경제수학 기말시험 해설

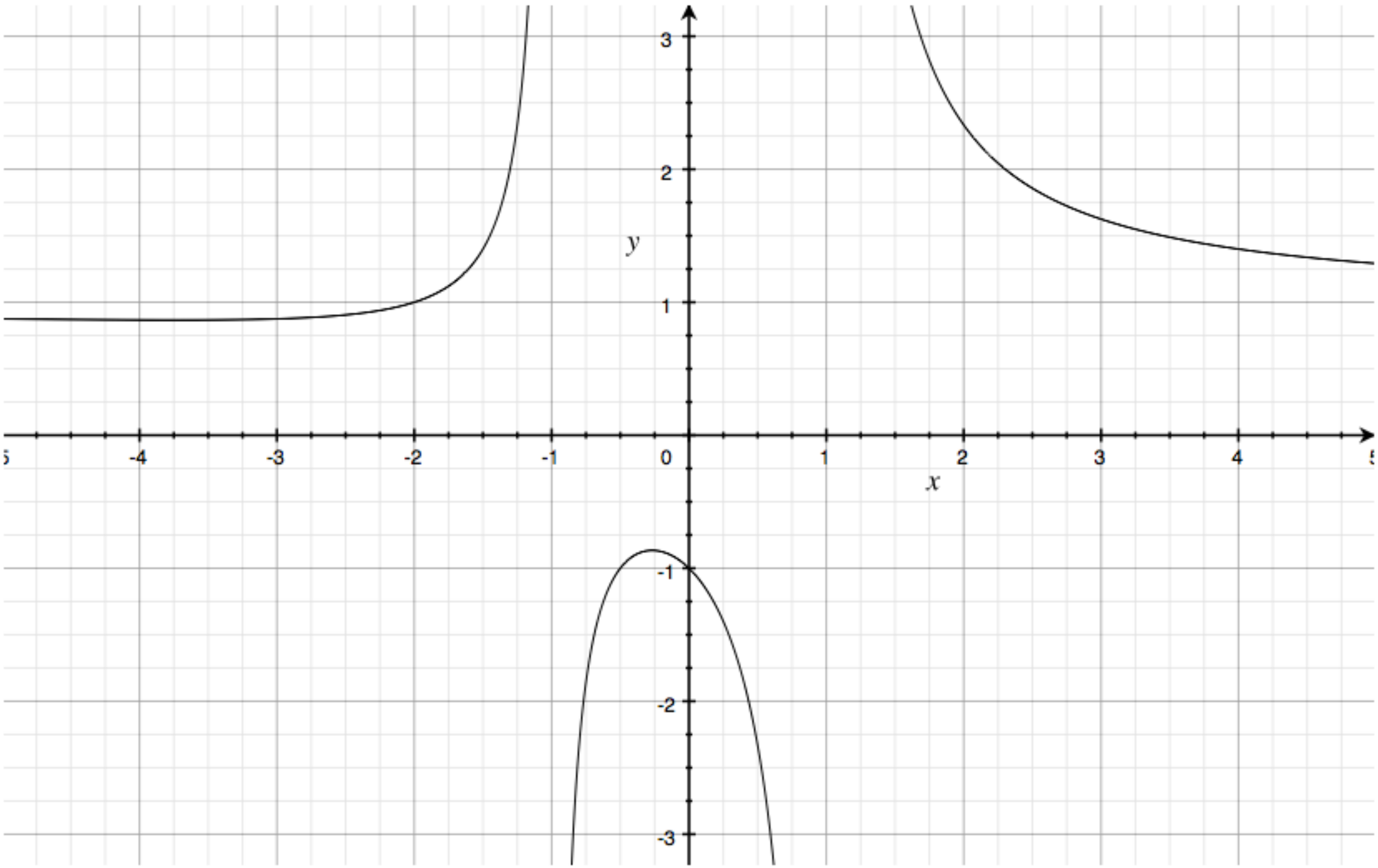
212.214-001, 2015 여름학기

조남운

1. 아래 문제에 답하라

(a) (10 points) 아래 f의 그래프를 실수 정의역(domain)에 대해서 오목/볼록성까지 표현하라.

$$f = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$$



3
2
1
-1
-2
-3
y
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

1a

- 2계도함수까지만 도출(no graph): -5 - -7
- 그래프상의 오류: 케이스별로 -1 - -2

담당 : 조남운 경제수학 2015년 여름학기 기말시험

1. 아래 문제에 답하라

10

(a) (10 points) 아래 f의 그래프를 실수 정의역(domain)에 대해서 오목/볼록성까지 표현하라.

