경제수학 시험 해설

2016.12.21 한신대 국제수리금융세미나

조남운

Nam-Un, Cho/KIAS/ mailto:namun@snu.ac.kr

채점기준

- 단순 계산 착오: 0 - -1
- 그 이외의 오류는 정도에 따라 유동적으로 감점
- 연속 문제의 경우 앞 문제를 잘못 풀더라도 뒷 문제는 잘못된 앞 문제의 결과에 기반하여 정확히 풀 경우 감점하지 않음.

1a

(a) (10 points) 다음 그래프에서 모든 local min/max, global min/max를 찾아라. (있으면 명확히 표시하고, 없으면 명확히 존재하지 않는다고 기술하라)

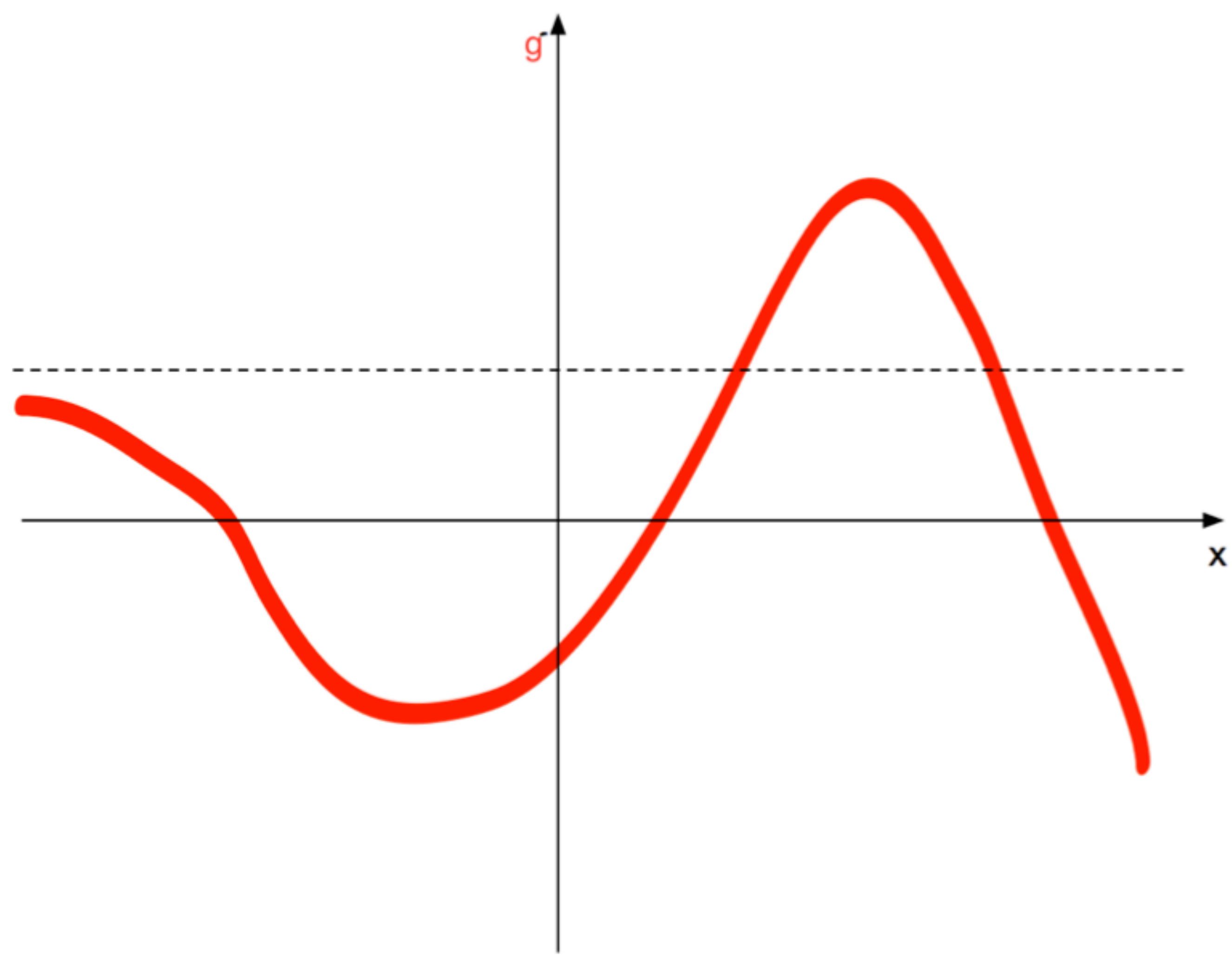


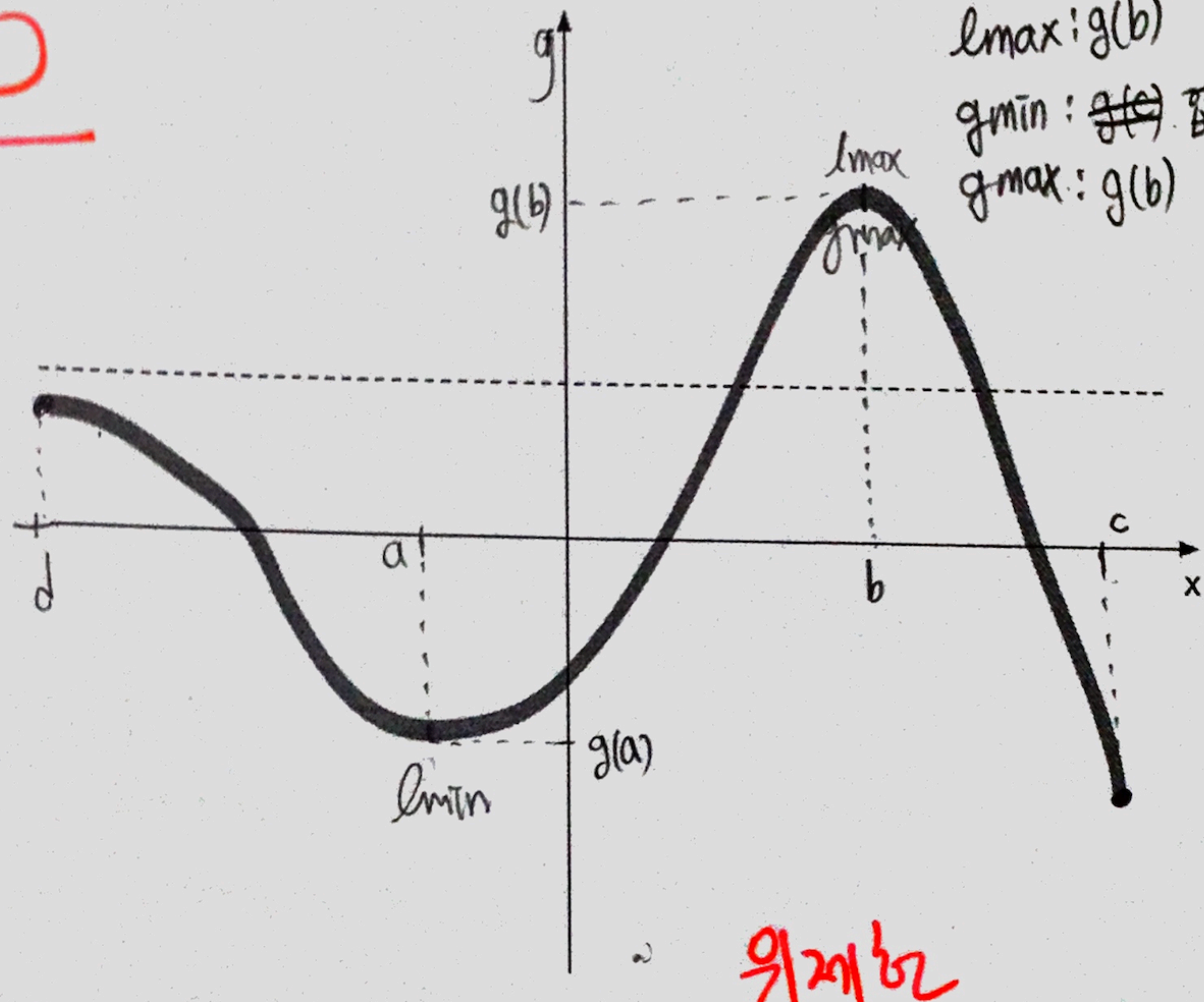
그림 1: $g = g(x)$ 의 그래프

Nam-Un, Cho/KIAS/ mailto:namun@snu.ac.kr

명확히 표시하고, 없으면 명확히 존재하지 않는다고 기술하라)

10

lmin : g(a)
lmax : g(b)
gmin : ~~g(c)~~ 없다
gmax : g(b)



위제호

그림 1: $g = g(x)$ 의 그래프

Nam-Un, Cho/KIAS/ mailto:namun@snu.ac.kr

1b

(b) (10 points) 다음 함수 f 의 1,2계 도함수(f', f'')를 계산하라.

$$f = f(x) = 16\frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}$$

(b) (10 points) 다음 함수 f 의 1,2계 도함수(f', f'')를 계산하라.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$f = f(x) = 16\frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}$$

10

$$f'(x) = 16\left(\frac{2(x+1)(x-2)^{\cancel{2}} - (x+1)^2 \cdot 2\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{4}\,3}}\right) = 16\left(\frac{2(x^2-2x+x-2) - 2(\cancel{x^2}+2x+1)}{(x-2)^3}\right)$$

$$-x-2-2x-1$$

$$= 16\left(\frac{2(-3x-3)}{(x-2)^3}\right) = \frac{16 \cdot 2 \cdot (-3)(x+1)}{(x-2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{96(2x+5)}{(x-2)^4}$$

