기말시험 해설

2014 겨울학기 경제수학
212.214-001 (담당: 조남운)

Nam-Un, Cho/Center for Distributive Justice/ mailto:namun@snu.ac.kr

(a) (5 points) 다음 함수 f, g, h, i, j, k, l, m 중 동일한 함수가 존재한다면 어떤 함수들이 그러한지 기술하라. 변수나 상수의 범위에 대해서는 특별한 기술이나 명백한 제약이 없을 경우 a를 제외하면 모두 실수로 간주하라. a가 가질 수 있는 값의 범위는 다음과 같다: $a > 0$

$$f(a, b) = ax + b$$

$$g(x) = ax + b$$

$$h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x} + b$$

$$i(a, b, c) = ax + b$$

$$j(b, c) = bx + c$$

$$k(\ln x) = a \ln x + b$$

$$l^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$$

$$m(\ln a, b) = x \ln a + b$$

(a) 동일한 함수를 보면

동일 $\left(\begin{array}{l} f(x) = ax+b \\ l(x) = ax+b \quad (l^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}) \\ k(\ln x) = a \ln x + b \end{array} \right.$

독립변수 1개, 정의역 실수전체
독립변수 1개 정의역 실수전체
독립변수 1개 정의역 실수전체

$h(\frac{1}{x}) = \frac{a}{x} + b$ 는 정의역이 다름 (0 미포함)

강병철

$f(a,b) = ax+b$ 독립변수 2개, 정의역 $a>0$, $a,b \in \mathbb{R}$

$i(a,b,c) = ax+b$ 독립변수 3개 정의역 $a>0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$

$j(b,c) = bx+c$ 독립변수 2개 정의역 $b,c \in \mathbb{R}$

$m(\ln a, b) = x \ln a + b$ 독립변수 2개 정의역 $\ln a, b \in \mathbb{R}$

1a

- 아래 두 그룹의 함수가 동일함 (같은 범위에서 정의되고 대응관계가 동등)
  - j,m 은 서로 동등 (i 는 domain이 R^3 이므로 다른 함수)
  - g,k,l 는 서로 동등 (h는 domain이 0 아닌 실수)
- 점수부여
  - 위 두 쌍을 제외한 다른 쌍이 지적된 경우 요소별 감점
  - 단, 최소한 하나라도 맞는 쌍을 지적하면 0점은 아님
  - 한 쌍도 맞지 않는 경우는 0점

(b) (5 points) $\mathbf{x}^* = (1, 2, 3, 4)$ 에서 함수 f 의 x_3 에 대한 탄력성 (elasticity) 을 도출하라. (Hint: 1변수 함수의 탄력성 정의에서 미분식 대신 편미분을 사용하라. 이 계산이 불가능할 경우 감점을 감수하고 $f(x) = Ax^\alpha$ 일때 $x = 1$ 에서 f 의 x 에 대한 탄력성을 구할 것)

$$f(\mathbf{x}) = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4}$$

이제중

$$f(x) = A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = A \cdot \alpha_3 \, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3 - 1} x_4^{\alpha_4}$$

$$e = \frac{x_3}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{A} \cdot \cancel{2^{\alpha_2}} \cancel{3^{\alpha_3}} \cancel{4^{\alpha_4}}} \cdot \cancel{A} \alpha_3 \cancel{2^{\alpha_2}} \cancel{3^{\alpha_3 - 1}} \cancel{4^{\alpha_4}}$$

$$= \alpha_3$$

Plan B (1변수 버젼): 4점만점

$$f(\mathbf{x}) = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}$$

정석호

$$f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)} = \cancel{A}\cdot\alpha x^{\alpha-1}\cdot\frac{x}{\cancel{A}x^{\alpha}}$$ → 여기에 $x=1$ 대입

$$= \alpha$$

(c) (10 points) 어떤 국가의 거시경제 체계가 아래 IS-LM 모형과 같은 특성을 띠고 있다고 한다. 현 상태에서 세율 t 만 약간 인상되었을 때 Y 에 미치는 영향을 기술하라. 아래 모형에서 괄호는 함수의 input, 또는 열린 구간(open interval)을 의미한다. r 은 이자율이다.