$$f = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-1) - (x^2+x+1)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3+x^2-2x-1-2x^3-2x^2-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2} = \frac{-(x+2)^2+3}{(x^2-1)^2}$$

Critical point : $x = -2 \pm \sqrt{3}$ 이 $f'(x)$ 의 해

$$f''(x) = \frac{(-2x-4)(x^2-1)^2 + (x^2+4x+1)2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-2(x+2)(x^2-1) + 4x(x^2+4x+1)}{(x^2-1)^3} = \frac{-2(x^3+2x^2-x-2)+4x^3+16x^2+4x}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{2x^3+12x^2+6x+4}{(x^2-1)^3} = \frac{2(x^3+6x^2+3x+2)}{(x^2-1)^3}$$

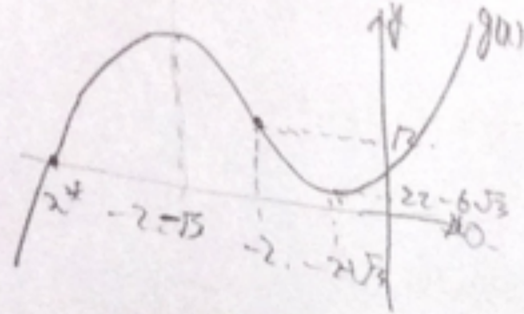
왼쪽에서 계속

(b) (10 points) 위 f의 local max, local min, global max, global min을 아래 정의역에 대해서 도출하라. (단, boundary min/max 는 local min/max 로 간주할 것)

domain	local max	local min	global max	global min

N/A : 존재하지 않음

$g(x) = x^3+6x^2+3x+2$ 를 미분하면 $g'(x)=3x^2+12x+3 = 3(x+2)^2-9$. → $-2\pm\sqrt3$ 에서 극



$g''(x)= 6x+12$ → $x=-2$ 에서 변곡점

$g(-2) = -8+24-6+2 = 12$.

$g(-2+\sqrt3) = (7-4\sqrt3)(-2+\sqrt3)+6(7-4\sqrt3)+3(-2+\sqrt3)+2$

$= -14+8\sqrt3+7\sqrt3\cancel{-12}+\cancel{42}-24\sqrt3-6+3\sqrt3+12$

$= 22-6\sqrt3 > 0$.

따라서 $g(x)=0$ 인 지점은 $-2-\sqrt3$ 보다 작은 어느 지점에서 나타나는데 $g(x)=0$ 인 x를 x^*라 하자. 그리고 이는 그래프 g의 그림에 의해 유일하다. 표를 작성하면

	…	x^*	…	$-2-\sqrt3$	…	-1	…	$-2+\sqrt3$	…	1	…
f	↘	$f(x^*)$	↘	$\frac{6+3\sqrt3}{6+4\sqrt3}$	↗	N/A	↗	$\frac{6-3\sqrt3}{6-4\sqrt3}$	↘	N/A	↘
f'	−	−	−	0	+	N/A	+	0	−	N/A	−
f''	−	0	+	+	+	N/A	−	−	−	N/A	+

