미시경제학

조남운

economics1.namun@gmail.com

주제

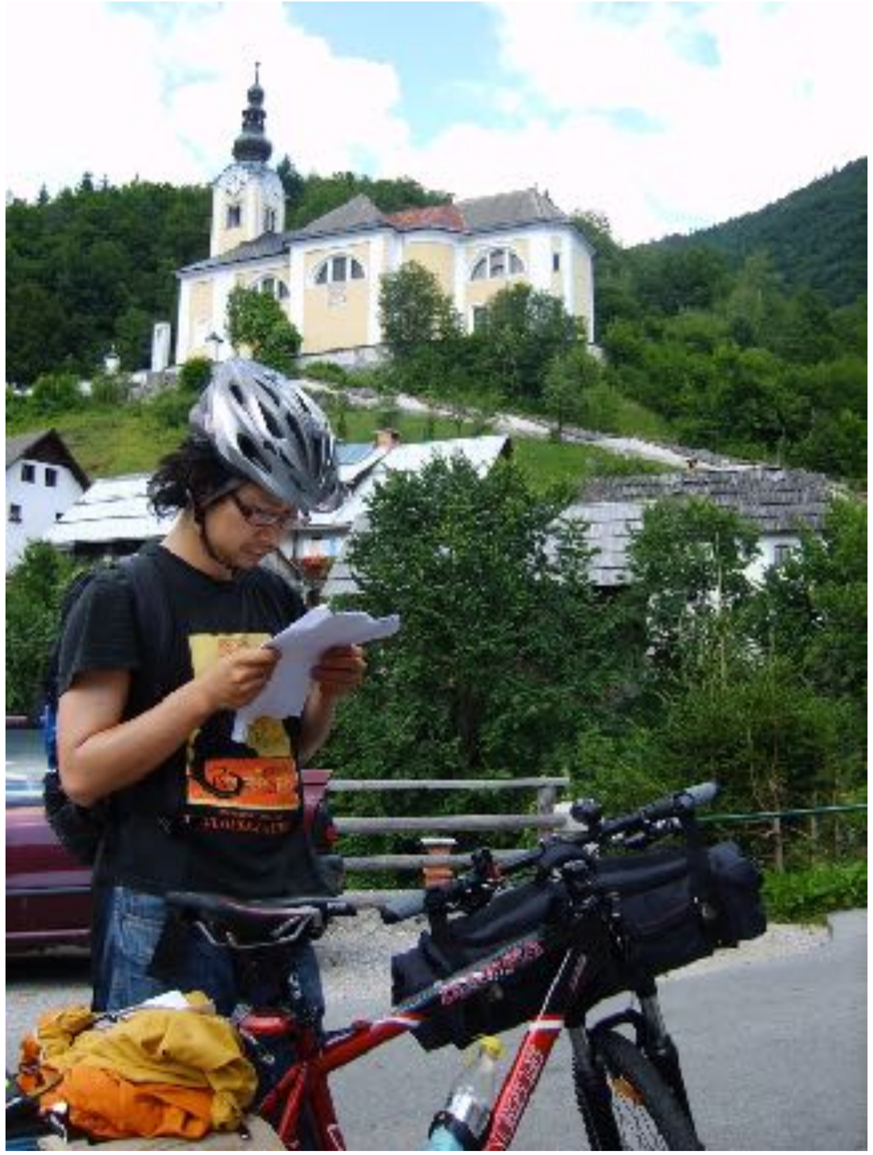
- 강의개관
- 경제 모형 일반론
- 다변수함수의 미분

강의 기초 정보

항목	내용
강의시간	금 9:00-11:45 (1,2교시)
강의실	정경관 503호
학수번호	ECON201 (05)

강의자 소개

- 조남운
  - mailto:economics1.namun@gmail.com
- 관심분야
  - 진화게임이론
  - 행동경제학 (경제학실험)
  - 계산경제학 (시뮬레이션 모형)



강의 목표

- 미시경제분석에 필요한 이론적 기반을 이해하기
- 세부 내용은 강의 주제 파트를 참고할 것.

주교재

- 김영산, 왕규호 저, “미시경제학” 2판

선수과목

- 경제원론1
  - 혹은 그에 준하는 경제학 기초과목
    - 세계와 한국경제, 경제학 개론 등
- 경제수학
  - 편미분, 제약 하에서 다변수함수의 극대화 문제
  - 강의 중에 다루긴 하겠으나 아예 사전지식이 없을 경우 다소 어려울 것으로 예상함

평가

- 중간시험 40%
- 기말시험 40%
- 과제 20%
    - 행동실험 (참가도 80%, 게임결과 20%)
        - 주의: 강의계획서상의 50%, 50%를 수정함
    - 횟수는 최소 1회
        - 2회 이상이 될 경우 결과를 균등분배

강의 슬라이드

- 강의 슬라이드 파일을 수업 전에 제공
- kulms에 최신판 파일의 링크를 업로드
  - 저장소는 버젼 관리를 위해 github 사이트를 이용
  - https://github.com/z0nam/microEconNote

기타

- 기본적 연락 채널은 이메일
  - mailto:economics1.namun+2018s@gmail.com
- 이메일로 질문할 경우 QA 게시판에 공유할 수도 있음
- 주요 공지가 있을 경우 포털에 등록된 이메일을 통해 단체 메일 보낼 수도 있음. 유효 계정인지 확인할 것
- 장애지원이 필요한 경우 모든 가능한 형태의 지원을 제공

3무 정책

- 본 과목은 고려대학교의 3무 정책 중 2가지 항목에 해당함
  - 출석확인자율화
  - 무감독시험

강의주제

강의 진행에 따라 변동될 수 있음

주차	주제	내용 요약
1	미시경제학 입문, 방법론 기초	강의개관, 다변수함수의 미분
2	소비자이론(1)	예산집합, 소비자 선호
3	소비자이론(2)	소비자 선택, 수요법칙, 소비자 후생
4	소비자이론(3)	현시선호, 실물부존자원모형
5	소비자이론(4)	불확실성과 선택
6	생산자이론(1)	기업이론, 생산기술
7	생산자이론(2)	비용이론
8	중간시험	
9	시장(1)	완전경쟁시장
10	시장(2)	독점시장
11	시장(3)	게임이론, 과점시장,
12	시장(4)	독점적 경쟁시장
13	일반균형과 시장실패(1)	요소시장, 자본시장
14	일반균형과 시장실패(2)	일반균형이론, 외부효과
15	일반균형과 시장실패(3)	정보경제학, 사회적 선택이론
16	기말시험	

Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

노트/교재 오류

- 강의안이나 교재의 모든 형태의 오류에 대해서 보고하는 학생에게 약간의 인센티브 부여
- 학점 산정을 위한 점수 총점이 1,000점이라고 하고, 학생 i 의 오류보고 횟수가 Ni 라고 할 경우 그 학생의 보너스 스코어 Bi 는 아래와 같음

$$B_i := \ln(3N_i + 1)$$

수업관련 질의 응답 및 휴식

경제 모형 일반론

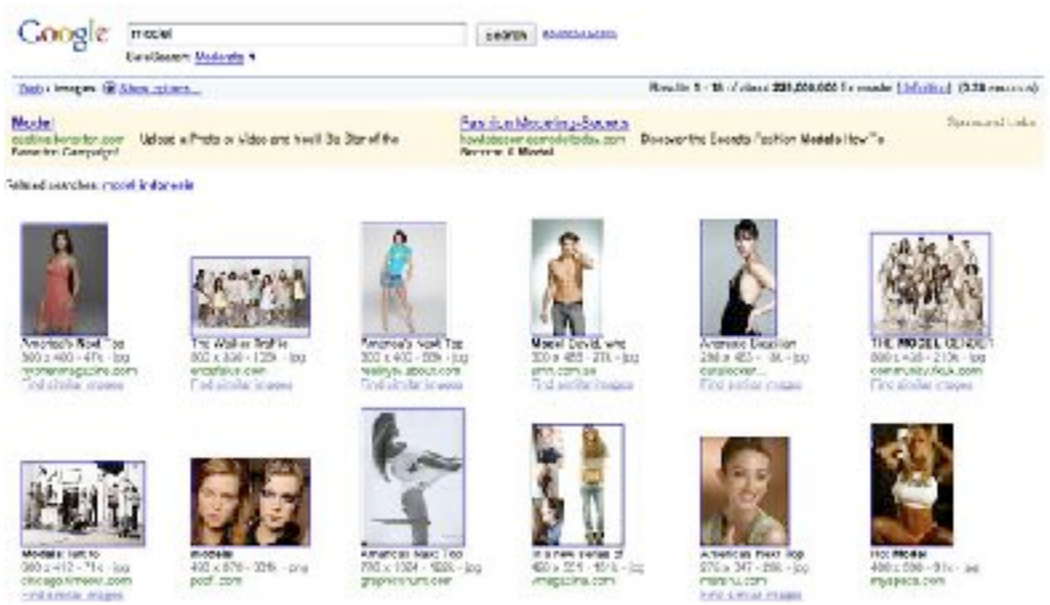
Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

Outline

- 모델(모형) 일반론
- 경제학 모델(모형)
- 예: 생산가능곡선모형, 비교우위모형
- 실증적경제학 vs. 규범적경제학

What is Model?

- 패션모델
- 프라모델
- ..?



경제학 모형
Economic Model

- 복잡한 경제학의 연구 대상을 단순화하여 이해하기 쉽게 만든 이론적 구조물
- 양적 모형은 수학적으로 표현 가능
  - 수식에 입힌 스토리 (내러티브)

Definition: Economic Model

- In economics, a **model** is a **theoretical construct** that represents **economic processes** by a set of **variables** and a set of logical and/or quantitative **relationships** between them. (http://en.wikipedia.org/wiki/Economic_model)

Quantitative vs. Qualitative Model

- Quantitative Model은 수식, 혹은 논리적 관계로 표현 가능
  - Quantitative Data에서의 수는 의미가 있음
  - 예: 가계소득, 길이, 학점
- Qualitative Model
  - Qualitative Data에서의 수는 식별 이상의 의미가 없음
  - 예: 성별, 국적, 혈액형

양적 모형의 장단점 PROs/CONs of Quantitative Model

- 장점: 직관을 뛰어넘을 수 있음
  - 예: 양자역학
- 단점: 질적인 요소를 다루는 데 한계가 있음
  - 예: 인간 수준 자연언어처리 (Human-level NLP)

  - 단, 이 영역은 2017년 현재 AI의 혁신으로 급속히 재정의되고 있는 상태 (딥러닝)

Two Types of Quantity

- Flow
- Stock

유량
Flow

- 시간에 대한 가치량
- 단위: 가치량/시간
  - 예: 월세, 연금, 핸드폰 월납입비

저량
Stock

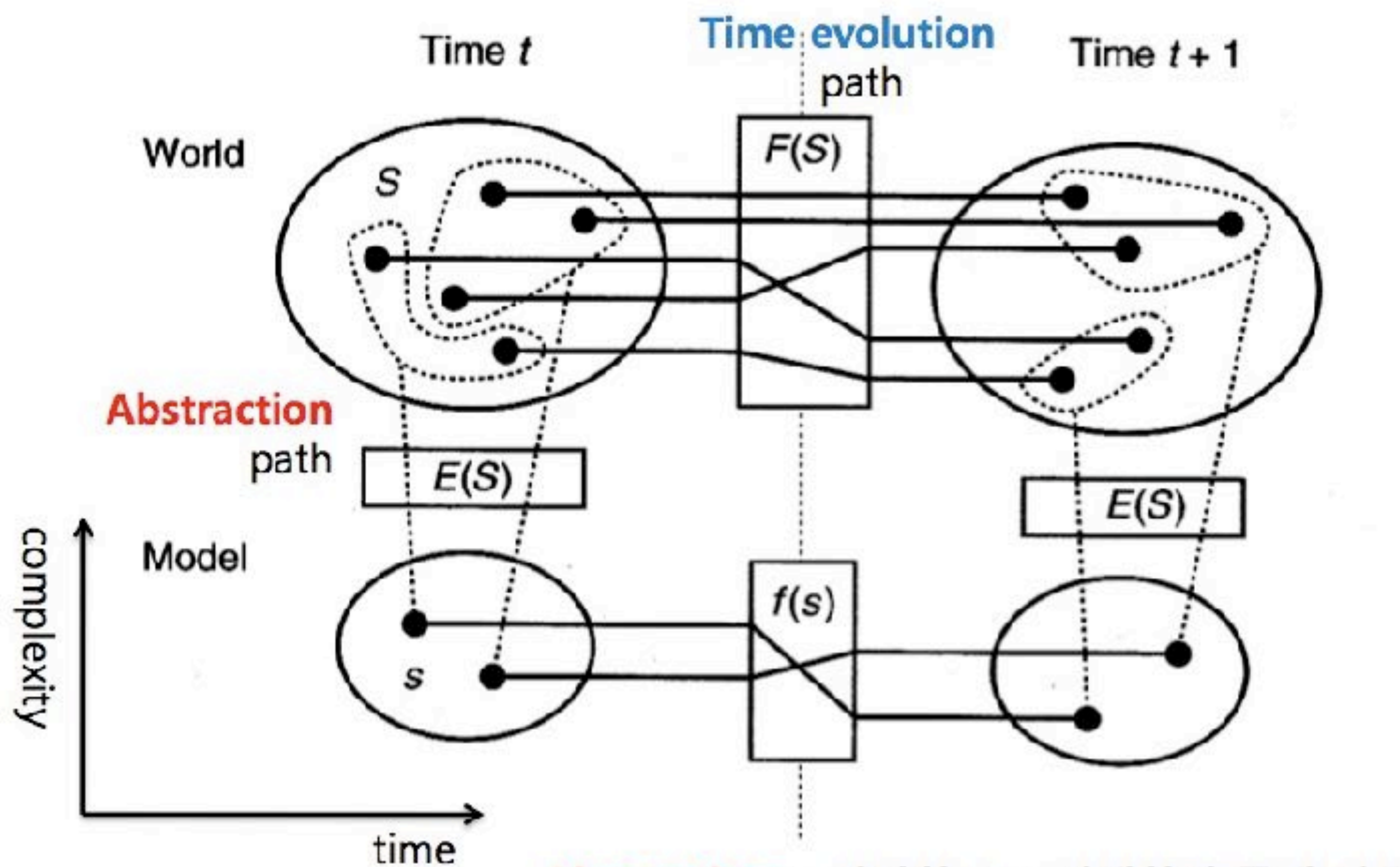
- 시간과 무관한 절대량
- 단위: 가치
    - 예: 전세, 복권상금, 상속, 핸드폰 가입비

Example of Model(1): Map

Example of Model(1): Map

Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

Model of Model



Abstraction = 간단하고 + 이해하기 좋게 만들기

출처: 채승병(SERI)

ceteris paribus

- other things equal: 관심 변수 외에 다른 변수들은 변함이 없다는 전제
- 특정 변수만의 변화가 발생했을 때 어떤 결과가 초래될 것인가?
- 과학적 분석을 위해 필요한 가장 기초적 방법론적 전제
  - 수학적 표현: 편미분

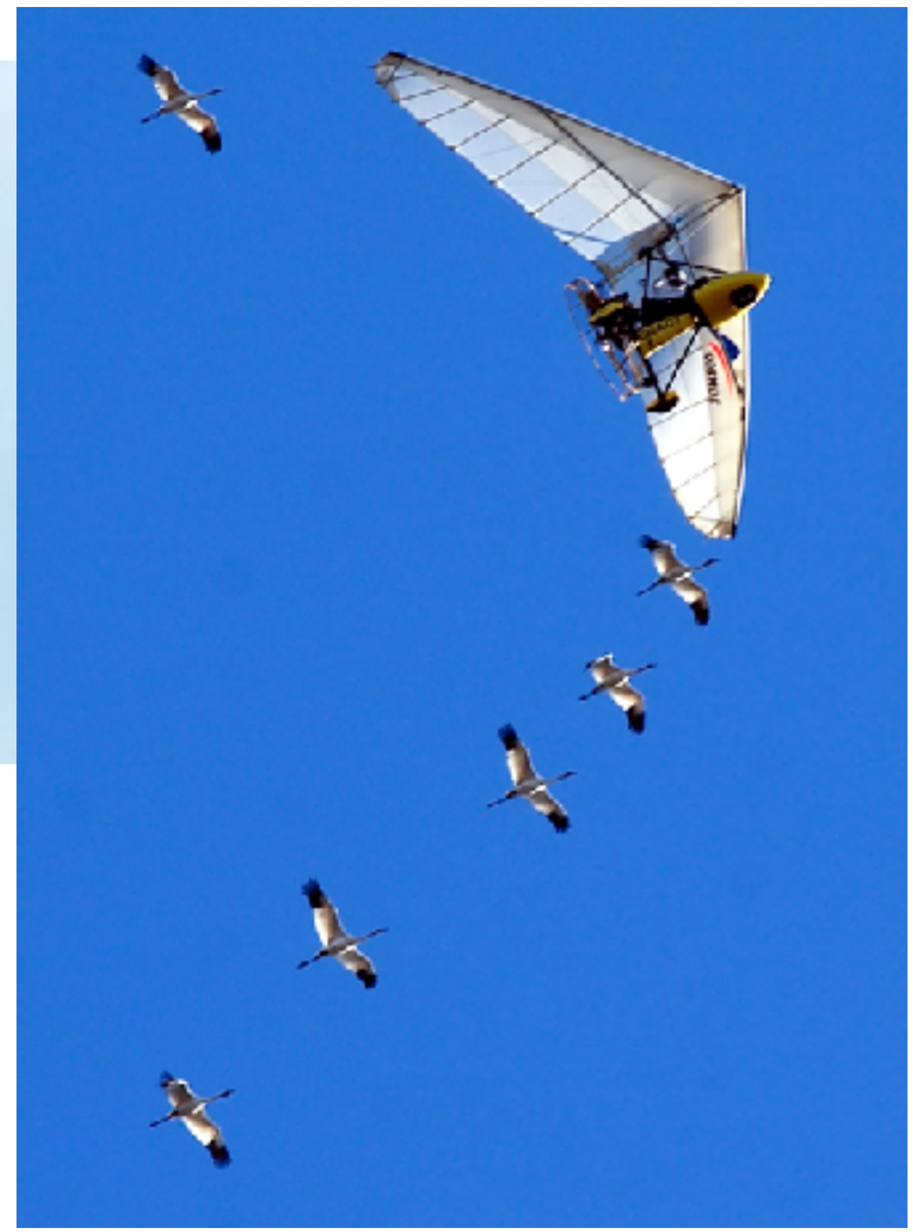
모형의 질

- 모든 과학적 분석에서 모형을 통한 탐구는 필수적 요소. 하지만..
  - “All models are wrong but some are useful” (George Box)
  - For such a model there is no need to ask the question "Is the model true?". If "truth" is to be the "whole truth" the answer must be "No". The only question of interest is "Is the model illuminating and useful?
- 모형의 질(유용성)을 사전적으로 평가할 수 있는 기준은 존재하지 않음

Example of Model(2) Flocking of Birds

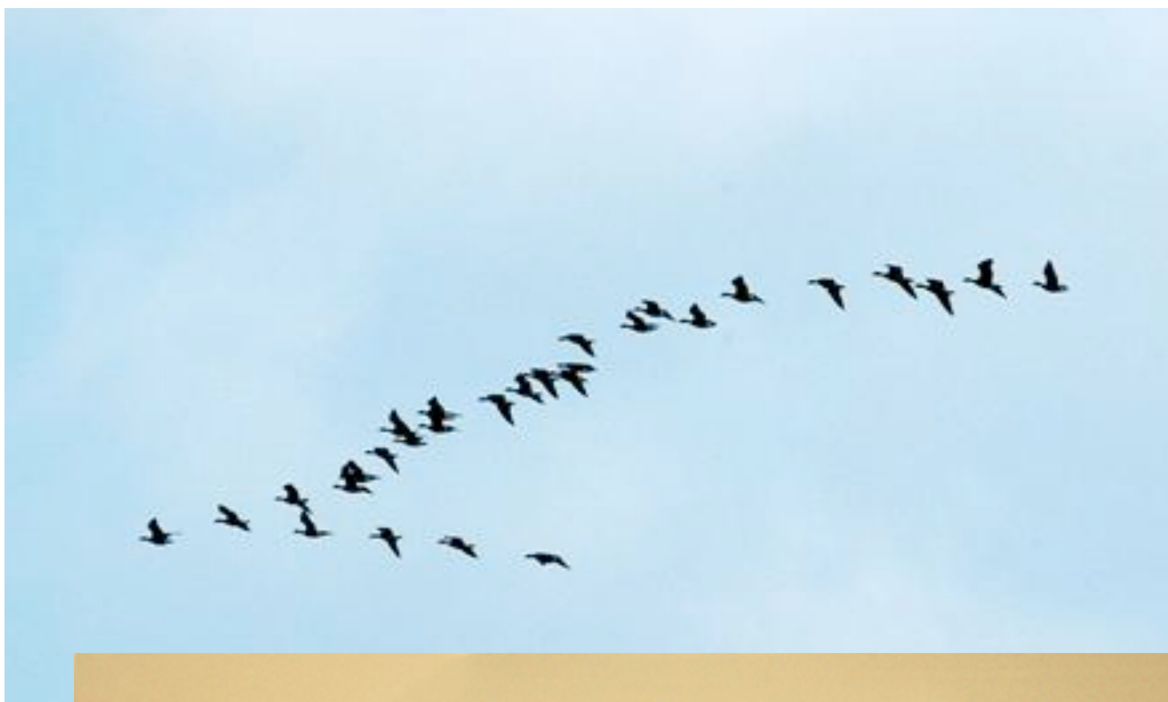
Example of Model(2)
Flocking of Birds

Example of Model(2)
Flocking of Birds



Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

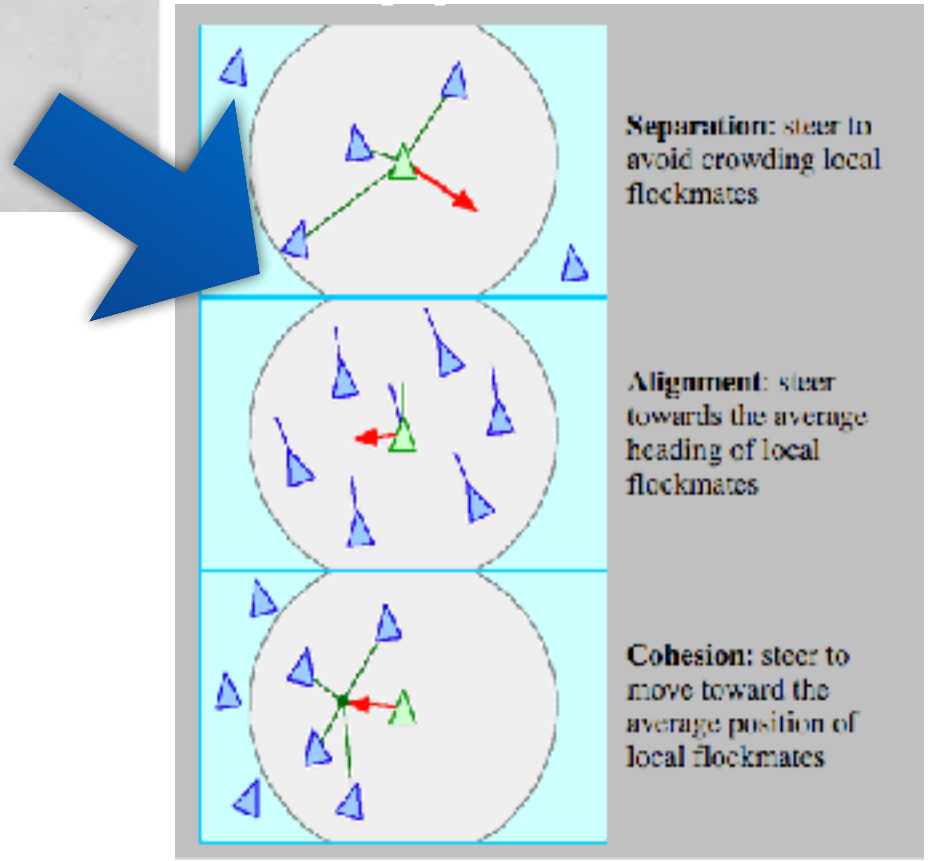
Example of Model(2)
Flocking of Birds



Modeling for Birds Flocking

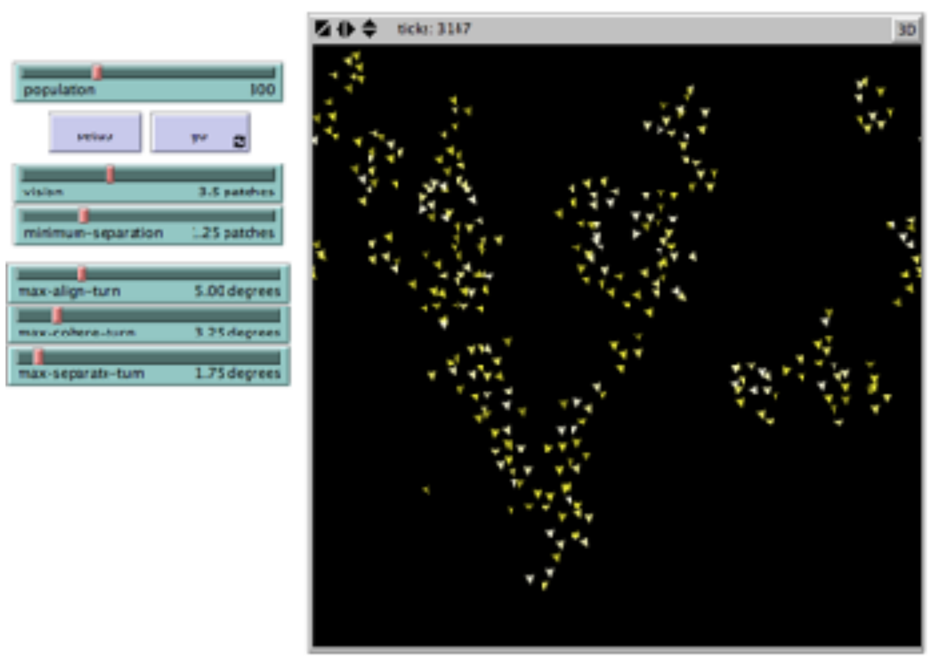
- Wilensky, U. (1998). NetLogo Flocking model. http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/Flocking. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.

