

경제수학 시험 해설

2016.12.21 한신대 국제수리금융세미나

조남운

채점기준

- 단순 계산 착오: 0 - -1
- 그 이외의 오류는 정도에 따라 유동적으로 감점
- 연속 문제의 경우 앞 문제를 잘못 풀더라도 뒷 문제는 잘못된 앞 문제의 결과에 기반하여 정확히 풀 경우 감점하지 않음.

1 a

(a) (10 points) 다음 그래프에서 모든 local min/max, global min/max를 찾아라. (있으면 명확히 표시하고, 없으면 명확히 존재하지 않는다고 기술하라)

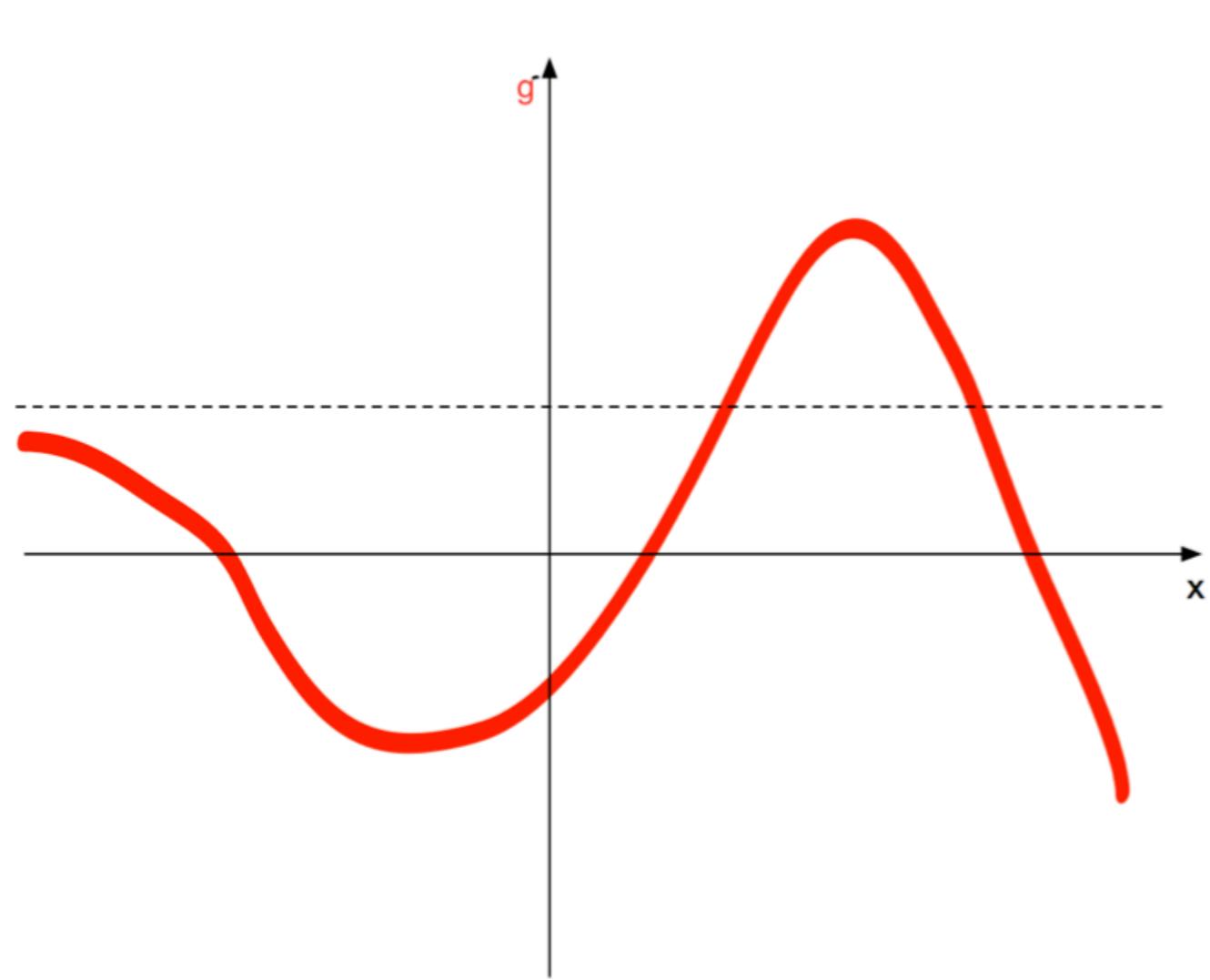


그림 1: $g = g(x)$ 의 그래프

명확히 표시하고, 없으면 명확히 존재하지 않는다고 기술하라)