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

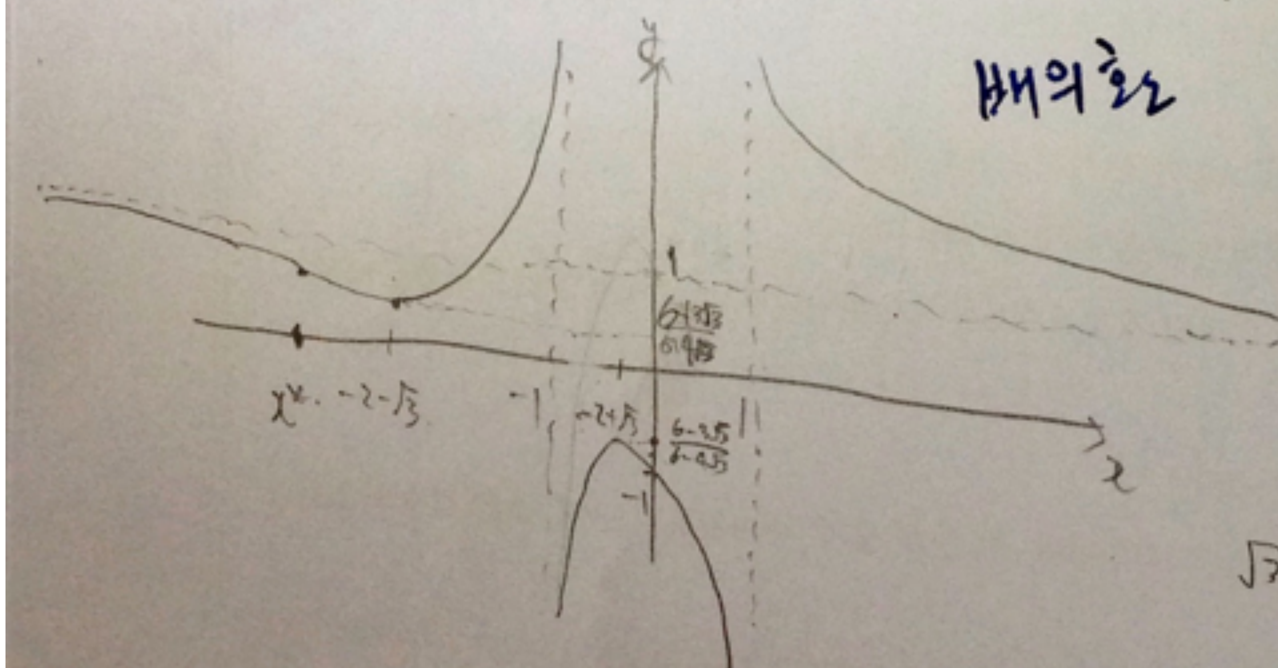
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to-1-0} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x\to-1+0} f(x) = -\infty$.

$\lim_{x\to1-0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to1+0} f(x) = +\infty$.



$f(-2-\sqrt3) = \frac{6+3\sqrt3}{6+4\sqrt3}$

$f(-2+\sqrt3) = \frac{6-3\sqrt3}{6-4\sqrt3} = 1-\frac{\sqrt3}{6-4\sqrt3}$

$f(0) = -1$

$\sqrt3 \fallingdotseq 1.7$ 이므로 $6-4\sqrt3<0$ $(6-3\sqrt3>0$.

$\therefore f(-2+\sqrt3)<0$.

(b) (10 points) 위 f 의 local max, local min, global max, global min을 아래 정의역에 대해서 도출하라. (단, boundary min/max 는 local min/max 로 간주할 것)

domain	local max	local min	global max	global min
$x \in [2.5, \infty)$				
$x \in (-1, 1)$				
$x \in [0, \infty)$				
$x \in [-0.5, 0.5]$				
$x \in (-0.5, 0.5)$				

1b

- 1a의 그래프가 어떤 것이었든 그것에 기반하여 정확히 도출했으면 정답
- 오류 요소별 -1 - -2 감점

$f''(-5)>0$ α가 존재 $x^*=\alpha$

10

이은주

(b) (10 points) 위 f의 local max, local min, global max, global min을 아래 정의역에 대해서 도출하라. (단, boundary min/max 는 local min/max 로 간주할 것)

domain	local max	local min	global max	global min
$x \in [2.5, \infty)$	$f(2.5)$	없다.	$f(2.5)$	없다.
$x \in (-1, 1)$	$f(-2+\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	없다.	$f(-2+\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	없다.
$x \in [0, \infty)$	$f(0)$	없다.	없다.	없다.
$x \in [-0.5, 0.5]$	$f(-2+\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$f(-0.5) = -1$, $f(0.5) = -\frac{7}{3}$	$f(-2+\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$f(0.5) = -\frac{7}{3}$
$x \in (-0.5, 0.5)$	$f(-2+\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	없다.	$f(-2+\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	없다.

(c) (10 points) 다음 행렬들의 Rank, 행렬식(Determinant), 역행렬(Inverse Matrix)이 존재한다면 그 값을 제시하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1c

- B 역행렬 미계산: -2
- B 역행렬이 틀린 경우: 정도에 따라 -0 - -2

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{REF of } A}$

Rank = 3

det A = 0

$\nexists A^{-1}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

det B = [Det B = 6] $\rightarrow$ $\exists B^{-1}$ & Rank=5

$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 2 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 6 & -7 & -2 & 0 & 8 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -7 & -2 & 10 & 8 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

Page 3

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rank = 2

$\nexists$ determinant

$\nexists C^{-1}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rank = 2

$\nexists$ determinant

$\nexists D^{-1}$

(d) (10 points) 위 네 개의 matrix A, B, C, D에 대해서 아래 선형 연립 방정식(system of linear equations)의 해를 구하라

