УДК 004.825

Приближение оценки числа слоев без циклов в задаче нечеткого LP-вывода*

А.Н. Шмарин – *аспирант, Воронежский госуниверситет (ВГУ)*
E-mail: tim-shr@mail.ru
С.Д. Махортов – *д.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой, Воронежский госуниверситет (ВГУ)*
E-mail: sd@expert.vrn.ru

Рассмотрена взаимосвязь между структурными свойствами отношения на решетке в LP-структуре и числом его слоев без циклов. Исследованы особенности и способ построения фундаментальной системы циклов по бинарному отношению. Выведена формула для нахождения числа слоев без циклов на основе мощностей элементов разбиения бинарного отношения по уникальным правым частям. Описана зависимость скорости его роста от входящих в формулу компонент.

Ключевые слова: *фундаментальная система циклов, LP-вывод, И-ИЛИ граф, алгебраическая решетка, бинарное отношение, LP-структура, продукционная модель представления знаний.*

The relationship between the structural properties of the grid relation in the LP-structure and the number of layers without cycles is considered. The method of constructing the fundamental system of cycles for the given binary relation is investigated. The formula for finding the number of layers without cycles on the cardinality of partition of the binary relation by unique right parts is defined. The dependence of the rate of its growth on its components is described.

Keywords: *fundamental system of cycles, LP-inference, AND-OR graph, algebraic lattice, binary relation, LP-structure, product model of knowledge representation.*

С увеличением объемов и сложности обрабатываемой информации все более актуальным становится использование систем искусственного интеллекта. При этом одной из наиболее распространенных моделей представления знаний является продукционная [1]. Алгоритмы поиска решения в таких системах основаны на механизме логического вывода. На практике существует множество задач, для которых получение информации о состоянии предметной области является трудоемкой операцией. Например, таковыми могут быть запрос к СУБД, анализ медицинских данных или сложная последовательность вычислений. Зачастую в подобных задачах решение (либо множество возможных решений) ищут, зная лишь часть информации о состоянии предметной области. В силу данного обстоятельства требуется оптимально использовать ограниченные ресурсы.

Существуют задачи управления сложными объектами со случайными процессами (управление рисками, социально-экономическими системами), в которых управление основано на логико-вероятностной модели представления знаний. Для них результат управляющего воздействия можно предсказать лишь с некоторой вероятностью. В таких ситуациях необходимо поддерживать или приводить систему в заданное состояние, прилагая как можно меньше управляющих воздействий. С этим фактором также связана задача минимизации числа запросов на получение информации о состоянии предметной области в ходе логического вывода. Данная задача является NP-трудной [2]. Здесь для достижения глобальной минимизации существует общий метод LP-вывода [3], к сожалению, обладающий экспоненциальной вычислительной сложностью относительно числа атомарных фактов в базе знаний. Однако некоторые его модификации имеют полиномиальную сложность [4]. Идея кластерно-релевантного LP-вывода [5–6] основана на вычислении специфических оценок (показателей релевантности) для ограниченного подмножества продукций и обобщении полученных оценок на все множество продукций.

В настоящей работе вводятся эвристические оценки, позволяющие учитывать структурные взаимосвязи в множестве продукций, и тем самым улучшить степень минимизации числа запросов, выполняемых в процессе логического вывода.

---

* Статья рекомендована к публикации оргкомитетом XIII Всероссийской научной конференции «Нейрокомпьютеры и их применение» (Москва, 17 марта 2015 г.).

Взаимосвязь мощности бинарного отношения и мощности его расслоения

Пусть задано конечное множество F. На его основе построим булеан – атомно-порожденную ограниченную алгебраическую решетку L. На решетке зададим бинарное отношение R, являющееся каноническим [5], т.е. $R=\{(A,a),\ \text{где}\ A\in L, a\in F\}$.

Применительно к продукционным системам такое отношение R соответствует множеству продукций, F (множество атомов решетки) соответствует элементарным фактам продукционной системы, а решетка L соответствует множеству предпосылок и заключений продукций.