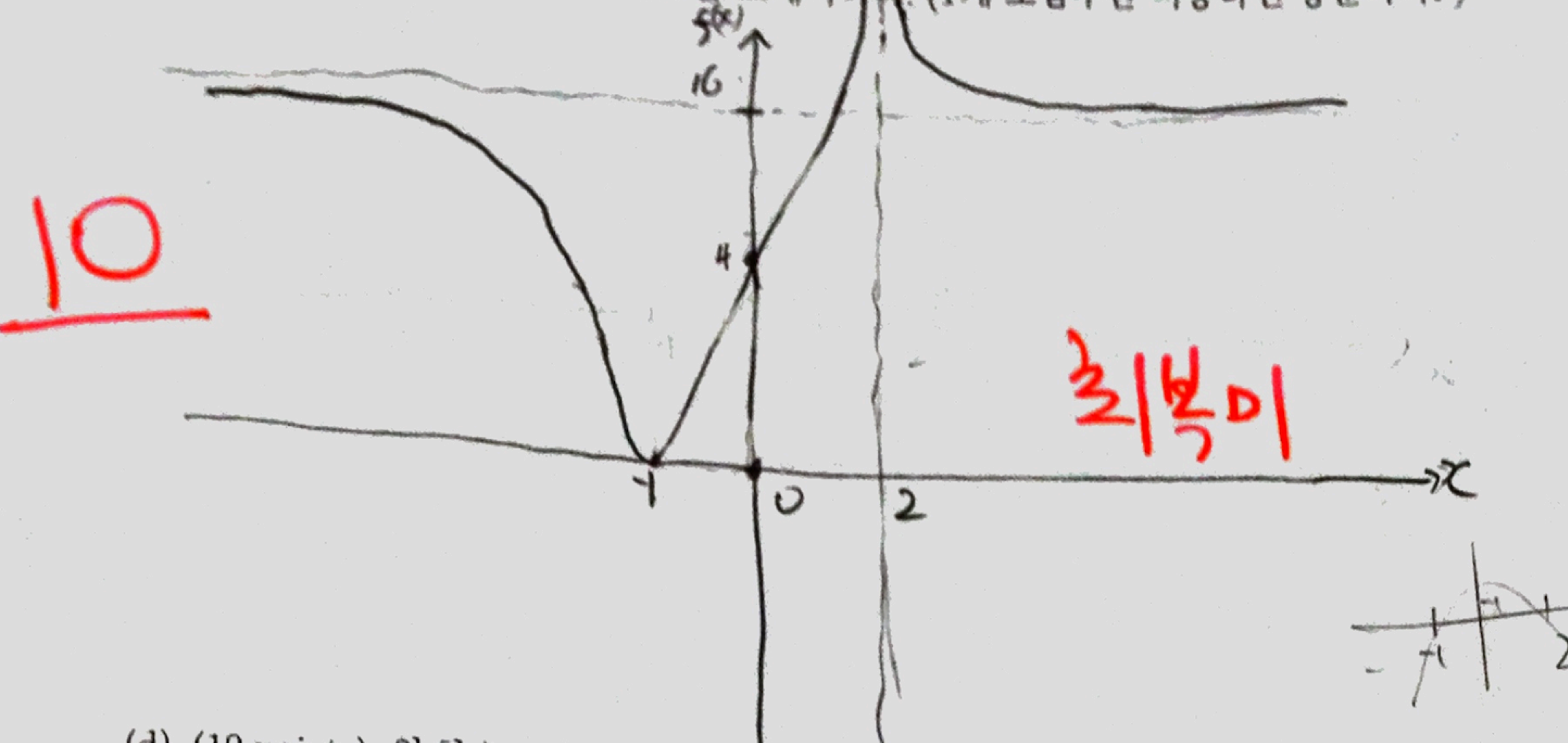
워래다

1c

(c) (10 points) 위 함수 f 의 그래프를 스케치하라. (1계 도함수만 이용하면 충분하다.)

- 1b가 잘못되었더라도 그에 기반하여 그래프스케치가 올바르게 되어 있다면 정답처리 될 수 있음.

(c) (10 points) 위 함수 f의 그래프를 스케치하라. (1계 도함수만 이용하면 충분하다.)



(d) (10 points) ...

1d

(d) (10 points) 위 함수 f 의 local min/max, global min/max를 모두 찾아라. (있으면 명확히 표시하고, 없으면 명확하게 존재하지 않는다고 기술하라.)

- 마찬가지임. 1c가 잘못 그려졌더라도 그에 기반하여 제대로 찾았다면 정답처리 될 수 있음.

1e

(e) (10 points) 아래 함수 h의 도함수 h'을 구하라.

$$h = h(x) = [\ln(x^5 + 2x^3)]^{100}$$

(e) (10 points) 아래 함수 h의 도함수 h'을 구하라.

$$h = h(x) = [\ln(x^5 + 2x^3)]^{100}$$

10

$$h'(x) = 100\left(\ln(x^5+2x^3)\right)^{99} \times \frac{1}{x^5+2x^3} \times (5x^4+6x^2)$$

1f

(f) (10 points) 어떤 기업의 노동력 (L) 에 대한 상품 생산량 (x) 의 관계가 아래와 같고, 그 상품의 시장가격이 p, 단위노동량 당 임금이 w 일 때 아래 문제를 풀라

$$x = x(L) = \ln(L)$$

Solve

$$\arg\max_{x} \Pi(x)$$

$$\Pi(x) := px - wL$$

- critical point가 유일하게 하나 나옴
- 그래프를 그리던지, SOC를 검토해서 이 점이 max 임을 입증해야 함. (-2 - -3)

(f) (10 points) 어떤 기업의 노동력(L)에 대한 상품 생산량(x)의 관계가 아래와 같고, 그 상품의 시장가격이 p, 단위노동량 당 임금이 w일 때 아래 문제를 풀라