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1d

- 앞에서 구한 matrix에 기반하여 도출하면 정답인정
- D의 경우 단순히 무수히 많다고 기술할 경우: -1 - -2
  - 무수히 많은 해에도 차이가 있기 때문에 이 부분에 대한 명확한 진술이 있어야 함
- 단순 산술 오류: -0 - -1

1-(3)

i) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&1\\ 1&1&-1&0&0\\ 0&0&0&1&1\\ 1&0&1&2&1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&1\\ 0&1&-2&-1&-1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&1\\ 0&1&-2&-1&-1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&-1 \end{array}\right] \to Ay=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ 해 존재 X

ii) since B^{-1} exists $B^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\\0\\-1\end{pmatrix} = x = \begin{pmatrix}\frac{26}{3}\\-\frac{2}{3}\\-3\\-\frac{22}{3}\end{pmatrix}$

김태영

iii) $\left[\begin{array}{cc|c} 1&2&1\\ 3&4&0\\ 1&1&1\\ 2&3&1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1&2&1\\ 0&-2&-3\\ 0&-1&0\\ 0&-1&-1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1&2&1\\ 0&-2&-3\\ 0&1&0\\ 0&0&-1 \end{array}\right]$ $Cx=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ 해 존재X

iv) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&1&1\\ 1&0&1&1&0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&1&1\\ 0&-2&1&0&-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&0\\ 0&-2&1&0&-1 \end{array}\right)$

$\to$ $x_1+x_3+x_4=0$, $-2x_2+x_3=-1$ 을 만족하는

또는 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$가 $Dx=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$의 해

$x_1+2x_2+x_4=1$을 만족

Page 3

(e) (10 points) 아래 matrix의 eigenvalue와 eigenvector를 구하라

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1e

- eigenvector에서 구체적인 숫자를 제시하지 않고 룰만 제시한 경우에는 zero vector를 포함하지 않음을 명시해야 함. (그렇지 않은경우: -2)
- 각 eigenvalue에 해당하는 eigenvector를 모두 제시하지 않은 경우: -1 - -2

e. $Det(A-rI)=0$ 인 r이 eigenvalue.

$$\begin{vmatrix} 2-r & 3 \\ 0 & 1-r \end{vmatrix} = (2-r)(1-r)=0$$

$\therefore r_1=2,\ r_2=1$

if $r_1=2$,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$0 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 = 0$

so eigenvector $(a, 0)$ 형태이며

a는 0을 제외한 실수는 모두 가능하다.

if $r_2=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_1+3v_2=0$ 을 만족하는 (v_1, v_2)는 모두 eigenvector 이다. (zero vector 제외하고)

형태는 $(a, -\frac{a}{3})$ 꼴이다. $a \neq 0$

김준우

$Det(B-rI)=0$ 인 r이 eigen value

$$\begin{vmatrix} 1-r & 0 & 2 \\ 0 & 5-r & 0 \\ 3 & 0 & 2-r \end{vmatrix} = (1-r)(5-r)(2-r) - 6(5-r) = 0$$

$\hookrightarrow (5-r)[(1-r)(2-r)-6]=0$

$\therefore r_1=5,\ r_2=4,\ r_3=-1$

~~if $r_1=5$~~

$$\cancel{\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

if $r=4$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\left. \begin{matrix} -3v_1+2v_3=0 \\ v_2=0 \end{matrix} \right)$ 을 만족하는 (v_1, v_2, v_3) 집합이 eigenvector.

형태는 $(a, 0, \frac{3}{2}a)$ 꼴이다. $a \neq 0$

if $r=5$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\left. \begin{matrix} -4v_1+2v_3=0 \\ 3v_1-3v_3=0 \end{matrix} \right)$ 만족하는 $(v_1, v_3)=(0,0)$뿐이다.

$\therefore$ eigenvector는 $(0, a, 0)$, $a \neq 0$

if $r=-1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\left. \begin{matrix} 2v_1+2v_3=0 \\ 6v_2=0 \end{matrix} \right)$ 만족 (v_1, v_2, v_3) 집합 eigenvector

형태는 $(a, 0, -a)$ 꼴.

$a \neq 0$

2. 어떤 다변수 함수 f에 대해서 $D_{\mathbf{x}}f = \mathbf{O}$ 이고 $D^2_{\mathbf{x}}f$가 Positive Definite 인 점이 유일하게 하나 있다면, 그 점은 global minimum point 라고 주장할 수 있는가? 만일 아니라면 반례를 하나 제시하라.

