# 기말시험 해설

212.214-004
2016년 1학기

Nam-Un, Cho/Center for Distributive Justice/ mailto:namun@snu.ac.kr

# 1a

(a) (10 points) 다음 함수의 그래프를 정의역이 실수 ($\mathbb{R}$) 라는 전제하에 스케치하라.

$$f(x) = xe^x$$

# 1a

- 수렴성, 최저점, 절편 등이 명료하게 표현되어 있어야 함
- 축 변수 누락: -1

(a)

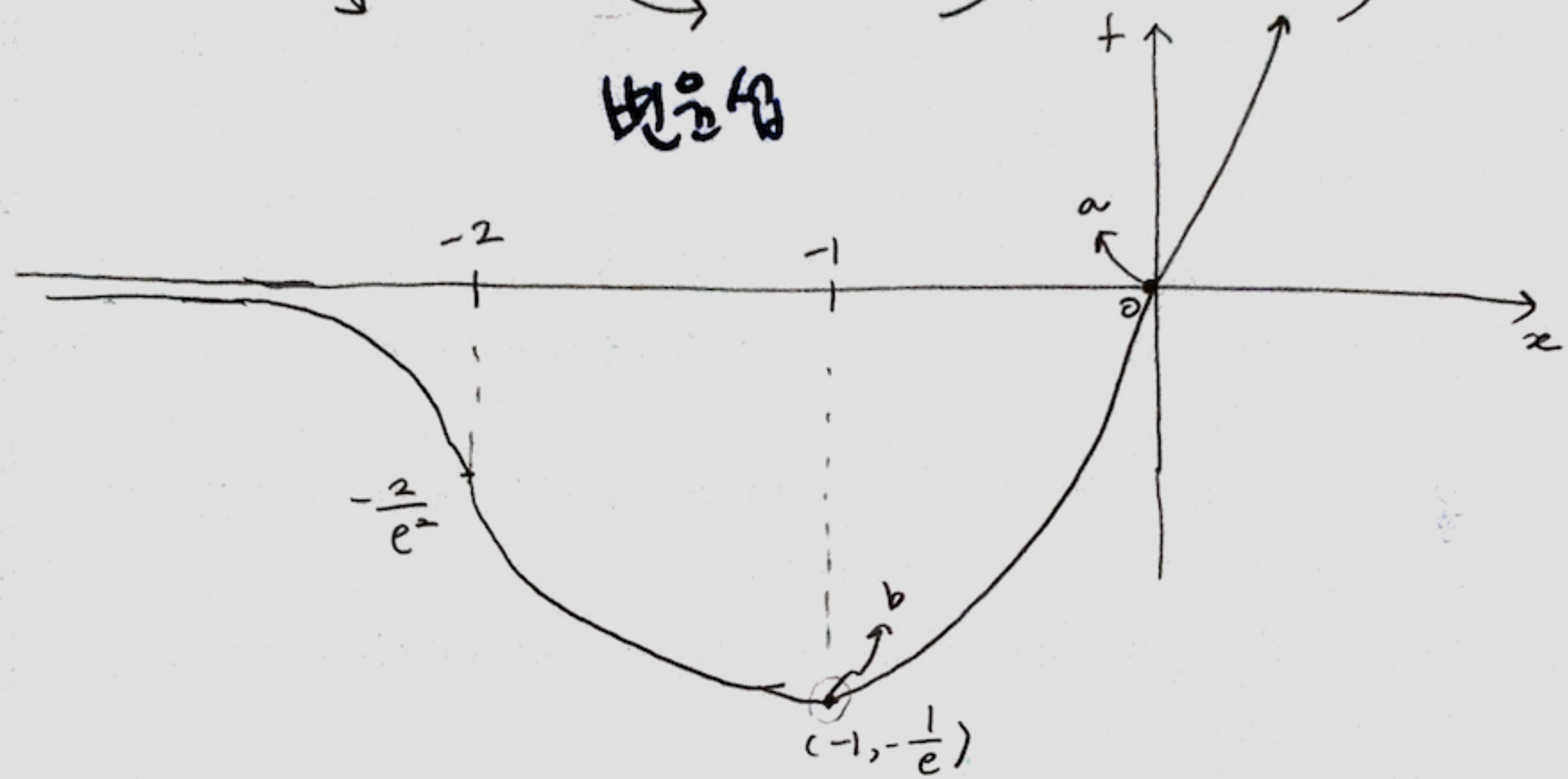
$f(x) = x \cdot e^{x} \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = e^{x} + x \cdot e^{x} = e^{x}(x+1) \qquad f'(-1) = 0$