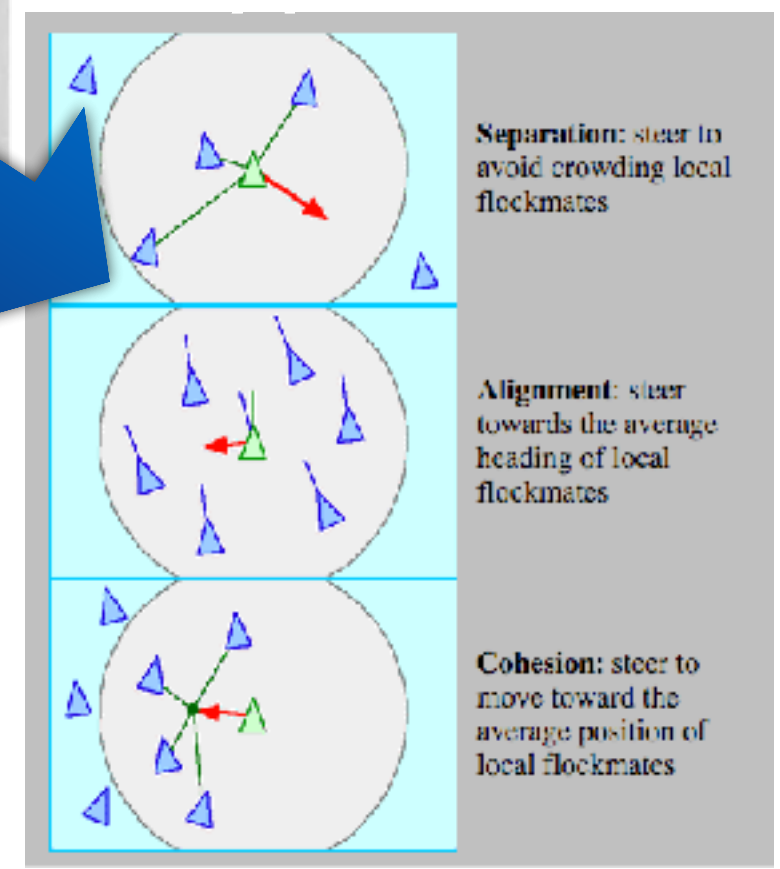
Modeling for Birds Flocking



- Wilensky, U. (1998). NetLogo Flocking model. http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/Flocking. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.

Modeling for Birds Flocking

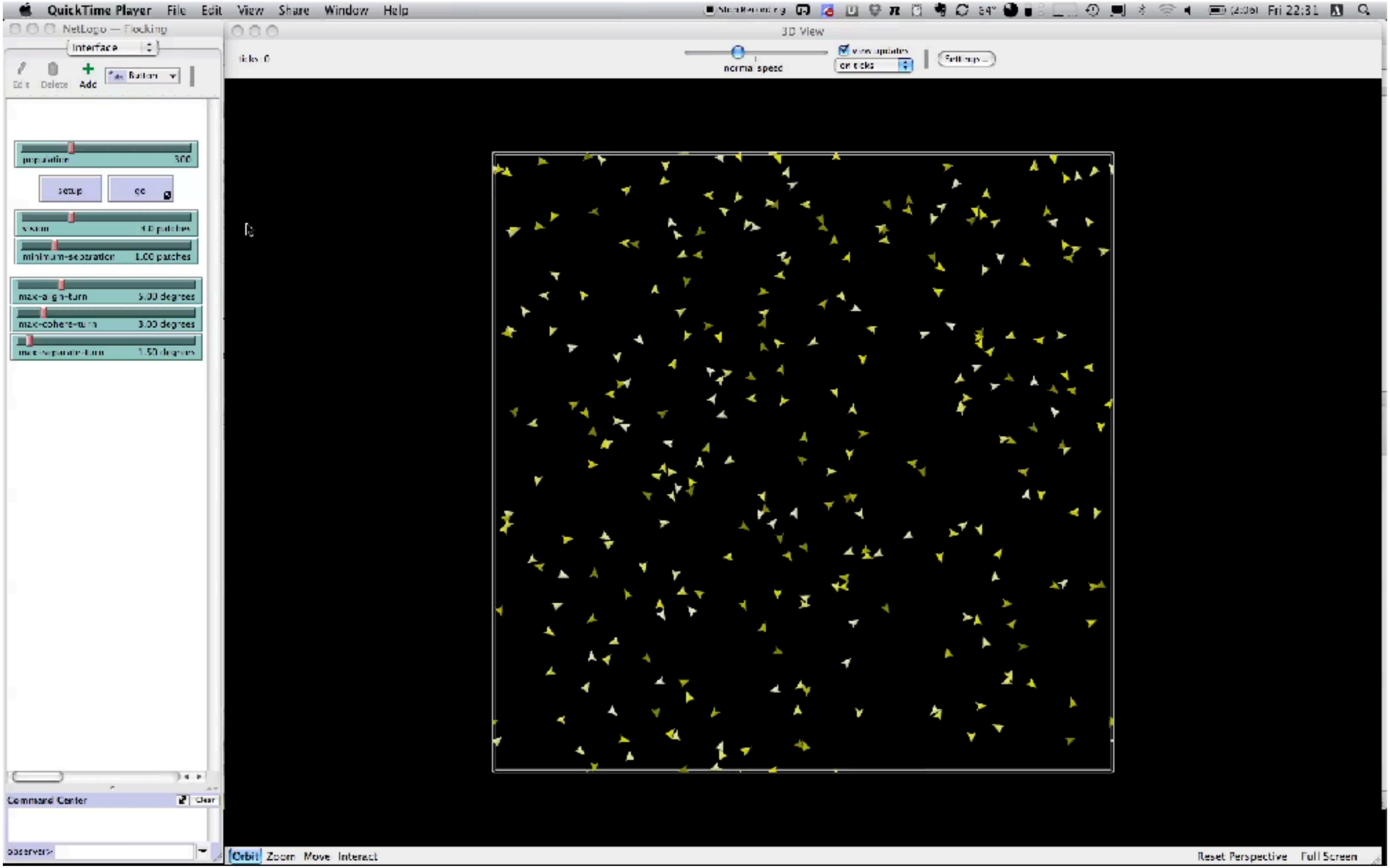




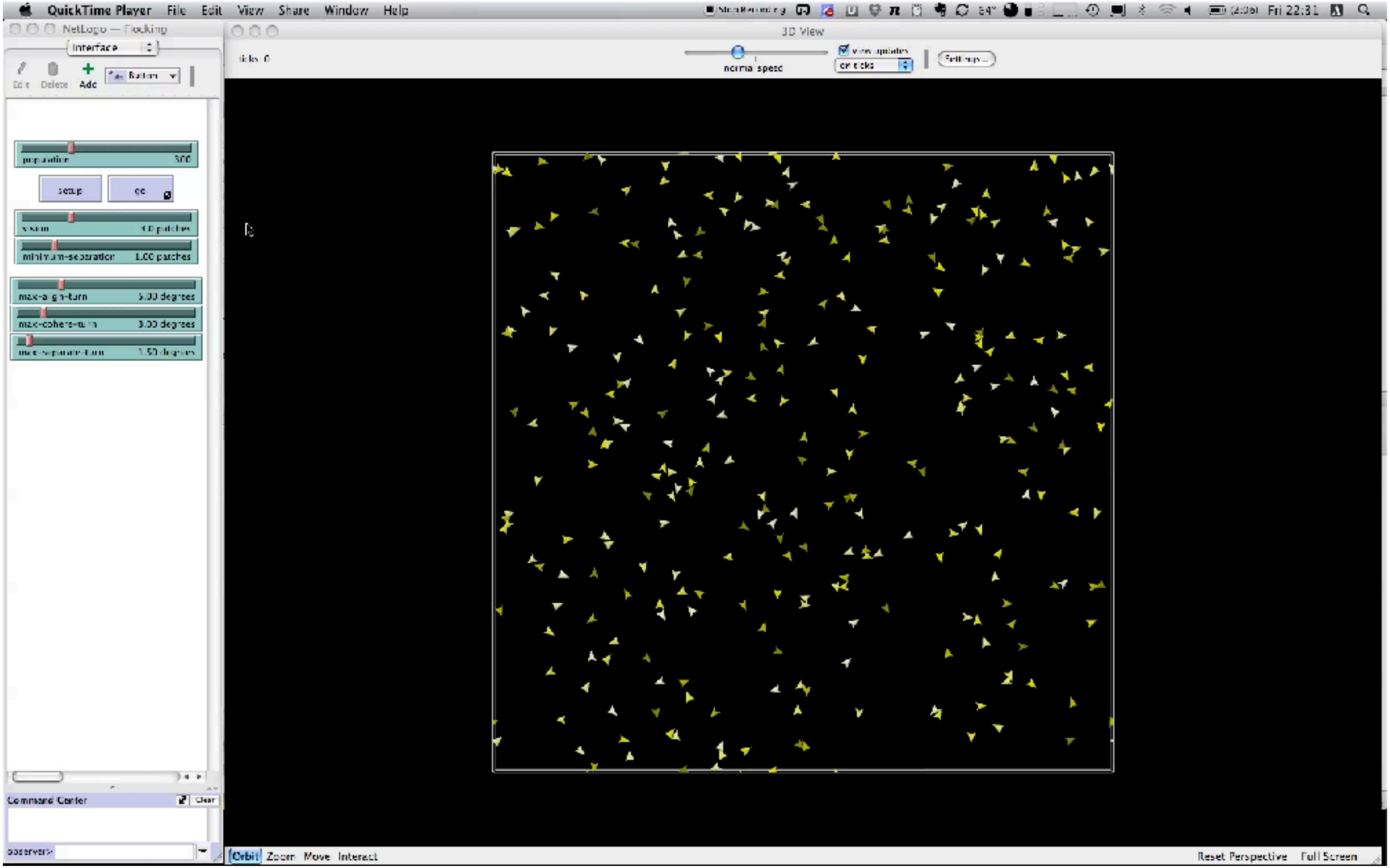
- Wilensky, U. (1998). NetLogo Flocking model. http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/Flocking. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.

Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

Let's go to the Simulation!



QuickTime Player File Edit View Share Window Help
Fri 22:31
NetLogo — Flocking
Interface
Edit Delete Add
Button
population 300
setup
go
vision
minimum-separation 1.00 patches
max-align-turn
max-cohere-turn 3.00 degrees
3D View
normal speed
view updates
on ticks
Settings...
Command Center
Clear
observer>
Orbit Zoom Move Interact
Reset Perspective Full Screen



Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

미시적 기반과 거시적 패턴

- 미시요소만의 분석으로 거시패턴을 설명해내는 것은 쉽지 않음
- 거시경제학의 미시적 기반을 찾는 작업은 아직도 진행중
- 학문분야를 통틀어 미시요소의 분석으로 거시패턴을 효과적으로 설명해내지 못한 사례는 쉽게 찾아볼 수 있음

Example	미시기반	거시패턴
심리학	뉴런	의식
경제학	경제주체	시장가격
사회학	인간	사회현상
전산학	H/W	S/W
물리학	분자	상전이
생물학	개미	군체

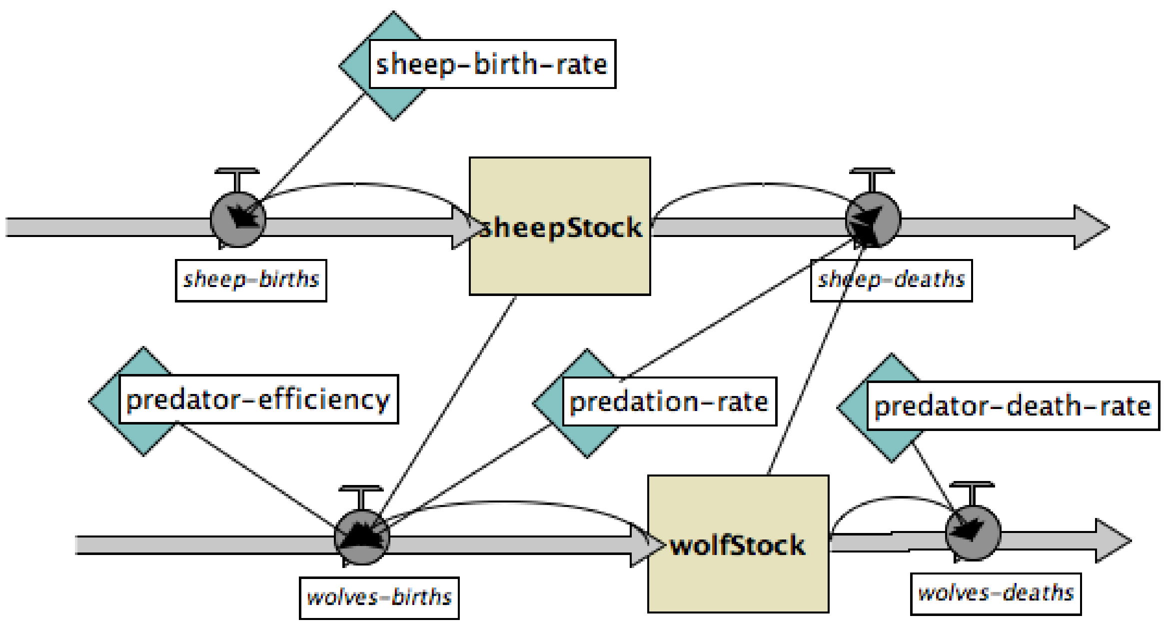
Example: Wolf Sheep Predation

Formal Model Predator-prey equation

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

- x: # of sheeps
- y: # of wolves
- α, β, δ, γ: parameters
- Not always tractable

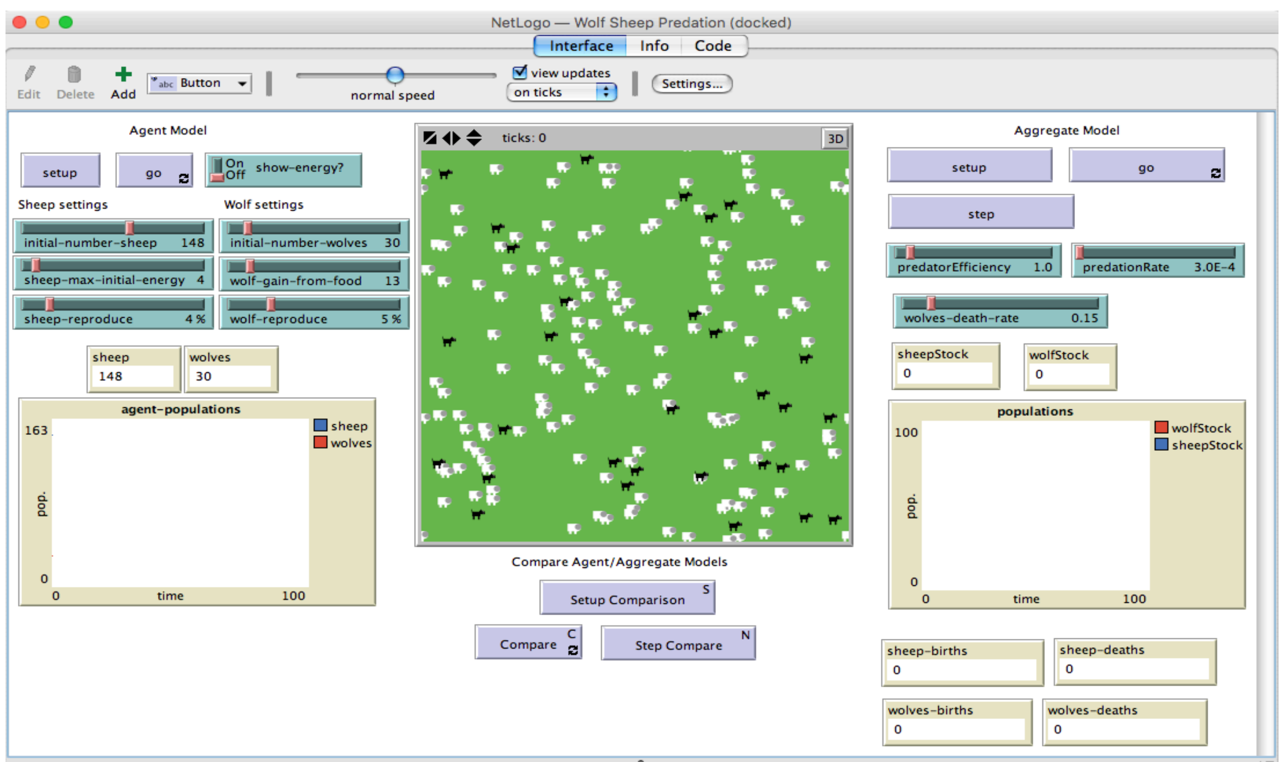
System Dynamics (SD)



- Solve using stocks, flows, feedback loops, and time delays
- Simulation - tractable

- Wilensky, U. (2005). NetLogo Wolf Sheep Predation (docked) model. http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/WolfSheepPredation(docked). Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.

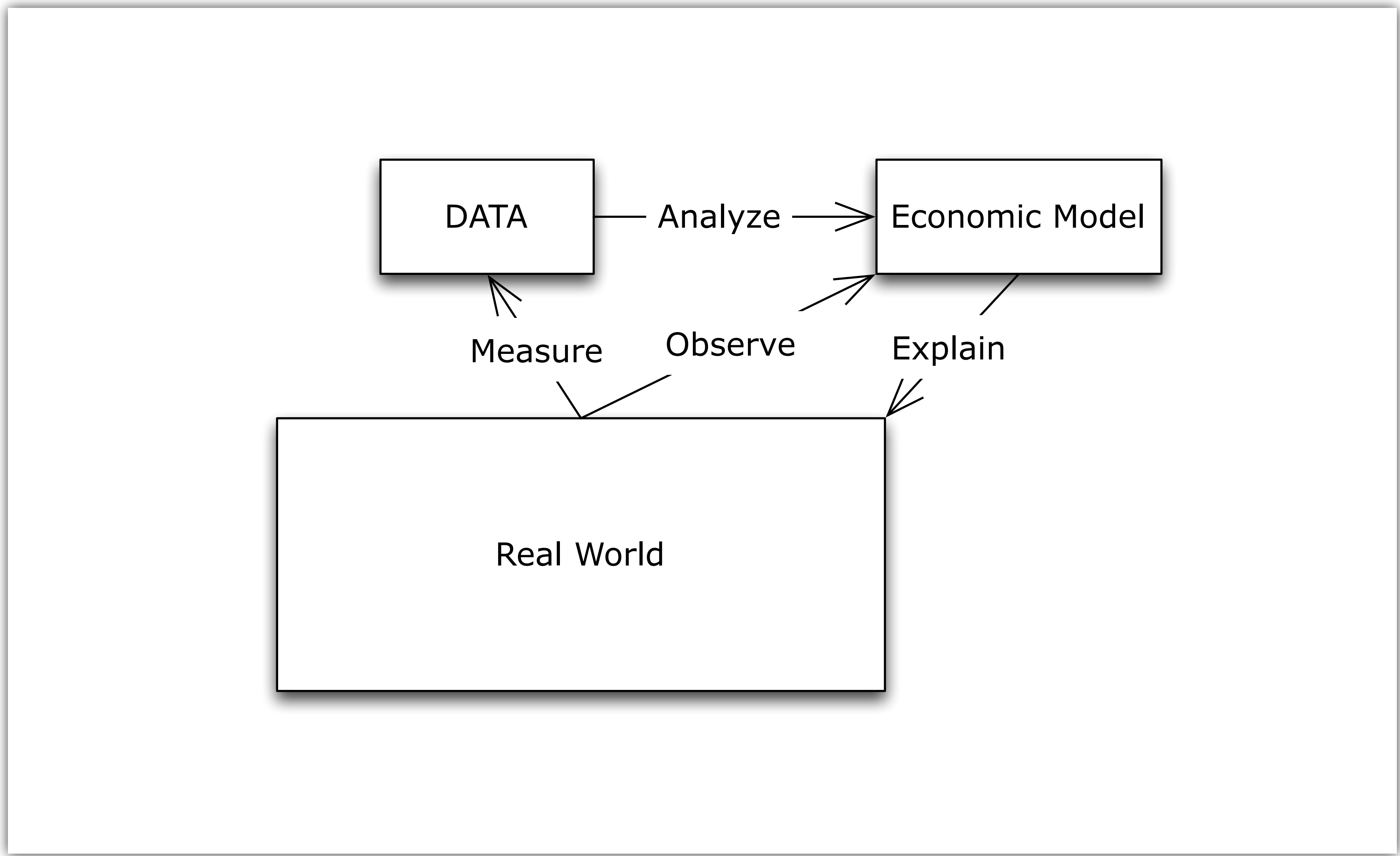
Simulation Model



- Wilensky, U. (2005). NetLogo Wolf Sheep Predation (docked) model. http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/WolfSheepPredation(docked). Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.

