

# 경제수학 시험 해설

2016.12.21 한신대 국제수리금융세미나

조남운

# 채점기준

- 단순 계산 착오: 0 - -1
- 그 이외의 오류는 정도에 따라 유동적으로 감점
- 연속 문제의 경우 앞 문제를 잘못 풀더라도 뒷 문제는 잘못된 앞 문제의 결과에 기반하여 정확히 풀 경우 감점하지 않음.

# 1 a

(a) (10 points) 다음 그래프에서 모든 local min/max, global min/max를 찾아라. (있으면 명확히 표시하고, 없으면 명확히 존재하지 않는다고 기술하라)

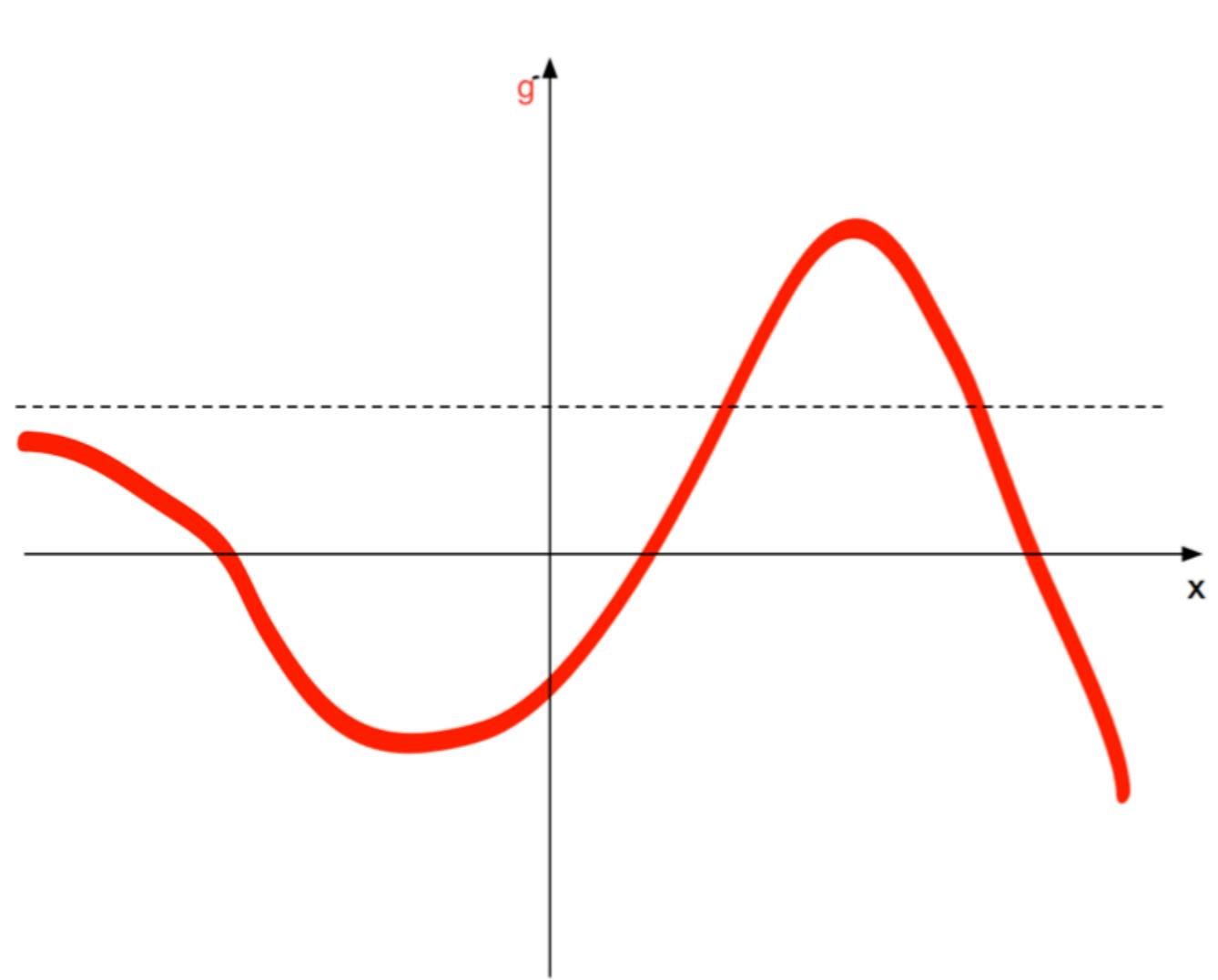


그림 1:  $g = g(x)$  의 그래프

명확히 표시하고, 없으면 명확히 존재하지 않는다고 기술하라)