$$Y = C + I + G \qquad \text{(GDP)}$$

$$C'(Y - T) \in (0,1) \qquad \text{(Consumption Spending)}$$

$$I'(r) < 0 \qquad \text{(Investment Spending)}$$

$$T'(t) \in (0,1) \qquad \text{(Tax)}$$

$$G'(t) \in (0,1) \qquad \text{(Government Spending)}$$

$$C'T' < G'$$

$$M_s = M_d(Y, r) \qquad \text{(Money Supply \& Demand)}$$

$$\frac{\partial M_d}{\partial Y} > 0$$

$$\frac{\partial M_d}{\partial r} < 0$$

∂r

Sol)

$$Y = C(Y-T) + I(r) + G(t)$$

$$dY = \frac{\partial C(Y-T)}{\partial Y}\cdot dY + \frac{\partial C(Y-T)}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial I(r)}{\partial r}\cdot dr + \frac{\partial G(t)}{\partial t}\cdot dt$$

$$= \frac{\partial C(Y-T)}{\partial (Y-T)}\cdot\frac{\partial (Y-T)}{\partial Y}\cdot dY + \frac{\partial C(Y-T)}{\partial (Y-T)}\cdot\frac{\partial (Y-T)}{\partial T}\cdot\frac{\partial T(t)}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial I(r)}{\partial r}dr + \frac{\partial G(t)}{\partial t}\cdot dt$$

$$= C'\cdot 1\cdot dY + C'\cdot(-1)\cdot T'dt + I'dr + G'dt$$

박지영

$$dM_s = \frac{\partial M_d}{\partial Y}dY + \frac{\partial M_d}{\partial r}dr$$

$$(1-C'(Y-T))dY - I'(r)\cdot dr = -C'(Y-T)\cdot T'\cdot dt + G'(t)\,dt$$

$$\frac{\partial M_d}{\partial Y}dY + \frac{\partial M_d}{\partial r}dr = dM_s$$

$$\begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \frac{\partial M_d}{\partial r} & I'(r) \\ -\frac{\partial M_d}{\partial Y} & 1-C'(Y-T) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} G'(t)dt - C'(Y-T)\cdot T'dt \\ dM_s \end{pmatrix}$$

$$D = \underset{-}{\frac{\partial M_d}{\partial r}}\underset{+}{(1-C'(Y-T))} + \underset{-}{I'(r)}\cdot\underset{+}{\frac{\partial M_d}{\partial Y}} < 0$$

$$dY = \underset{-}{\frac{1}{D}}\cdot\Big[\underset{-}{\frac{\partial M_d}{\partial r}}\cdot(\underset{+}{G'(t)dt} - \underset{+}{C'(Y-T)}T'dt) + \underset{0}{I'(r)\,dM_s}\Big]$$

Page 3

if $G'(t)dt > C'(Y-T)T'dt \rightarrow Y$ 증가

if $G'(t)dt < C'(Y-T)T'dt \rightarrow Y$ 감소

1c

- 화폐식 고려하지 않음: -3
- 화폐식 선형화식 오류: -2 - -4
- 연립으로 풀지 않고 dr=0 으로 간주: -5 - -7

(d) (10 points) 다음 함수의 그래프 스케치하되, 오목성 및 볼록성 (convexity, concavity) 까지 명시적으로 표현하라.

$$f(x) = e^{-x^2+\ln x}$$

10

$$f(x) = e^{-x^2+\ln x}$$

$f'(x) = e^{-x^2+\ln x} \cdot (-2x + \frac{1}{x}) \rightarrow f'(0) : N/A, \ f'(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0, \ f'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$