10

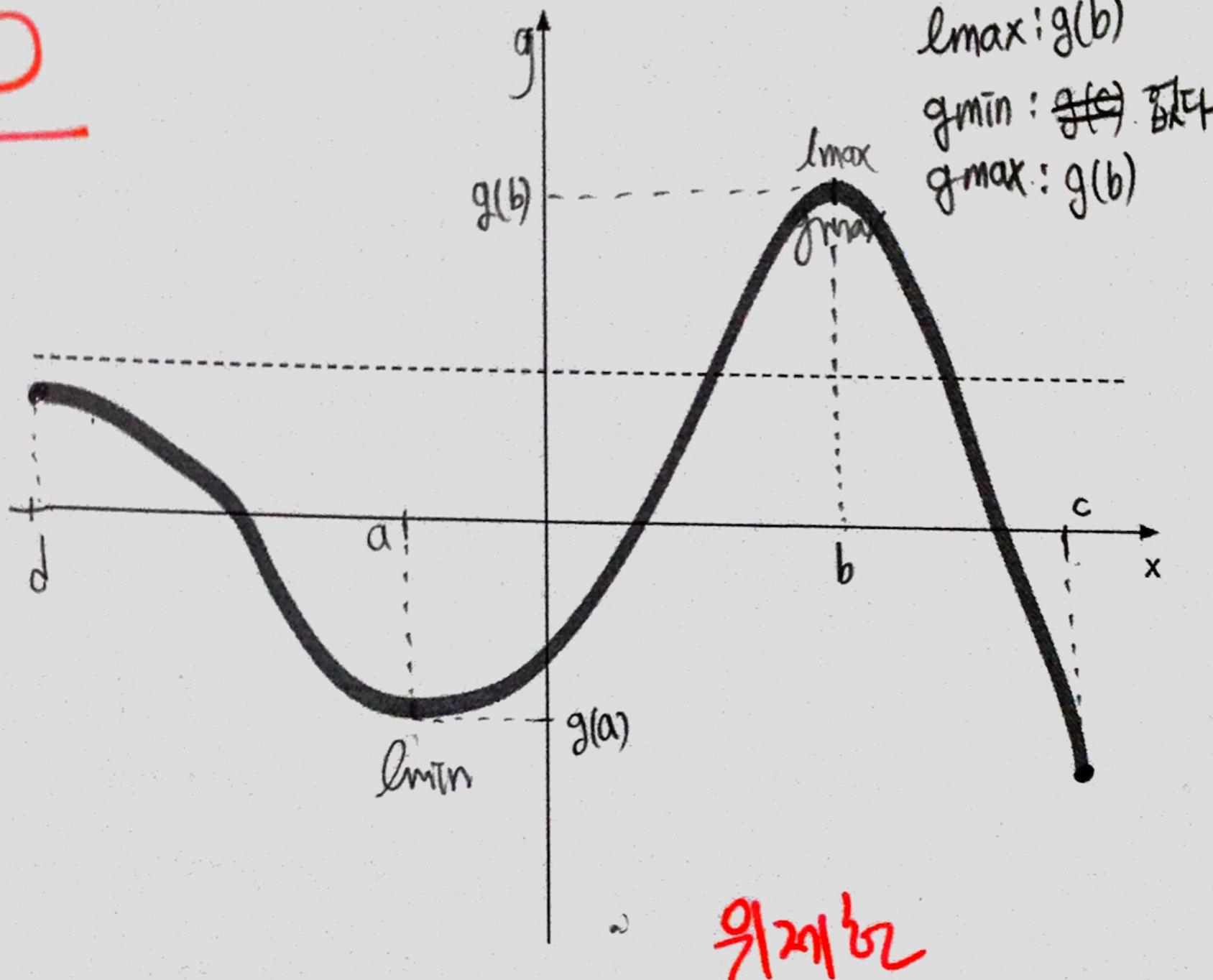


그림 1: $g = g(x)$ 의 그래프

1b

(b) (10 points) 다음 함수 f 의 1,2계 도함수 (f' , f'')를 계산하라.

$$f = f(x) = 16 \frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}$$

✓ (b) (10 points) 다음 함수 f 의 1,2계 도함수 (f' , f'')를 계산하라.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

10

$$f = f(x) = 16 \frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 16 \left(\frac{2(x+1)(x-2)^2 - (x+1)^2 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} \right) = 16 \left(\frac{-x^2 - 2x - 1}{(x-2)^3} \right) \\ &= 16 \left(\frac{2(-3x-3)}{(x-2)^3} \right) = \frac{16 \cdot 2 \cdot (-3)(x+1)}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{96(2x+5)}{(x-2)^4}$$