10

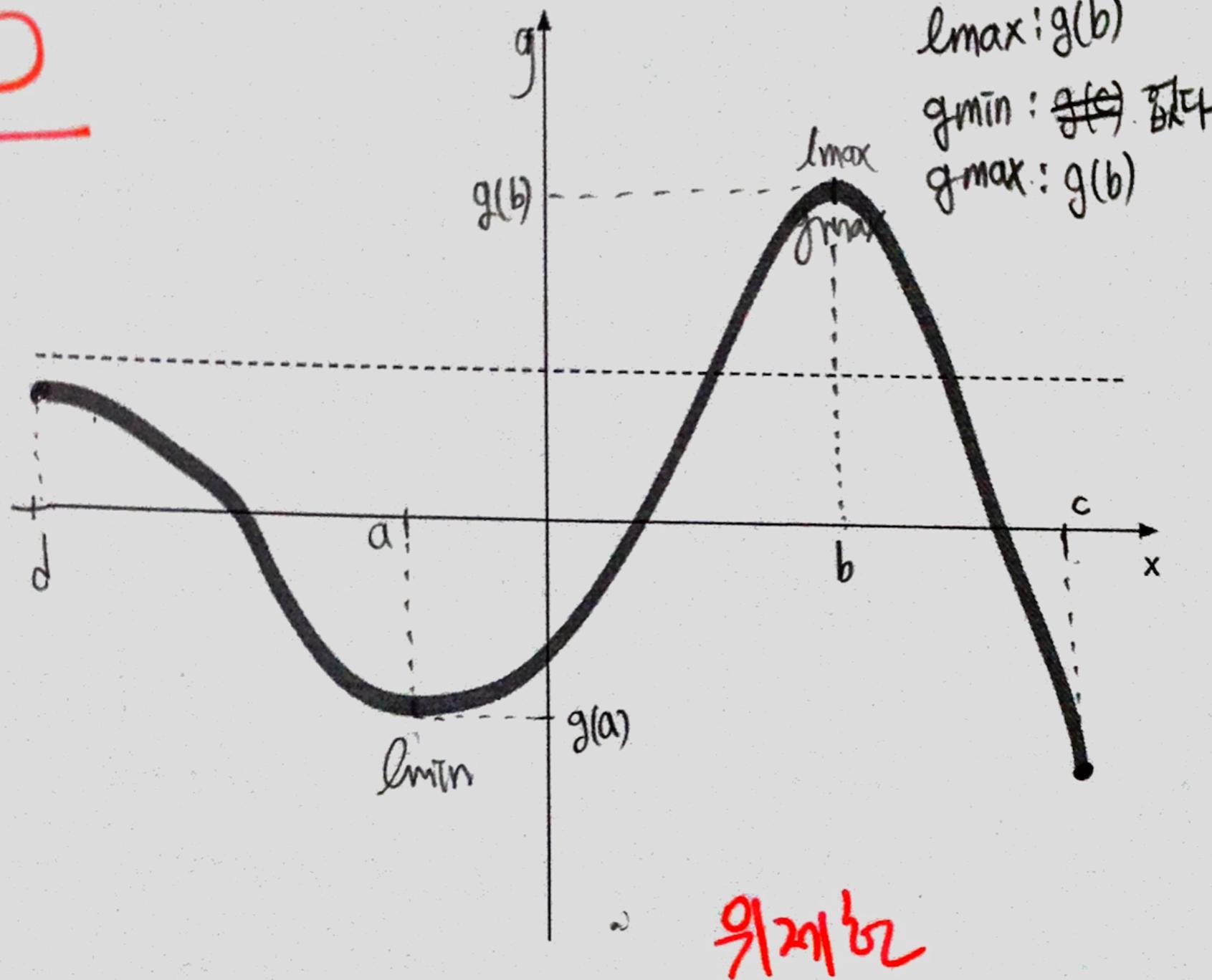


그림 1:  $g = g(x)$  의 그래프

# 1b

(b) (10 points) 다음 함수  $f$  의 1,2계 도함수 ( $f'$ ,  $f''$ )를 계산하라.

$$f = f(x) = 16 \frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}$$

✓ (b) (10 points) 다음 함수  $f$ 의 1,2계 도함수 ( $f'$ ,  $f''$ )를 계산하라.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

10

$$f = f(x) = 16 \frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 16 \left( \frac{2(x+1)(x-2)^2 - (x+1)^2 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} \right) = 16 \left( \frac{-x^2 - 2x - 1}{(x-2)^3} \right) \\ &= 16 \left( \frac{2(-3x-3)}{(x-2)^3} \right) = \frac{16 \cdot 2 \cdot (-3)(x+1)}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{96(2x+5)}{(x-2)^4}$$