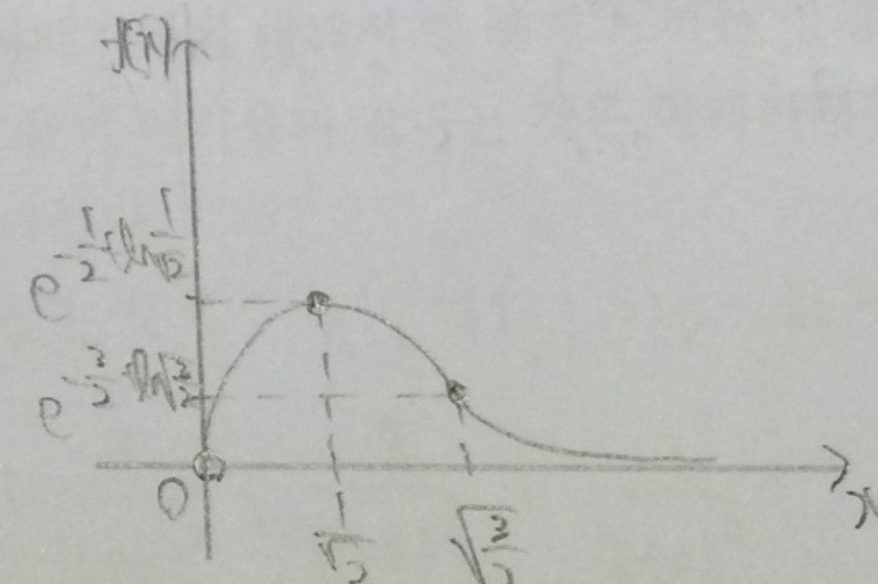
$f''(x) = e^{-x^2+\ln x} \cdot (-2x + \frac{1}{x})^2 + e^{-x^2+\ln x} \cdot (-2 - \frac{1}{x^2}) = e^{-x^2+\ln x} \cdot (4x^2 - 6) \rightarrow f''(-\sqrt{\frac{3}{2}}) = 0, \ f''(\sqrt{\frac{3}{2}}) = 0$

여기서, $\ln x$의 값은 $x>0$ 일때만 정의되므로 $f(x)$ 역시 $x>0$인 범위에서만 정의된다. 따라서,

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
f'	N/A	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	N/A	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	N/A	↗	$e^{-\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{\sqrt{2}}}$	↘	$e^{-\frac{3}{2}+\ln\sqrt{\frac{3}{2}}}$	↘

또한, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

∴



조재민

1d

- 축변수 누락: -1
- 단술산수오류: -1
- 주요계산오류: 정도에 따라 -2 - -5

(e) (10 points) 위 문제 d의 함수의 global maximum, local maximum, global minimum, local minimum을 아래에 주어진 domain에 대해서 판단하고, 답이 존재한다면 내부해 (inner solution) 인지, 경계해 (boundary solution) 인지도 함께 기술하라. (Hint: 필요하다면 $\ln 2 \approx 0.6931$ 을 사용하라. 최종 결과를 계산할 필요는 없고 식으로 정확하게 표현하면 됨)

i) $x \in (1/2, 1)$

ii) $x \in [1/2, 1]$

iii) $x \in (0, \infty)$

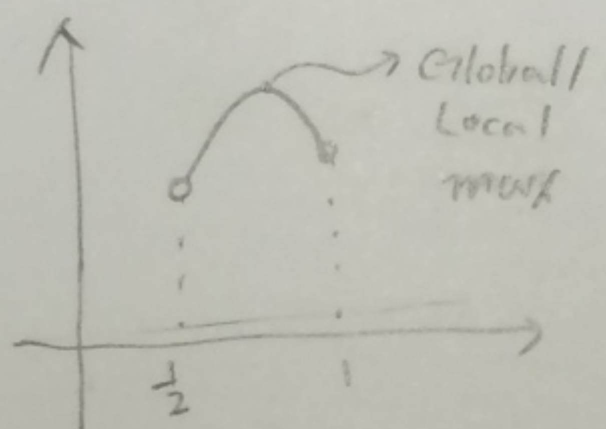
i) $x \in (1/2, 1)$

ii) $x \in [1/2, 1]$

iii) $x \in (0, \infty)$

김방수

i) $x \in (\frac{1}{2}, 1)$



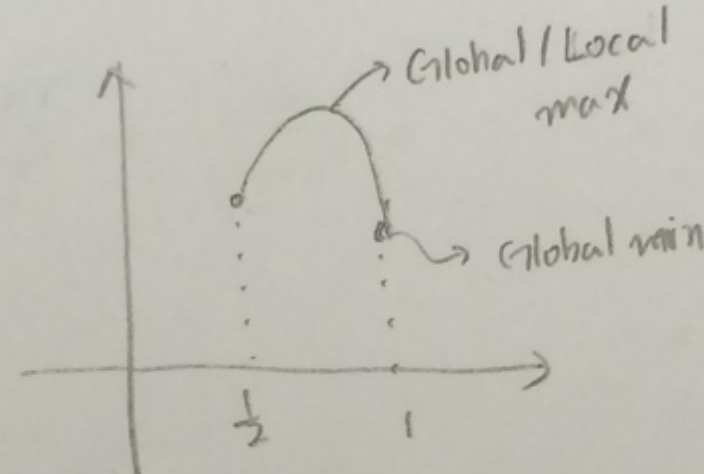
· Global / Local Max $= f(\frac{1}{\sqrt{2}})$