912952

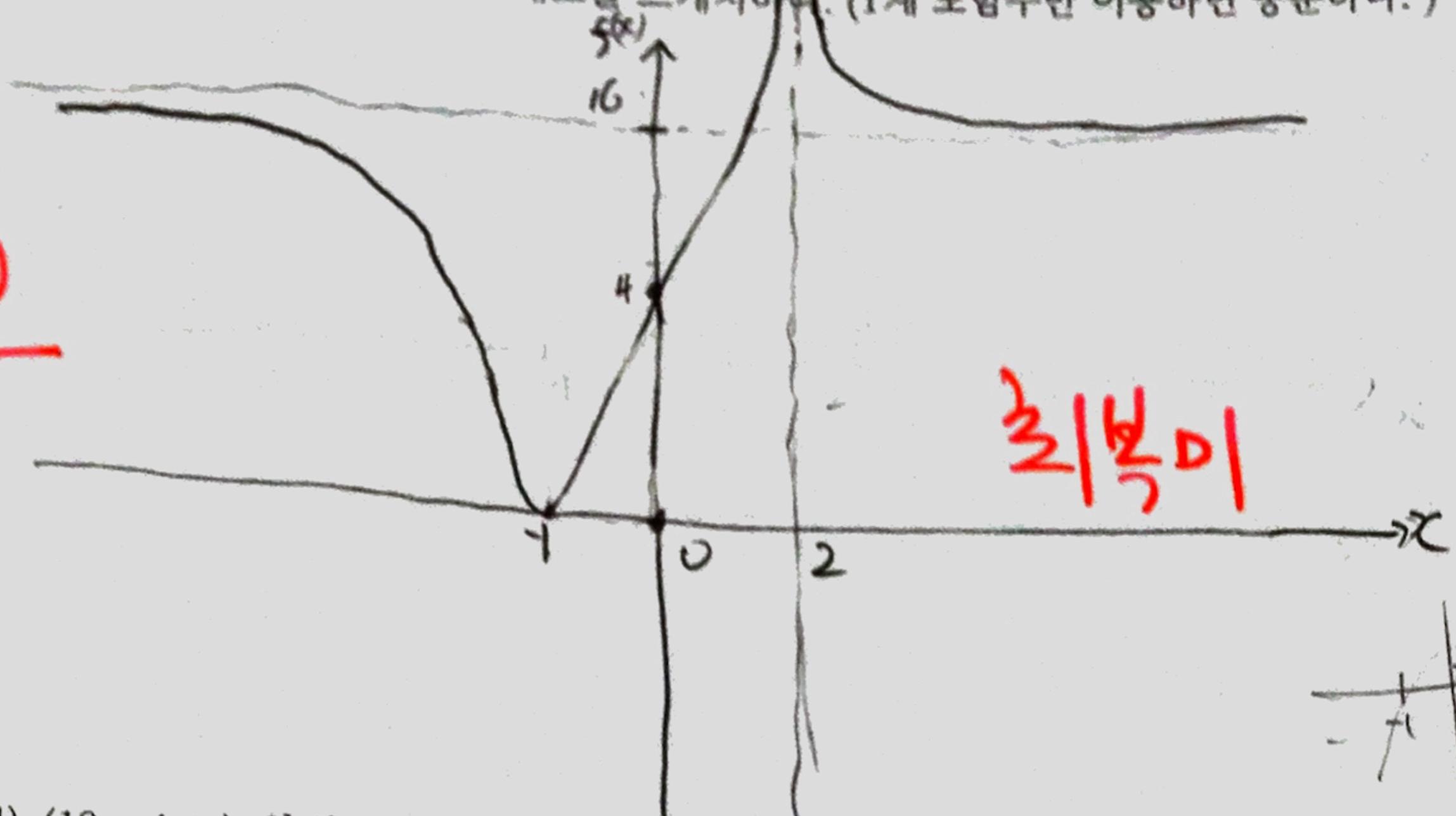
1c

(c) (10 points) 위 함수 f 의 그래프를 스케치하라. (1계 도함수만 이용하면 충분하다.)

- 1b가 잘못되었더라도 그에 기반하여 그래프스케치가 올바르게 되어 있다면 정답처리 될 수 있음.

(c) (10 points) 위 함수 f 의 그래프를 스케치하라. (1계 도함수만 이용하면 충분하다.)

10



최복미

1d

(d) (10 points) 위 함수 f 의 local min/max, global min/max를 모두 찾아라. (있으면 명확히 표시하고, 없으면 명확하게 존재하지 않는다고 기술하라.)

- 마찬가지임. 1c가 잘못 그려졌더라도 그에 기반하여 제대로 찾았다면 정답처리 될 수 있음.

1 e

(e) (10 points) 아래 함수 h 의 도함수 h' 을 구하라.

$$h = h(x) = [\ln(x^5 + 2x^3)]^{100}$$

(e) (10 points) 아래 함수 h 의 도함수 h' 을 구하라.

10

$$h = h(x) = [\ln(x^5 + 2x^3)]^{100}$$

$$h'(x) = 100 \left(\ln(x^5 + 2x^3) \right)^{99} \times \frac{1}{x^5 + 2x^3} \times (5x^4 + 6x^2)$$

1f

(f) (10 points) 어떤 기업의 노동력 (L)에 대한 상품 생산량 (x)의 관계가 아래와 같고, 그 상품의 시장가격이 p , 단위노동량 당 임금이 w 일 때 아래 문제를 풀라

$$x = x(L) = \ln(L)$$

Solve

$$\arg \max_x \Pi(x)$$

$$\Pi(x) := px - wL$$

- critical point가 유일하게 하나 나옴
- 그래프를 그리던지, SOC를 검토해서 이 점이 max임을 입증해야 함. (-2 - -3)

(f) (10 points) 어떤 기업의 노동력(L)에 대한 상품 생산량(x)의 관계가 아래와 같고, 그 상품의 시장가격이 p , 단위노동량 당 임금이 w 일 때 아래 문제를 풀라