Рассмотрим структуру элементов отношения R. Каждый $r_i \in R$ можно представить следующим образом:

$$r_i : L \to F\ ,\ r_i : \left[\left(f_{i,1},...,f_{i,k_i}\right), f_{i,k_{i+1}}\right] = f_{i,1}\wedge ...\wedge f_{i,k_i} \to f_{i,k_i+1},\ 1\le k_i \le |F|,$$

$$f_{i,j}\in F,\ 1\le i\le |R|,\ 1\le j\le k+1.$$

Число всевозможных элементов канонического отношения по определению не может превышать числа элементов решетки, умноженному на число атомов, а число элементов в решетке не может превышать мощности булеана [7]: $|R|\le |F||L|\le |F|2^{|F|}$.

Обозначим F': $R \to L$ – множество атомов решетки, являющихся правыми частями элементов отношения R, т. е.

$$F' = \bigcup_{i=1}^{|R|}\left\{a \mid r_i = (A,a), A\in L, a\in F\right\}, F'\subseteq F..$$

Из [3] известно понятие структурного расслоения исходного отношения R на виртуальные слои (частичные отношения). Оно определяется следующим образом. Построим разбиение отношения R на классы эквивалентности относительно уникальных правых частей. Разобьем R на непересекающиеся подмножества, каждое из которых образовано парами вида (A, x_p) с одним и тем же x_p в качестве правой части:

$$A=\left\{a_1...a_{|F'|}\right\},\ a_i=\left\{r \mid \mathrm{right}(r)=f_i'\in F', i=1...|F'|\right\}.$$

Выборка по одному элементу из каждого класса эквивалентности α_i называется слоем отношения R. Общее число слоев равно

$$\prod_{i=1}^{|F'|}\binom{|a_i|}{1}=\prod_{i=1}^{|F'|}|a_i|.$$

Замечание 1. Соотношение числа атомов решетки, пар в отношении R и слоев имеет следующий вид:

$$|R|=|a_1|+...+\left|a_{|F'|}\right|<|a_1|\cdot ...\cdot \left|a_{|F'|}\right|.$$

Поскольку левая часть каждой пары отношения является элементом решетки, то верхняя оценка количества элементов в отношении равна произведению числа атомов решетки на число ее элементов, т.е. $|R| <= |F||L| = O(|F|2^{|F|}) = O(2^{|F|\ln(|F|)})$.

Число всевозможных слоев равно числу всевозможных выборок по одному элементу из каждого элемента разбиения. В силу того, что разбиение выполняется по уникальным правым частям отношения (которые являются атомами решетки) – число элементов в разбиении не может превышать числа атомов решетки. Таким образом, верхняя оценка количества слоев равна $O\left[\left(\max\limits_{i=1...|F'|}|a_i|\right)^{|F'|}\right]$. Поскольку $\exists c\,\forall a_i, 1<i<|F'| : |R|\le c|a_i|$, то $O\left[\left(\max\limits_{i=1...|F'|}|a_i|\right)^{|F'|}\right]=O\left(|R|^{|F'|}\right)=O\left(2^{|F|^2\ln(|F|)}\right)$.

Другими словами, число слоев имеет степенной порядок роста относительно числа элементов отношения R.

Фундаментальная система циклов канонического бинарного отношения

Представим элементы отношения R в виде продукций и построим на их основе И-ИЛИ граф [8], который обозначим символом G. Рассматривая данный граф как обычный (т. е. не учитывая объединение групп дуг И-отношением), построим по графу G фундаментальную систему циклов [9]

$$E = \begin{cases} e_1 = \left(\left(f_{1,1}, f_{1,2}\right), \ldots, \left(f_{1,n_1-1}, f_{1,n_1}\right), \left(f_{1,n_1}, f_{1,1}\right)\right), \\ \ldots \\ e_N = \left(\left(f_{N,1}, f_{N,2}\right), \ldots, \left(f_{N,n_N-1}, f_{N,n_N}\right), \left(f_{N,n_N}, f_{N,1}\right)\right), \end{cases}$$

где $f_{i,j}$ – узлы графа G; а пары $(f_{i,j},f_{i,k})$ – дуги графа G.

Узлы фундаментальной системы циклов всегда имеют входящие в них дуги и, следовательно, представляют собой И-узлы (т.е. не являются листьями графа).