$= e^{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2)}$

· ⇒ 내부해 (inner)

· Global / Local Min은 존재 X

ii) $x \in [\frac{1}{2}, 1]$



· Global / Local Max $= f(\frac{1}{\sqrt{2}})$

$= e^{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2)}$

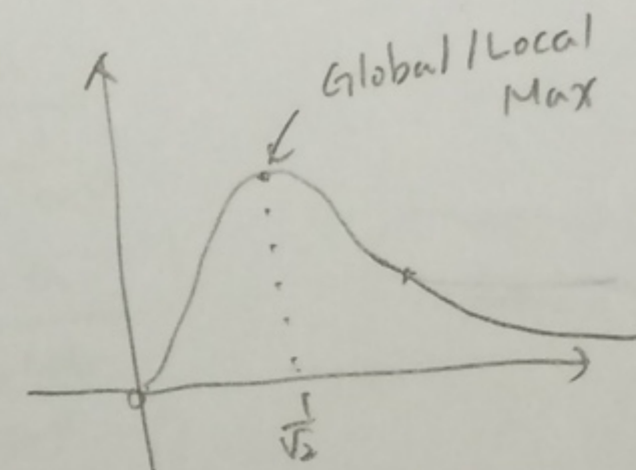
⇒ 내부해 (inner)

· Global Min $= f(1)$

$= e^{-1}$

⇒ 외부해 (boundary)

iii) $x \in (0, \infty)$



· Global / Local Max $= f(\frac{1}{\sqrt{2}})$

$= e^{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2)}$

⇒ 내부해 (inner)

