

- 아래의 주의사항을 잘 보고 최선의 결과 거두시길 바랍니다.

1. 과정이 없는 답안은 오답처리됩니다. 반드시 과정을 명시하시기 바랍니다.
2. 문제 풀이의 순서는 상관 없습니다. 다만 답안에 문제의 번호는 확실하게 써주셔야 합니다.
3. 문제지를 모두 나눠드리고 시험 시작을 선언하기 전에 다음 페이지를 넘겨보시면 안 됩니다. 적발될 경우 즉시 부정행위로 처리할 것입니다.
4. 책상 위에는 사용할 필기구, 시험지, 한 장짜리 노트, 답안지만 있어야 합니다. 이 이외의 다른 모든 물건은 가방에 넣고 봉해야 합니다.
5. 답안의 스케치도 나눠드린 답안지와 문제지의 공란을 사용해야 합니다.
6. 필기구의 사용은 자유입니다.
7. 계산기는 사용 가능하지만, 네트워크가 가능한 기기들은 사용할 수 없습니다.
8. 정해진 시간 안에 답안지를 제출해야 합니다. 먼저 답안 작성을 마친 학생은 퇴실해도 좋습니다.
9. 공지한 바와 같이, A4 한 장 짜리 노트를 문제 풀이에 참고하여 쓸 수 있습니다.
10. 답안지를 여러 장 사용할 경우 제출 전에 모든 답안지의 오른쪽 위쪽에 ‘페이지 번호/ 총 페이지 수’의 형태로 페이지를 써 주시기 바랍니다.
 - 예) 총 7장의 답안지를 사용하고 세번째 장일 경우: 3/7
11. 답안지의 폐기는 허용하지 않습니다. 시험시간에 무언가를 쓴 답안지는 모두 포함해서 제출해야 합니다. 이를 어긴 경우 부정행위로 간주될 수 있습니다.
12. 제출시 교탁 위에 비치할 스테플러로 위쪽을 3군데 이상 찍어주시기 바랍니다. 최종 제출해야 할 것들은 아래와 같습니다.
 - 문제지
 - 답안지
13. 모든 형태의 부정행위는 결시처리 (F) 합니다.
14. 성적 확인 및 정정기간: 2012.1.9-13

총점: 100

학과: _____

학번: _____

이름: _____

1. Simple calculations

- (a) (10 points) 어떤 기업이 자신의 이윤 f 와 제조량 x 간의 관계를 조사한 결과 아래와 같은 결론에 도달하였다. 이 기업의 이윤함수 f 의 그래프를 x 에 대해 그려보아라.

$$f = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

- (b) (10 points) 위 문제 a의 함수에서 아래와 같이 정의역(x 의 집합)이 정의될 때 min, max, global min, global max를 찾아라. 그리고 각 경우에 대해 이 기업의 이윤이 가장 높아지는 생산량이 얼마일지도 이야기해보자.

★ 경계해(border solution)는 local min, local max로 간주할 것

1. $x \in [0, 0.5)$

2. $x \in (-\infty, \infty)$

- (c) (10 points) 아래 행렬들의 Rank를 구하고, 구할 수 있다면 행렬식(Determinant)도 구하라.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (d) (10 points) 다음 행렬의 행렬식(Determinant)과 Rank, 그리고 역행렬(Inverse Matrix)을 구하라

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- (e) (10 points) 다음 연립방정식의 해를 구하라(Hint: 앞 문제 d의 결과를 이용 가능)

1.

$$x_1 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$x_4 = 1$$

$$x_1 + x_3 + 2x_4 = 1$$

2.

$$x_1 + x_2 + x_5 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_4 = -1$$

$$x_2 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3$$

2. 완전경쟁 시장에서의 이윤 극대화 문제

어떤 기업의 생산함수가 f 라고 한다.

$$q = f(L, K_1, K_2) = \bar{\alpha} \ln L + \bar{\beta}_1 \ln K_1 + \bar{\beta}_2 \ln K_2, \quad \bar{\alpha} > 0, \quad \bar{\beta}_i > 0 \quad \forall i = 1, 2$$

각 변수의 의미는 다음과 같다.