$f''(x) = e^{x} + e^{x} + x e^{x} = e^{x}(x+2) \qquad f''(-2) = 0$

| | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f''$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f$ | $0$ ↘ | $-\frac{2}{e^2}$ | ↘ | $-\frac{1}{e}$ | ↗ | $0$ | ↗ $\infty$ |

변곡점



# 1b

(b) (10 points) 정의역 (domain)이 다음과 같을 때 위 함수의 Global Maximum, Local Maximum, Global Minimum, Local Minimum을 모두 구하라. (Note: Boundary Min/Max 도 Local Min/Max로 간주할 것)

- Domain: $x \in (\infty, 0]$
- Domain: $x \in (\infty, 0] - \{-1/e\}$

# 1b

- -1/e 는 증가구간의 한 점이므로 두 domain 모두 결과가 다르지 않음
- Boundary Solution의 경우, 문제에서 요구한 대로 Local Solution 으로 간주하던지, Boundary Solution으로 별도 취급해야 함
  - 단 동일한 이유로 오류가 두 번 있는 경우는 두 번 감점하지 않음.
- 정답여부와 무관하게 1a에서 그린 그래프에 의거하여 채점함
- min, max 는 기본적으로 함수값 ( f(x*) ) 이어야 함. 특별한 부가 설명 없이 x* 만을 기술하면 안됨.

10

(b) (10 points) 정의역 (domain)이 다음과 같을 때 위 함수의 Global Maximum, Local Maximum, Global Minimum, Local Minimum을 모두 구하라. (Note: Boundary Min/Max도 Local Min/Max로 간주할 것)

1) • Domain: $x \in (\infty, 0]$

2) • Domain: $x \in (\infty, 0] - \{-1/e\}$

(c) (10 points) $\mathbf{x} = (1,1)$ 일 때 $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$ 를 구하라.

(b) 1) $(-\infty, 0]$ Local Maximum : $(0,0)$

Local Minimum : $(-1, -\frac{1}{e})$

이외의 local max/min 없음

$x \to -\infty$ 일 때 0으로 수렴. $\therefore$ Global Max : $(0,0)$

이화히

Global Min : $(-1, -\frac{1}{e})$

2) $(-\infty, 0] - \{-\frac{1}{e}\}$

주어진 도메인은 1)의 경우와 max/min을 구하는 과정의 차이 X.

($\because$ $x = -\frac{1}{e}$ 에서 특이점이 생성되지 않음)

$\therefore$ Local Max = Global Max : $(0,0)$

Local Min = Global Min : $(-1, -\frac{1}{e})$.

# 1c

(c) (10 points) $\mathbf{x} = (1, 1)$일 때 $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$ 를 구하라.

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 6$$

# 1c

- 음함수정리 (IFT) 를 이용할 경우 Chain Rule과 유사한 결과이나, 음의 비율임에 유의할 것.

# 이환히

(c) (10 points) $\mathbf{x} = (1, 1)$ 일 때 $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$ 를 구하라.

$\chi \to -$

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 =$$

(c)

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2}(1,1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1)}{\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1)} = -\frac{4x_1 + 2x_2 \big|_{(x_1,x_2)=(1,1)}}{2x_1 + 4x_2 \big|_{(x_1,x_2)=(1,1)}}$$

$$= -\frac{6}{6} = -1.$$

# 1d

(d) (10 points) 다음 함수의 Hessian Matrix를 구하고 대각화 (diagonalize) 한 뒤, 정부호성 (definiteness) 을 판별하라.