· Global / Local Min은 존재 X

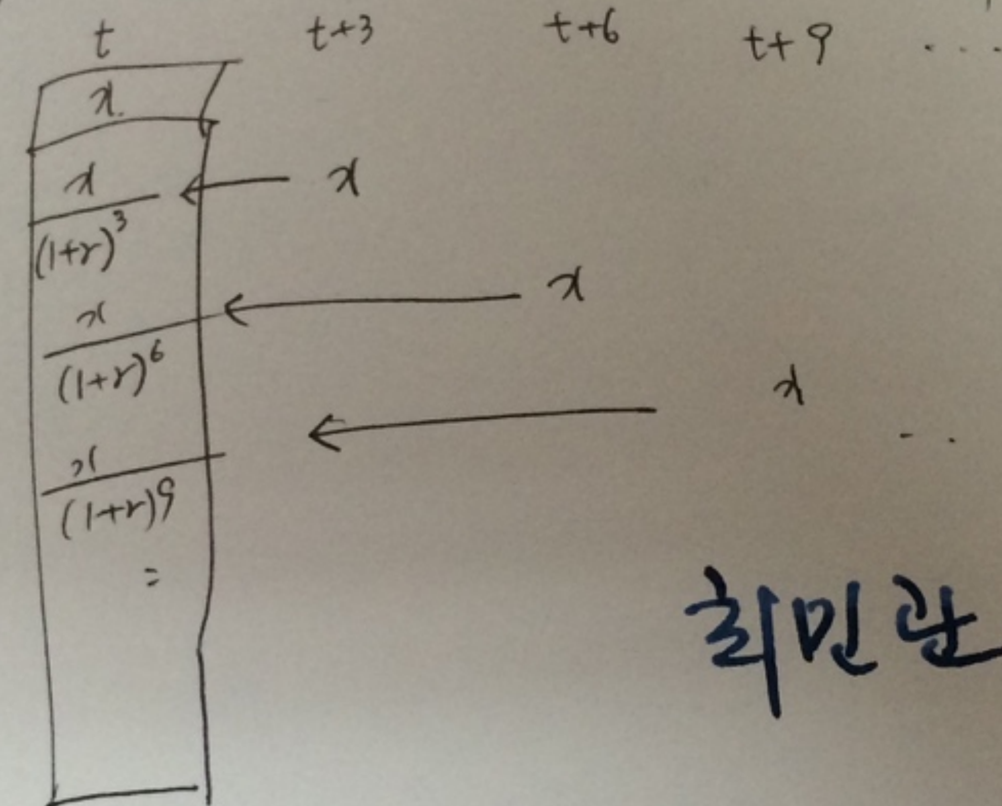
1e

- 전 문제의 정답 여부와 무관하게, 전 문제에서 도출한 그래프에 의하여 정답여부 판단
- global max/min 이 존재하더라도 local max/min 은 아닐 수 있으므로 명시해야 함. (-2)
  - 단, 간혹 경계해의 경우 local max/min으로 간주하는 경우가 있으므로 local로 간주함에 대해 명시할 경우는 답안으로 인정
- "존재하지 않는다"와 "알 수 없다"는 다른 의미임.

(f) (10 points) A는 수명이 무한한 어떤 사람 B에게 수명이 무한한 자동차 한 대를 판매하려고 한다. 이 자동차를 일시부로 판매할 경우 A가 생각하는 적정 가격은 1억원이다. 그런데 이 B는 영원히 리스 상태로 매 3년마다 일정 금액을 납입하겠다고 제안했다. A는 그 금액을 듣자 일시부로 판매하는 것보다 낫다고 생각했다. 그 금액의 범위는 얼마인지 추정하라

- 필요한 변수나 상수가 있다면 정의내린 뒤 수식으로 표현하라.
- A는 금전적 이익만을 고려하는 경제적 인간이다.
- A의 수명 역시 무한하다고 가정하라.
- 이자율은 연간 이자율을 사용하라.
- A,B은 절대로 약속을 어기는 일이 없다고 가정하라.
- A의 시간선호율(미래의 화폐가치를 현재의 화폐가치에 대해서 덜 좋게 느끼는 성향)은 이자율과 같다고 가정하라 (Hint: 시간선호율이 이자율과 같다는 것은 현재가치를 산출할 때 이자율만 고려하면 된다는 것을 의미한다.)

#) 3년마다 납입할 일정 금액 = x, 연간 이자율 = r



최민관

$$x + \frac{x}{(1+r)^3} + \frac{x}{(1+r)^6} + \frac{x}{(1+r)^9} + \cdots > 10^8$$

$$\therefore \frac{x}{1-\frac{1}{(1+r)^3}} > 10^8$$

1f

- 매기초에 납입하는 것으로 가정할 경우는 다음과 같음 (매기말 버젼으로 할경우 1억*[(1+r)^3-1]
- 불연속으로 풀면
  - 납입액 $\geq$ 1억*(1-(1+r)^-3)
- 연속버젼으로 풀면 RHS를 아래와 같이 수정

$$1\text{억} \times (1 - e^{-3r})$$

2. 어떤 변수들을 관찰한 결과 $t+1$ 기와 t 기에서의 값이 다음과 같은 규칙을 띠고 있었다고 한다. 이어지는 물음에 답하라. (주의 : 올바르게 문제를 풀기 위해서는 사용하는 모든 eigenvector의 길이가 1 이어야 한다.)

$$x_{1,t+1} = 2x_{1,t} - x_{2,t} - x_{3,t}$$
$$x_{2,t+1} = -x_{1,t} + 2x_{2,t} - x_{3,t}$$
$$x_{3,t+1} = -x_{1,t} - x_{2,t} + 2x_{3,t}$$

(a) (5 points) 위 규칙을 matrix form으로 표현하라

(b) (5 points) 위 matrix의 eigenvalue를 모두 구하라

(c) (5 points) 위 matrix의 eigenvector를 모두 구하되, 각 vector의 길이가 반드시 1이 되도록 하라.