912952

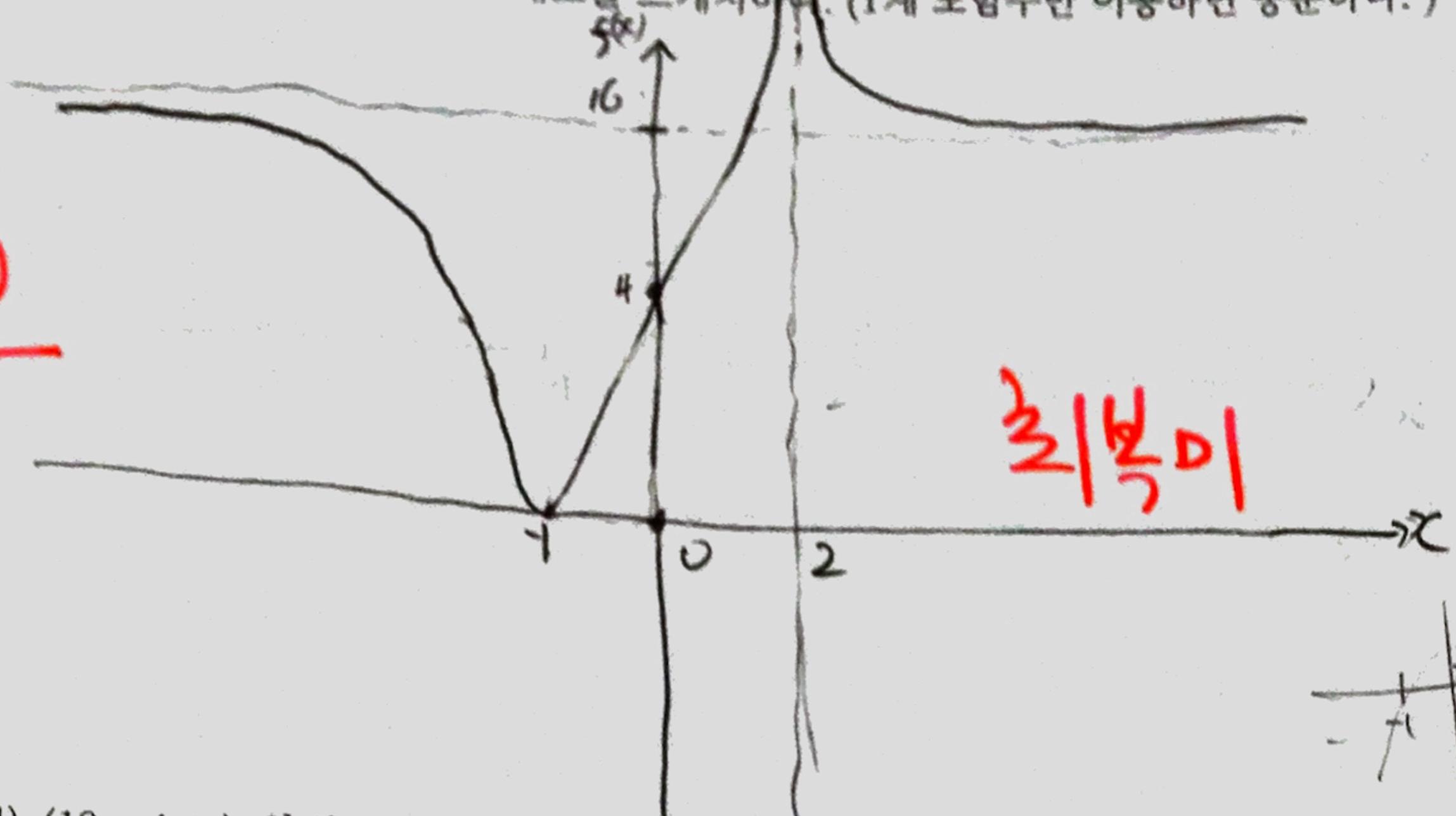
# 1c

(c) (10 points) 위 함수  $f$ 의 그래프를 스케치하라. (1계 도함수만 이용하면 충분하다.)

- 1b가 잘못되었더라도 그에 기반하여 그래프스케치가 올바르게 되어 있다면 정답처리 될 수 있음.

(c) (10 points) 위 함수  $f$ 의 그래프를 스케치하라. (1계 도함수만 이용하면 충분하다.)

10



# 1d

(d) (10 points) 위 함수  $f$ 의 local min/max, global min/max를 모두 찾아라. (있으면 명확히 표시하고, 없으면 명확하게 존재하지 않는다고 기술하라.)

- 마찬가지임. 1c가 잘못 그려졌더라도 그에 기반하여 제대로 찾았다면 정답처리 될 수 있음.

1 e

(e) (10 points) 아래 함수  $h$ 의 도함수  $h'$ 을 구하라.

$$h = h(x) = [\ln(x^5 + 2x^3)]^{100}$$

(e) (10 points) 아래 함수  $h$ 의 도함수  $h'$ 을 구하라.

10

$$h = h(x) = [\ln(x^5 + 2x^3)]^{100}$$

$$h'(x) = 100 \left( \ln(x^5 + 2x^3) \right)^{99} \times \frac{1}{x^5 + 2x^3} \times (5x^4 + 6x^2)$$

# 1f

(f) (10 points) 어떤 기업의 노동력 ( $L$ )에 대한 상품 생산량 ( $x$ )의 관계가 아래와 같고, 그 상품의 시장가격이  $p$ , 단위노동량 당 임금이  $w$  일 때 아래 문제를 풀라

$$x = x(L) = \ln(L)$$

Solve

$$\arg \max_x \Pi(x)$$

$$\Pi(x) := px - wL$$

- critical point가 유일하게 하나 나옴
- 그래프를 그리던지, SOC를 검토해서 이 점이 max임을 입증해야 함. (-2 - -3)

(f) (10 points) 어떤 기업의 노동력( $L$ )에 대한 상품 생산량( $x$ )의 관계가 아래와 같고, 그 상품의 시장가격이  $p$ , 단위노동량 당 임금이  $w$  일 때 아래 문제를 풀라