10

Solve

$$x = f(L) = \ln(L) = f^{-1}(L)$$

$$TC(L) = \bar{w} \cdot L$$

$$TC(x) = \bar{w} f^{-1}(x)$$

$$\Pi(x) = TR(x) - TC(x)$$

$$= \bar{p} \cdot x - w \cdot L$$

$$\bar{p} - \bar{w} \cdot e^x = 0$$

$$\bar{w} e^x = \bar{p} \quad \theta^* = \frac{\bar{p}}{\bar{w}}$$

$$x = \ln \frac{\bar{p}}{\bar{w}}$$

① ② ③ ④

$$x = x(L) = \ln(L) = f(L)$$

$$x = \ln(L) = x(L)$$

$$\arg \max_x \Pi(x)$$

$$\Pi(x) := px - wL$$

$$f(L) = x(L) = \ln(L) = x$$

$$L(x) = e^x$$

$$TC(L) = \bar{w} \cdot \ln(L)$$

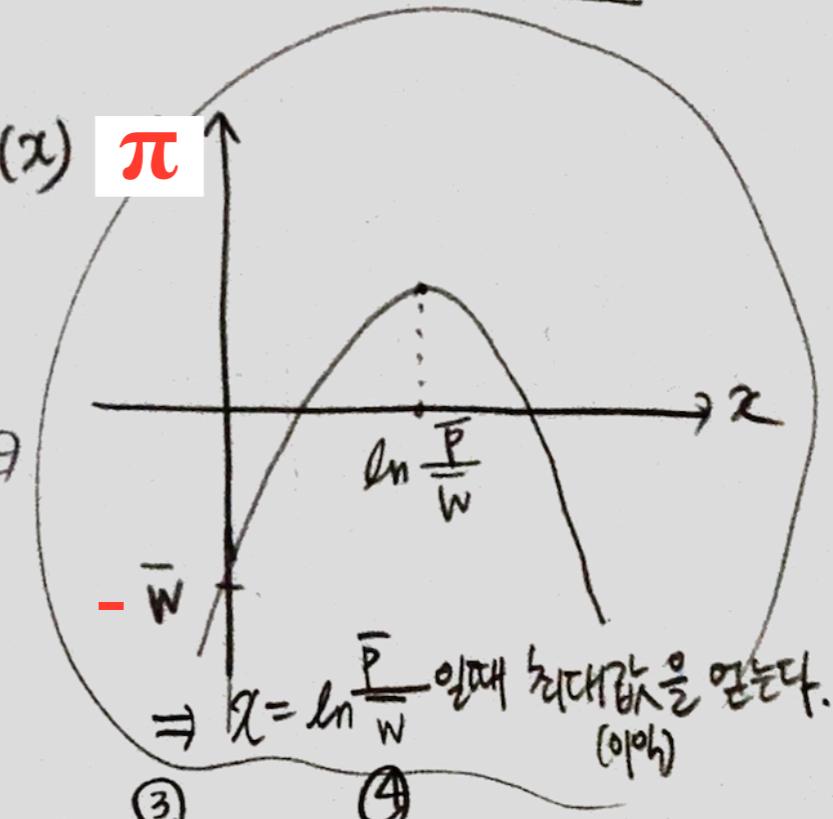
$$TC(x) = \bar{w} \cdot e^x$$

$$\Pi(x) = \bar{p} \cdot x - \bar{w} \cdot e^x$$

Solve $\arg \max \Pi(x)$

$$\Pi'(x) = \bar{p} - \bar{w} e^x$$

$$\Pi''(x) = -\bar{w} e^x \quad \Theta$$



1g

(g) (10 points) 다음 행렬들의 역행렬 (inverse matrix), Rank, Determinant, Transpose matrix를 (존재한다면) 구하라. (존재하지 않는 경우는 존재하지 않는다고 기술하라.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(g) A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2017sp 백지연

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + (-1)R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{① } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

② rank(A)=4.

$$\text{③ } \det(A) = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(3) - 1(1 \cdot 0) \\ = 3 - 1 \\ = 2$$

Page 4

Transpose Matrix 도 구할 수 있음. (답안 생략)

$$(g) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + (-1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + (-1)R_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

↓ no solution.

① 역행렬 존재하지 않는다.