(a) $x_{t+1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} x_t$

(b) $\begin{vmatrix} 2-r & -1 & -1 \\ -1 & 2-r & -1 \\ -1 & -1 & 2-r \end{vmatrix} = (2-r)\cdot(-1)^2\{(2-r)^2 - 1\} + (+1)\cdot(-1)^3\cdot\{+(2-r)+1\} + (-1)\cdot(-1)^4\cdot\{1+(2-r)\}$

$= (2-r)\{r^2 - 4r + 3\} - (3-r) - (3-r)$

$= 2r^2 - 8r + \cancel{6} - r^3 + 4r^2 - 3r - \cancel{6} + 2r$

$= -r^3 + 6r^2 - 9r$

[illegible]

$= -r(r^2 - 6r + 9)$

$= -r(r-3)^2$

$r = 0$ or 3

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot V_1 = 0 \qquad V_1 = \left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \sqrt{\tfrac{1}{3}}, \sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} V_2 = 0 \qquad V_2 = (1, -1, 0)$

or $(0\ 1\ -1)$

or $(1\ 0\ -1)$

2a,b,c

- eigenvector normalize 안하면 → -1
- eigenvector를 최소한 하나 제시하지 않으면 → -3
- 원래 의도와 달리 2a-c에도 대안 matrix를 적용한 경우는 감점하지 않음

(d) (5 points) (택일)

- matrix를 대각화(diagonalize) 하라. (이 문제를 풀 경우 Bonus 5+5)
- 혹은 아래 matrix 를 대각화하라 (5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(e) (10 points) 위에서 대각화한 matrix에 대하여 $\mathbf{x_0} = (5, 8, 7)$ 일 때, $\mathbf{x_n}$ 을 구하라. (앞 문제에서 보너스 문제를 택하여 풀 경우 10+5, 아닐 경우 10)

$$\Rightarrow 2-r=-1,\quad 2-r=2 \Rightarrow \boxed{r=0,3}$$

(c) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x-y-z=0 \\ -x+2y-z=0 \\ -x-y+2z=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -\left(\frac{y+z}{2}\right)+2y-z=0 \Rightarrow y=z=x. \\ x=y=z \rightarrow \pm\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \Rightarrow -x+y+z=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_1-t_2 \end{pmatrix} (-1) \quad (\text{단, } t_1^2+t_2^2+(t_1+t_2)^2=1) \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

(d) $$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ 라 하면 $$P^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

이제는

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Nam-Un, Cho/Center for Distributive Justice/ mailto:namun@snu.ac.kr

3점

2. (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + \cdots} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $X_{t+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} X_t$ 일 때 X_n을 구하라 $\bar{X}_0 = (5, 8, 7)$

$X_t = (x_t, y_t, z_t)$

$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} - 2x_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t - 2x_t \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} - 2x_{t+1} + \frac{8}{3} y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t - 2x_t + \frac{8}{3} y_t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{t+1} - \frac{2}{3} y_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} - 2x_{t+1} + \frac{8}{3} y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t - \frac{2}{3} y_t \\ \vdots \\ \cdots - 2x_t + \frac{8}{3} y_t \end{pmatrix}$

Let $\tilde{X}_t = \begin{pmatrix} x_t - \frac{2}{3} y_t \\ y_t \\ z_t - 2x_t + \frac{8}{3} y_t \end{pmatrix}$ then $\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \tilde{X}_0$

$\tilde{X}_0 = \begin{pmatrix} 5 - \frac{16}{3} \\ 8 \\ 7 - 10 + \frac{64}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 8 \\ \frac{55}{3} \end{pmatrix}$

$x_n - \frac{2}{3} y_n = -\frac{1}{3} \rightarrow x_n = \frac{2}{3} y_n - \frac{1}{3} = \frac{16}{3} \cdot 3^n - \frac{1}{3}$

$y_n = 8 \cdot 3^n$

이중해

$z_t - 2x_n + \frac{8}{3} y_n = \frac{55}{3} \cdot 2^n$

$z_t = 2x_n - \frac{8}{3} y_n + \frac{55}{3} \cdot 2^n$

$= \frac{32}{3} \cdot 3^n - \frac{2}{3} - \frac{64}{3} \cdot 3^n + \frac{55}{3} \cdot 2^n = \frac{55}{3} 2^n - \frac{32}{3} \cdot 3^n - \frac{2}{3}$

$X_n = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \cdot 3^n - \frac{1}{3} \\ 8 \cdot 3^n \\ \frac{55}{3} \cdot 2^n - \frac{32}{3} 3^n - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Nam-Un, Cho/Center for Distributive Justice/ mailto:namun@snu.ac.kr

보너스, 대안문제 모두 풀어져 있음.

