LPM_3(H)$ 체크.

i) H_1

$$LPM_4(H_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 32 > 0 \qquad LPM_3(H_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Not PD, ND

ii) H_2

$$LPM_4(H_2) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -64 < 0 \qquad LPM_3(H_2) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 64 > 0 \quad \Rightarrow ND$$

$\Rightarrow$ strict local maximum

(f) (10 points) 1, 2개 조건을 모두 만족하면 global minimum 이라고 할 수 있는가? 이에

5f

(f) (10 points) 1, 2계 조건을 모두 만족하면 global minimum 이라고 할 수 있는가? 이에 대해 논하라.

혹은 global maximum

- global min, max를 보장하는 경우는 특수한 경우밖에 없음. 그 외에는 보장한다고 볼 수는 없음.

5f) Global min 의 조건.

$\rightarrow D_2 F(x^*)$ 가 PSD

Global max의 조건

$\rightarrow D_2 F(x^*)$ 가 NSD

for all $x^* \in R^n$

ex) $f(x) = -x^4$ 이면

$f''(x) = -12x^2$ 이고 이는 $f''(x) \leq 0$ for all $x \in R^1$

$\Rightarrow$ global max

수고하셨습니다!