- Agent:
  - Sheeps
  - Wolves
- Wolves can eat Sheep
  - Wolves ++
  - Sheeps --
- Wolves can die if there are few sheeps
- Simulation - tractable

Measure process for Model



Basic Structure of Micro Economic Model

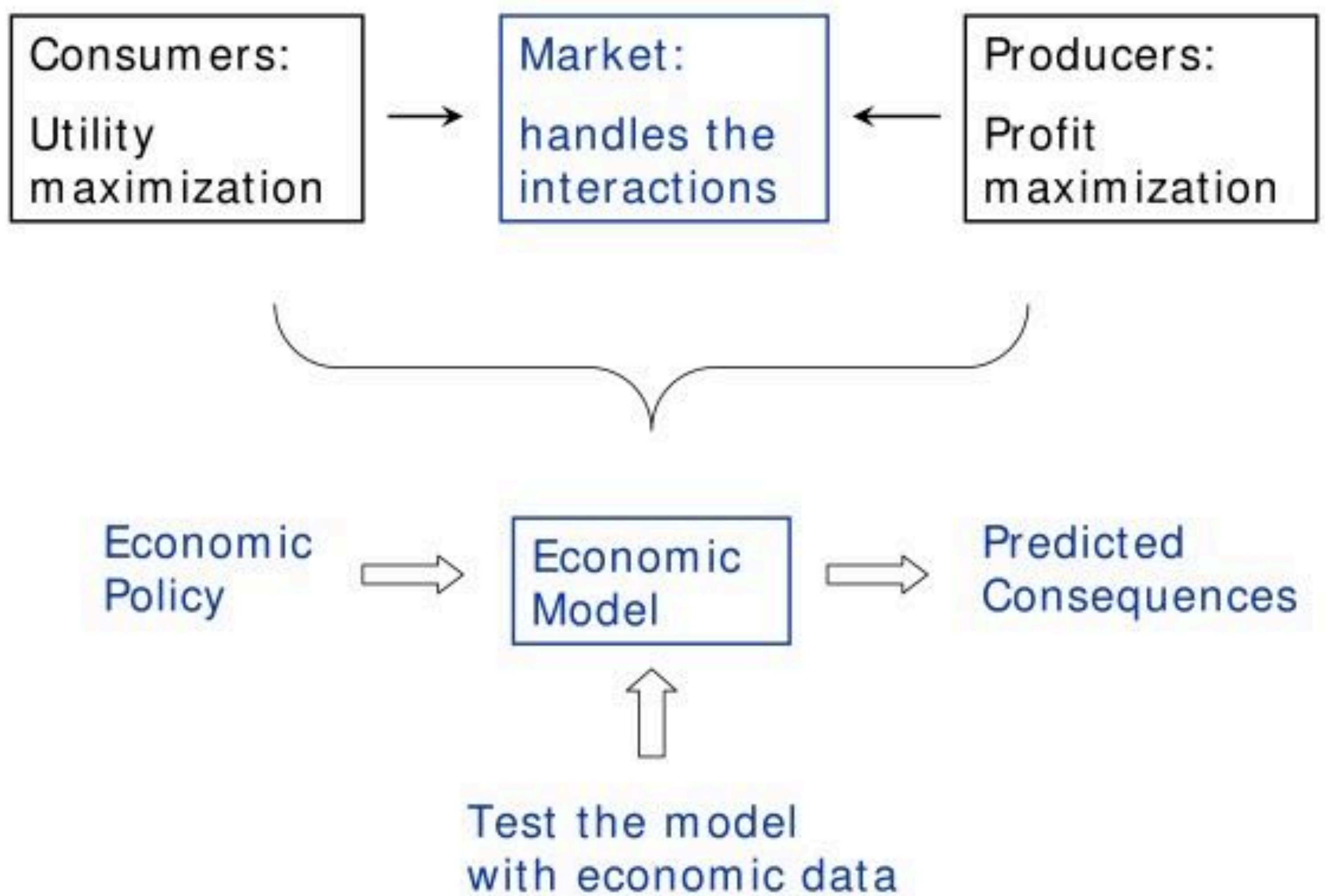


Figure 1: What is economics?

출처: 전병헌(경제수학 강의노트)

Examples of economic model

- 생산가능곡선모형
- 비교우위모형

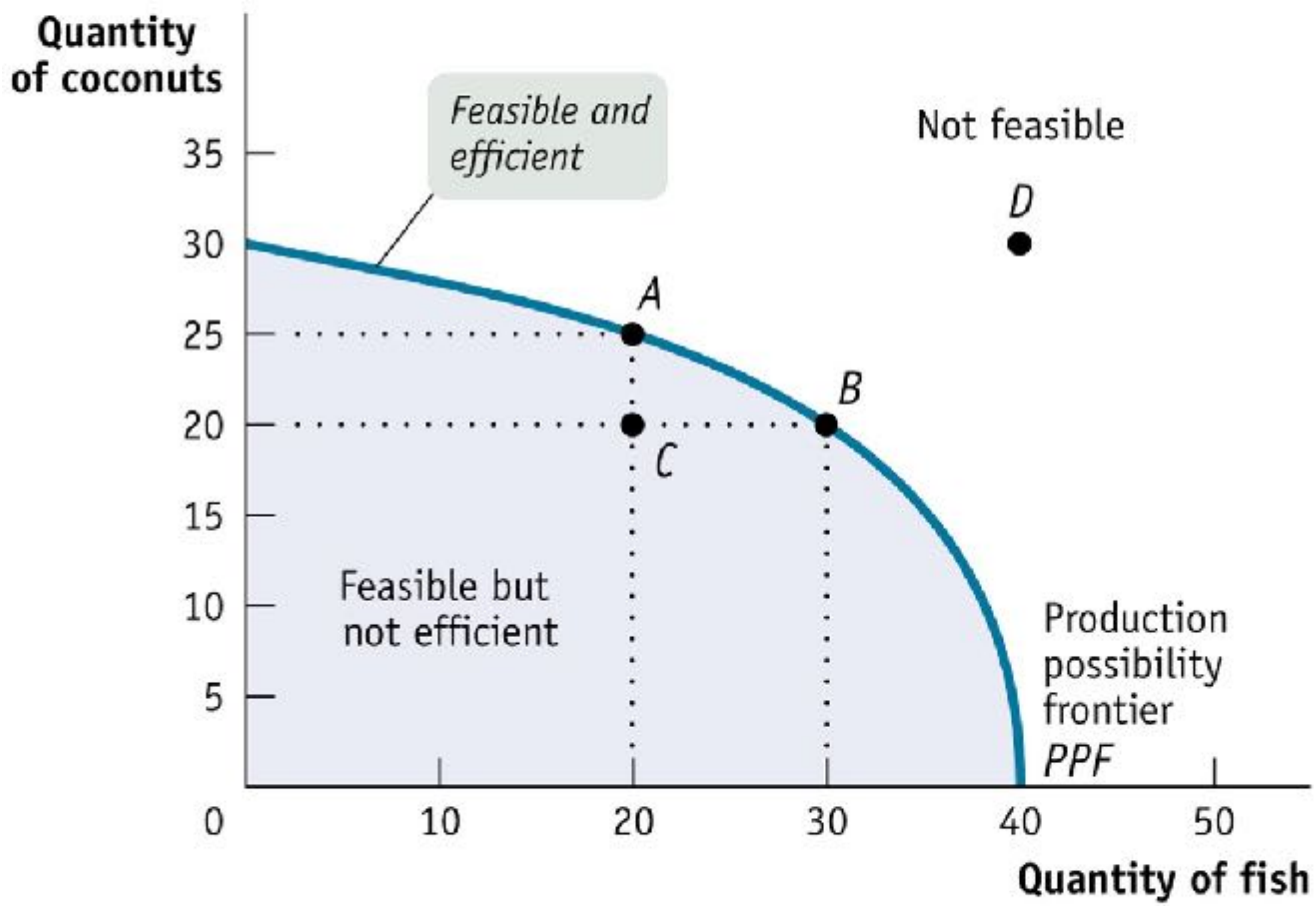
생산가능경계모형
Production Possibility Frontier Model

Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

생산가능곡선 PPF

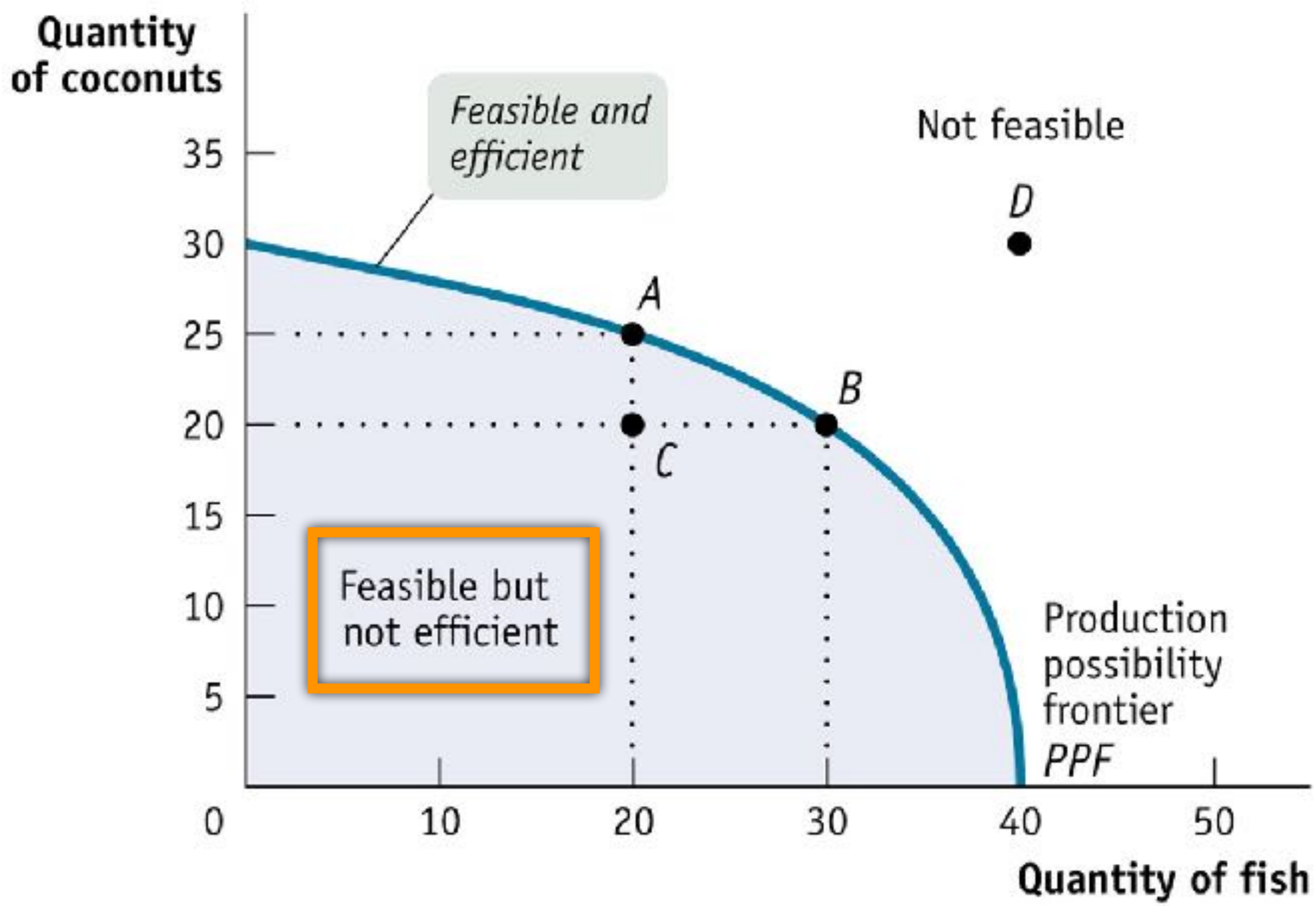
- 두 재화만을 생산하는 경제를 가정
- 다른 한 재화의 생산량을 고정했을 때 나머지 재화의 생산 가능량을 표시하여 완성
- 경계면은 최대 생산량을 의미

PPF: 코코넛과 물고기



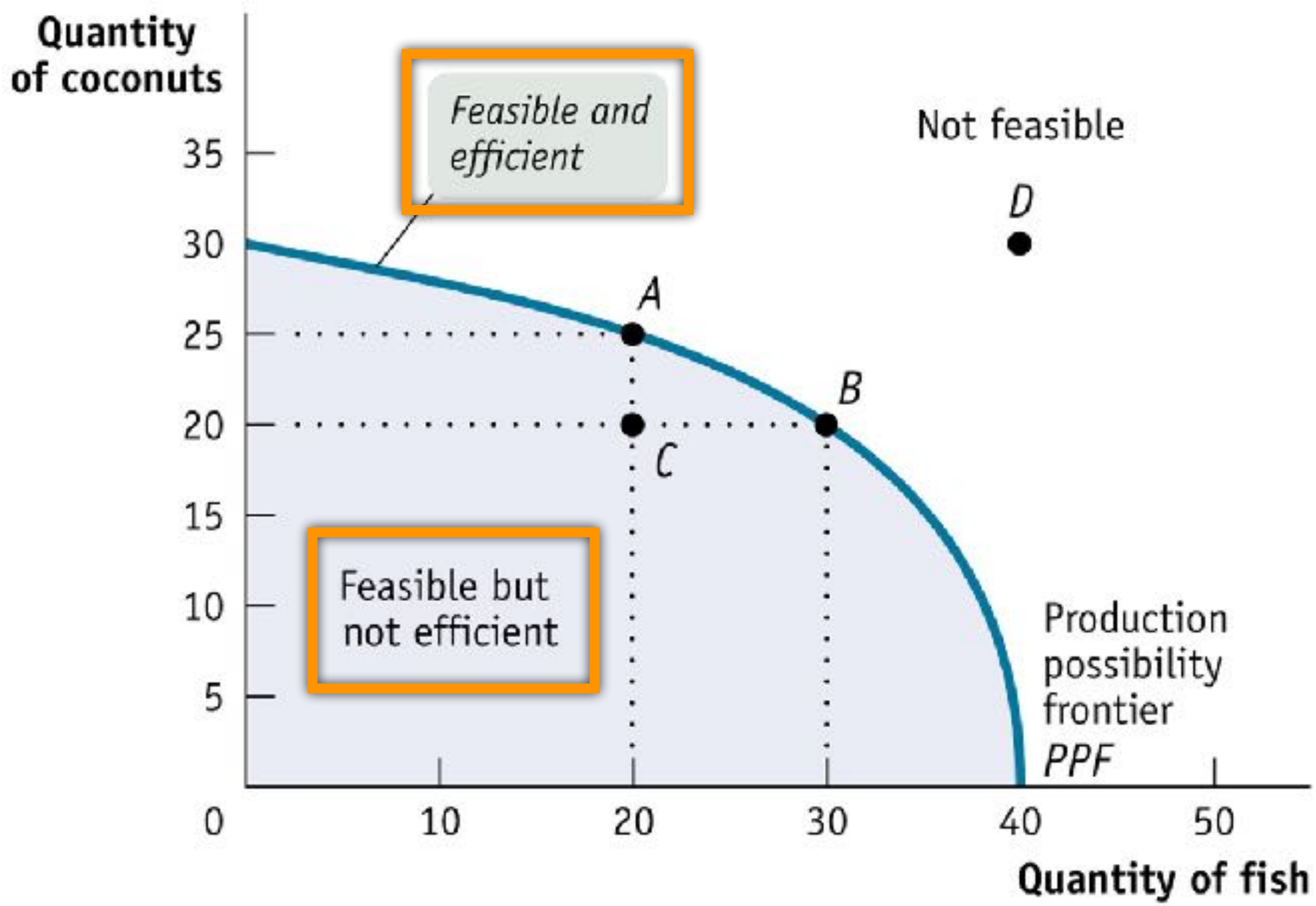
Quantity of coconuts
35
30
25
20
15
10
5
0
10
20
30
40
50
Quantity of fish
Feasible and efficient
Not feasible
D
A
B
C
Feasible but not efficient
Production possibility frontier PPF

PPF: 코코넛과 물고기



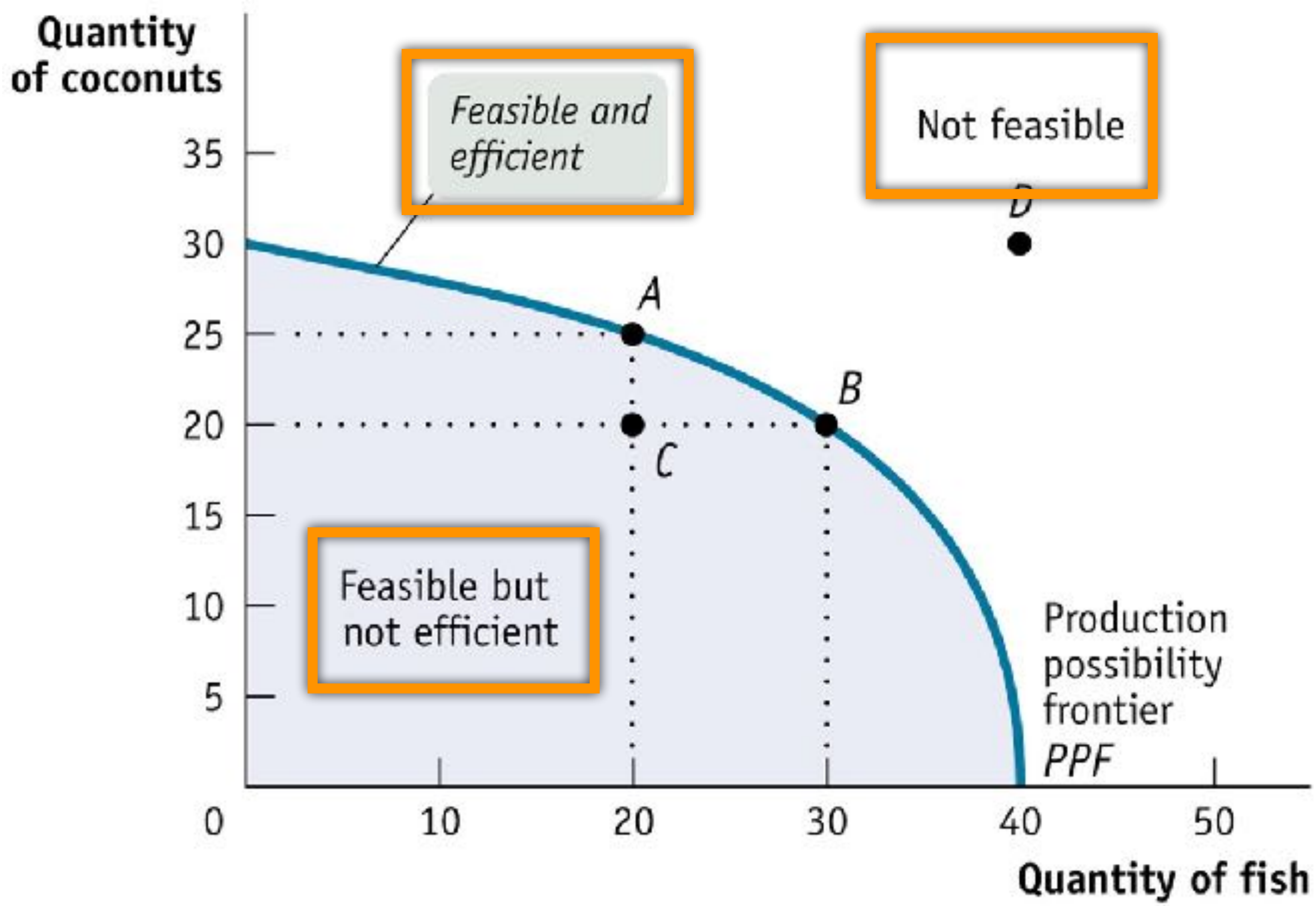
Quantity of coconuts
35
30
25
20
15
10
5
0
Feasible and efficient
Not feasible
D
A
B
C
Feasible but not efficient
Production possibility frontier PPF
10
20
30
40
50
Quantity of fish

PPF: 코코넛과 물고기



Quantity of coconuts
35
30
25
20
15
10
5
0
Feasible and efficient
Not feasible
D
A
B
C
Feasible but not efficient
Production possibility frontier PPF
10
20
30
40
50
Quantity of fish

PPF: 코코넛과 물고기



Quantity of coconuts
35
30
25
20
15
10
5
0
10
20
30
40
50
Quantity of fish
Feasible and efficient
Not feasible
D
A
B
C
Feasible but not efficient
Production possibility frontier PPF

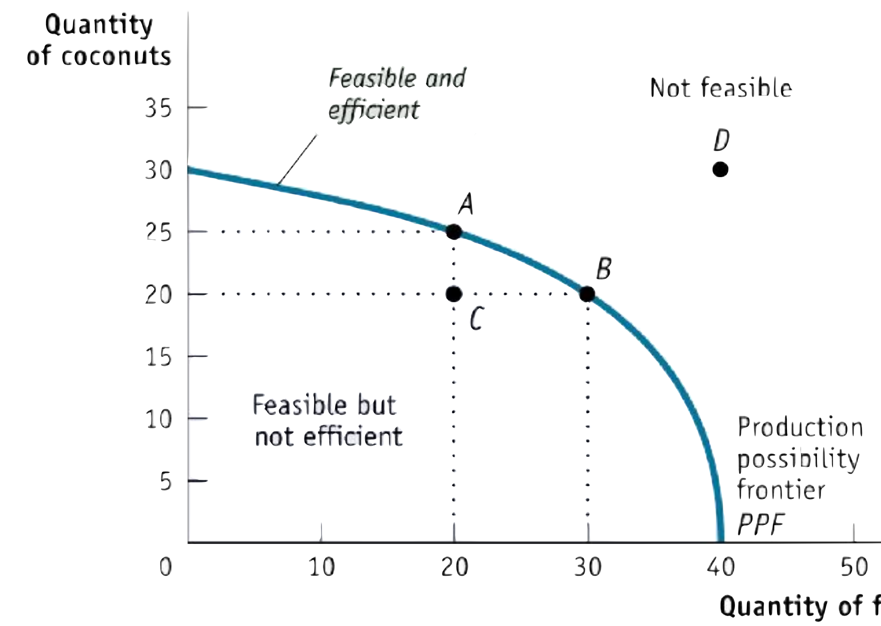
가능성과 효율성

- 가능성: 생산량을 실현할 수 있는가?
- 효율성: 파레토 효율적인가? 즉, 생산물 A의 감소 없이 생산물 B의 생산 증가가 가능한가?
- PPF 내부는 실현가능성을 의미
- PPF 곡선 경계는 효율성을 의미