10

$x = x(L) = \ln(L) = f(L)$

$x = \ln(L) = x(L)$

$f(L) = x(L) = \ln(L) = x$

$L(x) = e^x$

$TC(L) = \bar{w} \cdot \ln(L)$

$TC(x) = \bar{w} \cdot e^x$

Solve

$$\arg\max_x \Pi(x)$$

$$\Pi(x) := px - wL$$

$x = f(L) \rightarrow L = f^{-1}(x)$

$TC(L) = \bar{w} \cdot L$

$TC(x) = \bar{w} f^{-1}(x)$

$\pi(x) = TR(x) - TC(x)$

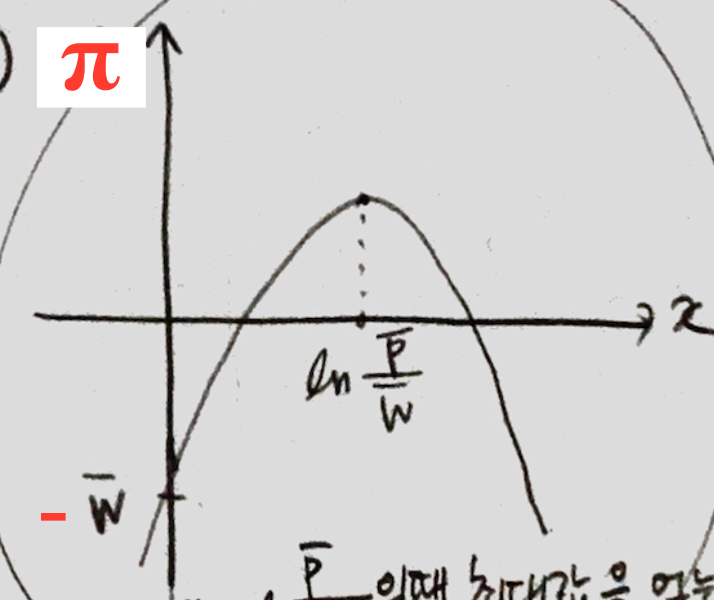
$= \bar{p} \cdot x - w \cdot L$

$\pi(x) = \bar{p} \cdot x - \bar{w} \cdot e^x$

Solve $\arg_x \max \pi(x)$

$\pi'(x) = \bar{p} - \bar{w} e^x$

$\pi''(x) = -\bar{w} e^x$ ⊖



$\bar{p} - \bar{w} \cdot e^x = 0$

$\bar{w} e^x = \bar{p}$ $\quad e^x = \frac{\bar{p}}{\bar{w}}$ $\quad x = \ln \frac{\bar{p}}{\bar{w}}$

$\Rightarrow x = \ln \frac{\bar{p}}{\bar{w}}$ 일때 최대값을 얻는다. (이익)

정리요

① ② ③ ④

1g

(g) (10 points) 다음 행렬들의 역행렬(inverse matrix), Rank, Determinant, Transpose matrix를 (존재한다면) 구하라. (존재하지 않는 경우는 존재하지 않는다고 기술하라.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cdots \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(g) A

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&1&3&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&2&0&-1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&2&0&-1&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

2017sp 백지연

-1/2

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1+(-1)R_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&3/2&1/2&1/2&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&-1/2&-1/2&1/2&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

① $\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

② $\operatorname{rank}(A) = 4.$

Page 4

③ $\det(A) = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(3) - 1(1-0)$

$= 3-1$

$= 2.$

(g) $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+(-1)R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+(-1)R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&-1&-1&1\end{array}\right)$$

no solution

① 역행렬 존재하지않는다.

② $\mathrm{rank}(B)=2$.