② $\text{rank}(B) = 2$.

$$\begin{aligned} ③ \det(B) &= 1(2) - 0 + 2(-1) \\ &= 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$(4) \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix}$$

(2017sp 한승엽)

1h

(h) (10 points) 다음 벡터들이 생성 (span) 하는 공간의 차원수를 구하라

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0, 1)$$

$$\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 1, 0)$$

$$\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$(h) \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_2}]^{ER03} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + (-1)R_2]^{ER02} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2017sp 백지연)

~~# Rank = 3~~
~~∴ 차원수 = 3~~

Rank = 2
 \therefore 차원수 = 2

김미28

1i

(i) (10 points) 다음 함수의 함수값을 구하라

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 x_2, x_1 + x_2 + x_3^2)$$

10 $f(1, 2, 3) = ?$

장수희

$$f(1, 2, 3) \Rightarrow (1 \cdot 2, 1 + 2 + 3^2)$$

$$= (2, 12)$$

1j

(j) (10 points) 아래 함수 g 의 1계도함수($Dg_{\mathbf{x}}$)와 2계도함수($D^2g_{\mathbf{x}}$)를 구하라

$$g(\mathbf{x}) = x_1x_2x_3 + x_2^2 + x_1 + x_3 + 1$$

$$Dg_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3} \right) = (x_2x_3 + 1, x_1x_3 + 2x_2, x_1x_2 + 1)$$

$$D^2g_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} D(x_2x_3 + 1) \\ D(x_1x_3 + 2x_2) \\ D(x_1x_2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

10

김민경

1k

(k) (10 points) 위 함수 g 에서 x_i 들이 t 의 함수로 아래와 같이 표현될 수 있다고 한다. $t = 1$ 일때 $g'(t)$ 를 구하라.

$$x_1(t) = t^2$$

$$x_2(t) = t + 1$$

$$x_3(t) = t$$

$$\frac{dg}{dt(1)} = \frac{dg}{dx} \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3} \right) \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} = (x_2 x_3 + 1, x_1 x_3 + 2x_2, x_1 x_2 + 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1번

$$\cdot \begin{pmatrix} (t+1) \cdot t+1 & t^2 \cdot t + 2(t+1) & t^2(t+1)+1 \\ 1 \cdot 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{t=1}$$

$$\underline{\frac{dg}{dt(1)}} = 14$$

$$(6 + 5 + 3 = 14)$$

2a

2. 아래의 극대화문제를 풀어보자.

$$\arg \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$$

(a) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 1계 조건 (FOC)을 기술하라.

(a) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 1계 조건(FOC)을 기술하라.

$f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$

$$Df_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = (0 \ 0)$$

10 FOC

2b

(b) (10 points) 위 FOC를 만족하는 x 를 모두 찾으라

(b) (10 points) 위 FOC를 만족하는 x 를 모두 찾으라

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow 2x_1 - x_2 = -x_1 + 2x_2$$

$$3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_1 = 0 \\ -x_1 + 2x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

10

(50%)

2c

(c) (10 points) 위에서 찾은 점(들)에 대하여 2계조건 (SOC)를 검토하라.

(c) (10 points) 위에서 찾은 점(들)에 대하여 2계조건 (SOC)를 검토하라.

$$\mathbf{D}^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow LPM_{(2)} = 4 - ((-1))(-1)) = 4 - 1 = 3 > 0$$

~~50~~

$$PM_{(2)} = 3 > 0$$

$$PM_{(1)} = 2 > 0$$

\Rightarrow C.P.D 이다.



2d

(d) (10 points) 위에서 찾은 점(들)이 주어진 극대화문제의 해가 될 수 있는지 논하라.

10 $D^2 f(x)$ 가 PD 이므로 $x_1=0$ 과 $x_2=0$ 은 주어진 극대화
문제의 해가 될 수 없다.

3a

3. 이제 이 문제에 제약이 생긴 상황을 검토한다.

$$\arg \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 1$$

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$$

(a) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 라그랑지안 함수를 기술하라.

- - - - - 을 가질 것이다.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 + \lambda(1 - x_1 - x_2).$$

10

> 영

3b

(b) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 1계 조건(FOC)을 기술하라.