Преобразуем полученную фундаментальную систему циклов в систему элементов отношения R. Для этого введем отображение, переводящее два атома решетки в множество всех таких пар отношения R, что первый атом входит в левую часть пары, а второй – является правой частью пары:

$$\mathrm{Pairs}(f,g): F^2 \to \lambda(R),\ \mathrm{Pairs}(f,g) = \left\{r = (A,g) \mid f \in A, A \in L\right\}.$$

Множество пар, получаемое с помощью Pairs(f,g) может содержать более одного элемента. В этом случае для исходного вектора фундаментальной системы циклов нужно создавать несколько преобразованных элементов R. Таким образом, преобразованную систему циклов следует определить следующим образом:

$$E' = \left\{ \bigcup_{i=1}^{|E|} \left[\mathrm{Pairs}\left(f_{i,1}, f_{i,2}\right) \times \ldots \times Pairs\left(f_{i,n_i-1}, f_{i,n_i}\right) \times Pairs\left(f_{i,n_i}, f_{i,1}\right) \right] \right\},$$

где × – операция декартова произведения.

Определение 1. Множество E' будем называть фундаментальной системой циклов канонического бинарного отношения R.

Построения разбиения, описывающего только слои с циклами

Разбиение A отношения R относительно уникальных правых частей позволяет описать всевозможные слои данного отношения. Далее будет представлен способ преобразования разбиения A в структуру, описывающую все слои с циклами без их явного построения.

Пусть $\varepsilon \subset E', \varepsilon = \left\{e' \in E'\right\}$ – подмножество фундаментальных циклов канонического бинарного отношения R, $\dot{\varepsilon} = \bigcup_{e' \in \varepsilon} \bigcup_{r \in e'} r$ – объединение всех пар бинарного отношения, формирующих элементы данного подмножества ε. Определим сужение разбиения A, описывающее всевозможные слои, которые содержат только фундаментальные циклы из множества ε:

$$\theta(a_i, \varepsilon) = \begin{cases} a_i \cap \dot{\varepsilon}, \text{if } a_i \cap \dot{\varepsilon} \neq \varnothing, \\ a_i \text{ else}, \end{cases} \quad \Theta(A, \varepsilon) = \left\{\theta(a_1, \varepsilon), \ldots, \theta(a_N, \varepsilon)\right\}. \tag{1}$$

Очевидно, что слоев тем больше, чем больше мощность каждого класса эквивалентности разбиения A. Рассмотрим подмножество класса эквивалентности разбиения, содержащее только те элементы отношения R, что входят в циклы из ε. Это подмножество содержит элементов не больше, чем сам класс эквивалентности. С другой стороны, чем больше пар отношения R содержится в $\dot{\varepsilon}$, тем больше элементов будет в множествах $a_i \cap \dot{\varepsilon}$. Таким образом, для приближенного подсчета числа слоев целесообразно в первую очередь выбирать те ε, что содержат меньшее число фундаментальных циклов, и среди таких ε в первую очередь при подсчете учитывать те, которые содержат большее число пар отношения R.

Определение 2. right(r): $R \to F$ – функция, возвращающая атом решетки, являющийся правой частью r:

$$r=(A,a); A \in L; a \in F,\ \mathrm{right}(r)=\mathrm{right}((A,a))=a$$

Определение 3. left(r): $R \to F$ – функция, возвращающая элемент решетки, являющийся левой частью r:

$$\mathrm{left}(r)=\mathrm{left}((A,a))=A.$$

Докажем следующий полезный факт.

Утверждение. Если объединение слоев содержит цикл, то существует слой, содержащий в себе этот же цикл.