③ $\det(B)=1(2)-0+2(-1)$

$=2-2=0$

④ 존재X

1h

(h) (10 points) 다음 벡터들이 생성(span)하는 공간의 차원수를 구하라

$$\mathbf{v_1} = (1, 0, 1, 0, 1)$$

$$\mathbf{v_2} = (0, 1, 0, 1, 0)$$

$$\mathbf{v_3} = (1, 1, 1, 1, 1)$$

(h) $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0 \\ 1&1&1&1&1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow 1 \cdot R_2]{ERO3} \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + (-1) R_2]{ERO2} \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

~~# Rank = 3~~

~~∴ 차원수 = 3~~

Rank = 2

∴ 차원수 = 2

김미경

1i

(i) (10 points) 다음 함수의 함수값을 구하라

$$f(x) = (x_1 x_2, x_1 + x_2 + x_3^2)$$

$$f(1, 2, 3) = ?$$

10

장상희

$f(1, 2.3) \Rightarrow (1 \cdot 2, 1 + 2 + 3^2)$

$= (2, 12)$

1j

(j) (10 points) 아래 함수 g의 1계도함수($Dg_{\mathbf{x}}$)와 2계도함수($D^2g_{\mathbf{x}}$)를 구하라

$$g(\mathbf{x}) = x_1x_2x_3 + x_2^2 + x_1 + x_3 + 1$$

$$g(\mathbf{x}) = x_1x_2x_3 + x_2^2 + x_1 + x_3 + 1$$

$$Dg_x = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3}\right) = (x_2x_3+1,\ x_1x_3+2x_2,\ x_1x_2+1)$$

$$D^2g_x = \begin{pmatrix} D(x_2x_3+1) \\ D(x_1x_3+2x) \\ D(x_1x_2+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

10

김태영

1k

(k) (10 points) 위 함수 g에서 x_i들이 t의 함수로 아래와 같이 표현될 수 있다고 한다. $t = 1$ 일때 $g'(t)$를 구하라.

$$x_1(t) = t^2$$

$$x_2(t) = t + 1$$

$$x_3(t) = t$$

$$\frac{dg}{dt(1)} = \frac{dg}{dx}\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3}\right)\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} = (x_2x_3+1,\ x_1x_3+2x_2,\ x_1x_2+1) \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left((t+1)\cdot t+1,\ t^2\cdot t+2(t+1),\ t^2(t+1)+1\right) \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{t=1}$$

$$6+5+3 = 14.$$

$$\frac{dg}{dt(1)} = 14$$

2a

2. 아래의 극대화문제를 풀어보자.

$$\arg\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$$

(a) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 1계 조건(FOC)을 기술하라.

(a) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 1계 조건(FOC)을 기술하라.

$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ ...을 기술하기

$Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 0$

$= (2x_1 - x_2 \quad -x_1 + 2x_2) = (0 \quad 0)$: FOC

10

2b

(b) (10 points) 위 FOC를 만족하는 **x**를 모두 찾으라

(b) (10 points) 위 FOC를 만족하는 **x**를 모두 찾으라

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow 2x_1 - x_2 = -x_1 + 2x_2$$

$$3x_1 = 3x_2 \Rightarrow \therefore x_1 = x_2$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_1 = 0 \\ -x_1 + 2x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 2x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{matrix} \rightarrow \therefore \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

10

[illegible]

2c

(c) (10 points) 위에서 찾은 점(들)에 대하여 2계조건 (SOC)를 검토하라.

(c) (10 points) 위에서 찾은 점(들)에 대하여 2계조건 (SOC)를 검토하라.

$$D^2 f(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to LPM_{(2)} = 4-((-1)(-1)) = 4-1 = 3 > 0$$

$$LPM_{(1)} = 2 > 0$$

$$PM_{(2)} = 3 > 0$$

$$PM_{(1)} = 2 > 0$$

∴ PD이다.

10

2d

(d) (10 points) 위에서 찾은 점(들)이 주어진 극대화문제의 해가 될 수 있는지 논하라.

$D^2 f_x$가 P.D 이므로 $x_1=0$과 $x_2=0$은 주어진 극대화 문제의 해가 될 수 없다.