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

# 1d

- 대각화한 행렬과 RREF는 다른 것임 (둘 다 대각행렬이긴 하지만.)
- RREF 로부터 정부호성 판별은 또 다른 오류임
  - 반드시 대각화한 행렬로부터 정부호성을 판별하던지, 아니면 Hessian에 대해 직접 정부호성을 판별해야 함.
  - 엄밀한 의미에서의 RREF는 pivot이 1임. Definiteness를 판별할 수 없음.

(d) $\det(H - rI) = \begin{vmatrix} 6-r & -2 & 0 \\ -2 & 4-r & -2 \\ 0 & -2 & 6-r \end{vmatrix}$

$= (6-r)\{(4-r)(6-r) - 4\} + 2(-2(6-r))$

$= (6-r)\{(4-r)(6-r) - 8\}$

$= (6-r)(r^2 - 10r + 16)$

$= (6-r)(r-2)(r-8)$

$\therefore r = 2, 6, 8$. (eigen value)

$\therefore P = (v_1, v_2, v_3)$ 라 하면

H는 e.v 가 3개 이고 $H \in M_3$ 이므로 대각화 OK

$\therefore P^{-1}HP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ 이고 이는 p.d. (positive definite)

(대각 value > 0)

(i) $r=2$

$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$2x - y = 0$
$-x + y - z = 0$ $\Rightarrow (x, y, z) = (x, 2x, x)$
$-y + 2z = 0$

unit vector $= \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1) \equiv v_1$

(ii) $r=6$

$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$-2y = 0$
$x + y + z = 0$ $\Rightarrow (x, y, z) = (x, 0, -x)$

unit vector $= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) \equiv v_2$

(iii) $r=8$

$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$x + y = 0$
$x + 2y + z = 0$ $\Rightarrow (x, y, z) = (x, -x, x)$
$y + z = 0$ $\Rightarrow$ unit $= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \equiv v_3$

(d) (10 points) 다음 함수의 Hessian Matrix를 구하고 대각화 (diagonalize) 한 뒤, 정부호성 (definiteness) 을 판별하라.

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

10

$x = (x_1, x_2, x_3)^T$

$f(x) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$= 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

$D^2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$ 이고 $(D^2)^T = (D^2)$

훌륭함

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 - 2x_2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = 6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 - 2x_1 - 2x_3$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} = 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = -2$

$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 6x_3 - 2x_2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3} = 6$

$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

# 1e

(e) (10 points) 다음 수열($\pi$의 소수점 $n$째 자리까지의 나열) 의 일반형을 기술하고, $\pi$로 수렴하는 수열이라 할 수 있는지 수렴의 엄밀한 정의를 이용하여 증명하라. (Hint: $\lfloor a \rfloor := \{m \in \mathbb{N} | m \leq a\}$)

$$\{3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \cdots,\}$$

# 1e

- 수렴의 엄밀한 정의를 사용해서 증명해야 함
- 수렴의 엄밀한 정의에 맞는 N을 epsilon을 사용하여 표현하는 것이 증명의 핵심임.

10

(e) (10 points) 다음 수열($\pi$의 소수점 $n$째 자리까지의 나열)의 일반항을 기술하고, $\pi$로 수렴하는 수열이라 할 수 있는지 수렴의 엄밀한 정의를 이용하여 증명하라. (Hint: $\lfloor a \rfloor := \{m \in \mathbb{N} | m \le a\}$)

$$\{3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \cdots,\}$$

$x_n = \frac{[\pi \times 10^n]}{10^n}$ (일반항) $\Rightarrow$ , $\frac{314}{100} = 3.14$

$0 \le \frac{\alpha_j}{10^n} \le \cancel{10}\ \frac{9}{10^n}$

pf) $\forall \alpha_n \in \mathbb{N}$, $0 \le \alpha_n \le 9$ 이라 하자. ($\forall n$)

이때 $\pi_n = 3 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \cdots \frac{\alpha_n}{10^n} = 3 + \overline{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$ 으로 나타내어진다.