Доказательство. Пусть $l_1,\ldots,l_m$ – слои, объединение которых содержит цикл $(r_1 ... r_q) \in E'$, т.е.

$$r_i \in \bigcup_{k=1}^{m} l_k, 1 \le i \le q,\ \mathrm{right}(r_1) \in \mathrm{left}(r_2) \wedge \mathrm{right}(r_2) \in \mathrm{left}(r_3) \wedge \ldots \wedge \mathrm{right}(r_q) \in \mathrm{left}(r_1).$$

Без ограничения общности можно считать, что все правые части в правилах, образующих цикл, уникальны (в противном случае, цикл можно разбить на несколько более коротких циклов). Итак, цикл образуется из множества правил с уникальными правыми частями. Поэтому для двух элементов отношения R, имеющих различные правые части, всегда найдутся два соответствующих различных класса эквивалентности:

$$\forall i,j: 1 \le i,j \le q \wedge i \ne j : \mathrm{right}(r_i) \ne \mathrm{right}(r_j) \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in A, \alpha_1 \ne \alpha_2 \wedge r_i \in \alpha_1 \wedge r_j \in \alpha_2.$$

В силу сказанного, а также в силу того, что каждый слой есть выборка по одному элементу из классов эквивалентности $\alpha_1,\ldots,\alpha_{|F'|}$, следует существование слоя, содержащего цикл $(r_1,\ldots,r_q)$.

Следствие. Для любого подмножества циклов из фундаментальной системы найдется слой, содержащий это подмножество циклов. Иными словами, невозможна ситуация, когда цикл содержится лишь в объединении слоев.

Вычисление общего числа слоев

Рассмотрим ряд вспомогательных функций.

Функция $\mathrm{in}(\alpha, f)$ отображает класс эквивалентности α в множество пар, содержащих в свей левой части f:

$$\hbar(r,f)=\begin{cases}\{r\} \text{ if } f \in \mathrm{left}(r),\\ \varnothing \text{else},\end{cases} \quad \mathrm{in}(\alpha,f)=\left\{\bigcup_{r\in\alpha}\hbar(r,f)\right\}.$$

Функция $\overline{\mathrm{in}}(\alpha, f)$ отображает класс эквивалентности α в множество пар, не содержащих в своей левой части f:

$$\bar{\hbar}(r,f)=\begin{cases}\varnothing \text{ if } f \in \mathrm{left}(r),\\ \{r\} \text{else},\end{cases} \quad \overline{\mathrm{in}}(\alpha,f)=\left\{\bigcup_{r\in\alpha}\bar{\hbar}(r,f)\right\}=\alpha \setminus \mathrm{in}(\alpha,f).$$

Замечание 2. Без ограничения общности функции in и $\overline{\mathrm{in}}$ можно обобщить на все разбиение A:

$$\mathrm{in}(A,f)=\left\{\bigcup_{\alpha\in A}\mathrm{in}(\alpha,f)\right\},\ \overline{\mathrm{in}}(A,f)=\left\{\bigcup_{\alpha\in A}\overline{\mathrm{in}}(\alpha,f)\right\}.$$

Определим также следующее бинарное отношение:

$$\mathrm{in}^{-1}(\alpha,f)=\begin{cases}(\alpha, \mathrm{in}(\alpha,f) \text{if } \mathrm{in}(\alpha,f)\ne\varnothing),\\ \varnothing \text{else},\end{cases} \quad \mathrm{in}^{-1}(A,f)=\left\{\bigcup_{\alpha\in A}\left\{\mathrm{in}^{-1}(\alpha,f)\right\}\right\}.$$

И обобщим на него функции left и right:

$$\operatorname{left}\left(\operatorname{in}^{-1}(\alpha, f)\right)=\alpha,\ \operatorname{left}\left(\operatorname{in}^{-1}(A, f)\right)=\left\{\bigcup_{\alpha\in A}\left\{\operatorname{left}\left(\operatorname{in}^{-1}(\alpha, f)\right)\right\}\right\},$$

$$\operatorname{right}\left(\operatorname{in}^{-1}(\alpha, f)\right)=\operatorname{in}(\alpha, f),\ \operatorname{right}\left(\operatorname{in}^{-1}(A, f)\right)=\left\{\bigcup_{\alpha\in A}\left\{\operatorname{right}\left(\operatorname{in}^{-1}(\alpha, f)\right)\right\}\right\}.$$

