경제수학 최종시험: 해답

담당: 조남운

2010-01-14

1 Simple Calculation(40pt: 5pt/problem)

1.1 다음 함수의 그래프 개형을 그리고, 규정된 정의역(Domain)에서의 Global Maximum과 Global Minimum, Local Maximum, Local Minimum을 구하라.

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

- let $S = (G.Max, G.Min, L.Max, L.Min)$
- 개형:2, 각1

1. $D_1 = \mathbb{R}$ $S = (NA, NA, 2, -2)$
2. $D_2 = (-2, 2]$ $S = (56, NA, \{56, 2\}, -2)$
3. $D_3 = [-1.2, \sqrt{2}]$ $S = (2\sqrt{2}, -2, \{2, 2\sqrt{2}\}, f(-1.2) = \{-2, 3(-1.2)^5 - 5(-1.2)^3 \approx -1.17504\})$

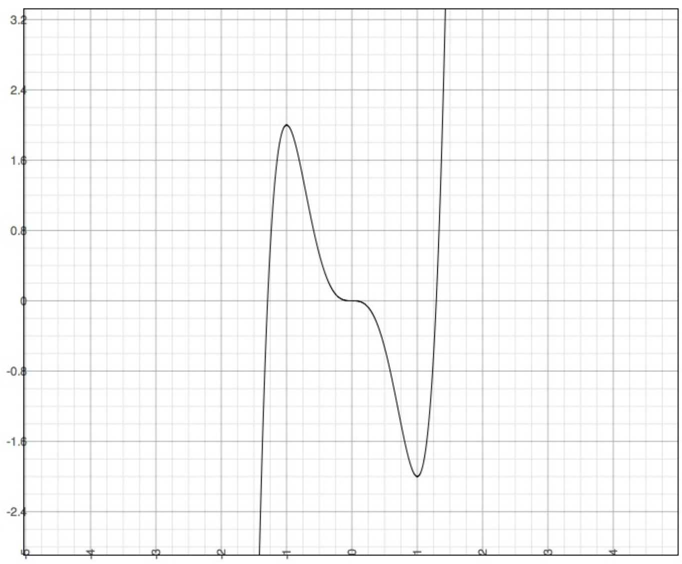

Figure 1: $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

1.2 다음 함수의 그래프 개형을 그리고, 규정된 정의역(Domain)에서의 Global Maximum과 Global Minimum, Local Maximum, Local Minimum을 구하라.

$$f(x) = xe^x, \qquad x \in (-\infty, 0]$$
$$S = (0, -e^{-1}, 0, -e^{-1})$$

Figure 2: $f(x) = xe^x, \qquad x \in (-\infty, 0]$

1.3 구할 수 있다면, 다음 행렬의 역행렬을 구하라.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 5 \\ 6 & 21 & 8 & 17 \\ 4 & 12 & -4 & 13 \\ 0 & -3 & -12 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 9/2 & -15/2 & 11/2 \\ 1/3 & -7/3 & 10/3 & -8/3 \\ -1/4 & 3/4 & -1 & 3/4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4 아래의 행렬은 레온티에프 투입산출 시스템의 기술행렬이다. 물음에 답하라

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

1.4.1 위 행렬이 투입산출 시스템의 기술행렬이 될 수 있는 필수조건을 기술하라.

$$0 \le a_{ij} < 1 \qquad \forall i, j$$
$$\sum_{i}^{2} a_{ij} \le 1 \qquad \forall j$$

- 1pt

1.4.2 위 조건을 만족할 경우, 아래의 조건을 만족함을 보이라.

$$\exists (I-A)^{-1} \quad \wedge \quad \text{its entries are all nonnegative}$$

- 4pt

1.5 다음 두 벡터가 이루는 각이 예각/둔각/직각 중 어떤 것에 해당되는지 판단하라

$$\mathbf{u} = (0,0,0,1,0,1), \qquad \mathbf{v} = (1,1,1,0,1,0)$$

$$(0,0,0,1,0,1) \cdot (1,1,1,0,1,0) = 0$$

right angle(직각)

1.6 아래에 열거된 벡터들이 서로 독립인지 판별하고, 그 벡터들이 생성할 수 있는 공간의 차원수를 판단하라.