$\Rightarrow$ 3. $\boxed{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$ 이라는 의미임

그런데 $y_n = \frac{\alpha_n}{10^n}$일 때 $y_{n+1} < \frac{y_n}{10}$이 성립한다.

비자율

$\therefore$ $\frac{\alpha_n}{10^n} < \varepsilon$이라 하면 $(\alpha_n > 0)$

$\ln \alpha_n - n \ln 10 < \ln \varepsilon$ 이며,

$\ln \alpha_n - \ln \varepsilon = \ln \frac{\alpha_n}{\varepsilon} < n \ln 10$ $\therefore \frac{\ln \frac{\alpha_n}{\varepsilon}}{\ln 10} < n$ 이다

따라서 $\left[ \frac{\ln \frac{\alpha_n}{\varepsilon}}{\ln 10} \right] = \bar{N}$ 이라 하면

$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{N} \left( \frac{\ln \frac{\alpha_n}{\varepsilon}}{\ln 10} \right)$ s.t. $\forall n \ge \bar{N}$ 일 때 $x_n \in B_\varepsilon(\pi)$ 이 성립한다고 할 수 있다.

$(y_n \in B_\varepsilon(0))$

# 2a,b

2. 아래 비선형 (nonlinear) 시스템에 대해서 상태 $S^* = (G^*, M_s^*, t^*, Y^*, r^*)$ 근방에서 각 단일 외생변수들 증가 $(G, r, t)$ 에 대한 각 내생 변수들 $(M_s, Y)$ 의 변화방향에 대해 기술하라. (즉, $G$ 만 증가할 경우, $r$ 만 증가할 경우, $t$ 만 증가할 경우에 $M_s, Y$ 가 각각 어떤 방향으로 변화할 것인지 기술하라는 의미임)

$$Y = C + I + G$$
$$C = C(Y - T)$$
$$I = I(r)$$
$$M_s = M(Y, r)$$
$$T = tY$$

$$0 < \frac{dC}{d(Y-T)} < 1, \quad \frac{dI}{dr} < 0, \quad \frac{\partial M}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial M}{\partial r} < 0, \quad 0 < t < 1$$

$Y$: GDP, $C$: 소비지출액, $I$: 투자지출액, $G$: 정부지출액, $T$: 총 조세액, $t$: 소득세율, $r$: 이자율, $M_s$: 화폐공급량, $M$: 화폐수요량,

(a) (10 points) 위 비선형 시스템의 해를 $S^*$ 근방에서 구하라.

(b) (10 points) 각 외생 변수$(G, r, t)$가 각각 소폭 증가할 경우 내생변수 $(M_s, Y)$ 의 변화방향에 대해 기술하라.

# 2a,b

- 내생변수가 바뀌었음에 유의할 것
- 2b 는 2a의 오류 여부와 무관하게 2a의 결과에 의거하여 정확히 추론하면 됨
  - 단, 내생변수가 바뀌었을 경우에는 추론에 한계가 존재할 수 밖에 없음
- 비선형 모형 자체를 선형으로 가정하고 풀었을 경우에는 부분점수 부여함

2-(b)

이 때 $D$의 부호는 $0<(1-t)<1$, $0<C'<1$ 이므로 $-1+(1-t)C'<0 \Rightarrow D$는 $(-)$이다

i) $dG>0$, $dr=0$, $dt=0$ 이면

$$\begin{pmatrix} dM_s \\ dY \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} -\frac{\partial M}{\partial Y} & -1+(1-t)C' \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dG \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial M}{\partial Y}\cdot dG \\ -dG \end{pmatrix}$$

$$\therefore dM_s = \underset{(-)}{\frac{1}{D}} \cdot \left(-\underset{(+)}{\frac{\partial M}{\partial Y}} \cdot \underset{(+)}{dG}\right) > 0$$