Функция $\lambda(X,i), 1\le i\le |X|$ отображает множество X в множество всех его подмножеств из i элементов. Функция $\lambda(X,i,s), 1\le i\le |X|, 1\le s\le \binom{|X|}{i}$ отображает множество X в s-й элемент множества всех его i-элементных подмножеств. Функция $W(A,f,i)$ – число всевозможных слоев, построенных по разбиению A, и включающих в себя i раз атом f решетки L:

$$W(A, f, i)=\sum_{s=1}^{\binom{\left|\operatorname{in}^{-1}(A, f)\right|}{i}}\left(\prod_{\beta\in\operatorname{right}\left(\lambda\left(\operatorname{in}^{-1}(A, f), i, s\right)\right)}|\beta|\cdot\prod_{\gamma\in\overline{in}\left(A\setminus\operatorname{left}\left(\lambda\left(\operatorname{in}^{-1}(A, f), i, s\right)\right), f\right)}|\gamma|\right). \qquad (2)$$

Очевидно, что общее число слоев в подмножествах-перестановках будет тем больше, чем больше имеется подмножеств-перестановок.

Пример определения числа слоев, содержащих заданный атом решетки, на основе разбиения бинарного отношения

Для упрощения дальнейшего изложения введем следующее обозначение:

$$\Omega(A)=\left(|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_{|A|}|\right).$$

Пусть задано разбиение бинарного отношения A, состоящее из десяти элементов:

$$A=\{\alpha_1\ldots\alpha_{10}\}$$

Пусть также задано число пар в элементах разбиения A:

$$\Omega(A)=(4\quad 4\quad 2\quad 3\quad 4\quad 3\quad 4\quad 1\quad 3\quad 4),$$

а атом f входит один раз в α_1, два раза в α_4, один раз в α_5 и два раза в α_{10}. Исследуем число слоев, содержащих f для всех выборок. Для краткости введем обозначения

$$\beta_i=\operatorname{in}(\alpha_i, f);\ \gamma_i=\overline{\operatorname{in}}(\alpha_i, f).$$

Тогда получим следующие соотношения:

$$\Omega\left(\{\beta_1,\ldots,\beta_{10}\}\right)=(1\quad 0\quad 0\quad 2\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 2),$$

$$\Omega\left(\{\gamma_1,\ldots,\gamma_{10}\}\right)=(3\quad 4\quad 2\quad 1\quad 3\quad 3\quad 4\quad 1\quad 3\quad 2),$$

$$\operatorname{in}(A, f)=\{\beta_1,\beta_4,\beta_5,\beta_{10}\},\ \operatorname{right}\left(\lambda\left(\operatorname{in}^{-1}(A, f), 1\right)\right)=\left\{\{\beta_1\},\{\beta_4\},\{\beta_5\},\{\beta_{10}\}\right\},$$

$$\overline{\operatorname{in}}\left(A\setminus\{\alpha_1\}, f\right)=\{\gamma_2,\ldots,\gamma_{10}\},\ \overline{\operatorname{in}}\left(A\setminus\{\alpha_4\}, f\right)=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_3,\gamma_5,\ldots,\gamma_{10}\},$$

$$\overline{\operatorname{in}}\left(A\setminus\{\alpha_5\}, f\right)=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_4,\gamma_6,\ldots,\gamma_{10}\},\ \overline{\operatorname{in}}\left(A\setminus\{\alpha_{10}\}, f\right)=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_9\},$$

$$\operatorname{right}\left(\lambda\left(\operatorname{in}^{-1}(A, f), 2\right)\right)=\left\{\{\beta_1,\beta_4\},\{\beta_1,\beta_5\},\{\beta_1,\beta_{10}\},\{\beta_4,\beta_5\},\{\beta_4,\beta_{10}\},\{\beta_5,\beta_{10}\}\right\},$$

$$\overline{\operatorname{in}}\left(A\setminus\{\alpha_1,\alpha_4\}, f\right)=\{\gamma_2,\gamma_3,\gamma_5,\ldots,\gamma_{10}\},\ \overline{\operatorname{in}}\left(A\setminus\{\alpha_1,\alpha_5\}, f\right)=\{\gamma_2,\ldots,\gamma_4,\gamma_6,\ldots,\gamma_{10}\},$$

$$\overline{\operatorname{in}}\left(A\setminus\{\alpha_1,\alpha_{10}\}, f\right)=\{\gamma_2,\ldots,\gamma_9\},\ \overline{\operatorname{in}}\left(A\setminus\{\alpha_4,\alpha_5\}, f\right)=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_3,\gamma_6,\ldots,\gamma_{10}\},$$