PPF의 모양

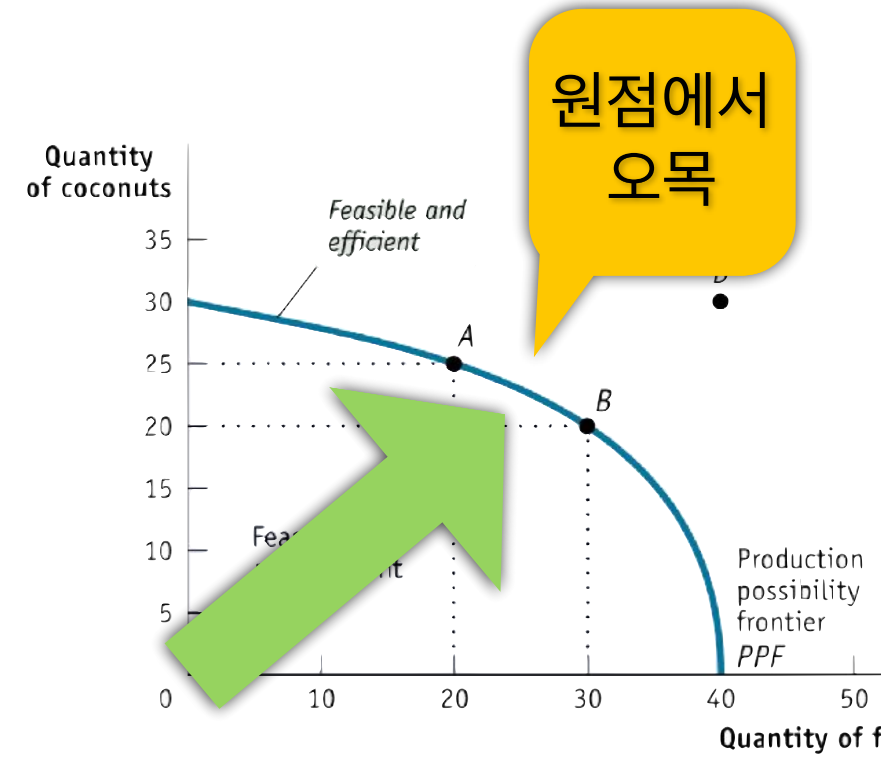
- 왜 원점에서 보았을 때 오목한 모양인가?
- Q. 그 의미는 무엇인가?
  - A. 기회비용체증
- 기회비용 = PPF의 기울기

PPF의 모양



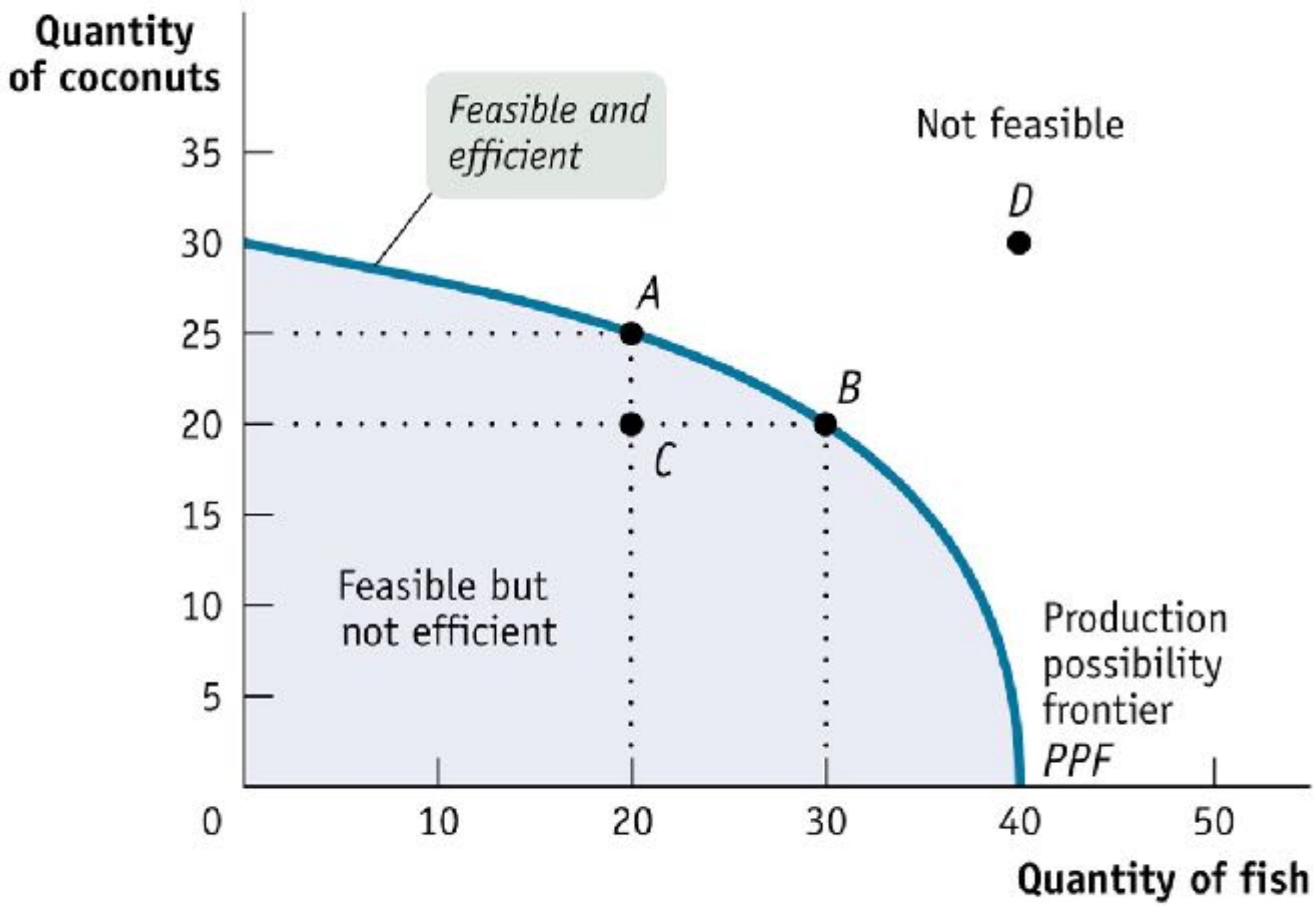
- 왜 원점에서 보았을 때 오목한 모양인가?
- Q. 그 의미는 무엇인가?
  - A. 기회비용체증
- 기회비용 = PPF의 기울기

PPF의 모양



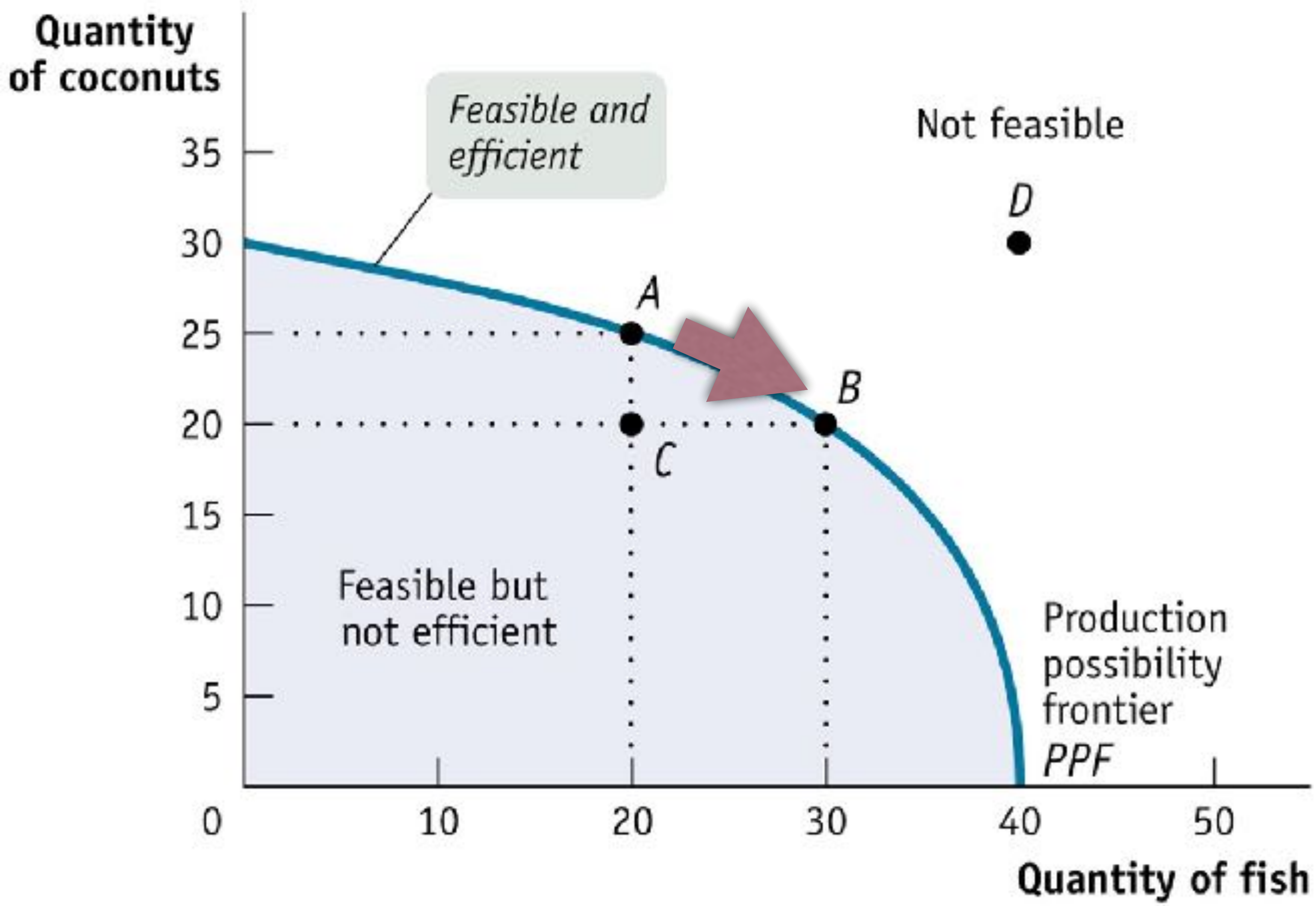
- 왜 원점에서 보았을 때 오목한 모양인가?
- Q. 그 의미는 무엇인가?
    - A. 기회비용체증
- 기회비용 = PPF의 기울기