$$dY = \underset{(-)}{\frac{1}{D}}\underset{(+)}{(-dG)} > 0 \quad \Rightarrow$$ ~~$dM_s$ er~~ $M_s$ er $Y$ 모두 증가

ii) $dG=0$, $dr>0$, $dt=0$

$$\begin{pmatrix} dM_s \\ dY \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} -\frac{\partial M}{\partial Y} & -1+(1-t)C' \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I'dr \\ \frac{\partial M}{\partial r}dr \end{pmatrix}$$

$$dM_s = \underset{(-)}{\frac{1}{D}}\underbrace{\left(-\underset{(+)}{\frac{\partial M}{\partial Y}}\cdot \underset{(-)}{I'}\underset{(+)}{dr} + \underset{(-)}{(-1+(1-t)C')}\cdot \underset{(-)}{\frac{\partial M}{\partial r}}\underset{(+)}{dr}\right)}_{(+)} < 0$$

$$dY = \underset{(-)}{\frac{1}{D}}\underbrace{(-\underset{(-)}{I'}\underset{(+)}{dr})}_{(+)} < 0 \quad \Rightarrow M_s \text{ er } Y \text{ 모두 감소}$$

iii) $dG=0$, $dr=0$, $dt>0$

$$\begin{pmatrix} dM_s \\ dY \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} -\frac{\partial M}{\partial Y} & -1+(1-t)C' \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -C'Ydt \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow dM_s = \underset{(-)}{\frac{1}{D}}(\underset{(+)}{C'}\underset{(+)}{Y}\underset{(+)}{dt})\underset{(+)}{\frac{\partial M}{\partial Y}} < 0$$

$$dY = \frac{1}{D}\cdot(C'Ydt) < 0$$

$\Rightarrow M_s$ er $Y$ 모두 감소

이준주



2. 아래 비선형 (nonlinear) 시스템에 대해서 상태 $S^* = (G^*, M_s^*, t^*, Y^*, r^*)$ 근방에서 각 단일 외생변수들 증가 $(G, r, t)$에 대한 각 내생 변수들 $(M_s, Y)$의 변화방향에 대해 기술하라. (즉, $G$만 증가할 경우, $r$만 증가할 경우, $t$만 증가할 경우에 $M_s, Y$가 각각 어떤 방향으로 변화할 것인지 기술하라는 의미임)

$$Y = C + I + G$$
$$C = C(Y-T)$$
$$I = I(r)$$
$$M_s = M(Y, r)$$
$$T = tY$$

$$0 < \frac{dC}{d(Y-T)} < 1,\quad \frac{dI}{dr} < 0,\quad \frac{\partial M}{\partial Y} > 0,\quad \frac{\partial M}{\partial r} < 0,\quad 0 < t < 1$$

$Y$: GDP, $C$: 소비지출액, $I$: 투자지출액, $G$: 정부지출액, $T$: 총 조세액, $t$: 소득세율, $r$: 이자율, $M_s$: 화폐공급량, $M$: 화폐수요량.

10 (a) (10 points) 위 비선형 시스템의 해를 $S^*$ 근방에서 구하라.

10 (b) (10 points) 각 외생 변수$(G, r, t)$가 각각 소폭 증가할 경우 내생변수 $(M_s, Y)$의 변화방향에 대해 기술하라.