$$\overline{\operatorname{in}}\left(A\setminus\{\alpha_4,\alpha_{10}\}, f\right)=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_3,\gamma_5,\ldots,\gamma_9\},\ \overline{\operatorname{in}}\left(A\setminus\{\alpha_5,\alpha_{10}\}, f\right)=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_4,\gamma_6,\ldots,\gamma_9\},$$

$$\text{right}\Big(\lambda\Big(in^{-1}(A,f),3\Big)\Big)=\big\{\{\beta_1,\beta_4,\beta_5\},\{\beta_1,\beta_5,\beta_{10}\},\{\beta_1,\beta_4,\beta_{10}\},\{\beta_4,\beta_5,\beta_{10}\}\big\},$$

$$\overline{\text{in}}\big(A\setminus\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5\},f\big)=\{\gamma_2,\gamma_3,\gamma_6,...,\gamma_{10}\},\ \overline{\text{in}}\big(A\setminus\{\alpha_1,\alpha_5,\alpha_{10}\},f\big)=\{\gamma_2,...,\gamma_4,\gamma_6,...,\gamma_9\},$$

$$\overline{\text{in}}\big(A\setminus\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_{10}\},f\big)=\{\gamma_2,...,\gamma_3,\gamma_5,...,\gamma_9\},\ \overline{\text{in}}\big(A\setminus\{\alpha_4,\alpha_5,\alpha_{10}\},f\big)=\{\gamma_1,...,\gamma_3,\gamma_6,...,\gamma_9\},$$

$$\text{right}\Big(\lambda\Big(\text{in}^{-1}(A,f),4\Big)\Big)=\big\{\{\beta_1,\beta_4,\beta_5,\beta_{10}\}\big\},\ \overline{\text{in}}\big(A\setminus\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_{10}\},f\big)=\{\gamma_2,\gamma_3,\gamma_6,...,\gamma_9\},$$

$$W(A,f,1)=\begin{array}{r}1\cdot4\cdot2\cdot1\cdot3\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2\\ +\ 3\cdot4\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2\\ +\ 3\cdot4\cdot2\cdot1\cdot1\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2\\ +\ 3\cdot4\cdot2\cdot1\cdot3\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2\end{array}=19008,\ W(A,f,2)=\begin{array}{r}1\cdot4\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2\\ +\ 1\cdot4\cdot2\cdot1\cdot1\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2\\ +\ 1\cdot4\cdot2\cdot1\cdot3\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2\\ +\ 3\cdot4\cdot2\cdot2\cdot1\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2\\ +\ 3\cdot4\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2\\ +\ 3\cdot4\cdot2\cdot1\cdot1\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2\end{array}=21312,$$

$$W(A,f,3)=\begin{array}{r}1\cdot4\cdot2\cdot2\cdot1\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2\\ +\ 1\cdot4\cdot2\cdot1\cdot1\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2\\ +\ 1\cdot4\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2\\ +\ 3\cdot4\cdot2\cdot2\cdot1\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2\end{array}=8640,\ W(A,f,4)=1\cdot4\cdot2\cdot2\cdot1\cdot3\cdot4\cdot1\cdot3\cdot2=1152.$$

В данном примере $W(A,f,4)<W(A,f,3)<W(A,f,1)<W(A,f,2)$.

Очевидно, что значение $W(A,f,i)$ (число слоев в выборке) тем больше, чем больше элементов в $\lambda(\text{in}^{-1}(A,f),i)$, т.е. чем больше значение биномиального коэффициента $\binom{|\text{in}^{-1}(A,f)|}{i}$.

Замечание 3. Остается открытым вопрос об отношениях порядка между значениями функции $W(A,f,i)$ в зависимости от таких i, для которых верно выражение

$$i_1\neq i_2\wedge\left|\lambda\left(\text{in}^{-1}(A,f),i_1\right)\right|=\left|\lambda\left(\text{in}^{-1}(A,f),i_2\right)\right|.$$

Формализация и изучение отношений порядка между значениями $W(A,f,i)$ в зависимости от i являются предметом отдельного исследования и в данной работе не рассматриваются.