기회비용체증
Increasing Opportunity Cost

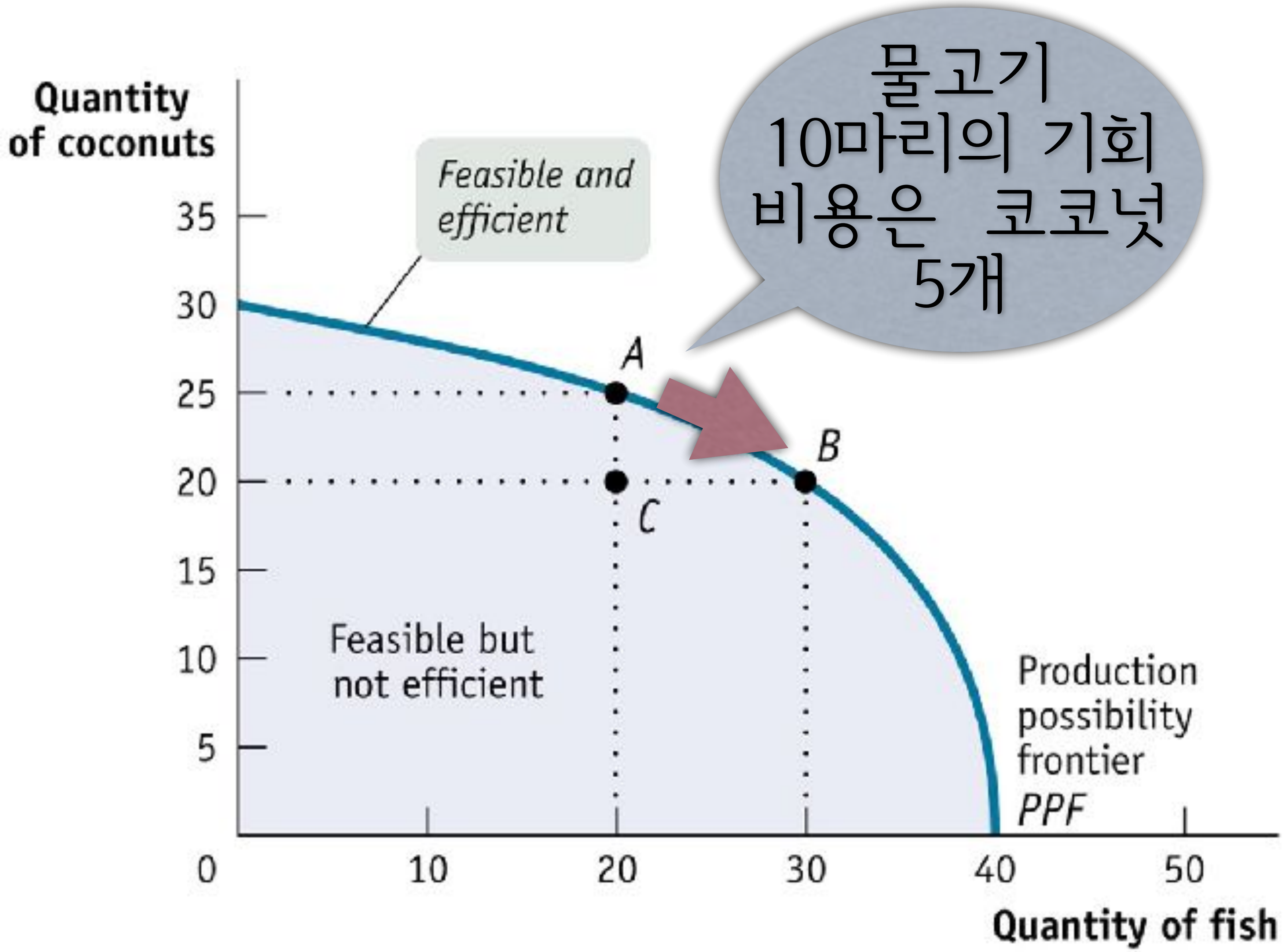


Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

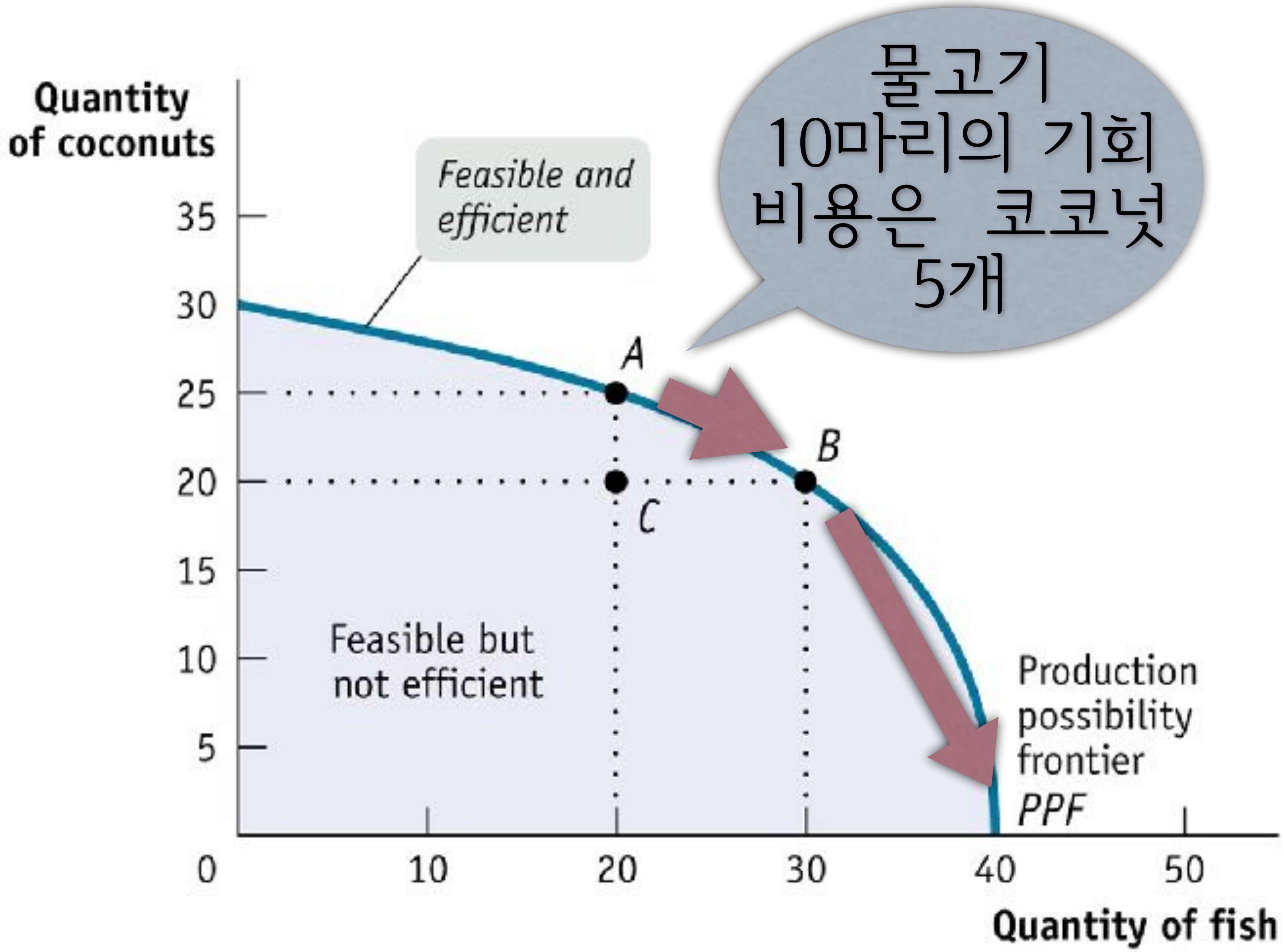
기회비용체증
Increasing Opportunity Cost



기회비용체증
Increasing Opportunity Cost

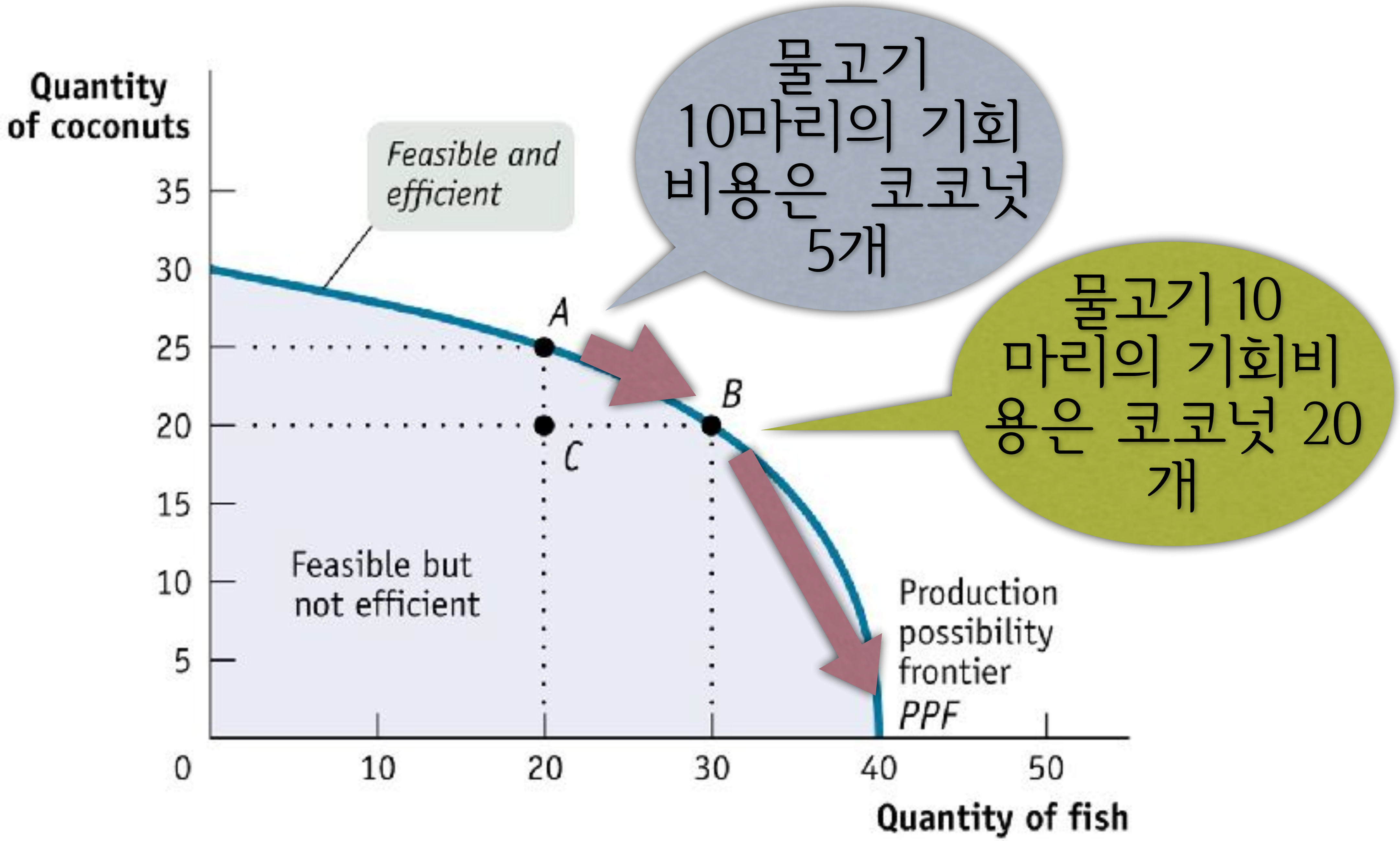


기회비용체증
Increasing Opportunity Cost

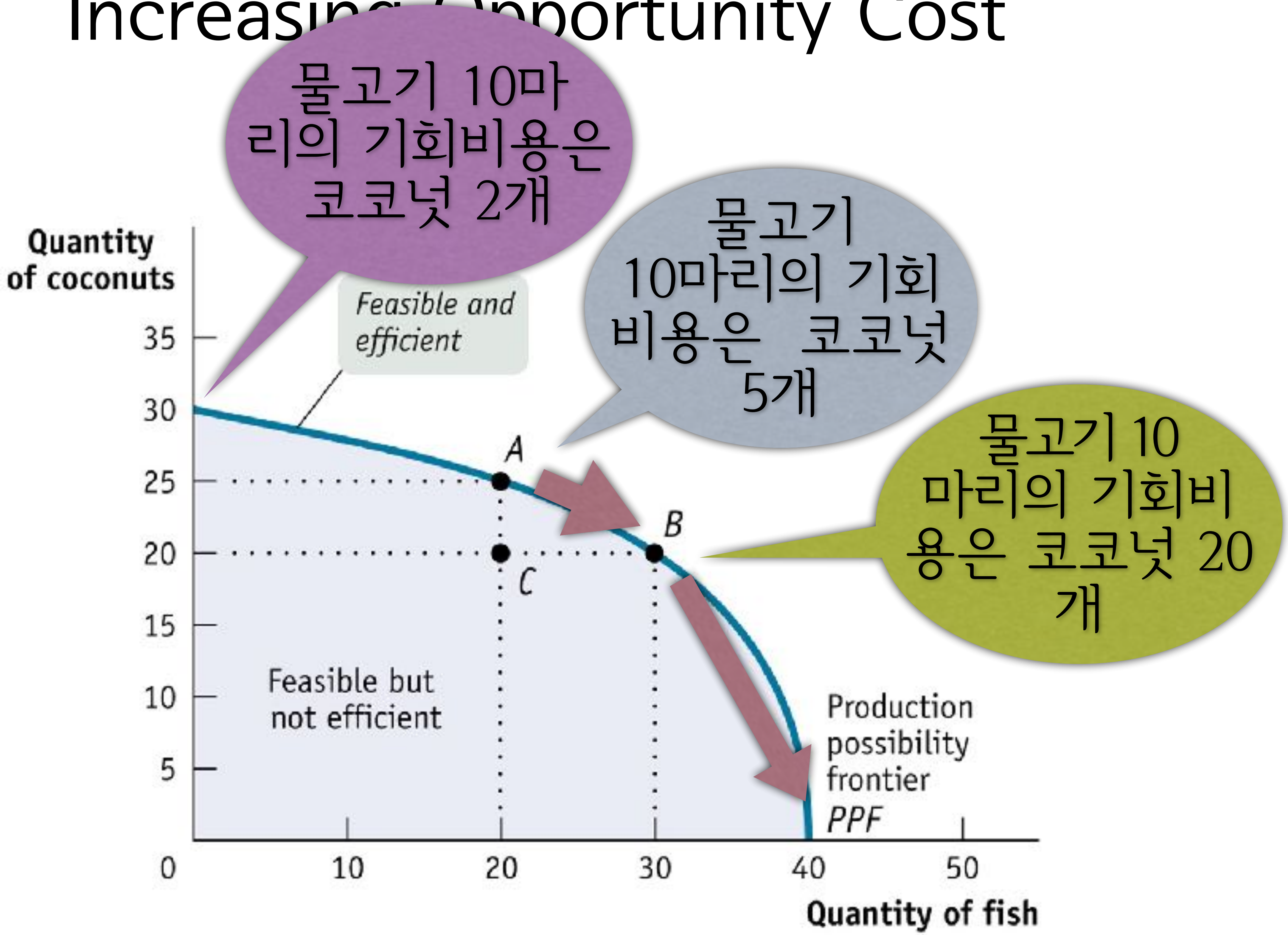


Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

기회비용체증
Increasing Opportunity Cost

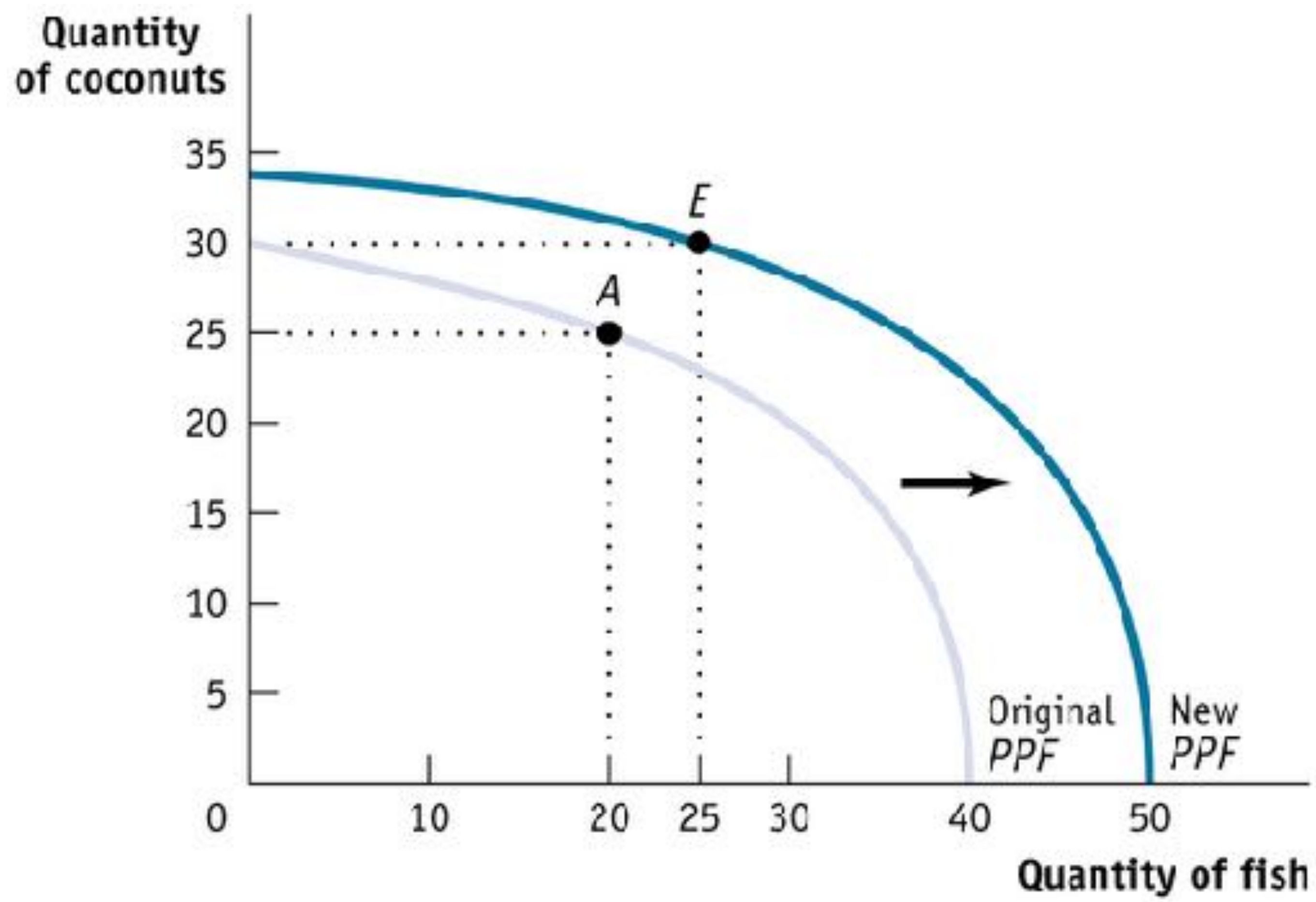


기회비용체증
Increasing Opportunity Cost



생산력의 발전과 PPF

- 경제성장: 한 경제가 재화와 서비스를 생산할 수 있는 능력이 커지는 것
- PPF모형에서 경제성장은 PPF의 경계가 원점을 기준으로 바깥쪽으로 확장되는 것으로 표현



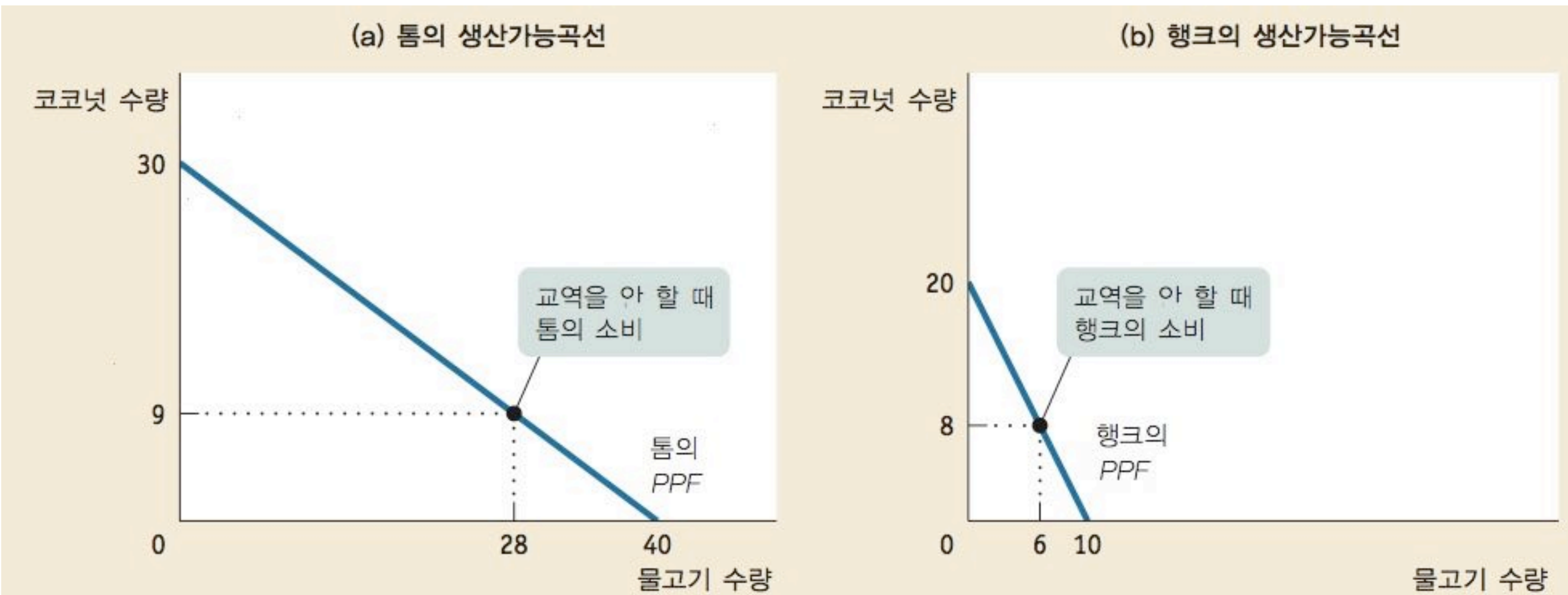
비교우위모형

비교우위모형의 의미

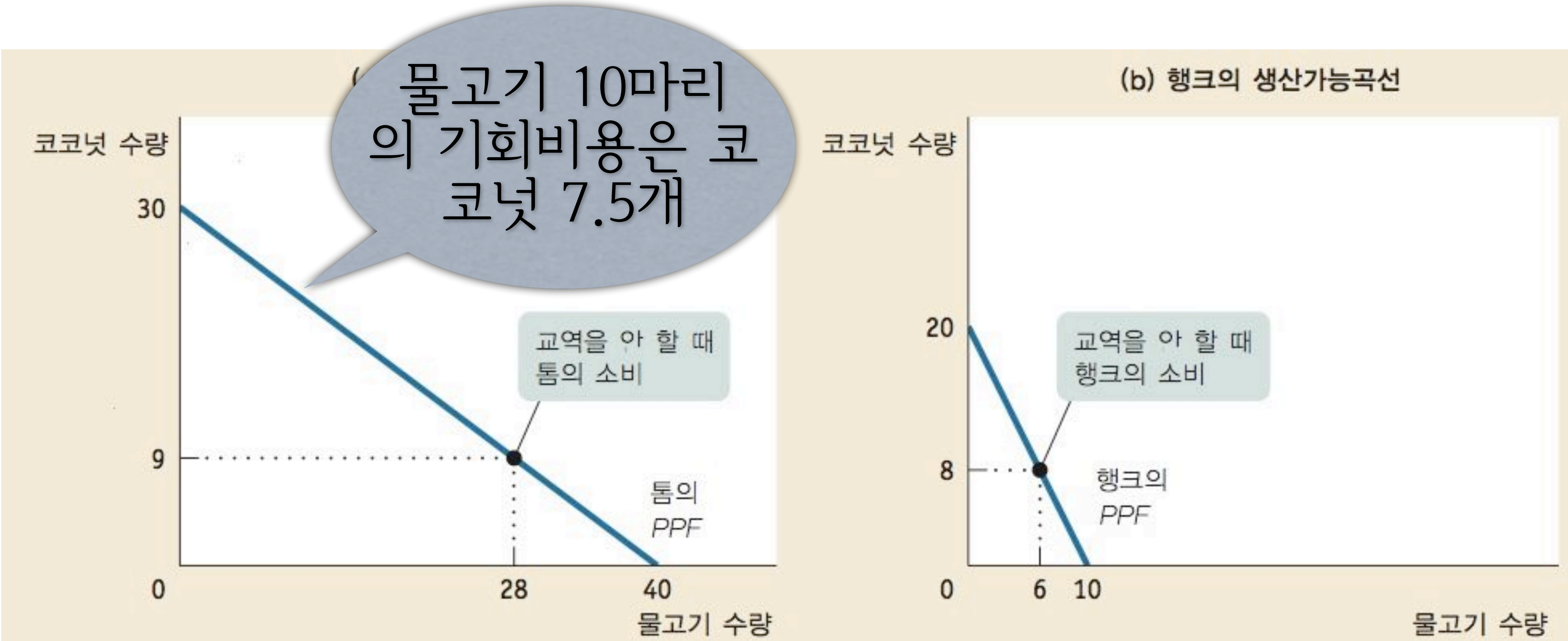
- 2행위자(A,B), 2상품(코코넛, 물고기) 모형
- 단순화를 위해 기회비용 불변하는 경우를 생각: 이 경우 PPF는 직선이 됨
- A: 코코넛의 채집이 특기이고, B: 물고기 획득이 특기일 경우:
  - A는 코코넛에 집중, B는 물고기에 집중하여 교환하는 것이 훨씬 이득
- B가 모든 면에서 능력이 떨어지는 경우는?

Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

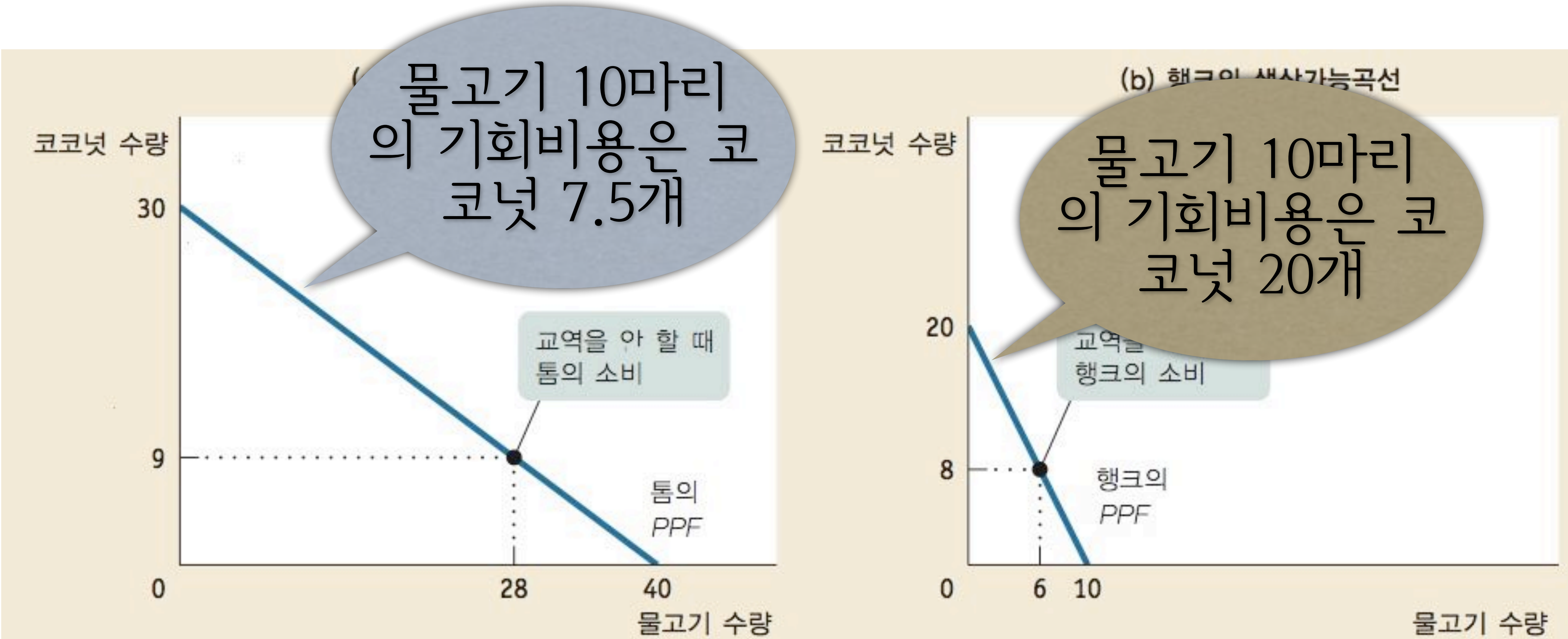
A,B의 PPF:
B가 모두 열등할 경우



A,B의 PPF:
B가 모두 열등할 경우



A,B의 PPF:
B가 모두 열등할 경우



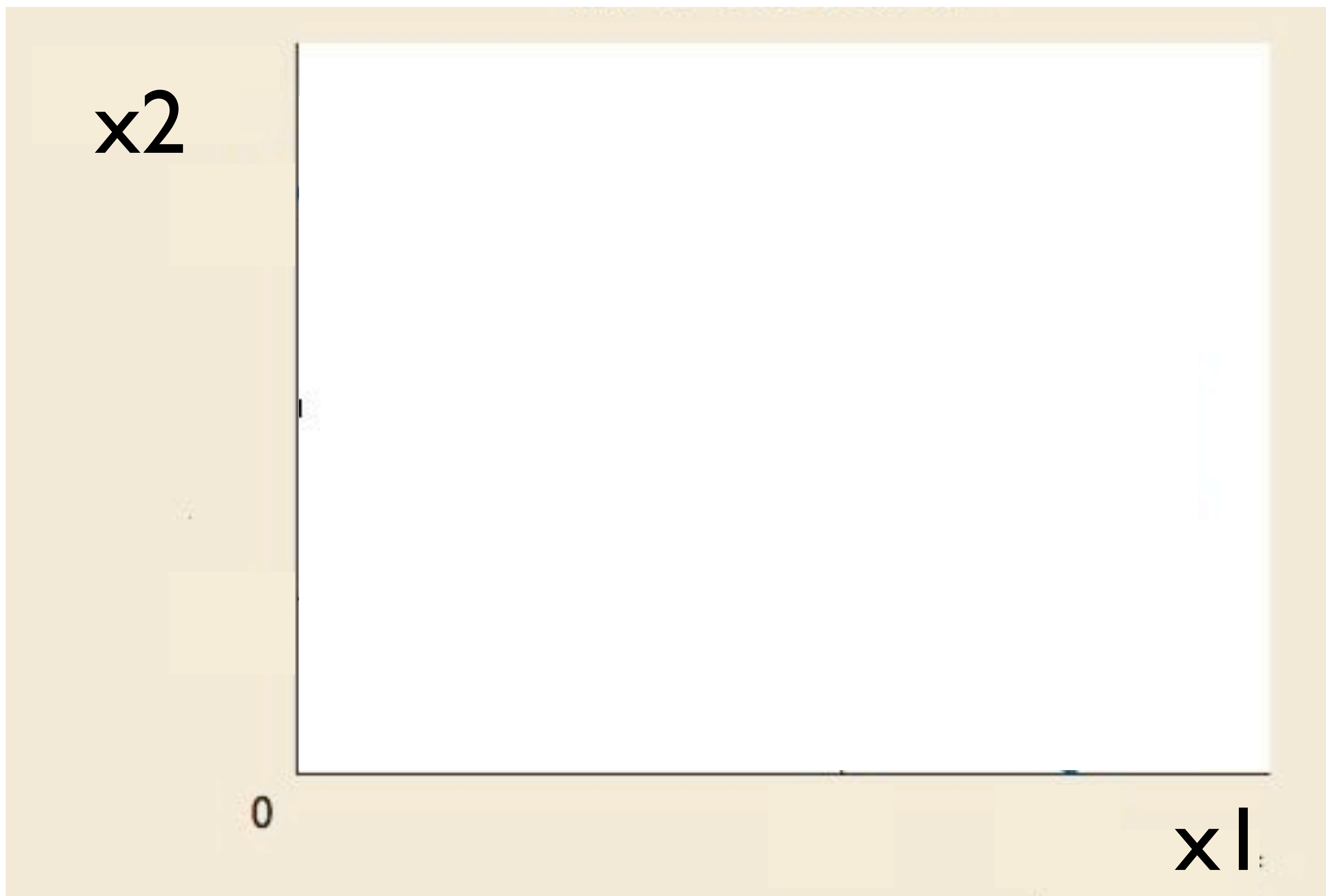
비교우위
Comparative Advantage

표 2-1

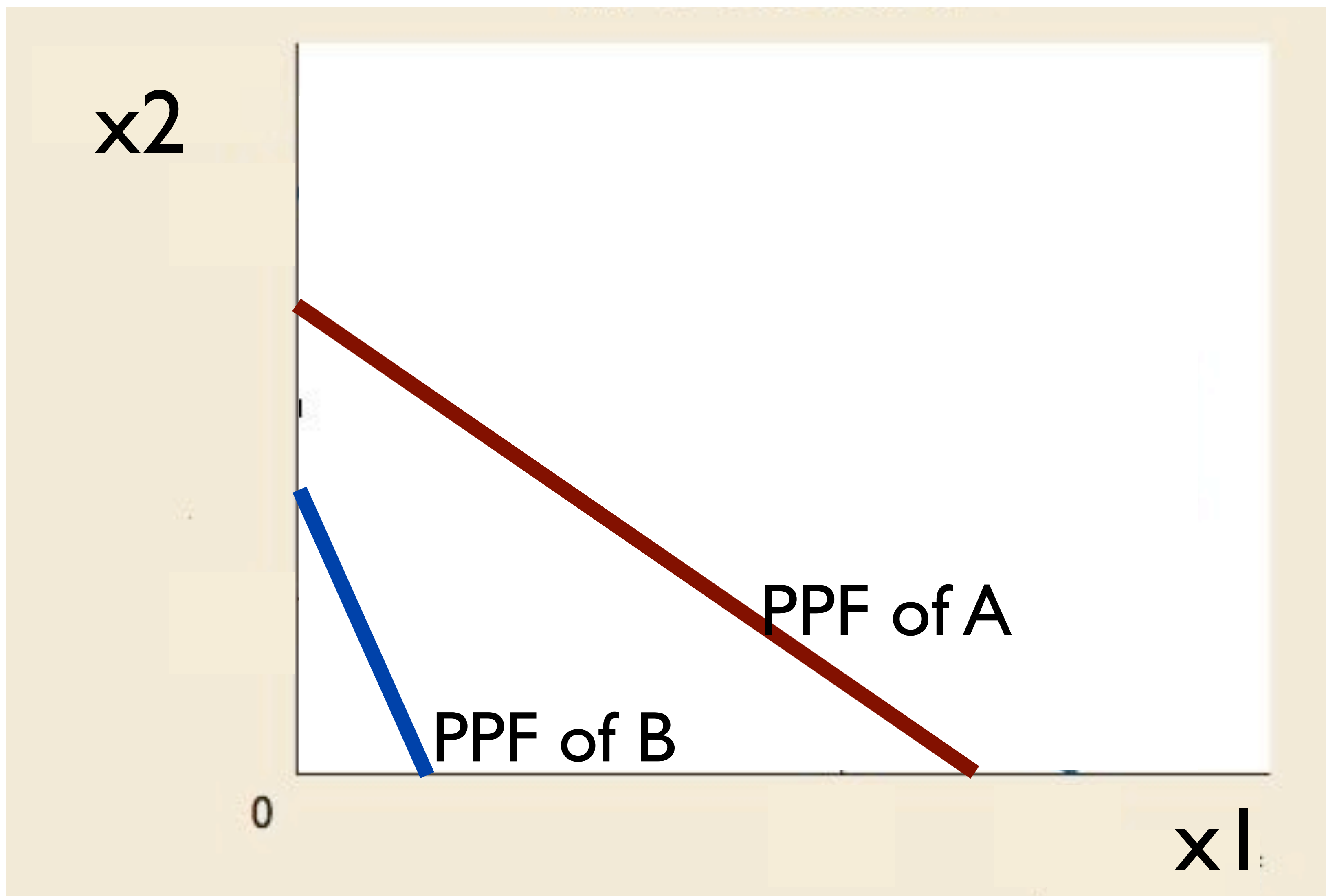
톰과 행크의 물고기와 코코넛에 대한 기회비용

	톰의 기회비용	행크의 기회비용
물고기 1마리	$\boxed{\text{코코넛 3/4개}}$	코코넛 2개
코코넛 1개	물고기 4/3마리	$\boxed{\text{물고기 1/2마리}}$