(A) $Y = C + I(r) + G$

$$= C((Y-tY)) + I(r) + G$$

$$\Rightarrow dY = \frac{\partial C(Y-tY)}{\partial Y}\cdot dY + \frac{\partial C(Y-tY)}{\partial t}\cdot dt + I'dr + dG$$

$$= (1-t)\cdot C'dY - Y\cdot C'dt + I'dr + dG \quad \cdots ①$$

$$dM_s = \frac{\partial M}{\partial Y}dY + \frac{\partial M}{\partial r}dr \quad \cdots ②$$

①을 정리하면 $dY(1+(t-1)C') = -C'Ydt + I'dr + dG$

② 〃 $dM_s - \frac{\partial M}{\partial Y}\cdot dY = \frac{\partial M}{\partial r}\cdot dr$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1+(t-1)C' \\ 1 & -\frac{\partial M}{\partial Y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dM_s \\ dY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C'Ydt + I'dr + dG \\ \frac{\partial M}{\partial r}\cdot dr \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} dM_s \\ dY \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} -\frac{\partial M}{\partial Y} & -1+(1-t)C' \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -C'Ydt + I'dr + dG \\ \frac{\partial M}{\partial r}dr \end{pmatrix}$$



이 때 $D = -1 + (1-t)C'$

# 3

3. (10 points) $N$ 개의 관측 데이터 ($\mathbf{x_i} \in \mathbb{R}^2$) ($i = 1, 2, \cdots, N$) 가 있다. 이 데이터들을 가장 잘 설명할 수 있는 선형관계 ($x_{2i} = \bar{a}x_{1i} + \bar{b}$) 가 반드시 유일하게 존재함을 보이고, 그 선형 관계를 도출하라. (단, 여기에서 "가장 잘 설명할 수 있다"는 것은 이론치 (predicted value) 와 관측치 (observed value) 의 차이의 제곱합이 가장 작다는 것으로 정의한다.)

# 3

- x2 = a x1 + b 임. 즉, x1, x2 외에 다른 관측값은 없음. 많은 경우 제 3의 관측값 y 가 있다고 보았는데, 이는 잘못된 해석임.
  - y=x2 로 재해석한 경우는 문제 없음.
- 제약 없는 극소화문제로 변환
- FOC, SOC를 모두 검토해야 함.

하십시오. (단, 여기에서 "가장 잘 설명할 수 있다"는 것은 이론치 (predicted value)와 관측치 (observed value)의 차이의 제곱합이 가장 작다는 것으로 정의한다.)

10

$x_{2i}$를 편의를 위해 $y_i$로 두고 $x_{1i}$를 $x_i$로 두자. 이론치를 $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$로 두면

$\arg\min_{\beta_0,\beta_1} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$ 인 $\beta_0, \beta_1$를 찾아야한다. $L = \sum_{i=1}^{N}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$로 두자

$\left.\frac{\partial L}{\partial \beta_0}\right|_{\hat\beta_0,\hat\beta_1} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat\beta_0 - \hat\beta_1 x_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} y_i = N\hat\beta_0 + \hat\beta_1 \sum_{i=1}^{N} x_i \Rightarrow \hat\beta_0 = \bar{y} - \hat\beta_1 \bar{x}$

김지민

$\left.\frac{\partial L}{\partial \beta_1}\right|_{\hat\beta_0,\hat\beta_1} = -2\sum_{i=1}^{N} x_i(y_i - \hat\beta_0 - \hat\beta_1 x_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = \sum_{i=1}^{N} x_i \hat\beta_0 + \hat\beta_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^2$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = (\bar{y} - \hat\beta_1 \bar{x})\sum_{i=1}^{N} x_i + \hat\beta_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^2$

$\hat\beta_1 \left(\sum_{i=1}^{N} x_i (x_i - \bar{x})\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i (y_i - \bar{y})$

$\Rightarrow \hat\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{N} x_i (x_i - \bar{x})}$

$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} = \begin{pmatrix} -2N & -2\sum_{i=1}^{N} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{N} x_i & 2\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{pmatrix}$ 으로 symmetric 이 되어 PD.

$\beta = (\beta_0, \beta_1)$.

따라서 위에서 구한 선형계수 $\hat\beta_0 = \bar{y} - \hat\beta_1 \bar{x}$, $\hat\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{N} x_i(x_i - \bar{x})}$ 는 critical point 이므로 L을 최소화시키는 유일한 게 존재한다. 여기서 도출할 수 있는 선형관계는

$y_i = \hat\beta_0 + \hat\beta_1 x_i$ where $\hat\beta_0 = \bar{y} - \hat\beta_1 \bar{x}$, $\hat\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{N} x_i(x_i - \bar{x})}$

4. 다음 극소화 문제를 검토하자.