10

3a

3. 이제 이 문제에 제약이 생긴 상황을 검토한다.

$$\arg\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 1$$

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$$

(a) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 라그랑지안 함수를 기술하라.

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 + \lambda(1 - x_1 - x_2).$$

10

김태영

3b

(b) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 1계 조건(FOC)을 기술하라.

10 (b) (10 points) 위 문제를 풀기 위한 1계 조건(FOC)을 기술하라. $\theta = 0$

$D\mathcal{L}(2x_1 - x_2 - \lambda \quad -x_1 + 2x_2 - \lambda) = (0 \quad 0)$

조건. $\lambda(1 - x_1 - x_2) = 0$, $\lambda \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 1$.

3c

(c) (10 points) 위 FOC를 만족하는 모든 점(들)을 찾으라.

Case 1: lambda = 0 인 경우,

(c) (10 points) 위 FOC를 만족하는 모든 점(들)을 찾으라.

10

① $L(x,\lambda) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 + \lambda(1 - x_1 - x_2)$

$DL_x = (2x_1 - x_2 - \lambda \quad -x_1 + 2x_2 - \lambda) = (0 \quad 0)$ 이므로

$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = \lambda \\ 2x_2 - x_1 = \lambda \end{cases}$ 이다.

$\lambda(1 - x_1 - x_2) = 0$ 에서, $\lambda = 0$일 때 $2x_1 = x_2$, $2x_2 = x_1$

즉, $x_1 = x_2 = 0$

$\lambda = 0$일 때 $x_1^* = (0,0)$

인수용

Nam-Un, Cho/KIAS/ mailto:namun@snu.ac.kr

Case 2: lambda > 0 인 경우

시사국제금융세미나 A반   시사국제금융세미나 A반 기말시험   2016년 가을학기

(c) (10 points) 위 FOC를 만족하는 모든 점(들)을 찾으라. $\lambda \neq 0$일 때

10

$$\begin{cases} 1 - x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - \lambda = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - \lambda = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = \lambda \\ -x_1 + 2x_2 = \lambda \end{cases} \rightarrow \therefore 2x_1 - x_2 = -x_1 + 2x_2 \rightarrow 3x_1 = 3x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

$$\rightarrow 1 - x_1 - x_1 = 0 \rightarrow \therefore x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2}$$ // case ①

※ NDCQ 확인

$(-1\ \ -1)$ 이므로 CQ를 pass 함.

$-2 - (-1)$

$1 - (-2) = 3$

송영석

10

$1 - (-2)$

3d

(d) (10 points) 위에서 찾은 점(들)에 대하여 2계조건 (SOC)를 검토하라.

10

송영석

$1-(-2)$

(d) (10 points) 위에서 찾은 점(들)에 대하여 2계조건 (SOC)를 검토하라.

① $\left(\begin{array}{c|cc} 0 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} m=1 \\ n=2 \end{array} \rightarrow \therefore$ 1개의 LPM 확인

λ≠0일 때: case ①

$$\rightarrow LPM(3) = 0\cdot(-1)^{(1+1)}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{(2+1)}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{(3+1)}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + (-1) + (-3) = -4 < 0$$

(ii) λ=0일 때: case ②

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow LPM(2) = (2\times 2) - ((-1)\times(-1)) = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$LPM(1) = 2 > 0$$

∴ λ≠0일 때와 λ=0일 때 모두 PD이다.

3e

(e) (10 points) 위에서 찾은 점(들)이 주어진 극대화문제의 해가 될 수 있는지 논하라.

10

(e) (10 points) 위에서 찾은 점(들)이 주어진 극대화문제의 해가 될 수 있는지 논하라.