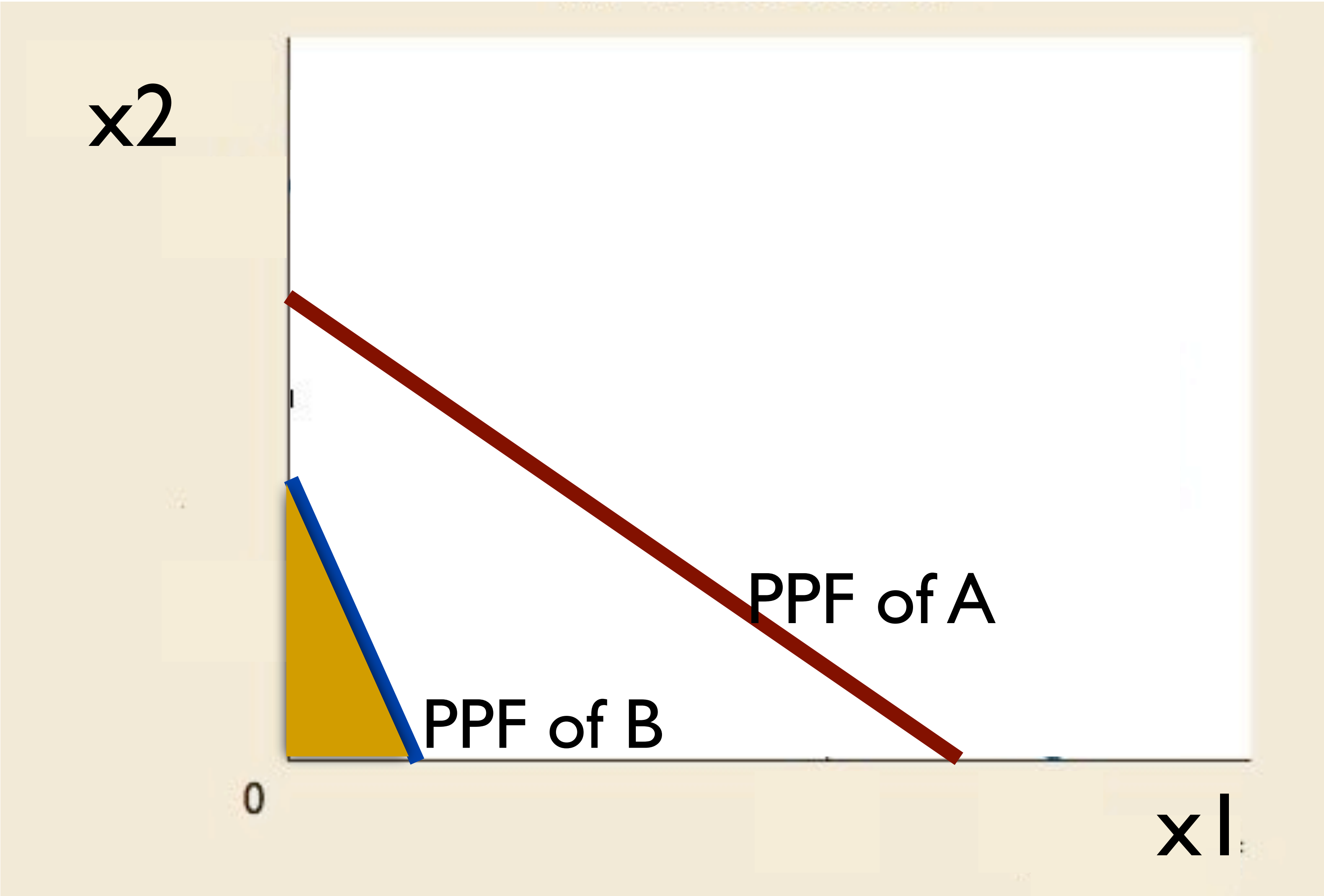
일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



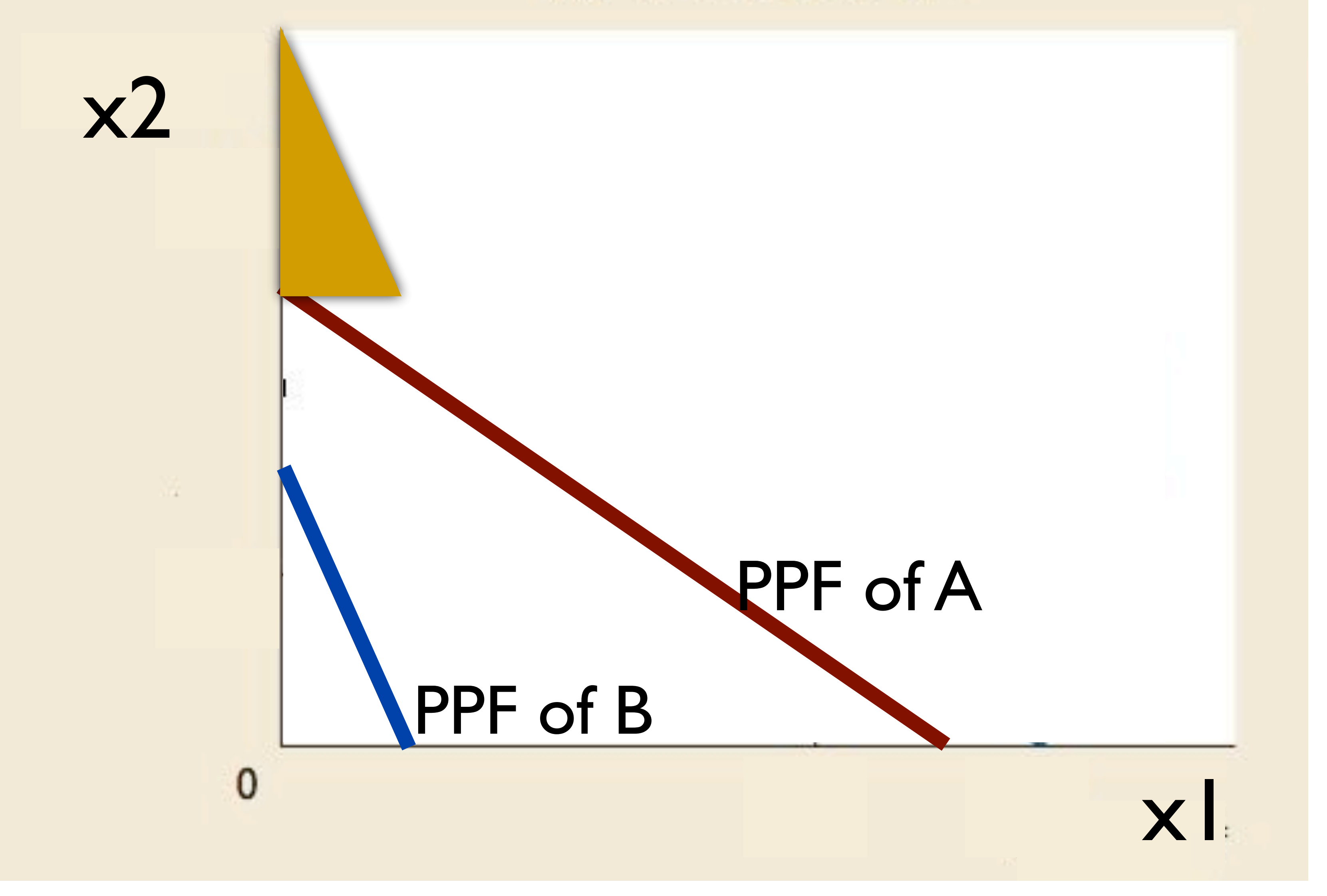
일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



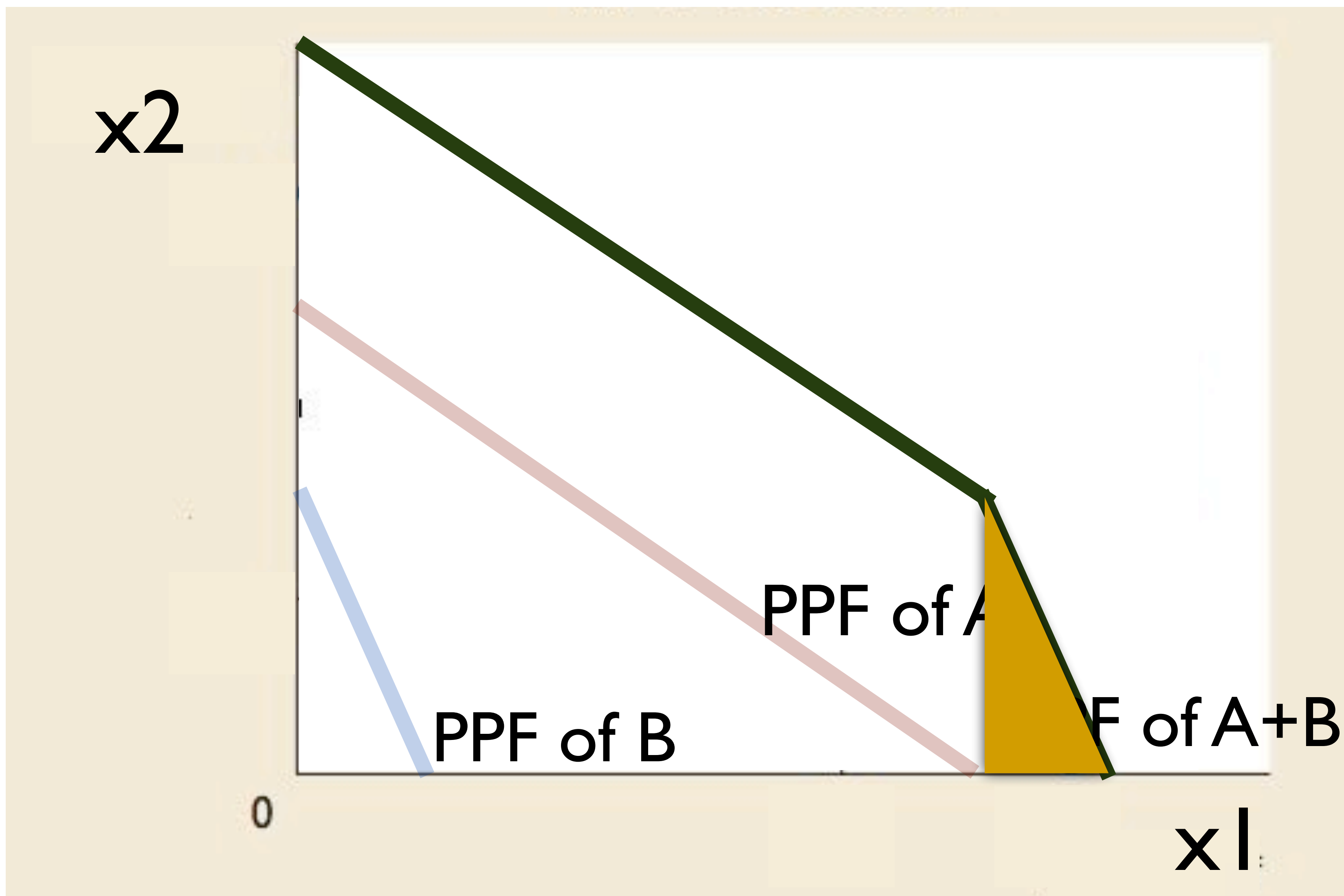
일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



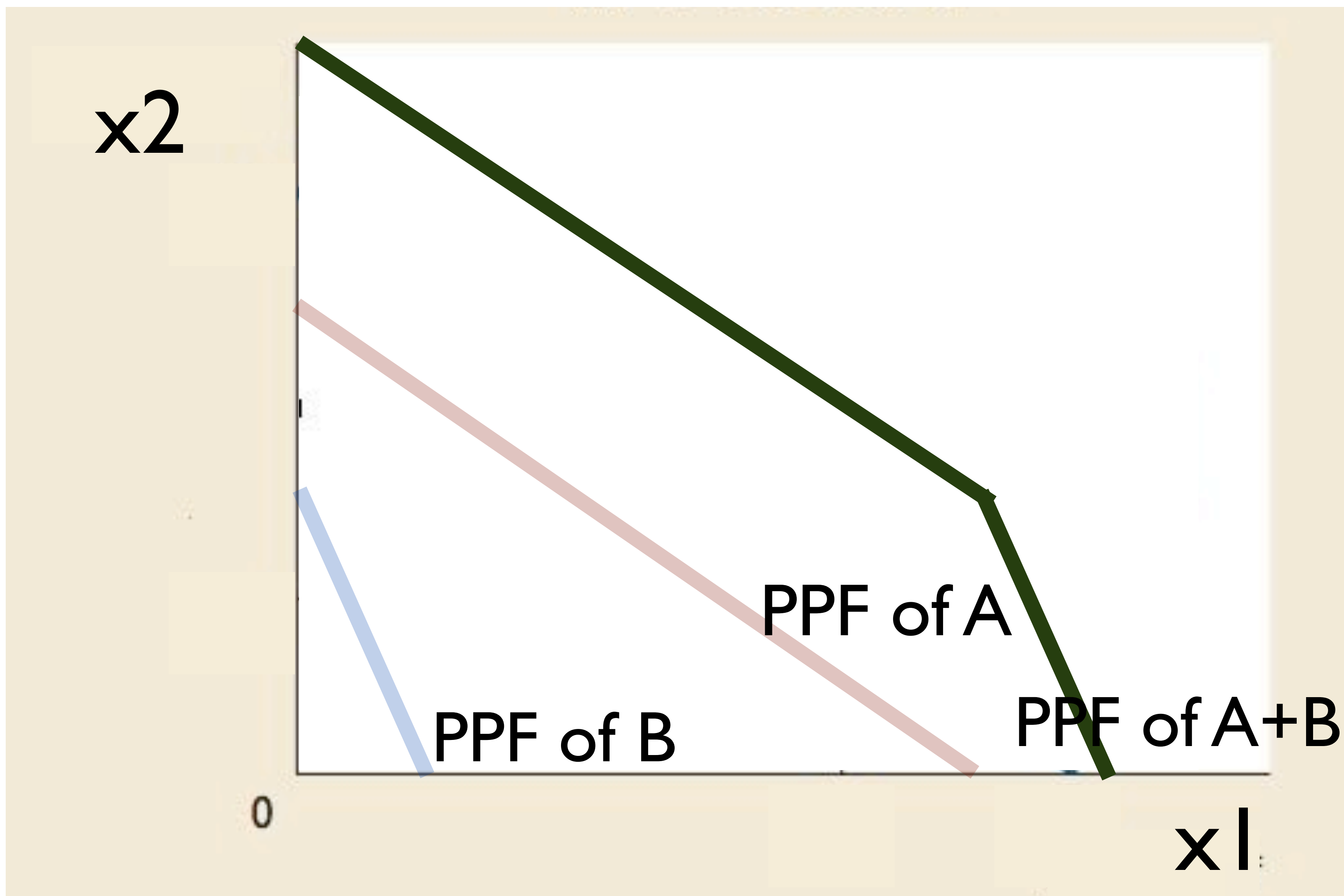
일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



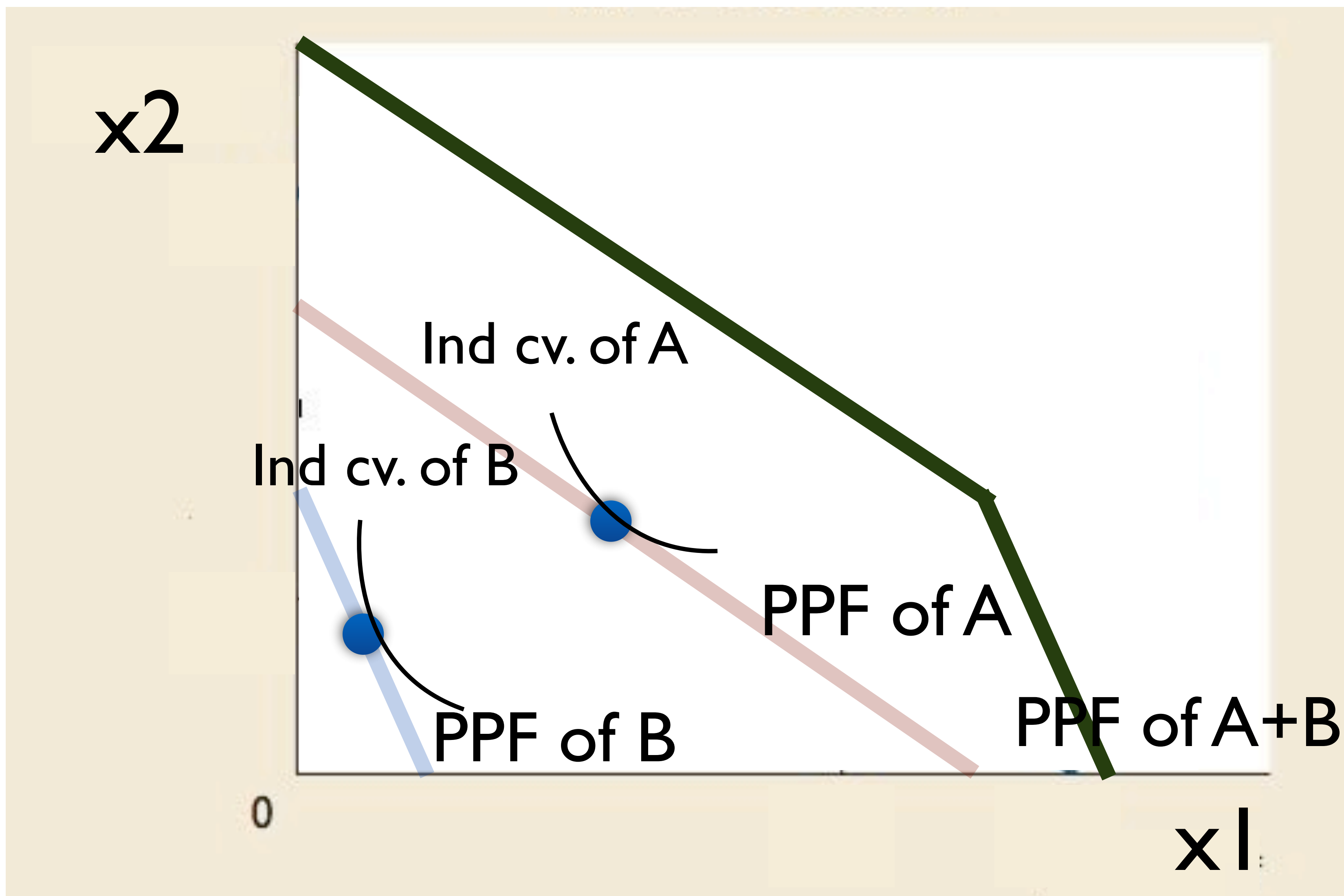
일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



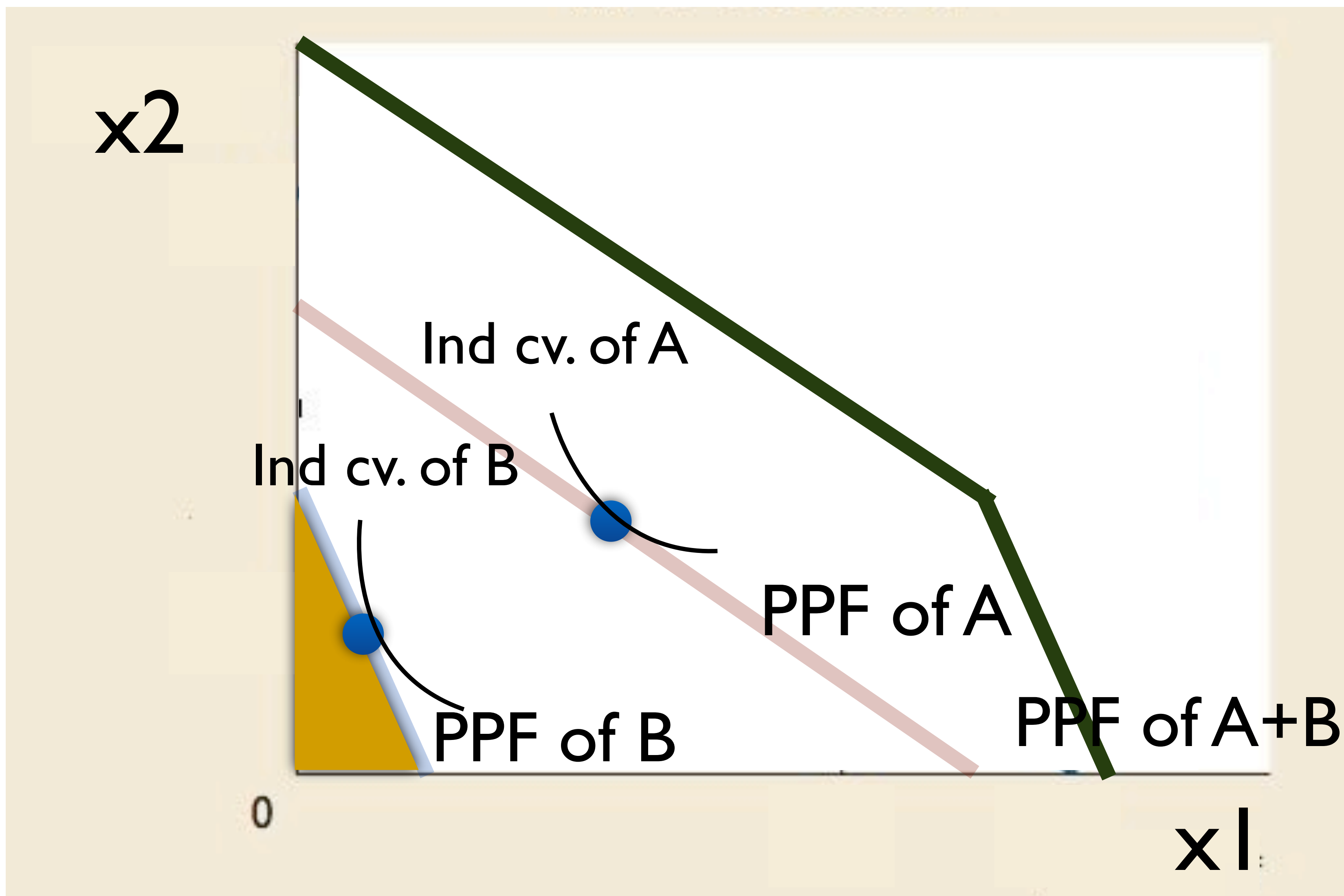
일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