(e) $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{3} & \frac{\sqrt3}{3} & \frac{\sqrt3}{3} \\ \frac{2\sqrt2}{3} & -\frac{\sqrt2}{3} & -\frac{\sqrt2}{3} \\ -\frac{\sqrt2}{3} & \frac{2\sqrt2}{3} & -\frac{\sqrt2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3^n}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^n}{\sqrt2} \\ 0 & -\frac{3^n}{\sqrt2} & -\frac{3^n}{\sqrt2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{3} & \frac{\sqrt3}{3} & \frac{\sqrt3}{3} \\ \frac{2\sqrt2}{3} & -\frac{\sqrt2}{3} & -\frac{\sqrt2}{3} \\ -\frac{\sqrt2}{3} & \frac{2\sqrt2}{3} & -\frac{\sqrt2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot3^{n-1} & -3^{n-1} & -3^{n-1} \\ -3^{n-1} & 2\cdot3^{n-1} & -3^{n-1} \\ -3^{n-1} & -3^{n-1} & 2\cdot3^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \tilde{x}_n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= 3^{n-1} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

이재승

(e)′

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt6} \\ -\frac{2}{\sqrt5} & 1 & -\frac{2}{\sqrt6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt5 & -\sqrt5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3^n-1 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ -2+2^{n+1} & 2-2\cdot3^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n = \left(5+8(3^n-1),\ 8\cdot3^n,\ 5\cdot(-2+2^{n+1}) + 8(2-2\cdot3^n) + 7\cdot2^n\right)$$

3. 어떤 소비자의 효용체계를 도출한 결과 소비상품묶음(commodity bundle) $\mathbf{x}$에 대한 효용 U가 아래와 같았다고 한다.

$$U(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/4}$$

이 사람의 소득은 100, 각 상품의 가격은 $\mathbf{p} = (3, 2, 1, 4)$ 이라고 한다. 이 소비자가 주어진 소득 수준에서 최대한의 효용을 얻고자 한다. 실수량의 소비가 가능하다는 전제하에 이어지는 물음에 답하라. (Hint: 필요하다면 $(1000/3)^{-7/4} \approx 4 \times 10^{-5}$, $(1000/3)^{-3/4} \approx 4/300$ 를 사용하라.)

(a) (5 points) 이 소비자의 효용 극대화 문제를 수리적으로 규정하고, 이 문제를 풀기 위한 라그랑지안을 구하라. (주의 : $x_i \geq 0$)

(b) (5 points) 위 문제의 1계조건(FOC)을 써보고, 이 조건을 만족하는 모든 점을 구하라. (Hint: 경우의 수 중 경계조건($x_i = 0$)은 검토하지 않고 해당 조건들에 대해서는 내부해를 가진다고 상정하면 경우의 수가 대폭 감소한다. 이 조건을 검토하지 않는 경우는 감점하지 않음)

(c) (5 points) 위에서 구한 점(들)에 대한 유테 헤시안(Bordered Hessian)을 구하라.

(d) (5 points) 이 소비자가 최대한의 만족을 얻을 수 있는 상품량을 도출할 수 있는가? 있다면 얼마인가?

(a) 효용 극대화.

maximize $U(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/4}$ s.t

$x_i \geq 0$ and $p \cdot x \leq I \rightarrow 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 100$

과오

$$L = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/4} + \lambda(100 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4) + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4$$

(b) $x_i = 0$ 일 때는 검토 x $\rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = 0$

$$L = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/4} + \lambda(100 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4)$$

《F.O.C는 다음 페이지에 쓰겠다.》

(c) $n=4$ $m=1$ $\quad n-m=3$

	λ	x_1	x_2	x_3	x_4
λ	0	−3	−2	−1	−4
x_1	−3				
x_2	−2				
x_3	−1				
x_4	−4				

(비효리)

(D) 추가. x_1, x_2, x_3, x_4를 하나씩 살 때 느끼는 효용은 같다. 그런데 x_3의 가격이 가장 싸니 x_3을 100개 살 때 U는 10으로 max일 것이다.

(d) 있으나, $x_i = 0$인 지점에서 나타날것이라 생각한다. 왜냐하면 이 문제는 4차원 구의 반지름 $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ $x_3 \geq 0$ $x_4 \geq 0$, $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 100$ 이 영역에서 갖는 최대값이므로 우리가 구한 $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 100$에 binding 하는 critical point는 최소값일 것이다.