1. $(2,1),(1,2)$: linearly independent, 2 dimension
2. $(2,1),(-4,-2)$: linearly dependent, 1 dimension
3. $(1,1,0),(0,1,1)$: linearly independent, 2 dimension
4. $(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)$: linearly independent, 3 dimension

1.7 다음 수열의 일반형($\{x_n\}$)을 기술하고, 수렴여부를 판단하라.

$$\{3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \cdots\} = \{[10^n\pi]/10^n\} = \{\pi\text{의 소수점 n째자리까지의 나열}\} \to \pi$$

1.8 아래의 함수가 $\mathbb{R}^2$에서 정의되어 있다. critical point들을 찾고, 그것들이 local max, local min, saddle point, 알 수 없음 중 어떤 점에 해당되는지 기술하라.

$$f(\mathbf{x}) = x_1x_2^2 + x_1^3x_2 - x_1x_2$$

See figure 3

2 Complex Problem(60pt:10pt/problem)

어떤 상품에 대해서 다음과 같이 생산함수와 수요함수가 주어져 있다. 물음에 답하라.

$$D(p) = a - bp \qquad \text{(Demand Function)}$$

$$F(L,K) = \alpha \ln L + (0.5-\alpha)\ln K \qquad \text{(Production Function)}$$

1. $L, K \in (1,\infty)$는 각각 노동력과 실물자본의 양이다.
2. p는 최종생산재의 가격이다.
3. 임금은 w_L, 실물자본의 단위가격은 w_K 이다.

$f(x, y) = xy^2 + x^3y - xy.$

$f_x = y^2 + 3x^2y - y = y(y + 3x^2 - 1)$ and $f_y = 2xy + x^3 - x = x(2y + x^2 - 1).$

Case 1: $x = 0, y = 0.$

Case 2: $x = 0, y + 3x^2 - 1 = 0$; that is, $(x, y) = (0, 1).$

Case 3: If $y = 0$ and $2y + x^2 - 1 = 0$, then $x^2 = 1$ and so $(x, y) = (1, 0)$ or $(-1, 0).$

Case 4: If $y + 3x^2 - 1 = 0$ and $2y + x^2 - 1 = 0$, then $3x^2 = 1 - y$ and $3x^2 = 3 - 6y$, so $1 - y = 3 - 6y$. Therefore, $y = 2/5$ and $x^2 = (1 - y)/3 = 1/5$; so $x = \pm 1/\sqrt{5}.$

Six critical points: $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (-1, 0),$
$(+1/\sqrt{5}, 2/5), (-1/\sqrt{5}, 2/5).$

Hessian: $H = \begin{pmatrix} 6xy & 2y + 3x^2 - 1 \\ 2y + 3x^2 - 1 & 2x \end{pmatrix}.$

At $(0, 0)$, $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ which is indefinite, so $(0, 0)$ is a saddle.

At $(0, 1)$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ which is indefinite, so $(0, 1)$ is a saddle.

At $(1, 0)$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ which is indefinite, so $(1, 0)$ is a saddle.

At $(-1, 0)$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ which is indefinite, so $(-1, 0)$ is a saddle.

At $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{5}\right)$, $H = \begin{pmatrix} 12/5\sqrt{5} & 2/5 \\ 2/5 & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ which is positive definite, so $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{5}\right)$ is a local min.

At $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{5}\right)$, $H = \begin{pmatrix} -12/5\sqrt{5} & 2/5 \\ 2/5 & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ which is negative definite, so $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{5}\right)$ is a local max.

Figure 3: Solution 1.8

2.1 위 상품의 시장이 완전경쟁시장일 때 기업의 최적 생산량을 도출하라.