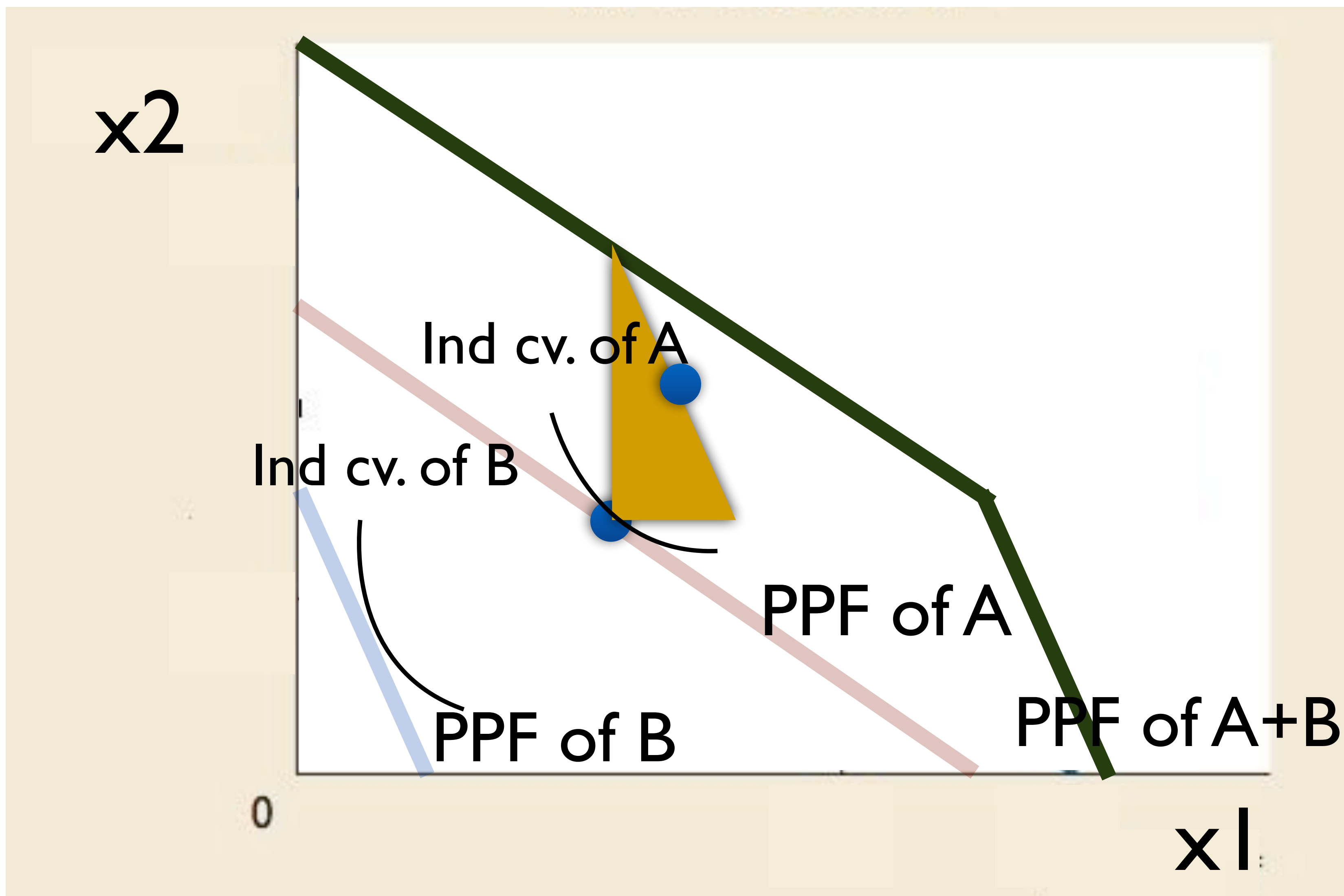
일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



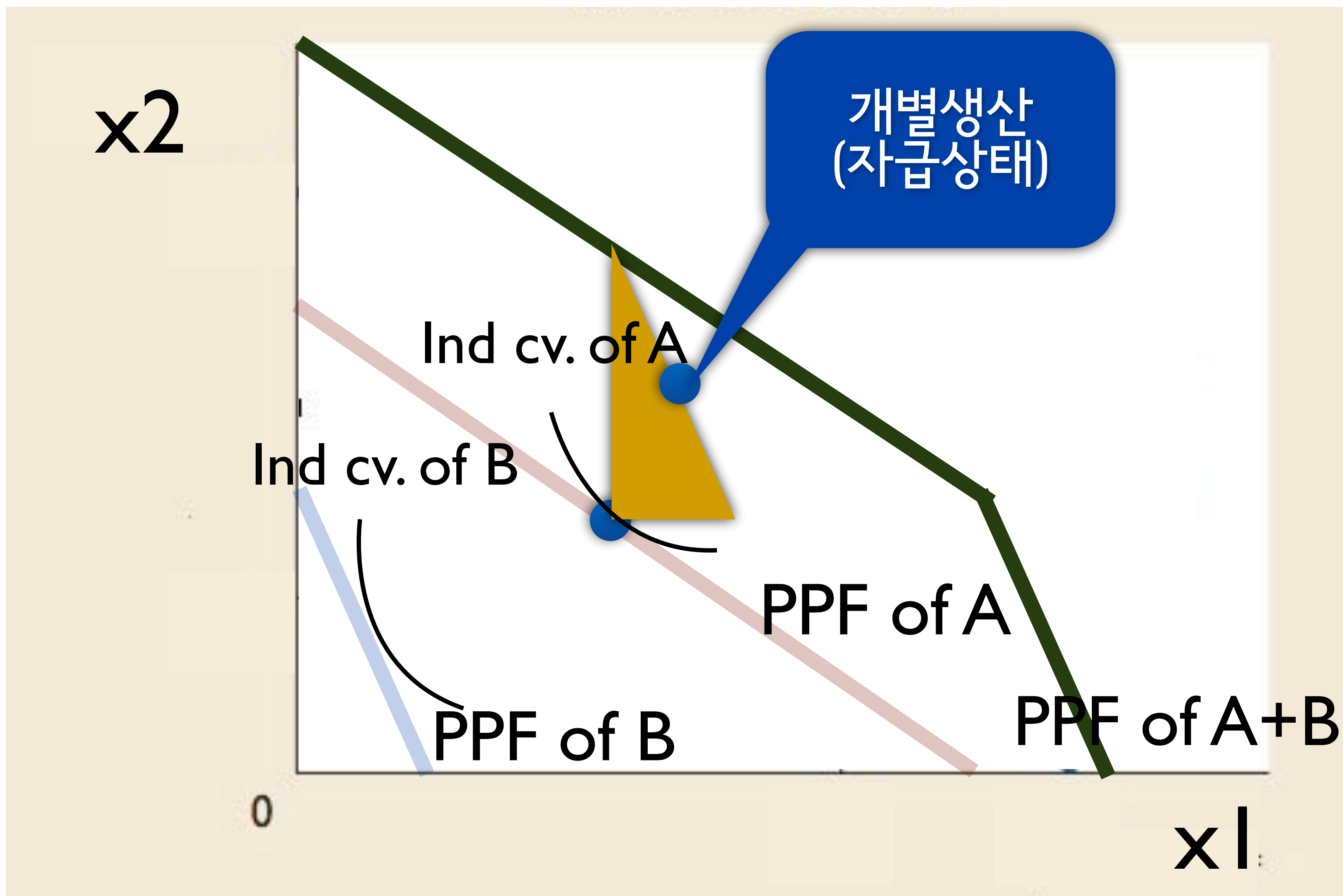
일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



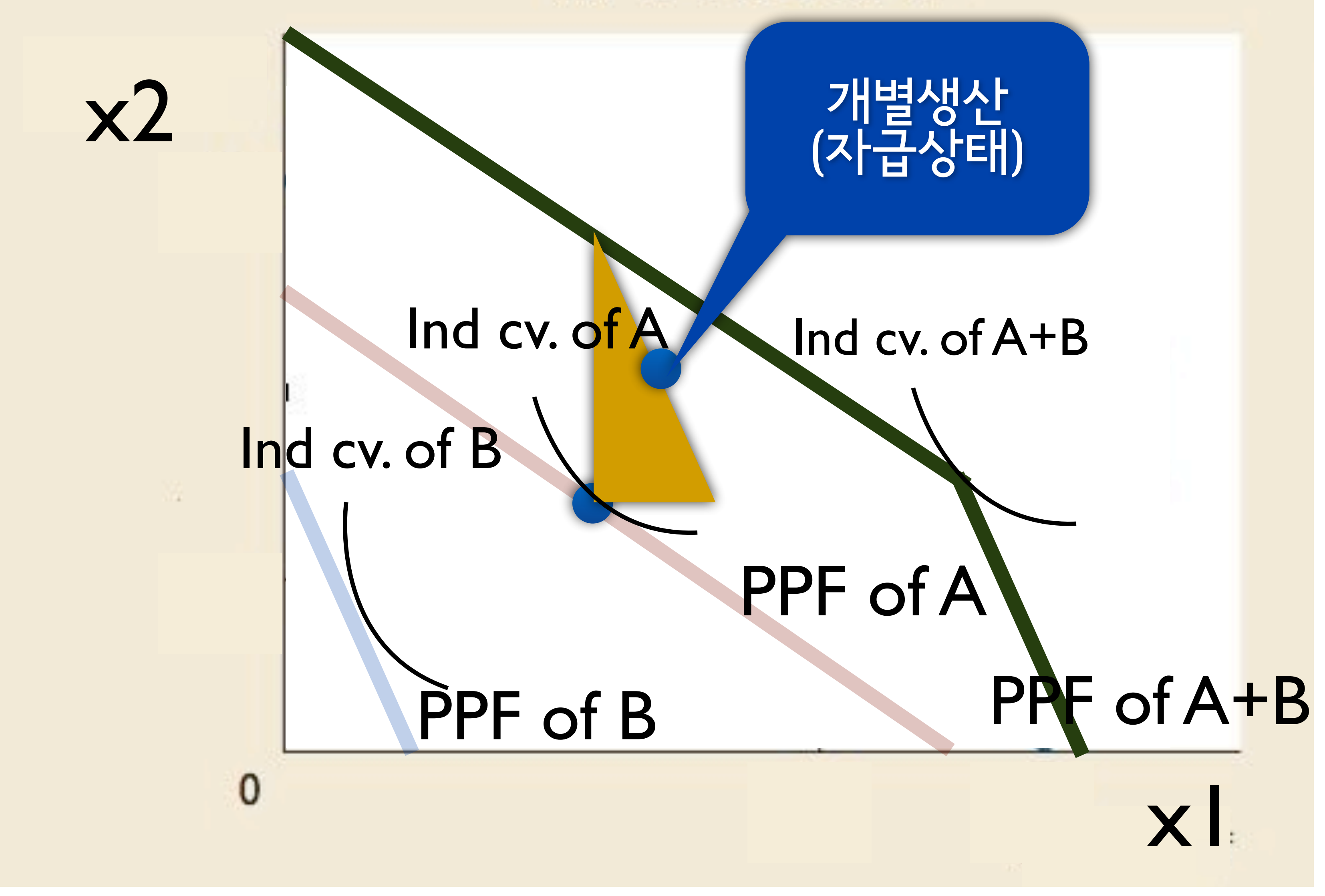
일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



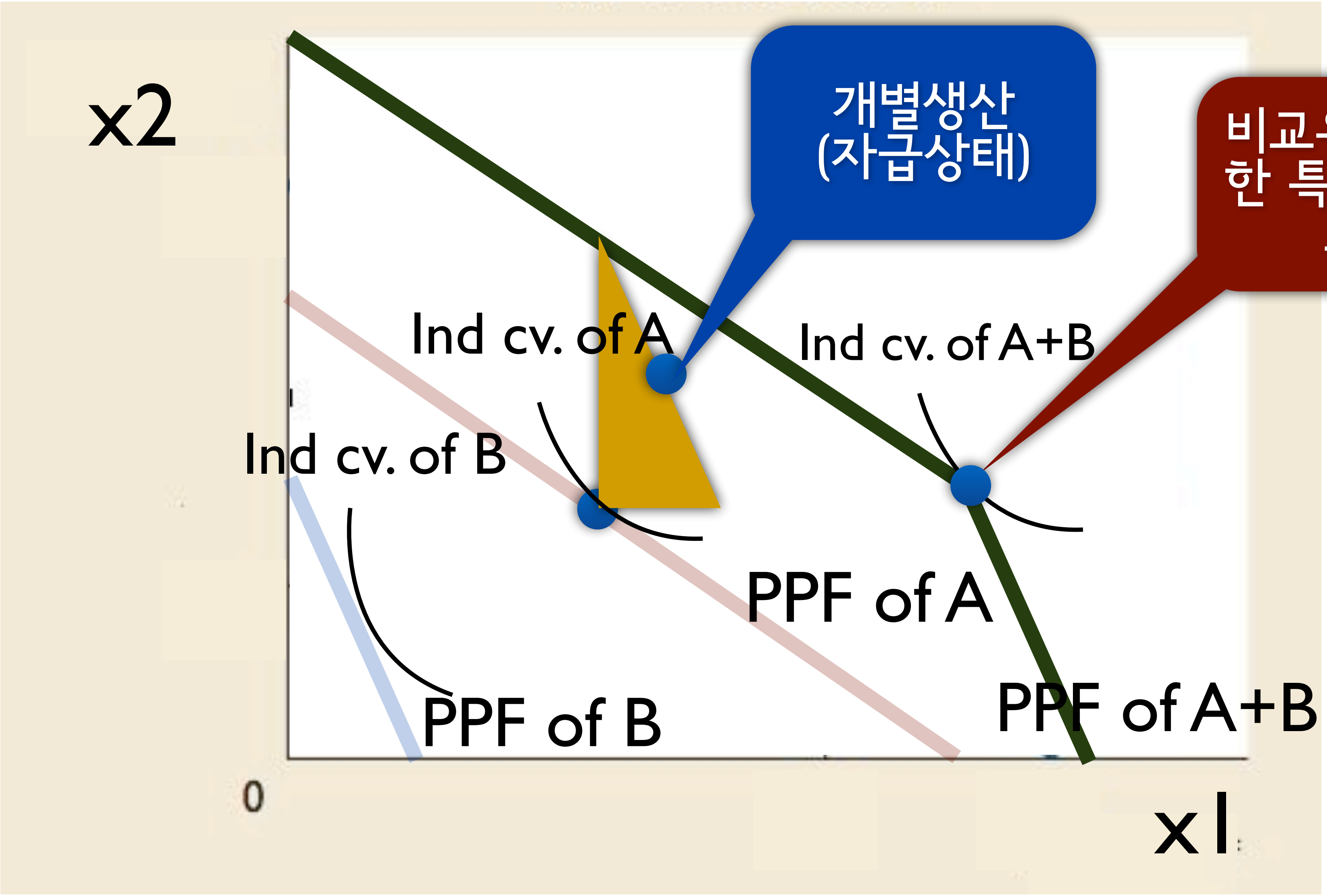
일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



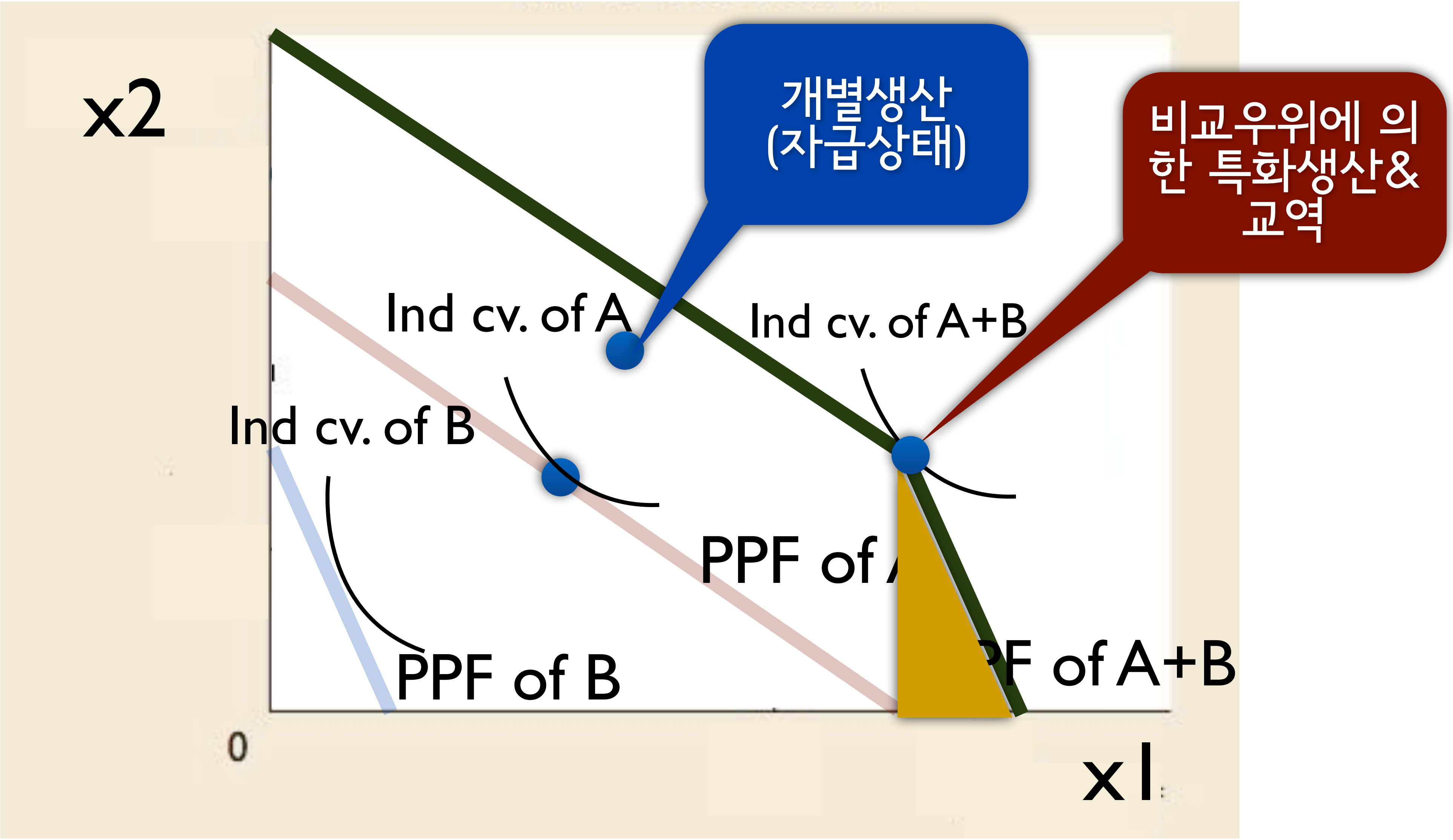
일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



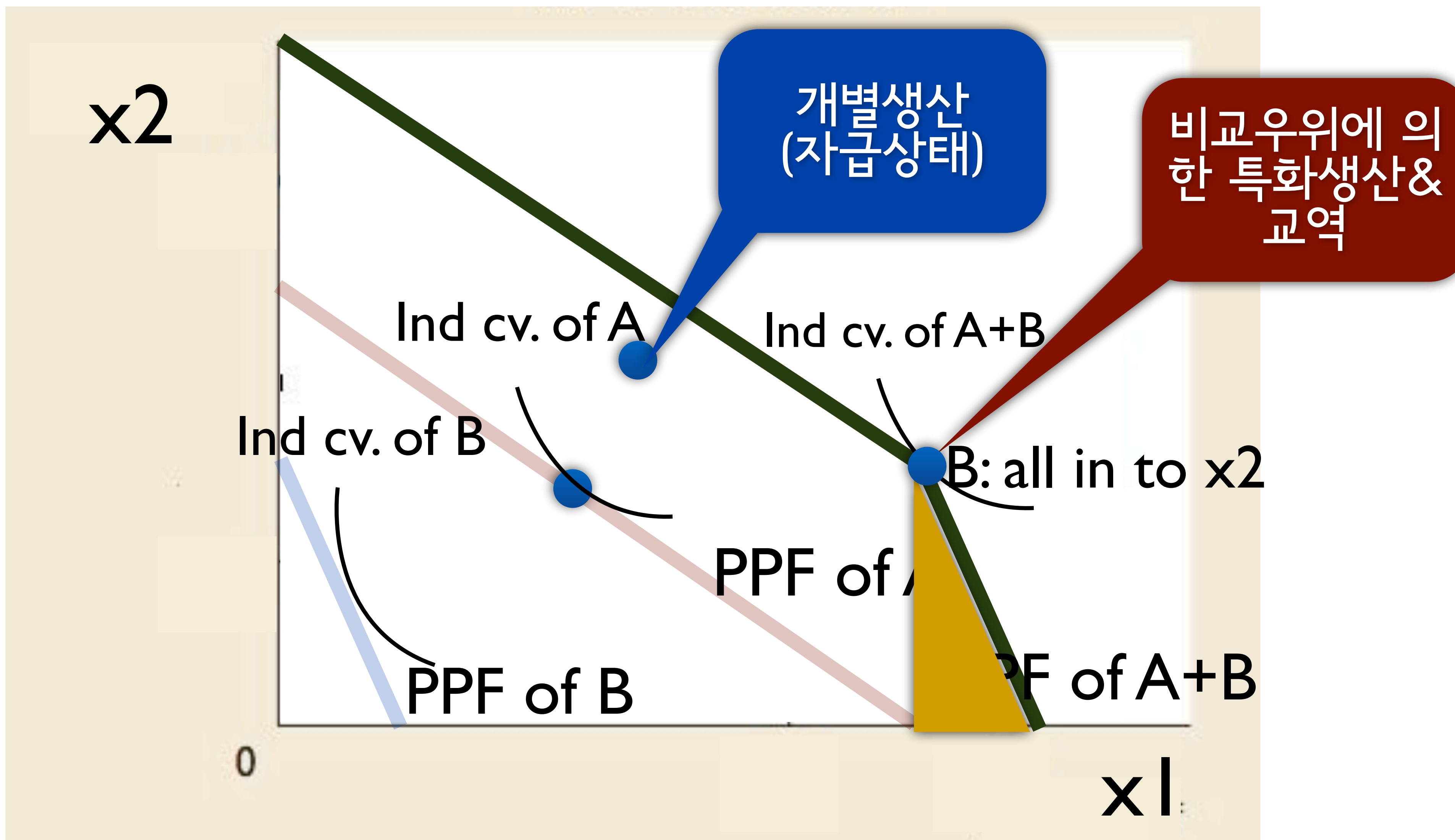
일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