10

Solve

$$x = f(L) = \ln(L) = f^{-1}(L)$$

$$TC(L) = \bar{w} \cdot L$$

$$TC(x) = \bar{w} f^{-1}(x)$$

$$\Pi(x) = TR(x) - TC(x)$$

$$= \bar{p} \cdot x - w \cdot L$$

$$\bar{p} - \bar{w} \cdot e^x = 0$$

$$\bar{w} e^x = \bar{p} \quad \Theta^x = \frac{\bar{p}}{\bar{w}}$$

$$x = \ln \frac{\bar{p}}{\bar{w}}$$

① ② ③ ④

$$x = x(L) = \ln(L) = f(L)$$

$$x = \ln(L) = x(L)$$

$$\arg \max_x \Pi(x)$$

$$\Pi(x) := px - wL$$

$$f(L) = x(L) = \ln(L) = x$$

$$L(x) = e^x$$

$$TC(L) = \bar{w} \cdot \ln(L)$$

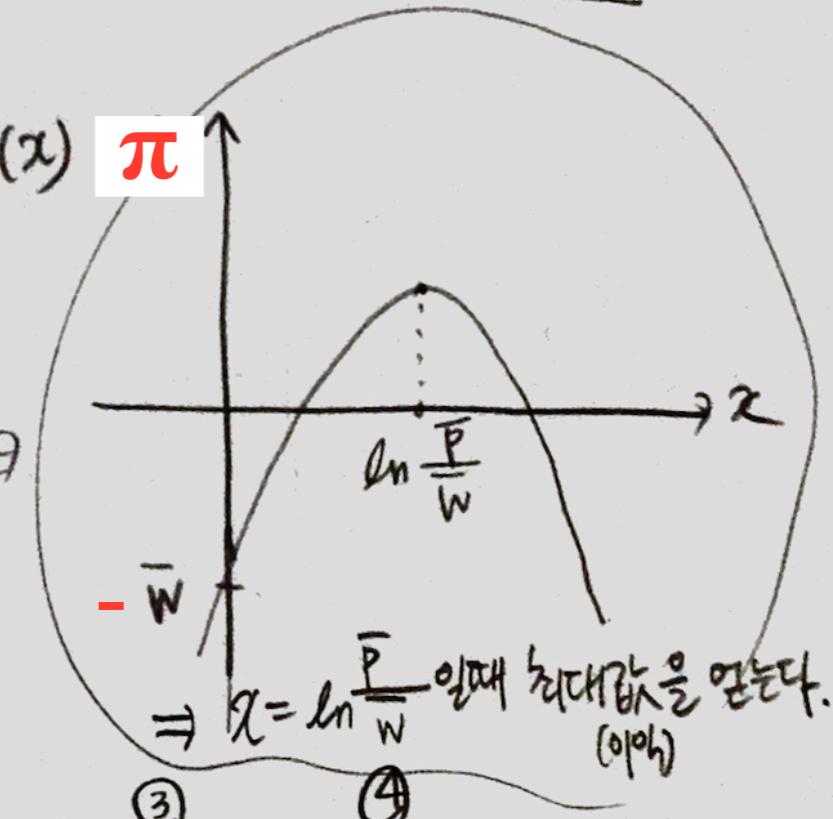
$$TC(x) = \bar{w} \cdot e^x$$

$$\Pi(x) = \bar{p} \cdot x - \bar{w} \cdot e^x$$

Solve  $\arg \max \Pi(x)$

$$\Pi'(x) = \bar{p} - \bar{w} e^x$$

$$\Pi''(x) = -\bar{w} e^x \quad \Theta$$



# 1g

(g) (10 points) 다음 행렬들의 역행렬 (inverse matrix), Rank, Determinant, Transpose matrix를 (존재한다면) 구하라. (존재하지 않는 경우는 존재하지 않는다고 기술하라.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(g) A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 \times \frac{1}{2}} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + (-1)R_3} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{① } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

② rank(A)=4.

Page 4    ③  $\det(A) = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(3) - 1(1 \cdot 0)$

$$= 3 - 1 = 2$$

$$(g) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + (-1)R_1} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + (-1)R_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

↓ no solution.

① 일행렬 존재하지 않는다.