   (a) (5 points) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^1$ 일 때

   (b) (5 points) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n > 1$ 일 때

2a, 2b

- 아래 두 가지 해석을 모두 정답으로 인정
  - 해석1) $D_x f=0$인 점이 유일하고, $D_x^2 f$가 PD인 점이 유일한 경우로 해석한 경우 → 2a Yes, 2b No
  - 해석2) $D_x f=0$ and $D_x^2 f$가 PD인 점이 유일한 경우로 해석한 경우 ($D_x f=0$ 이고 $D_x^2 f$가 PD가 아닌 다른 경우를 검토 가능) → 2a No, 2b No
- 단답만 제시하고 근거를 밝히지 않은 경우: -1 - -3
- 미분불가능한 함수를 제시할 경우: -2 - -4

(a) $f(x) = x^3 - x$ 라 하면,

$D_x f = 0$ 에서 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$D_x^2 f = 6x$ 이므로

positive definite 인 점은

$(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{9}\sqrt{3})$

but, f 는 $\mathbb{R}^1$ 에서

global minimum 을

갖지 않는다

잉글여.

(b) $f(x) = -(|x|^2-1)^2 = -(x_1^2+\cdots+x_n^2-1)^2$ for $x=(x_1,\cdots,x_n)$

이라 하면,

$D_x f = 0$ 에서 $x = 0$ or $|x| = (x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}} = 1$

$D_x^2 f$ 가 positive definite 인 점은 $x=0$ 뿐이지만,

f 는 $\mathbb{R}^n$ 에서 global minimum 을 갖지 않는다

단면

3. 어떤 경제의 세 가지 경제지표 x_1, x_2, x_3 은 다음과 같은 속성을 띠고 있다고 한다. 현재 이 지표는 $\mathbf{x} = (3, 2, 1)$ 에서 균형을 이루고 있다. 이어지는 물음에 답하라.

$$x_1 + x_2 + x_3^{\frac{1}{2}} = 6, \quad \prod_{i=1}^{3} x_i = 6$$

(a) (5 points) 위 비선형 연립방정식체계를 선형화하여 현재의 균형 근방에 대한 dx_i 의 식으로 표현하라

(b) (5 points) 만일 이 경제에서 정책적으로 x_3 을 1단위 상승시켰다면 (x_3 : $1 \to 2$, 즉 $dx_3 = 1$), x_1, x_2 는 어떤 변화가 있을 것인지 기술하라. (변화량 (dx_1, dx_2), 혹은 변화된 값 (x_1, x_2) 을 기술하면 충분함)

3a,3b

- 정확한 값을 구할 수 있음에도 부호만을 기술할 경우: -1
- 선형화식에서 (3,2,1)을 대입하지 않은 경우: -1
- 3a에서 하나의 식만 선형화: -2 - -3
- 3b에서 (3,2,1) 대신 (3,2,2)를 대입한 경우: -1 - -2
- 3a에서 도출한 잘못된 식에 기반하여 3b를 도출한 경우는 정답으로 인정

(a) $dx_1 + dx_2 + \frac{1}{2}x_3^{-\frac{1}{2}}\,dx_3 = 0$

$x_2x_3\,dx_1 + x_1x_3\,dx_2 + x_1x_2\,dx_3 = 0.$ | $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 1).$

$\Rightarrow$ $dx_1 + dx_2 + \frac{1}{2}dx_3 = 0$

$2dx_1 + 3dx_2 + 6dx_3 = 0.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = 0.$$

(b) dx_3에 대해 정리

$\frac{1}{2}dx_3 = -dx_1 - dx_2.$ $\qquad$ x_3를 1 $\overset{단위}{\vee}$ 증가시키면 $(dx_3 = 1)$.

$6dx_3 = -2dx_1 - 3dx_2$

$\rightarrow$ $\frac{1}{2} = -dx_1 - dx_2$

$6 = -2dx_1 - 3dx_2$

$\rightarrow$ $dx_1 + dx_2 = -\frac{1}{2}$

$2dx_1 + 3dx_2 = -6$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -6 \end{pmatrix}.$$

배워함

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3-2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$\therefore$ x_2는 $\frac{9}{2}$단위 상승 x_3는 5단위 하락.