L : 투입된 총 노동시간

K_i : 투입된 총 i 번째 자본량

\bar{p} : 기업이 생산하는 상품의 가격

\bar{w} : 시간당 임금

\bar{k}_i : 단위당 i 번째 자본의 가격.

(만일 변수 이름의 사용이 혼동스럽다면, 생산요소의 양 (L, K_1, K_2) 를 각각 (x_1, x_2, x_3) 으로, 각 요소의 가격 (w, k_1, k_2) 을 (w_1, w_2, w_3) 으로 치환하여 풀면 수월할 것이다.)

(a) (5 points) 이 기업이 q 만큼의 상품을 생산하는 데에 들어가는 총 비용 함수 $TC(q)$ 혹은 $TC(L, K_1, K_2)$ 를 구하라. (Hint: 역함수는 식으로 나타내려 하지 말고, f^{-1} 로 표현하라)

(b) (5 points) 이 기업이 q 만큼의 상품을 시장 가격에 판매했을 때에 얻을 수 있는 총 수입 함수 $TR(q)$ 혹은 $TR(L, K_1, K_2)$ 를 구하라

(c) (5 points) 이 기업이 q 만큼의 상품을 시장 가격에 판매했을 때에 얻을 수 있는 총 이윤 함수 $\Pi(q)$ 혹은 $\Pi(L, K_1, K_2)$ 를 구하라

(d) (5 points) 이 기업의 총 이윤을 가장 크게 만들 수 있는 생산량 q^* 는 얼마인가? (Hint: 극대화 문제를 (L, K_1, K_2) 에 대해서 푼 뒤, q 에 대해 표현)

- 1 계조건 (foc), 2 계조건 (soc) 까지 명시하여 엄밀하게 풀면 위 점수에 보너스 5점 추가

3. 소비자의 효용 극대화 문제

어떤 소비자의 상품 소비 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 와 효용 U 의 관계를 관찰한 결과 그 소비자는 상품 소비에 의해 아래와 같은 효용을 얻는다는 결론에 도달했다.

$$U(x_1, x_2, x_3) = 4(x_1 + 2)^{\frac{1}{4}} + \ln(x_2 + 4) + 2x_3^{\frac{1}{2}} + 4(x_1 + 2)^{\frac{1}{4}}(x_2 + 4)^{\frac{1}{4}}x_3^{\frac{1}{4}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

- (a) (5 points) 1계조건 (FOC) 들을 만족하는 모든 점을 구하라. (Hint: x_i 들을 적절히 치환하면 계산이 좀 더 수월함)
- (b) (5 points) 위 점(들)에서의 헤시안(Hessian)을 구하고, 그것의 정부호성(Definiteness)을 판단하라
- (c) (보너스 5점:) 만일 각 상품의 가격과 소득이 아래와 같이 정의될 경우, 위 소비자는 상품을 얼마나 소비할 경우 가장 큰 만족을 얻는가?

$$\mathbf{p} = (1, 3, 2), \quad \mathbf{p} \bullet \mathbf{x} \leq 100$$

4. 제약하의 극대화

다음 극대화 문제를 풀어보자.

$$\underset{x_1, x_2}{\text{maximize}} \quad f(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2 + x_1x_2, \quad s.t \quad x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 \geq -1$$

- (a) (5 points) 위 극대화문제를 풀기 위한 라그랑지안 함수를 만들어보라
- (b) (5 points) 위 극대화문제의 1계조건(FOC)을 써보고, 이 조건을 만족하는 모든 점을 구하라
- (c) (5 points) 위에서 구한 점(들)에 대한 유테 헤시안(Bordered Hessian)을 구하라.
- (d) (5 points) 각 점들이 극대화조건을 만족하는 점인지 판별하라

수고하셨습니다!!