②  $\text{rank}(B) = 2$ .

$$③ \det(B) = 1(2) - 0 + 2(-1)$$

$$= 2 - 2 = 0$$

④ 존재X

1h

(h) (10 points) 다음 벡터들이 생성 (span) 하는 공간의 차원수를 구하라

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0, 1)$$

$$\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 1, 0)$$

$$\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$(h) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow 1 \cdot R_2]{ER03} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + (-1)R_2]{ER02} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

~~#Rank=3~~

~~∴ 차원수=3~~

#Rank=2  
 $\therefore$  차원수=2

2/10/2020

1i

(i) (10 points) 다음 함수의 함수값을 구하라

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 x_2, x_1 + x_2 + x_3^2)$$

10  $f(1, 2, 3) = ?$

장수희

$$f(1, 2, 3) \Rightarrow (1 \cdot 2, 1 + 2 + 3^2)$$

$$= (2, 12)$$

1j

(j) (10 points) 아래 함수  $g$ 의 1계도함수( $Dg_{\mathbf{x}}$ )와 2계도함수( $D^2g_{\mathbf{x}}$ )를 구하라

$$g(\mathbf{x}) = x_1x_2x_3 + x_2^2 + x_1 + x_3 + 1$$

$$Dg_{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3} \right) = (x_2x_3 + 1, x_1x_3 + 2x_2, x_1x_2 + 1)$$

$$D^2g_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} D(x_2x_3 + 1) \\ D(x_1x_3 + 2x_2) \\ D(x_1x_2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

10

김민경

# 1k

(k) (10 points) 위 함수  $g$ 에서  $x_i$ 들이  $t$ 의 함수로 아래와 같이 표현될 수 있다고 한다.  $t = 1$  일때  $g'(t)$ 를 구하라.

$$x_1(t) = t^2$$

$$x_2(t) = t + 1$$

$$x_3(t) = t$$

$$\frac{dg}{dt(1)} = \frac{dg}{dx} \frac{dx}{dt} = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3} \right) \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} = (x_2 x_3 + 1, x_1 x_3 + 2x_2, x_1 x_2 + 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ 1번 문제

$$\cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big|_{t=1} = (6 + 5 + 3) = 14.$$

$$\underline{\frac{dg}{dt(1)}} = 14$$

# 2a

2. 아래의 극대화문제를 풀어보자.

$$\arg \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$$

(a) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 1계 조건 (FOC)을 기술하라.

(a) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 1계 조건(FOC)을 기술하라.

$f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$

$$Df_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = (0 \ 0)$$

10 FOC

# 2b

(b) (10 points) 위 FOC를 만족하는  $x$ 를 모두 찾으라

(b) (10 points) 위 FOC를 만족하는  $x$ 를 모두 찾으라

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow 2x_1 - x_2 = -x_1 + 2x_2$$

$$3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_1 = 0 \\ -x_1 + 2x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

10

(50%)

## 2c

(c) (10 points) 위에서 찾은 점(들)에 대하여 2계조건 (SOC)를 검토하라.

(c) (10 points) 위에서 찾은 점(들)에 대하여 2계조건 (SOC)를 검토하라.

$$\mathbf{D}^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow LPM_{(2)} = 4 - ((-1))(-1)) = 4 - 1 = 3 > 0$$

~~50~~

$$PM_{(2)} = 3 > 0$$

$$PM_{(1)} = 2 > 0$$

$\Rightarrow$  C.P.D 이다.



## 2d

(d) (10 points) 위에서 찾은 점(들)이 주어진 극대화문제의 해가 될 수 있는지 논하라.

10  $D^2 f(x)$  가 PD 이므로  $x_1=0$  과  $x_2=0$  은 주어진 극대화  
문제의 해가 될 수 없다.

# 3a

3. 이제 이 문제에 제약이 생긴 상황을 검토한다.

$$\arg \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 1$$

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$$

(a) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 라그랑지안 함수를 기술하라.

- - - - - 을 가질 것이다.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + \lambda(1 - x_1 - x_2).$$

10

> 영

# 3b

(b) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 1계 조건(FOC)을 기술하라.