$(dx_1, dx_2) = (\frac{9}{2}, -5)$

4. Cobb-Douglas 효용함수는 다음과 같이 정의된다. 이어지는 물음에 답하라. x_1, x_2는 각각 1상품, 2상품의 소비량이다.

$$U = \bar{k} x_1^{\bar{\alpha}} x_2^{1-\bar{\alpha}}, \quad \bar{k} > 0, \quad \bar{\alpha} \in (0, 1)$$

(a) (5 points) 각 상품의 가격이 vector $\bar{\mathbf{p}}$ 이고, 소득이 $\bar{I}$ 일 때 예산 제약을 식으로 나타내라

(b) (5 points) 위 제약을 가진 U 의 극대화 문제를 표현하라.(단, $x_i \geq 0$ 조건은 제약에 포함하지 말 것) (Hint: $\arg\max ..$)

(c) (5 points) 위 극대화 문제의 라그랑지안 함수를 기술하라

(d) (5 points) 위 극대화 문제의 1계조건을 기술하고, critical point를 모두 나열하라

(e) (5 points) 위 critical point(들)이 NDCQ 조건을 만족하는지 검토하라

(f) (5 points) 위 극대화 문제의 2계조건을 기술하고, 앞에서 구한 critical point(들)이 극대화 문제를 만족하는지 검토하라.

4a-4d

- 4a: 등제약으로 해석: -2
- 4b: argmax, 혹은 maximize 를 max로 표기: -1
- 4d: f.o.c. 에서 부등제약식 관련 누락: -2 - -4
  - 계산과정 부정확한 부분: -1 - -2
  - lambda = 0 case 미검토: -1
  - lambda = 0 인 case 검토결과 포함하는 경우, 지수가 음수임을 이용하여 모순을 보여 배제하는 경우 모두 정답으로 인정 (엄밀히는 후자가 정확)

4e-4f

- 4e: NDCQ에서 Rank = n-m 으로 해석: -1
  - DxH 도출 안한 경우: -1 - -2
  - 4d에서 복수개의 case를 도출할 경우에 한해 모든 케이스 미검토: -1 - -2
  - 본 문제에서 lambda=0 인 케이스를 검토해야 할 경우에는 제약이 전혀 없는 경우이므로 NDCQ는 검토할 필요가 없음을 명확히 진술해야 함.
- 4f: bordered hessian만 구하고 그것의 Definiteness를 검토하지 않은 경우: -3

(a) $\bar{p} = (p_1, p_2)$라 하자.

$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \le I$

(b) $\arg\max_{x} U(x) = k x_1^{\bar{\alpha}} x_2^{1-\bar{\alpha}}$ s.t. $\bar{p}_1 \cdot x_1 + \bar{p}_2 \cdot x_2 \le I$

(c) $L = k x_1^{\bar{\alpha}} x_2^{1-\bar{\alpha}} + \lambda (I - p_1 x_1 - p_2 x_2)$ // $\lambda \ge 0$, $\lambda (I - p_1 x_1 - p_2 x_2) = 0$

(d) $\frac{\partial L}{\partial x_1} = k \bar{\alpha} x_1^{\bar{\alpha}-1} x_2^{1-\bar{\alpha}} - \lambda p_1 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = k(1-\bar{\alpha}) x_1^{\bar{\alpha}} x_2^{-\bar{\alpha}} - \lambda p_2 = 0$

i) $\lambda = 0$ 일 경우

$\bar{k} \bar{\alpha} x_1^{\bar{\alpha}-1} x_2^{1-\bar{\alpha}} = 0$

$\bar{k} (1-\bar{\alpha}) x_1^{\bar{\alpha}} x_2^{-\bar{\alpha}} = 0$

$(x_1^*, x_2^*) = (0, 0) \rightarrow U = 0$ ③

ii) $I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$, $\lambda > 0$ 인 경우

$k \bar{\alpha} x_1^{\bar{\alpha}-1} x_2^{1-\bar{\alpha}} = \lambda p_1$ … ①

$k (1-\bar{\alpha}) x_1^{\bar{\alpha}} x_2^{-\bar{\alpha}} = \lambda p_2$ … ②

② ÷ ① → $\frac{1-\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} \frac{x_1}{x_2} = \frac{p_2}{p_1}$

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\bar{\alpha} p_2}{(1-\bar{\alpha}) p_1}$

③에 대입

$x_1 = \bar{\alpha} p_2 t$, $x_2 = (1-\bar{\alpha}) p_1 t$라 하자.