Определение числа слоев без циклов

В силу (1), (2) можно получить точное число слоев без циклов, содержащих пары с атомом f в левой части:

$$\sum_{i=1}^{|\text{in}^{-1}(A,f)|}W(A,f,i)-\sum_{i=1}^{|\text{in}^{-1}(A,f)|}\sum_{\varepsilon\subset E'}W\big(\Theta(A,\varepsilon),f,i\big)=\sum_{i=1}^{|\text{in}^{-1}(A,f)|}\Big(W(A,f,i)-\sum_{\varepsilon\subset E'}W\big(\Theta(A,\varepsilon),f,i\big)\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{|\text{in}^{-1}(A,f)|}\left(W(A,f,i)-\sum_{k=1}^{|E'|}\sum_{s=1}^{\binom{|E'|}{k}}W\Big(\Theta\big(A,\lambda(E',k,s)\big),f,i\Big)\right). \tag{3}$$

Число операций сложения и умножения в данной формуле экспоненциально зависит от числа уникальных правых частей в парах отношения R и от числа фундаментальных циклов в нем. Если они велики, нахождение точного числа слоев без циклов может потребовать слишком больших вычислительных ресурсов. Исследуя компоненты выражения (3), можно отметить следующее:

$W(A,f,i)$ тем больше, чем больше биномиальный коэффициент $\binom{|\text{in}^{-1}(A,f)|}{i}$;

аналогичное верно и для $W(\Theta(A,\lambda(E',k,s)),f,i)$;

$W(\Theta(A,\lambda(E',k,s)),f,i)$ тем больше, чем меньше пар с уникальными правыми частями в $\lambda(E',k,s)$ и чем больше элементов отношения R всего в $\lambda(E',k,s)$.

Таким образом, для решения проблемы экспоненциального числа арифметических операций в (3) можно на основе свойств роста и убывания компонентов этого выражения найти приближенную оценку числа слоев без циклов.

Замечание 4. Несколько различных слоев отношения могут описывать один и тот же прообраз выводимой гипотезы, и данное свойство не учитывается в (3). Другими словами, число слоев без циклов может быть больше чем число прообразов, включающих в себя заданный атом решетки. Поэтому найденное значение не будет равно числу уникальных прообразов. Однако для повышения точности приближенного вычисления оценки числа уникальных прообразов, содержащих заданный атом, можно ввести поправку на неуникальность, для чего найти некоторую степень дублируемости прообразов и корректировать полученную оценку в соответствии с данной степенью [10].

- Исследованы вопросы приближенного вычисления первого показателя релевантности LP-вывода – числа прообразов, содержащих заданный атом решетки. Описан подход, позволяющий при нахождении приближенной оценки учитывать в первую очередь наиболее количественно значимые структурные особенности бинарного отношения на решетке. Данный подход может быть применен для ускорения обратного вывода в интеллектуальных системах продукционного типа. Он может быть распространен и на более сложные логические системы в информатике [11].

Работа поддержана грантом РФФИ № 15-07-05341.

Литература

1. *Sowyer B., Foster D.* Programming Expert Systems in Pascal // John Wiley & Sons, Inc. 1986. 186 p.
2. *Махортов С.Д., Шмарин А.Н.* Нечеткий LP-вывод и его программная реализация // Программная инженерия. 2013. № 12. С. 34–38.
3. *Махортов С.Д.* Основанный на решетках подход к исследованию и оптимизации множества правил условной системы переписывания термов // Интеллектуальные системы. 2009. Т. 13. Вып 1–4. С. 51–68.
4. *Махортов С.Д.* LP-структуры для обоснования и автоматизации рефакторинга в объектно-ориентированном программировании // Программная инженерия. 2010. № 2. С. 15–21.
5. *Болотова С.Ю., Махортов С.Д.* Алгоритмы релевантного обратного вывода, основанные на решении продукционно-логических уравнений // Искусственный интеллект и принятие решений. 2011. № 2. С. 40–50.
6. *Махортов С. Д.* Интегрированная среда логического программирования LPExpert // Информационные технологии. 2009. № 12. С. 65–66.
7. *Салий В.Н., Богомолов В.А.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Физматлит. 1997. 368 с.
8. *Levi G., Sirovich F.* Generalized And/Or Graphs. Artificial Intelligence Journal. 1976. V. 7. P. 243–259.
9. *Харари Ф.* Теория графов: Пер. с англ. М.: Едиториал УРСС. 2003. 296 с.
10. *Скиена С.* Алгоритмы. Руководство по разработке. Изд. 2-е. СПб.: БХВ-Петербург. 2011. 720 с.
11. *Чечкин А.В.* Нейрокомпьютерная парадигма информатики // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2011. № 7. С. 3–9.