$\arg\min 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 9x_2 \quad \ldots$

4. 다음 극소화 문제를 검토하자.

$$\arg\min_{\mathbf{x}} 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 9x_2 \quad s.t. \quad 4x_1 + 3x_2 \leq 10, \quad x_2 - 4x_1^2 \geq -2$$

(a) (5 points) 위 극소화문제를 위한 라그랑지 함수 (Lagrangian Function)을 만들것.

(b) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 1계조건 (FOC)을 기술하고, 이를 만족하는 점들을 모두 찾을 것.

(c) (5 points) 위 문제를 풀기 위한 2계조건 (SOC)를 기술하고, 위 점들 중 한 점을 선정하여 정부호성 (Definiteness)을 검토할 것.

# 4a

- minimization 문제 부호 방향에 유의
- 연습문제 18.18을 참고할 것.

# 4b

- 1계조건 기술시 minimization 문제임에 유의
- FOC 만족하는 점이 모두 binding 된 경우에는 그 점만이 유일한 해임 - min 이면서 max
- 따라서 SOC를 검토할수 있는 유일한 경우는 1조건만 binding 되었을 경우임
- 해는 총 2개. 나머지 해들은 제약조건들 중 최소 한 가지를 위배함
  - (x1,x2,lambda1,lambda2) =
    - (1) -4/3, 46/9, >0, >0
    - (2) 28/37, 86/37, 15/37,0
- (1)의 경우 모두 binding, (2)의 경우 1조건만 binding 하므로 어떤 해를 택하냐에 따라 검토할 SOC가 달라짐

(a) $L = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 9x_2 + \lambda_1(10 - 4x_1 - 3x_2) + \lambda_2(x_2 - 4x_1^2 + 2)$.

(b) F.O.C.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -4x_1 + 2x_2 - 4\lambda_1 - 8\lambda_2 x_1 = 0 = (4-8\lambda_2)x_1 + 2x_2 - 4\lambda_1 = 0. \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -4x_2 + 2x_1 + 9 - 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 = 2x_1 - 4x_2 - 3\lambda_1 + \lambda_2 + 9 = 0. \end{cases}$$

긴봉희

$$\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_2 - 4x_1^2 \geq -2 \end{cases}$$

$\therefore \lambda_1(10 - 4x_1 - 3x_2) = 0,\ \lambda_2(x_2 - 4x_1^2 + 2) = 0$.

Nam-Un, Cho/Center for Distributive Justice/ mailto:namun@snu.ac.kr

# 4c

- 앞문제의 오류 여부와 무관하게 SOC를 판별할 수 있는지로 평가함
- binding 해 (lambda $\neq$ 0) 인 제약만 Bordered Hessian 에 포함되어야 함.