10 (b) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 1계 조건(FOC)을 기술하라.

$$\theta \geq 0$$

→ D2 (2x₁-x₂-λ) - x₁+2x₂-λ) = (0 0)

조건 λ(1-x₁-x₂)=0, λ≥0, x₁+x₂≤1.

3C

(c) (10 points) 위 FOC를 만족하는 모든 점(들)을 찾으라.

Case 1: lambda = 0 인 경우,

(c) (10 points) 위 FOC를 만족하는 모든 점(들)을 찾으라.
 $\text{Opt}(x^*) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 + \lambda(1 - x_1 - x_2)$

10 $D\lambda(x^*) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - \lambda & -x_1 + 2x_2 - \lambda \end{pmatrix} = (0, 0)$ 이므로

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = \lambda \\ 2x_2 - x_1 = \lambda \end{cases}$$
 이나 $x_1 = x_2 = 0$

$$\lambda(1 - x_1 - x_2) = 0 \text{에서, } \lambda = 0 \text{ 일 때 } 2x_1 = x_2, 2x_2 = x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$\lambda = 0 \text{ 일 때 } x^* = (0, 0)$$

OK 수용

Case 2: lambda > 0 인 경우

시사국제금융세미나 A반

시사국제금융세미나 A반 기말시험

2016년 가을학기

(c) (10 points) 위 FOC를 만족하는 모든 점(들)을 찾으라.

$\lambda \neq 0$ 일 때

$$\begin{cases} 1 - x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - \lambda = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = \lambda \\ -x_1 + 2x_2 = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 2x_2 = x_1 \end{cases} \rightarrow 3x_1 = 3x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

$$\rightarrow 1 - x_1 - x_1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2} \quad // \text{case ①}$$

* NDCQ 확인
 $(-1 \ -1)$ 이므로 Q를 Pass 할.

$$\begin{array}{r} 1 - (-2) \\ -2 - (-1) \\ \hline = 3 \end{array}$$

송영수

$$1 - (-2)$$

10

3d

(d) (10 points) 위에서 찾은 점(들)에 대하여 2계조건 (SOC)를 검토하라.

10

송영식

$1 - (-2)$

(d) (10 points) 위에서 찾은 점(들)에 대하여 2계조건 (SOC)를 검토하라.

$$\textcircled{1} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} m=1 \\ n=2 \end{array}} \text{1개의 LPM 꼭지} \\ \rightarrow LPM(3) = 0 \cdot (-1)^{(1+1)(1+2)} \cdot \frac{-1}{2} + (-1) \cdot (-1)^{(2+1)} \cdot \left| \begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| + (-1) \cdot (-1)^{(3+1)} \cdot \left| \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right|$$

$\lambda \neq 0$ 일 때; case ①

$$= 0 + (-1) + (-3) = -4 < 0$$

위 유테헤시안의 (3,2) 성분은 -1임. 따라서 $LPM(3) = -6$ (2017sp 한승엽)

$$\textcircled{2} \quad \lambda = 0 \text{ 일 때! (case ②)} \\ \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow LPM_{(2)} = (2 \times 2) + ((-1) \times (-1)) = 4 - 1 = 3 > 0 \\ LPM_{(1)} = 2 > 0$$

$\therefore \lambda \neq 0$ 일 때와 $\lambda = 0$ 일 때 모두 ΦD 이다.

3e

(e) (10 points) 위에서 찾은 점(들)이 주어진 극대화문제의 해가 될 수 있는지 논하라.