Поступила 2 июля 2015 г.

About approximate estimates of the number of layers without cycles in the fuzzy LP-inference

A.N. Shmarin – *Post-Graduate student, Voronezh State University*
E-mail: tim-shr@mail.ru
S.D. Makhortov – *Dr. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor, Head of department, Voronezh State University (VSU), doctor of science*
E-mail: sd@expert.vrn.ru

With increasing volumes and complexity of processed information, the use of artificial intelligence systems is becoming increasingly important. At the same time one of the most common models of knowledge representation is productional. Algo-

rithms for finding solutions in such systems are based on the inference engine. In practice, there are many problems for which obtaining information about the state of the subject area is the resource-intensive operation. For example, these might be a request to the database, analysis of medical data or a complex sequence of computations. Often in similar tasks the solution (or the set of possible solutions) is looked for on the basis of only part of the information about the state of the subject area. In view of this circumstance it is required to optimally use limited resources.

There are tasks of control complex objects and random processes (risk management, socio-economic systems), in which the control is based on the logical-probabilistic model of knowledge representation. For them, the result of the controlling influence can be predicted only with some probability. In such situations, it is necessary to maintain or lead system into the predetermined state, applying as little as possible controlling influences. The related problem is to minimize the number of requests for obtaining information about the state of the subject area during logical inference. This problem is NP-hard. For achievement of global minimization there is the general method of LP-inference, which, unfortunately, has exponential computational complexity relative to the number of atomic facts in the knowledge base. However, its some modifications have polynomial complexity. The idea of cluster-relevant LP-inference is based on the calculation of specific estimates (indicators of relevance) for the limited subset of productions and the generalization of the obtained estimates on the entire set of productions.

This paper introduces heuristic estimates allowing to take into account the structural relationships in the set of productions, and thus improve the degree of minimization of the number of requests that are executed in the process of logical inference.

REFERENCES

1. *Sowyer B., Foster D.* Programming Expert Systems in Pascal // John Wiley & Sons, Inc. 1986. 186 p.
2. *Махортов С.Д., Шмарин А.Н.* Нечеткий LP-вывод и его программная реализация // Программная инженерия. 2013. № 12. С. 34–38.
3. *Махортов С.Д.* Основанный на решетках подход к исследованию и оптимизации множества правил условной системы переписывания термов // Интеллектуальные системы. 2009. Т. 13. Вып 1–4. С. 51–68.
4. *Махортов С.Д.* LP-структуры для обоснования и автоматизации рефакторинга в объектно-ориентированном программировании // Программная инженерия. 2010. № 2. С. 15–21.
5. *Болотова С.Ю., Махортов С.Д.* Алгоритмы релевантного обратного вывода, основанные на решении продукционно-логических уравнений // Искусственный интеллект и принятие решений. 2011. № 2. С. 40–50.
6. *Махортов С. Д.* Интегрированная среда логического программирования LPExpert // Информационные технологии. 2009. № 12. С. 65–66.
7. *Салий В.Н., Богомолов В.А.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Физматлит. 1997. 368 с.
8. *Levi G., Sirovich F.* Generalized And/Or Graphs. Artificial Intelligence Journal. 1976. V. 7. P. 243–259.
9. *Харари Ф.* Теория графов: Пер. с англ. М.: Едиториал УРСС. 2003. 296 с.
10. *Скиена С.* Алгоритмы. Руководство по разработке. Изд. 2-е. СПб.: БХВ-Петербург. 2011. 720 с.
11. *Чечкин А.В.* Нейрокомпьютерная парадигма информатики // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2011. № 7. С. 3–9.