Nam-Un, Cho/Center for Distributive Justice/ mailto:namun@snu.ac.kr

$L = (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{\frac{1}{4}} + \lambda(100-3x_1-2x_2-x_3-4x_4)$

① $D_x L = 0$

$\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x_1 - 3\lambda = 0$ — ①

$\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x_2 - 2\lambda = 0$ — ②

$\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x_3 - \lambda = 0$ — ③

$\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x_4 - 4\lambda = 0$ — ④

② $\lambda(100-3x_1-2x_2-x_3-4x_4) = 0$ — ⑤

③ $\lambda \geq 0$

식 ①,②,③,④ 에서 $\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{-\frac{3}{4}}$ 을 A 라 하면. ($x_i \neq 0$ 이라 했으므로 $A \neq 0$)

$x_1 = \frac{3\lambda}{A}$ $x_2 = \frac{2\lambda}{A}$ $x_3 = \frac{\lambda}{A}$ $x_4 = \frac{4\lambda}{A}$

이것을 식 ⑤에 대입하면

$\lambda\left(100 - \frac{30}{A}\lambda\right) = 0$ 이 된다.

고선호

Case 1 : $\lambda = 0$

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ → ①,②,③,④ 식이 성립하지 않음

case 2 : $\lambda \neq 0$

$100 - \frac{30}{A}\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{10}{3} A \rightarrow x_1 = 10$ $x_2 = \frac{20}{3}$ $x_3 = \frac{10}{3}$ $x_4 = \frac{40}{3}$

$\therefore (x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) = (10, \frac{20}{3}, \frac{10}{3}, \frac{40}{3},$

$\lambda = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{-\frac{3}{4}} = 0$이 아닌 어떤 수

(계산기 없이 구할 수 없음)

$\therefore$ 만족하는 점은 $(10, \frac{20}{3}, \frac{10}{3}, \frac{40}{3})$이고

NDCQ check → $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 100$ binding 1개

$\text{rank}(D_x H(\bar{x}^*)) = (3, 2, 1, 4) = 1$ = 1. 만족

3. $U^{4} = (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{1/4}$ 과 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ 의 min, max 점은 같다.

(a) maximize $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ s.t $3x_1+2x_2+x_3+4x_4 \le 100$

$x_i \ge 0$

$L = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+\lambda(100-3x_1-2x_2-x_3-4x_4)+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3+\lambda_4 x_4$

(b) F.O.C. $x_i \neq 0$ 이라 하면 $\lambda_i = 0$

$D_x L = (2x_1-3\lambda,\ 2x_2-2\lambda,\ 2x_3-\lambda,\ 2x_4-4\lambda) = 0$

$\lambda(100-3x_1-2x_2-x_3-4x_4)=0$

$\lambda \ge 0$

i) $\lambda = 0 \to x_1 = 0$ 이됨 (×)

고정흔

ii) $\lambda > 0$

$x_1 = \frac{3}{2}\lambda$ $x_2 = \lambda$ $x_3 = \frac{\lambda}{2}$ $x_4 = 2\lambda$ 이고 $100-3x_1-2x_2-x_3-4x_4=0$

이므로 $100 - \frac{9}{2}\lambda - 2\lambda - \frac{\lambda}{2} - 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{20}{3}$

$x_1 = 10$ $x_2 = \frac{20}{3}$ $x_3 = \frac{10}{3}$ $x_4 = \frac{40}{3}$ NDCQ : $\mathrm{rank}(-3\ -2\ -1\ -4) = 1$ (ok)

(c) Bordered Hessian 은

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} \lambda & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} \lambda \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$n = 4$ $m = 1$ (binding)

―없

(d) $n=4$ $m=1$ 이고 $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 이 ND 여야 $(10, \frac{20}{3}, \frac{10}{3}, \frac{40}{3})$ 가 max

ND 이려면 $\det(BH) = (-1)^n$ 과 부호 같음이

3개의 큰 LPM 부호 alter.

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-8+18) < 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$= -2 + 2 \times (-(8+18)) < 0$ (뒷면계속)

이어서 ND가 아니다.

∴ 존재하지 않음 (면중 면)

3

- 예산제약을 등제약으로 해석: -1
- xi$\geq$0 제약 제외: -1
- NDCQ 부정확하거나 미언급: -1
- 과정설명X: -2 - -3