10

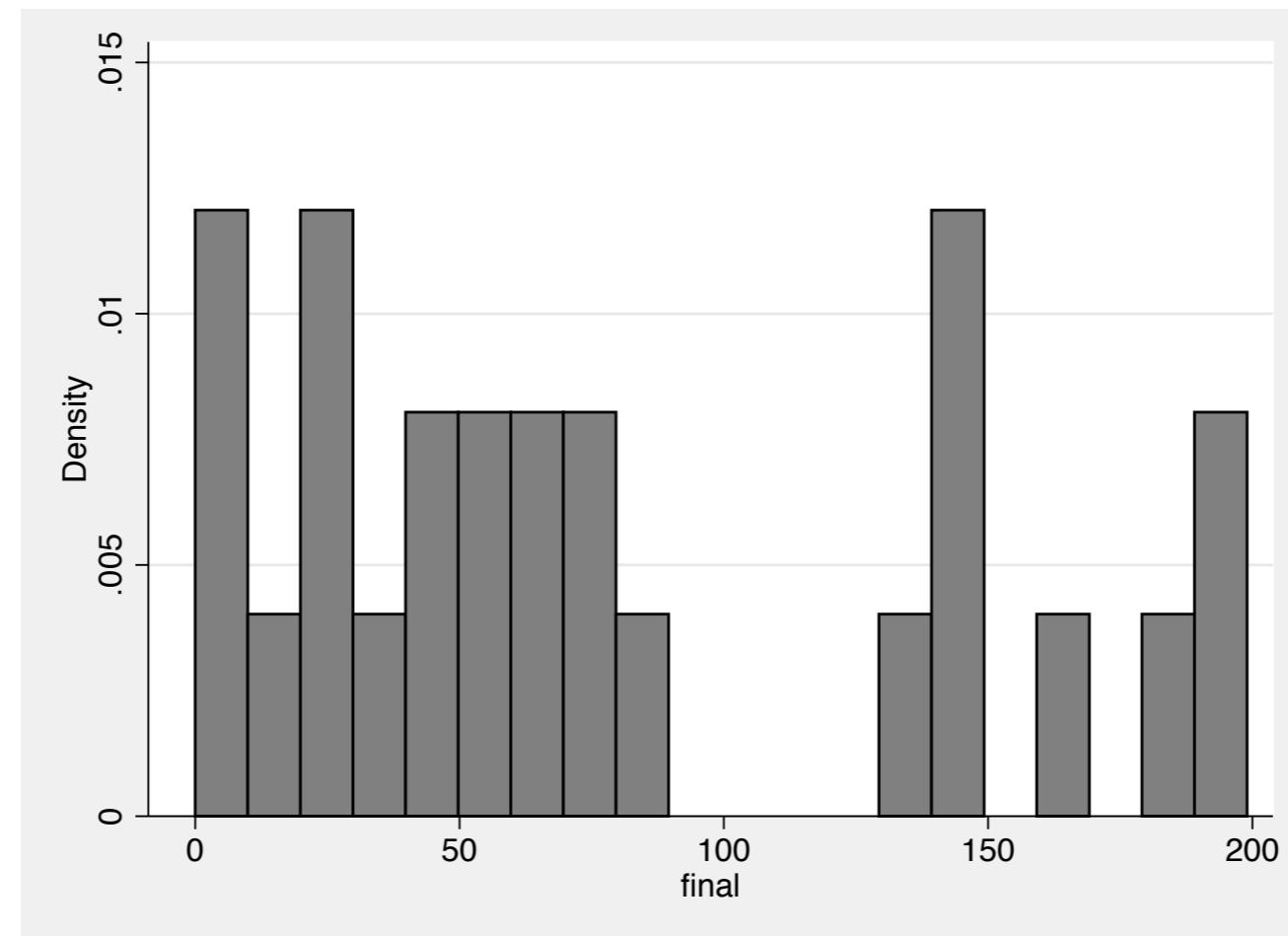
(e). (10 points) 위에서 찾은 점(들)이 주어진 극대화문제의 해가 될 수 있는지 논하라.

$\lambda \neq 0$ 일 때의 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$), 이 해들(점들)은 주어진
 $\lambda = 0$ ", $x_1 = 0, x_2 = 0$

극대화 문제의 해가 될 수 없다.

점수통계(기말)

Variable	0bs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
final	25	79.52	64.37075	0	199



점수통계 (총점)

Variable	0bs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
total	25	503.44	258.9286	35	891