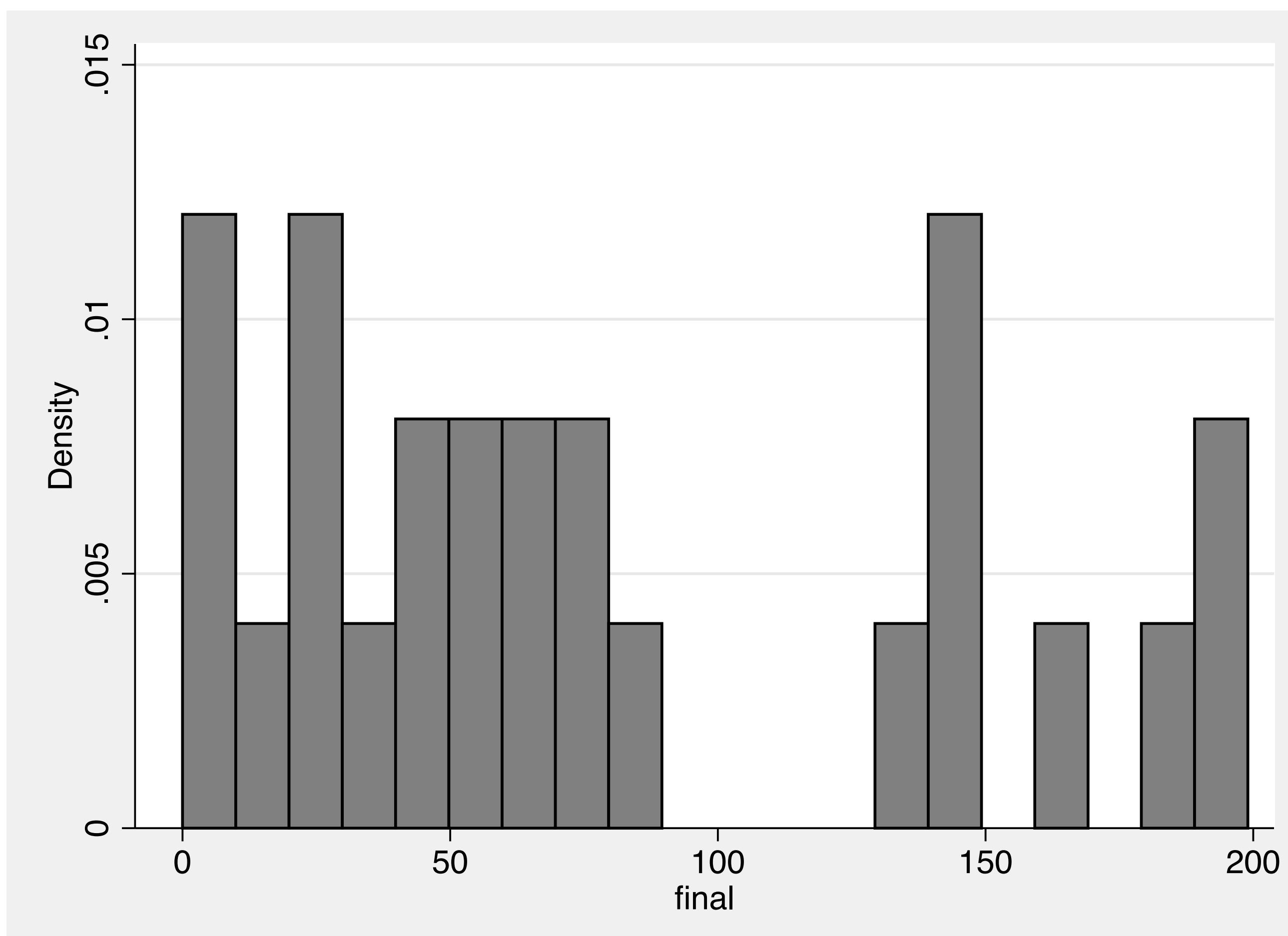
$\lambda \neq 0$ 일 때의 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$

$\lambda = 0$ 〃 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

→ 이 해들(점들)은 주어진 극대화 문제의 해가 될 수 없다.

점수통계(기말)

Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
final	**25**	**79.52**	**64.37075**	**0**	**199**



점수통계 (총점)

Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
total	25	503.44	258.9286	35	891