In perfect competition market, p is fixed to p^*.

$$p = p^* \qquad \text{(Perfect Competition Condition)}$$

$$X = F(L, K) \qquad (X \text{ is regulated by } L, K)$$

$$\begin{aligned}
&\textbf{Maximize}_{L,K}\Pi(L,K) && \text{(Maximization Problem)}\\
\Pi(L,K) &= TR(F(L,K)) - TC(F(L,K)) && \text{(Profit Function)}\\
&= p^*F(L,K) - (w_K K + w_L L)\\
&= p^*(\alpha \ln L + \beta \ln K) - (w_K K + w_L L) && (\beta \equiv 0.5 - \alpha)\\
D_{L,K}\Pi|_{(L^*,K^*)} &= \begin{pmatrix} \partial\Pi/\partial L \\ \partial\Pi/\partial K \end{pmatrix}\Bigg|_{(L^*,K^*)} = \begin{pmatrix} p^*\alpha L^{*-1} - w_L \\ p^*\beta K^{*-1} - w_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{(FOC)}
\end{aligned}$$

$$L^* = p^*\alpha/w_L, \qquad K^* = p^*\beta/w_K$$

$$\therefore X^* = F(L^*, K^*) = \alpha \ln(p^*\alpha/w_L) + (0.5-\alpha)\ln(p^*(0.5-\alpha)/w_K)$$

$$D^2_{L,K}\Pi|_{(L^*,K^*)} = \begin{pmatrix} \partial^2\Pi/\partial L^2 & \partial^2\Pi/\partial L\partial K \\ \partial^2\Pi/\partial K\partial L & \partial^2\Pi/\partial K^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(L^*,K^*)} = \begin{pmatrix} -p^*\alpha L^{*-2} & 0 \\ 0 & -p^*\beta K^{*-2} \end{pmatrix}$$

(SOC passed: Negative Definite)

2.2 위 상품의 시장이 독점시장일 때 기업의 최적 생산량을 도출하라.

p is controlled by monopoly firm instead of market.

$$\begin{aligned}
&\textbf{Maximize}_{p,L,K}\Pi(L,K) && \text{(Maximization Problem)}\\
\Pi(L,K) &= TR(F(L,K)) - TC(F(L,K)) && \text{(Profit Function)}\\
&= pF(L,K) - (w_K K + w_L L)\\
&= p(\alpha \ln L + \beta \ln K) - (w_K K + w_L L) && (\beta \equiv 0.5 - \alpha)
\end{aligned}$$

Let $\begin{cases} \partial F/\partial L & \equiv F_L = \alpha/L \\ \partial F/\partial K & \equiv F_K = \beta/K \end{cases}$

$$\begin{aligned}
p &= a/b - 1/bD(p) && \text{(by Demand Function)}\\
&= a/b - 1/bF(L,K) && \text{(by Market Equilibrium, } D = F)\\
\therefore \Pi &= (a/b - 1/bF)F - (w_K K + w_L L)\\
D_{L,K}\Pi|_{(L^*,K^*)} &= \begin{pmatrix} \partial\Pi/\partial L \\ \partial\Pi/\partial K \end{pmatrix}\Bigg|_{(L^*,K^*)} = \begin{pmatrix} a/bF_L - 2/bFF_L - w_L \\ a/bF_K - 2/bFF_K - w_K \end{pmatrix}\Bigg|_{(L^*,K^*)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{(FOC)}
\end{aligned}$$

$$\therefore F_L/F_K|_{\substack{L=L^*\\K=K^*}} = w_L/w_K$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha/L^*}{\beta/K^*} = \frac{w_L}{w_K}$$