10 (b) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 1계 조건(FOC)을 기술하라.

$$\theta \geq 0$$

→ D2 (2x<sub>1</sub>-x<sub>2</sub>-λ) - x<sub>1</sub>+2x<sub>2</sub>-λ) = (0 0)

조건 λ(1-x<sub>1</sub>-x<sub>2</sub>)=0, λ≥0, x<sub>1</sub>+x<sub>2</sub>≤1.

# 3C

(c) (10 points) 위 FOC를 만족하는 모든 점(들)을 찾으라.

Case 1: lambda = 0 인 경우,

(c) (10 points) 위 FOC를 만족하는 모든 점(들)을 찾으라.  
 $\text{Opt}(x^*) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 + \lambda(1 - x_1 - x_2)$

10  $D\lambda(x^*) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - \lambda & -x_1 + 2x_2 - \lambda \end{pmatrix} = (0, 0)$  이므로

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = \lambda \\ 2x_2 - x_1 = \lambda \end{cases}$$
 이나  $x_1 = x_2 = 0$

$$\lambda(1 - x_1 - x_2) = 0 \text{에서, } \lambda = 0 \text{ 일 때 } 2x_1 = x_2, 2x_2 = x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$\lambda = 0 \text{ 일 때 } x^* = (0, 0)$$

OK 수용

## Case 2: lambda > 0 인 경우

시사국제금융세미나 A반

시사국제금융세미나 A반 기말시험

2016년 가을학기

(c) (10 points) 위 FOC를 만족하는 모든 점(들)을 찾으라.

$\lambda \neq 0$  일 때

$$\begin{cases} 1 - x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - \lambda = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = \lambda \\ -x_1 + 2x_2 = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 2x_2 = x_1 \end{cases} \rightarrow 3x_1 = 3x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

$$\rightarrow 1 - x_1 - x_1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2} \quad // \text{case ①}$$

\* NDCQ 확인  
 $(-1 \ -1)$  이므로 Q를 Pass 할.

$$\begin{array}{r} 1 - (-2) \\ -2 - (-1) \\ \hline = 3 \end{array}$$

송영수

$$1 - (-2)$$

10

# 3d

(d) (10 points) 위에서 찾은 점(들)에 대하여 2계조건 (SOC)를 검토하라.

10

송영식

$1 - (-2)$

(d) (10 points) 위에서 찾은 점(들)에 대하여 2계조건 (SOC)를 검토하라.

$$\textcircled{1} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} m=1 \\ n=2 \end{matrix} \rightarrow \text{1개의 LPM 꼭인} \\ \rightarrow \text{LPM}_3 = 0 \cdot (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{(2+1)} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{(3+1)} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$\lambda \neq 0$  일 때; case ①

$$= 0 + (-1) + (-3) = -4 < 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lambda = 0 \text{ 일 때! (case ②)} \quad \text{LPM}_{(2)} = (2 \times 2) + ((-1) \times (-1)) = 4 - 1 = 3 > 0 \\ \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right) \quad \text{LPM}_{(1)} = 2 > 0$$

$\Rightarrow \lambda \neq 0$  일 때와  $\lambda = 0$  일 때 모두  $\Phi D$ 이다.

# 3e

(e) (10 points) 위에서 찾은 점(들)이 주어진 극대화문제의 해가 될 수 있는지 논하라.