$\bar{\alpha} p_1 p_2 t + (1-\bar{\alpha}) p_1 p_2 t = I$

$t = \frac{I}{p_1 p_2}$ $\therefore (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{\bar{\alpha} I}{p_1}, \frac{(1-\bar{\alpha}) I}{p_2}\right)$

(e) i) 제약 : 0 = 0

rank = 0

∴ NDCQ 조건 성립 신하정.

ii) 제약 = 1

rank : 1

∴ NDCQ 조건 성립 x_1 x_2

(f)

Page 5

f) $H = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \bar{p}_1 & \bar{p}_2 \\ \hline \bar{p}_1 & 0 & 0 \\ \bar{p}_2 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \times$

정정된 $H = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \bar{p}_1 & \bar{p}_2 \\ \hline \bar{p}_1 & \multicolumn{2}{c}{D^2_{xx}f\text{에 } x=\left(\frac{\bar{\alpha}\bar{I}}{\bar{p}_1}, \frac{(1-\bar{\alpha})\bar{I}}{\bar{p}_2}\right)} \\ \bar{p}_2 & \multicolumn{2}{c}{\text{대입한 값}} \end{array}\right) \Rightarrow LPM_3\ H$는 맨 뒤에 적었다.

$$D^2_{xx}f = \begin{pmatrix} \bar{k}\bar{\alpha}(\bar{\alpha}-1)x_1^{\bar{\alpha}-2}x_2^{1-\bar{\alpha}} & \bar{k}\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})x_1^{\bar{\alpha}-1}x_2^{-\bar{\alpha}} \\ \bar{k}\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})x_1^{\bar{\alpha}-1}x_2^{-\bar{\alpha}} & \bar{k}(-\bar{\alpha})(1-\bar{\alpha})x_1^{\bar{\alpha}}x_2^{-\bar{\alpha}-1} \end{pmatrix}$$

4(f) $LPM_3H = \bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2\, \bar{k}\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})\left(\frac{\bar{\alpha}\bar{I}}{\bar{p}_1}\right)^{\bar{\alpha}-1}\left(\frac{(1-\bar{\alpha})\bar{I}}{\bar{p}_2}\right)^{-\bar{\alpha}} + \bar{p}_1\bar{p}_2\, \bar{k}\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})\left(\frac{\bar{\alpha}\bar{I}}{\bar{p}_1}\right)^{\bar{\alpha}-1}\left(\frac{(1-\bar{\alpha})\bar{I}}{\bar{p}_2}\right)^{-\bar{\alpha}}$

$- \bar{p}_1^2\, \bar{k}(-\bar{\alpha})(1-\bar{\alpha})\left(\frac{\bar{\alpha}\bar{I}}{\bar{p}_1}\right)^{\bar{\alpha}}\left(\frac{(1-\bar{\alpha})\bar{I}}{\bar{p}_2}\right)^{-\bar{\alpha}-1} - \bar{p}_2^2\, \bar{k}\bar{\alpha}(\bar{\alpha}-1)\left(\frac{\bar{\alpha}\bar{I}}{\bar{p}_1}\right)^{\bar{\alpha}-2}\left(\frac{(1-\bar{\alpha})\bar{I}}{\bar{p}_2}\right)^{1-\bar{\alpha}}$

~~$= \bar{k}\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})$~~ 편의상 $\frac{\bar{\alpha}\bar{I}}{\bar{p}_1} = A$, $\frac{(1-\bar{\alpha})\bar{I}}{\bar{p}_2} = B$로 두고 계산하면

전개된

$= \bar{k}\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})A^{\bar{\alpha}-2}B^{-\bar{\alpha}-1}\left(\bar{p}_1^2A^2 + 2\bar{p}_1\bar{p}_2AB + \bar{p}_2^2B^2\right)$

$= \bar{k}\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})A^{\bar{\alpha}-2}B^{-\bar{\alpha}-1}(\bar{p}_1A + \bar{p}_2B)^2 > 0$ ← sign of $(-1)^n = (-1)^2$ 이므로 N.D

$\therefore \left(\frac{\bar{\alpha}\bar{I}}{\bar{p}_1}, \frac{(1-\bar{\alpha})\bar{I}}{\bar{p}_2}\right)$는 U를 극대화한다.