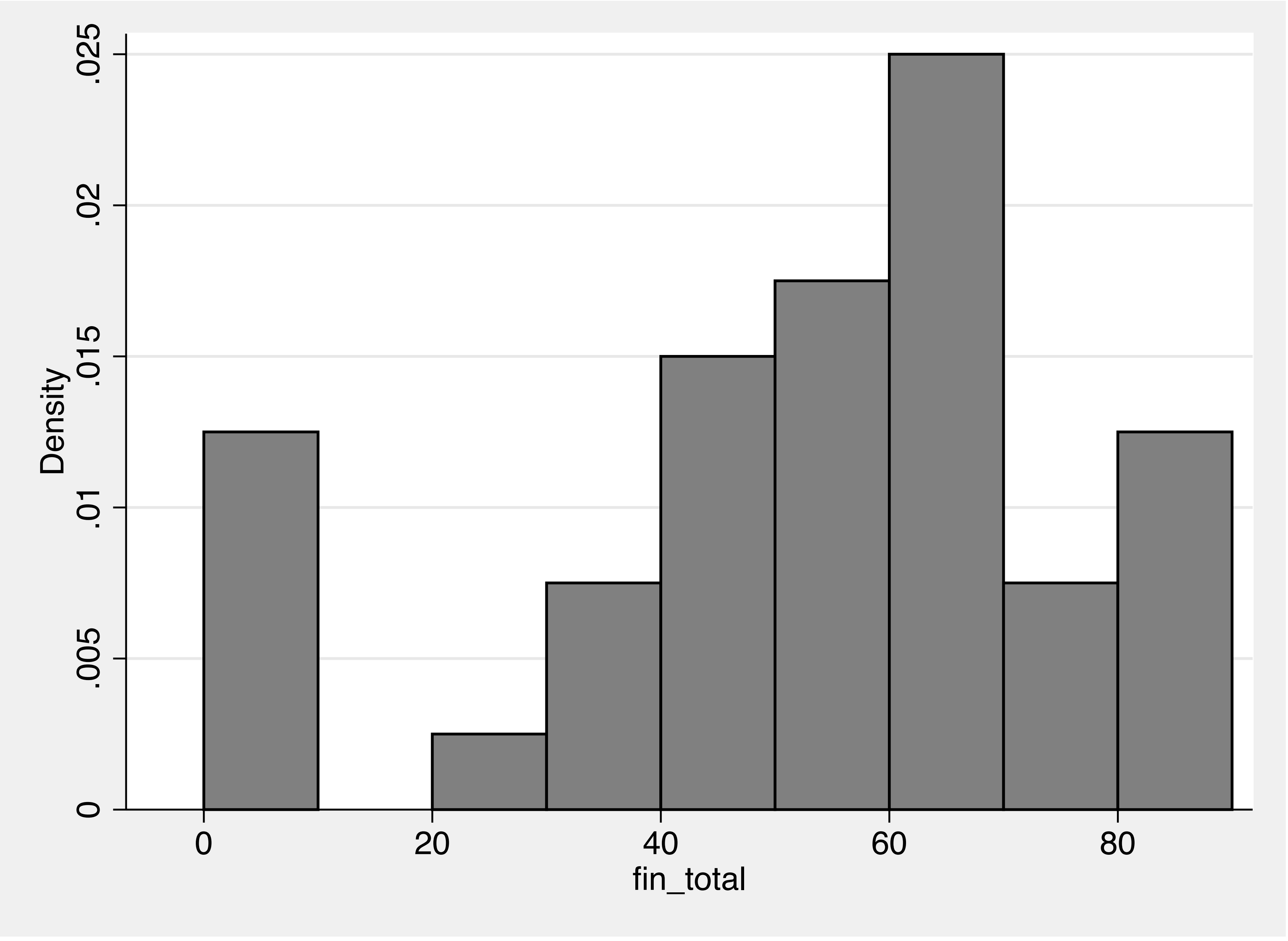
# 기초통계

| Variable | Obs | Mean | Std. Dev. | Min | Max |
|---|---|---|---|---|---|
| fin_total | **40** | **51.25** | **24.4265** | **0** | **87** |

fin_total

| | Percentiles | Smallest | | |
|---|---|---|---|---|
| 1% | **0** | **0** | | |
| 5% | **0** | **0** | | |
| 10% | **3** | **0** | Obs | **40** |
| 25% | **41** | **0** | Sum of Wgt. | **40** |
| | | | | |
| 50% | **55.5** | | Mean | **51.25** |
| | | Largest | Std. Dev. | **24.4265** |
| 75% | **67** | **81** | | |
| 90% | **80.5** | **82** | Variance | **596.6538** |
| 95% | **83** | **84** | Skewness | **-.7898631** |
| 99% | **87** | **87** | Kurtosis | **2.892586** |

# FinalTerm Distribution



# Result_Score

- ResultScore := Final * 5 + Mid * 4 + Attendance_Score + Bonus (Error Report)

# Result Score: Upper%