10

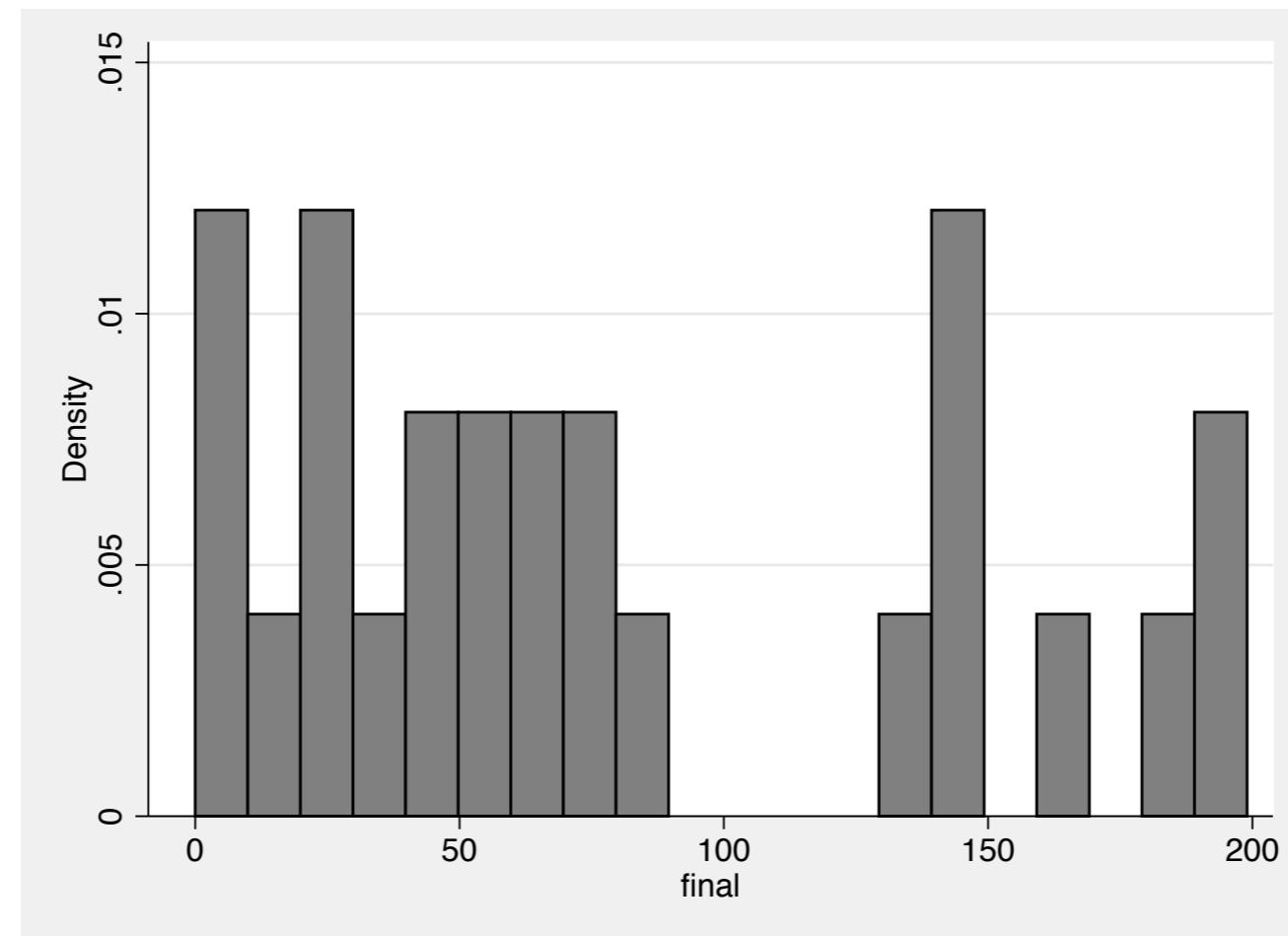
(e). (10 points) 위에서 찾은 점(들)이 주어진 극대화문제의 해가 될 수 있는지 논하라.

$\lambda \neq 0$  일 때의  $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$  ), 이 해들(점들)은 주어진  
 $\lambda = 0$  ",  $x_1 = 0, x_2 = 0$

극대화 문제의 해가 될 수 없다.

# 점수통계(기말)

Variable	0bs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
final	25	79.52	64.37075	0	199



# 점수통계 (총점)

Variable	0bs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
total	25	<b>503.44</b>	<b>258.9286</b>	35	<b>891</b>