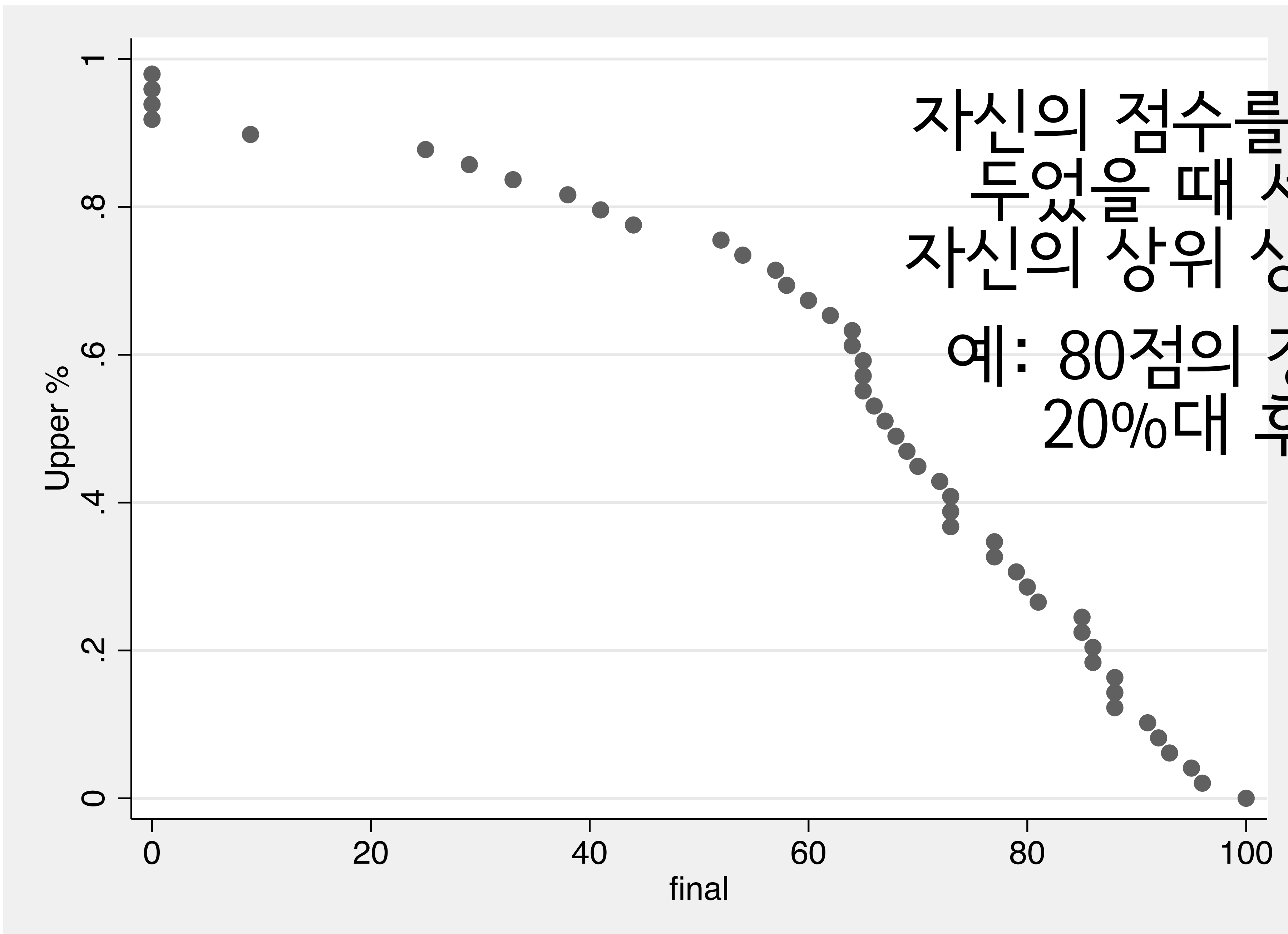
기초통계

Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
final	49	62.91837	27.28464	0	100

final

	Percentiles	Smallest		
1%	0	0		
5%	0	0		
10%	9	0	Obs	49
25%	54	0	Sum of Wgt.	49
50%	68		Mean	62.91837
		Largest	Std. Dev.	27.28464
75%	85	93		
90%	92	95	Variance	744.4515
95%	95	96	Skewness	-1.031705
99%	100	100	Kurtosis	3.262242

상대분포 (상위%)



자신의 점수를 가로축에 두었을 때 세로축은 자신의 상위 상대 위치임

예: 80점의 경우 상위 20%대 후반임

총점수 기초통계

Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
total	49	773.0612	192.9059	62	1000

total

	Percentiles	Smallest		
1%	62	62		
5%	389	346		
10%	495	389	Obs	49
25%	669	481	Sum of Wgt.	49
50%	825		Mean	773.0612
		Largest	Std. Dev.	192.9059
75%	911	960		
90%	955	966	Variance	37212.68
95%	966	975	Skewness	-1.496053
99%	1000	1000	Kurtosis	5.350659

상대분포 (상위%)