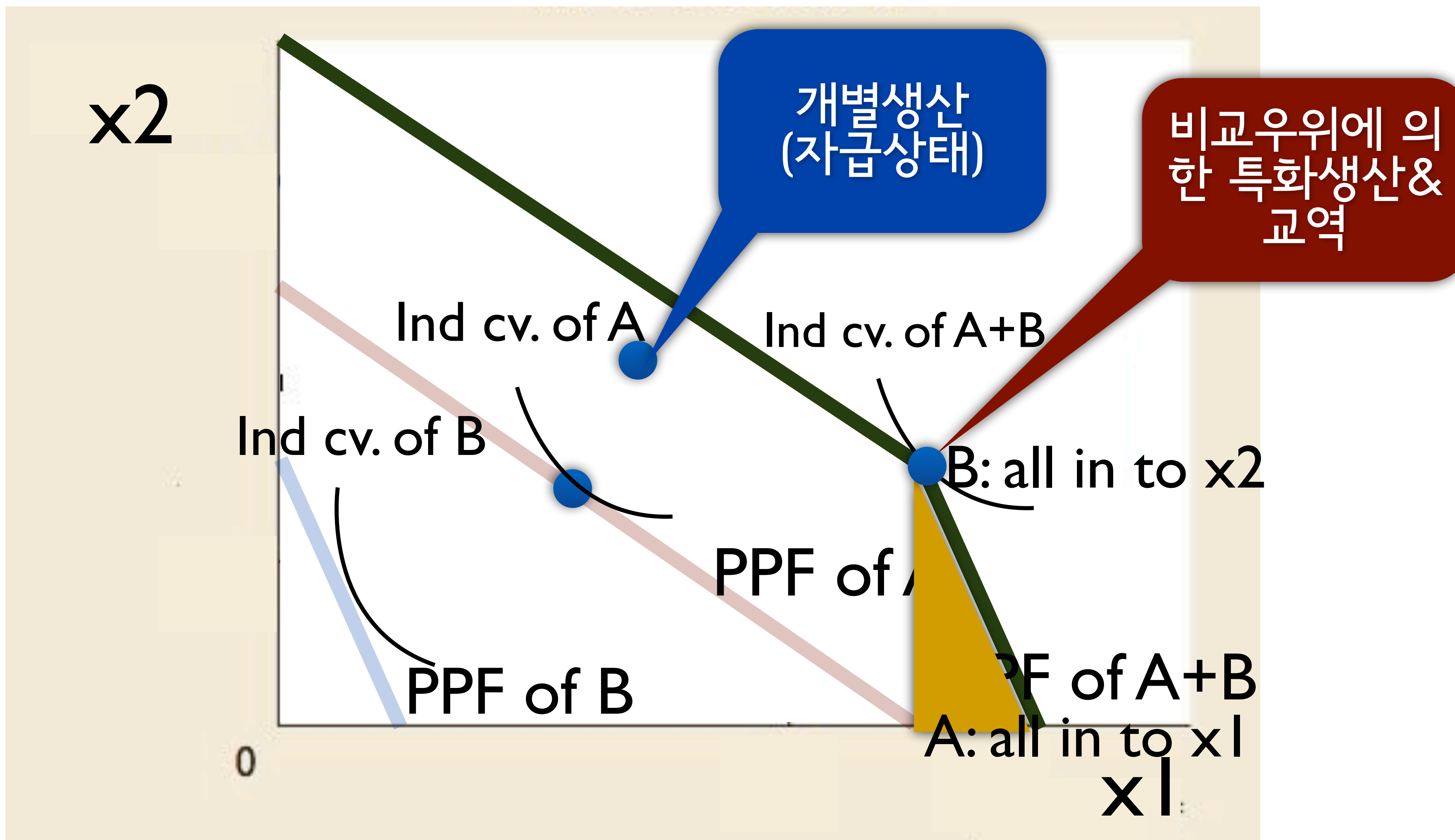
일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



일반화: A+B의 PPF: B가 모두 열등할 경우



비교우위론과 국제무역

- 같은 모형을 국제무역에 적용 가능
- 국가간 상품의 상대적 생산성 차이(상대적 우위: 비교우위) 존재
  - 저개발국: 노동집약적 산업에 상대우위 존재하는 경향
  - 선진국: 자본집약적 산업에 상대우위 경향

비교우위모형의 함의

- 설령 모든 면에서 절대우위가 있다 하더라도 상대적으로 더 생산성이 있는 부문에 집중해서 생산하고 교역하는 것이 단독생산보다 더 유리하다.
- 제조업이 신흥산업국에, 고부가가치산업이나 고급서비스업이 선진국에 특화되는 현상을 설명하는 모델
- 반론: 사다리 걷어차기(장하준)

모형의 응용

Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

실증적 경제학과 규범적 경제학

- 실증적 경제학(Descriptive economics):
  - 실제 관찰되는 경제학적 과정을 설명
  - "왜, 어떻게 그러한 현상이 발생/전개/소멸하는가?"
- 규범적 경제학(Normative economics):
  - 경제학적 처방에 대한 판단, 혹은 경제학적 정책에 대한 의사결정과 연관
  - "무엇을 어떻게 하는 것이 가장 나은가?"

정책 판단의 요소

- 파레토 개선: 다른 결과들은 나빠지지 않고 최소한 한 결과는 개선되는 경우
    - 정책 A의 결과가 정책 B의 결과와 비교했을 때 파레토 개선이라고 볼 수 있는 경우 정책 A가 우월 -- 개선에 대한 분석의 출발
- 문제는 파레토 개선이 가능하지 않은 경우의 존재:
    - trade-off: 어떤 측면은 개선되지만 다른 측면이 개악되는 경우
        - 일반적으로는 이러한 상황이 일반적
        - 파레토 효율성 개념으로는 판단 불가능

Next Topics

- 다변수함수의 미분

다변수함수의 미분

Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr

주제

슬라이드는 경제수학의 것을 일부 발췌함
전체버젼: https://github.com/z0nam/EconMathNote

- 1변수함수의 미분
- 벡터기초
- 다변수함수
- 다변수함수의 미분
- 무차별곡선

기울기와 미분

Definition (Slope of Linear function f)

$$Slope := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Definition (Derivative at $(\bar{x}_0, f(\bar{x}_0))$)

$f'(\bar{x}_0)$:= *Derivative of f at $(\bar{x}_0, f(\bar{x}_0))$ is the slope of the tangent line to the graph of f at $(\bar{x}_0, f(\bar{x}_0))$. i.e.,*

$$f'(\bar{x}_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h) - f(\bar{x}_0)}{h}$$

- Alternative Notations

$$f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0) \equiv \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

미분의 기하학적 의미

Theorem (3.2)

1. $f' > 0$ on $(\bar{a}, \bar{b}) \subset D \Rightarrow f$ is increasing on $(\bar{a}, \bar{b})$
2. $f' < 0$ on $(\bar{a}, \bar{b}) \subset D \Rightarrow f$ is decreasing on $(\bar{a}, \bar{b})$
3. f is increasing on $(\bar{a}, \bar{b}) \Rightarrow f' \geq 0$ on $(\bar{a}, \bar{b})$
4. f is decreasing on $(\bar{a}, \bar{b}) \Rightarrow f' \leq 0$ on $(\bar{a}, \bar{b})$

2계미분

Definition (Second Derivative of $f \in \mathbf{C}^2$)

$$f'' := (f')' \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}$$

- $\mathbf{C}^3$

$$f''', \quad \frac{d^3 f}{dx^3}$$

- $\mathbf{C}^k$

$$f^{(k)}, \quad \frac{d^k f}{dx^k}$$

- Polynomial is $\mathbf{C}^\infty$

벡터

Objects in n-dimensional Euclidean Spaces

Dimension	Object	Representation
0	point	$\emptyset$
1	line	$x_1 \in \mathbb{R}^1$
2	plane	$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
3	3d space	$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$
n	nd space	$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

벡터의 기본연산

Let $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ be the vectors in $\mathbb{R}^n$ space and $u_i, v_i \in \mathbb{R}^1$ be their i-th element.

Definition ($\pm$ of vectors)

$$(\mathbf{u} \pm \mathbf{v})_i := u_i \pm v_i \quad \forall i$$

or,

$$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} := (u_1 \pm v_1, \cdots, u_n \pm v_n)$$

Let r, s be scalars (or real numbers). $i.e.$, $r, s \in \mathbb{R}^1$.

Definition (Scalar Multiplication)

$$(r\mathbf{u})_i := ru_i \quad \forall i$$

다변수함수

Definition (Function, Domain, Target, Image: General Definitions)

Function $f : A \to B$ *is a rule that assigns each object of* A *(domain) to one object in* B *(target space). Image of* f *is* $\{f(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in A\} \subset B$

Examples: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{a}} \bullet \mathbf{x} \qquad \text{(Linear)}$$

$$f(\mathbf{x}) = \bar{k} \prod_i x_i^{\bar{b}_i} \qquad \text{(Cobb-Douglas)}$$

$$f(\mathbf{x}) = \bar{k} \left(\sum_i \bar{c}_i x_i^{-\bar{a}} \right)^{-\bar{b}/\bar{a}} \qquad \text{(CES)}$$

Level Curves

Level Curves

Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$. Then level curves of f are curves on domain space with same $f(\mathbf{x})$. *I.e.*,

$$\{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) = \bar{c}\}$$

- Isoquant: level curve of production function
- Indifference curve: level curve of utility function
- Generally, when $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ it is called level set and this is k dimensional nonlinear object

편미분

Let $f : D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and $\mathbf{e_i}$ be a vector whose i th element is 1 and others are 0.

$$\mathbf{e_i} := (\overbrace{0, 0, \cdots, 0, 1}^{i}, 0, \cdots, 0)$$

Definition (Partial Derivative)

Partial derivative at $\bar{\mathbf{x}}_0 \in D$ is

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{\mathbf{x_0}} + h\mathbf{e_i}) - f(\overline{\mathbf{x_0}})}{h}$$

When $n = 1$, partial derivative is equivalent to derivative of one variable function.

Calculation Procedure

- Treat x_i as the only variable in f
- Treat x_{-i} as constant

편미분의 기하학적 의미

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

- Think of $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$.
- If $x_2 = \bar{x}_2$, $f(x_1, \bar{x}_2)$ is equivalent to one variable function $\tilde{f}(x_1) = x_1^2 + \bar{x}_2^2$.
- Graph of $\tilde{f}$ is intersection of the graph of f with the slice $x_2 = \bar{x}_2$.
- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}(\bar{x}_1)$ is the slope of $\tilde{f}$ on $\bar{x}_1$, slope of the tangent line to the curve $\tilde{f}$ (on the plane $x_2 = \bar{x}_2$)

편미분의 기하학적 의미

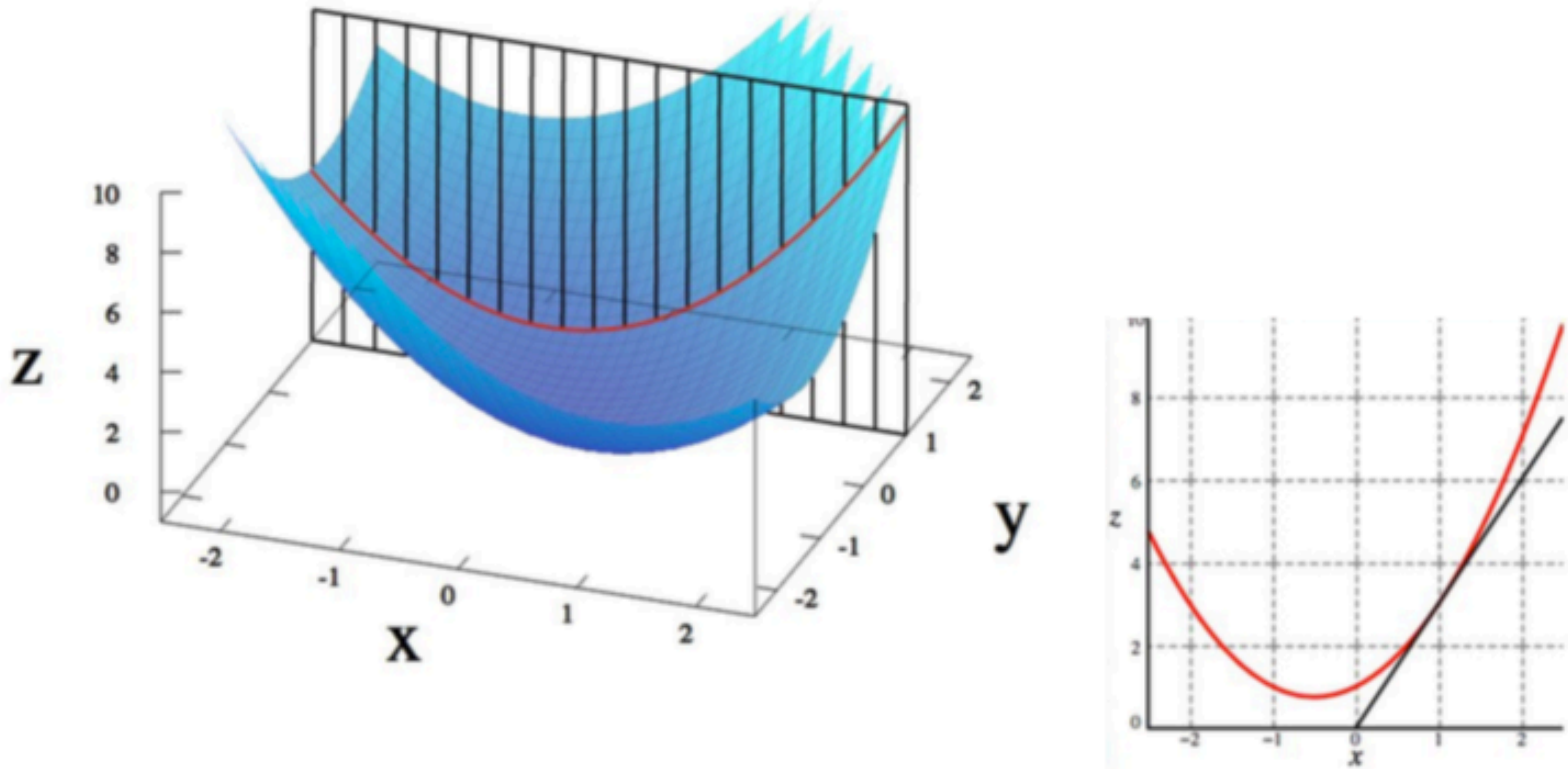


Figure: Graph of $z = x^2 + xy + y^2$ with intersection $y = 1$

다변수함수의 1계미분

Changes in All Direction: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$

Let $d\mathbf{x} = (dx_1, \cdots, dx_n)$ and $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, differentiable. Then small change of $d\mathbf{x}$ will cause small change of $df = f(\bar{\mathbf{x}} + d\bar{\mathbf{x}}) - f(\bar{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}$ and

$$df = f(\bar{\mathbf{x}} + d\bar{\mathbf{x}}) - f(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}})dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}})dx_n = Df_{\mathbf{x}}d\mathbf{x}$$

And $Df_{\mathbf{x}} := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) \right)$: (Jacobian) derivative of f at $\bar{\mathbf{x}}$ or The linear approximation of f at $\bar{\mathbf{x}}$, or Gradient vector ∇f

Note: In this case, $Df_{\mathbf{x}}$ is a vector or $1 \times n$ matrix.

다변수함수의 2계미분 (Hessian)

Definition

Hessian matrix

$$D^2 f_{\mathbf{x}} = D(Df)_{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Theorem (14.5:Young's theorem)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j$$

This means hessian is symmetric.

정부호성

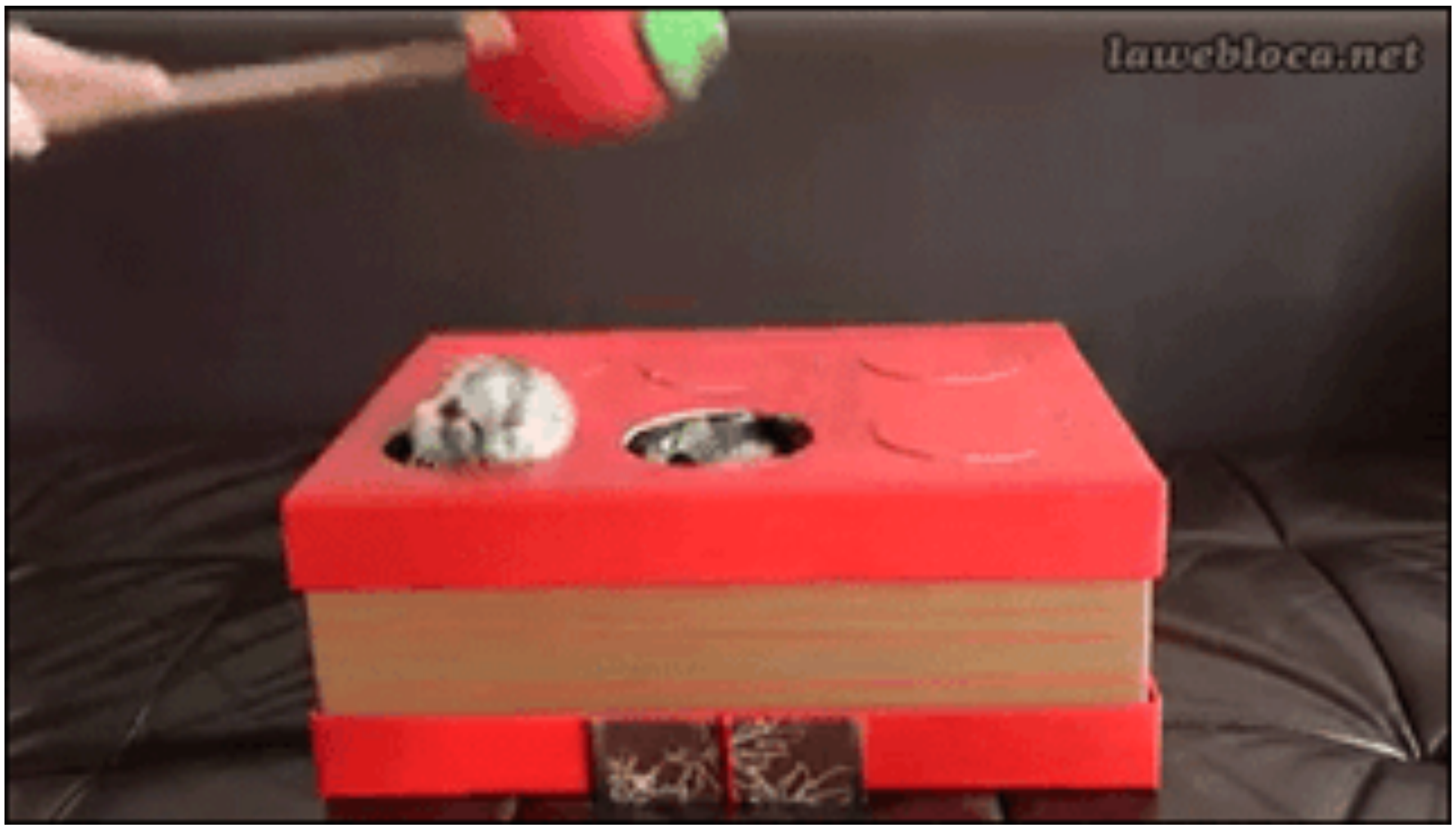
Definiteness: Overview

When $Q = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ and A is a diagonal matrix

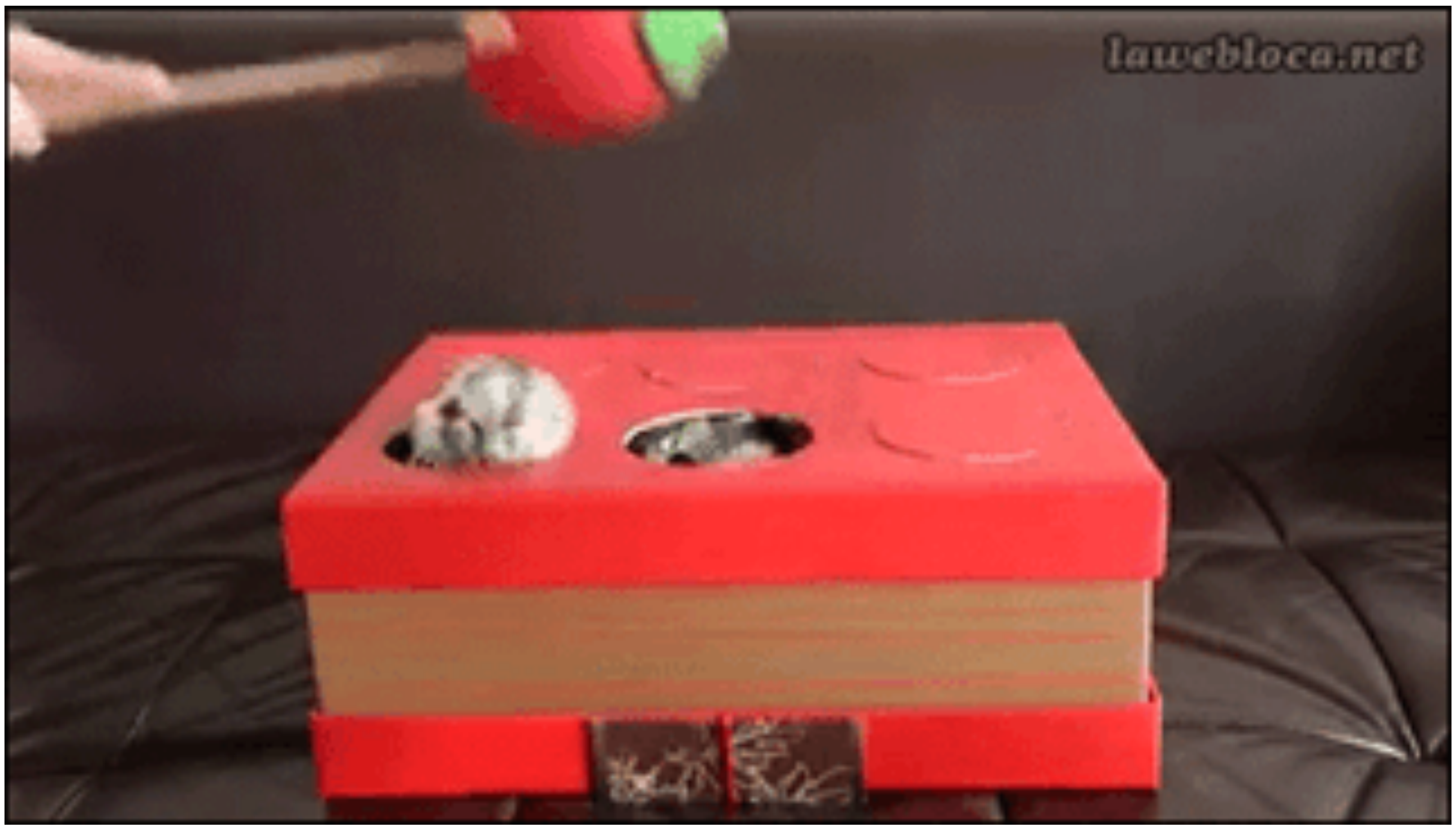
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Positive Definite (PD): $a_{ii} > 0 \quad \forall i$
- Positive Semi Definite (PSD): $a_{ii} \geq 0 \quad \forall i$
- Negative Definite (ND): $a_{ii} < 0 \quad \forall i$
- Negative Semi Definite (NSD): $a_{ii} \leq 0 \quad \forall i$
- Indefinite (ID): $a_{ii} < 0$ for some i, and $a_{ii} > 0$ for some i

수고하셨습니다!



수고하셨습니다!



Namun Cho/ mailto:namun@snu.ac.kr