$$Let\begin{cases}\partial^2\Pi/\partial L^2 = F_{LL} & = -\alpha/L^2\\ \partial^2\Pi/\partial L\partial K = F_{LK} = F_{KL} & = 0\\ \partial^2\Pi/\partial K^2 = F_{KK} & = -\beta/K^2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
D^2_{L,K}\Pi\big|_{(L^*,K^*)} &= \begin{pmatrix}\partial^2\Pi/\partial L^2 & \partial^2\Pi/\partial L\partial K\\ \partial^2\Pi/\partial K\partial L & \partial^2\Pi/\partial K^2\end{pmatrix}\Bigg|_{(L^*,K^*)}\\
&= \begin{pmatrix} a/bF_{LL}-2/bF_LF_{LL} & a/bF_{LK}-2/bF_KF_{LK}-2/bF_KF_L\\ a/bF_{LK}-2/bFF_{LK}-2/bF_LF_K & 1/bF_{KK}-2/bF_KF_{KK}\end{pmatrix}\Bigg|_{L^*,K^*}\\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{bL^{*2}}\left(a-2\frac{\alpha}{L^*}\right) & -\frac{2\alpha\beta}{bL^*K^*}\\ -\frac{2\alpha\beta}{bL^*K^*} & -\frac{\beta}{bK^{*2}}\left(a-2\frac{\beta}{K^*}\right)\end{pmatrix} \qquad \text{(SOC:ND for large a)}
\end{aligned}$$

2.3 다음 극소화 문제를 풀라.

$$\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & 2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-9x_2\\
s.t. \quad & 4x_1+3x_2\le 10, \quad x_2-4x_1^2\ge -2, \quad x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0
\end{aligned}$$

- FOC: See fig4
- SOC: make bordered Hessian of L(Omitted)

2.4 IS-LM model

아래 시스템에서 함수들이 임의로 주어졌을 때 상태 $S^*(G^*, M^{s*}, t^*, Y^*, r^*)$ 근방에서 각 외생변수 변화(G, r, t)에 대한 내생변수들(M^s, Y)의 변화방향에 대해 기술하라.

$$\begin{aligned}
Y &= C+I+G\\
C &= C[Y-T]\\
I &= I[r]\\
M^s &= M[Y,r]\\
T &= tY
\end{aligned}$$

$$0<C'(x)<1, \quad I'(r)<0, \quad \frac{\partial M}{\partial Y}>0, \quad \frac{\partial M}{\partial r}<0, \quad t\in(0,1)$$

- Y:GDP, C:Consumption, I:Investment, G:Government Spending, T:Tax, t:Tax Rate, r:Interest rate, M^s:Money Supply

$$\begin{pmatrix}1-\partial C/\partial Y & 0\\ \partial M/\partial Y & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dY\\ dM^s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial I/\partial r dr + dG - \partial C/\partial t dt\\ -\partial M/\partial r dr\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix}1-\partial C/\partial Y & 0\\ \partial M/\partial Y & -1\end{vmatrix} &= \partial C/\partial Y - 1 < 0\\
&(\because \partial C/\partial Y = C'(x)(1-t)<1)\\
\begin{pmatrix}dY\\ dM^s\end{pmatrix} &= \frac{1}{1-\partial C/\partial Y}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \partial M/\partial Y & \partial C/\partial Y - 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial I/\partial r dr + dG - \partial C/\partial t dt\\ -\partial M/\partial r dr\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}dY\\ dM\end{pmatrix} &= \frac{1}{1-\partial C/\partial Y}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \partial M/\partial Y & \partial C/\partial Y - 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial I/\partial r dr + dG - \partial C/\partial t dt\\ -\partial M/\partial r dr\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

18.18 The Lagrangian is

$$L = 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 9y - \lambda_1(-4x - 3y + 10) - \lambda_2(y - 4x^2 + 2) - \nu_1 x - \nu_2 y.$$

The first order conditions are

$$L_x = 4x - 2y + 4\lambda_1 + 8\lambda_2 x - \lambda_3 = 0$$
$$L_y = 4y - 2x - 9 + 3\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0$$

$$\lambda_1(-4x - 3y + 10) = 0$$
$$\lambda_2(y - 4x^2 + 2) = 0$$
$$\lambda_3 x = 0$$
$$\lambda_4 y = 0.$$

Suppose that $x = y = 0$. The first order conditions imply $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, and so $\lambda_3 = 0$ and $\lambda_4 = -9$, which contradicts the requirement that $\lambda_4 \geq 0$. Next suppose that $x > y = 0$. Then $\lambda_3 = 0$, and so $x + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0$. Hence at least one of λ_1 and λ_2 must be negative, which contradicts the requirement that all multipliers be nonnegative. Next suppose that $y > x = 0$. Then $\lambda_4 = \lambda_2 = 0$. Conclude from the first equation that $\lambda_1 > 0$ (else $\lambda_3 < 0$, which is a contradiction). Thus $y = 10/3$ and the second equation implies that $\lambda_1 < 0$, which is a contradiction. So the only solutions have $x > 0$ and $y > 0$.

Suppose $x, y > 0$. Then $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Suppose $\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 > 0$. Then $4x + 3y = 10$ and $y - 4x^2 = 2$. Thus $3x^2 + x - 4 = 0$, and so $x = 1$ and $y = 2$. Then $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$. Since the multipliers are nonnegative, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ which is a contradiction. Suppose $\lambda_1 = 0$ and $\lambda_2 > 0$. Then the first order conditions lead to the equation $-16x^2 + 2x + 17 + \lambda_2 = 0$. This equation has no nonnegative root, which contradicts a nonnegativity constraint. Suppose that $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Then $x = 3/2$ and $y = 3$ is the only solution to the first two first order conditions. But this violates the constraint $y - 4x^2 \geq -2$.

Suppose that $\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 = 0$. The first order conditions have a solution with $x = 28/37$, $y = 86/37$ and $\lambda_1 = 15/37$.

Figure 4: Solution of 2.3 (by Solution Set)

- $dG > 0, dr = dt = 0$: $dY > 0, dM^s > 0$
- $dr > 0, dG = dt = 0$: $dY < 0, dM^s < 0$
- $dt > 0, dG = dr = 0$: $dY < 0, dM^s < 0$

2.5

N개의 관측 데이터 $\{(x_{1i}, x_{2i})\}(i = 1, 2, \cdots, N)$가 있다. 이 데이터들을 가장 잘 설명할 수 있는 선형적 관계가 반드시 존재함을 보이고, 그것의 값을 도출하라.(여기에서 "가장 잘 설명할 수 있다"는 것은 이론치와 관측치의 차이의 제곱합이 가장 작다는 것을 의미한다)

- Answer: Omitted(See your class notes or Textbook)
- FOC: p407 of Text
- SOC: p410 of Text(Exercise 17.9)

2.6 Utility Maximization

N상품공간에서 어떤 소비자의 효용함수가 $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$로 주어져 있으며, 이 함수는 단조증가하는 특성이 있다. 이 소비자의 소득은 I이다. 상품벡터는 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$이며, 상품들의 가격벡터는 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$이다.

2.6.1 위 소비자의 효용극대화 문제를 수학적으로 표현하라.

$$\textbf{Maximize}_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}) \qquad s.t. \qquad \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \le I \quad \wedge \quad x_i \ge 0 \ \ \forall i = 1, \cdot, n$$

2.6.2 위 문제를 풀고, 주어진 가격하에서 효용을 극대화하는 상품벡터가 반드시 단 하나만 존재하기 위해서 효용함수는 어떤 특성을 가져야 할 것인지 논하라. (일반적으로 풀지 못하겠을 경우, 약간의 페널티를 감수하고 n=2인 경우에 한정하여 풀 것)

$$\tilde{L} \equiv U(\mathbf{x}) - \lambda_0(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - I)$$

- 위 식의 FOC, SOC(bordered Hessian must be Negative Definite)을 나열하고, 그것을 언제나 만족함을 일반적으로 진술할 경우(Bonus)
- n vector Quadratic form으로 한정한 경우도 인정(Bonus)
- 위 일반론을 2상품 케이스로 표현한 경우도 인정(no Bonus). Quadratic form도 인정. 이 경우 언제나 해가 존재하기 위해서는 양쪽 2차항이 모두 음수가 됨을 보일 수 있음 즉,

$$U(\mathbf{x}) = a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2 \tag{1}$$