Глава 1

Первый билет

Задача

Известен объем тетраэдра и три его вершины. Найти координаты 4 вершины, известно, что она лежит на какой-то оси.
Решение идет через формулу:

$$V = \frac{1}{6}|(\bar{AB}, \bar{AC}, \bar{AD})|$$

Пример задачи:
Даны три вершины пирамиды A(1,2,3), B(4,-5,6), C(7,8,10). Объем пирамиды равен 10 кубических единиц. Найдите координаты четвертой вершины D(x,y,z), если известно, что она лежит на плоскости xy (то есть z=0).

Решение: Пользуясь формулой получаем:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a \\ x_c - x_a; y_c - y_a; z_c - z_a \\ x_d - x_a; y_d - y_a; z_d - z_a \end{vmatrix} => 10 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3; -7; 3; \\ 6; 6; 7; \\ x-1; y-2; z-3 \end{vmatrix} =>$$

Т.к D лежит на оси, то можно обнулить 2 координаты: -107 -67x = 60, тогда точка D имеет координаты ($-\frac{167}{67}$, 0,0)

Задача

Найти точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$, симметричную точке $M(x_0,y_0,z_0)$ отн. плоскости $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ 1) Определяем вектор нормали $\vec{n}(A,B,C)$ 2) Находим прямую l, проходящую через точку и параллельную вектору нормали. Находим прямую в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$$

3) Найдем т. K, где $l \cap \alpha = K$

$$\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + At \\ z = z_0 + Ct \\ \alpha : Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \quad => (Ax_0+By_0+Cz_0-D)+(A^2+B^2+C^2)t =>$$

$$t = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D)}{(A^2 + B^2 + C^2)}$$

$$K : \begin{cases} x_k = x_0 + A\frac{-(Ax_0+By_0+Cz_0-D)}{(A^2+B^2+C^2)} \\ y_k = y_0 + A\frac{-(Ax_0+By_0+Cz_0-D)}{(A^2+B^2+C^2)} \\ z_k = z_0 + C\frac{-(Ax_0+By_0+Cz_0-D)}{(A^2+B^2+C^2)} \end{cases}$$

4) K - Середина отрезка MM_1, получаем:

$$M_1 : \begin{cases} x_1 = 2(x_0 + A\frac{-(Ax_0+By_0+Cz_0-D)}{(A^2+B^2+C^2)}) - x_0 \\ y_1 = 2(y_0 + A\frac{-(Ax_0+By_0+Cz_0-D)}{(A^2+B^2+C^2)}) - y_0 \\ z_1 = 2(z_0 + A\frac{-(Ax_0+By_0+Cz_0-D)}{(A^2+B^2+C^2)}) - z_0 \end{cases}$$

Это и есть ответ

Задача

Найди прямолинейные образующие фигуры F(x,y,z) =0, параллельные плоскости α : Ax + By + Cz + D = 0

Решение:

Если прямая d параллельна плоскости, то направляющий вектор l прямой перпендикулярен вектору нормали плоскости.$l \perp n => (\vec{l}, \vec{n}) = 0$

Можно взять два стула: l(0,m,n) и l(1,m,n)

1) Пишем уравнение прямолинейной образующей в параметрическом виде: Возьмем: l(0,m,n) => m*B + n*C = 0 => $m = \frac{-n*c}{B}$ => l(0,$\frac{-n*c}{B}$, n)

Можем взять параллельный l вектор, назовем его также, просто разделим его координаты на n, получим: $l(0, \frac{-c}{b}, 1)$

Тогда ур-ние прямолинейной образующей:

$$d : \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 - \frac{c}{b}t \\ z = z_0 + t \end{cases}$$

2)Подставляем ур-е прямой в уравнение фигуры F;

Получаем: $F(x_0, y_0 - \frac{c}{b}t, z_0 + t) = 0$ Группирум относительно t, и так как t - постоянно изм. параметр, то у нас выражение в скобках должны быть равны нулю. Из них находим x_0, y_0, z_0 и подставляем их в ур-е образующей, это и будет ответ

Пример:

$$\begin{array}{ll} t^2| & \frac{100}{4} - \frac{225}{9} = 0 \\ t^1| & \frac{20y_0}{4} = 20 => \\ t^0| & \frac{y_0^2}{4} = 10x_0 \end{array} \begin{cases} y_0 = 4 \\ x_0 = \frac{4}{10} \end{cases}$$

Получим:

$$l : \begin{cases} x = 2t + 0.4 \\ y = 10t + 4 \\ z = -15t \end{cases}$$

Повторить пункты аналогично со случаем l(1,m,n)

Глава 2

Второй билет

Задача

Известны координаты концов отрезка, найти точку которая делит отрезок в каком-то отношении. Формула деления на отрезков. Пример: Концы отрезков $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Найти $C(x_0,y_0) \in AB$, если известно $\frac{AC}{CB} = \lambda$
Решение:

$$\frac{AC}{CB} = \lambda => \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \lambda; \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_0} = \lambda; \frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_0} = \lambda;$$

Получаем:

$$C : \begin{cases} x_0 = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y_0 = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \\ z_0 = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

Задача

Найти проекцию точки M(x_1, y_1,z_1) на плоскость α: Ax +By +Cz + D = 0
Решение:

1) Находим вектор нормали n(A,B,C)

2) Находим прямую $d||\bar{n}$, где $M \in d$. Записываем параметрически.

$$d: \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$$

3) Находим $d \cap \alpha$:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases} \quad => (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + t(A^2 + B^2 + C^2) = 0$$

$$t = -\frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{(A^2 + B^2 + C^2)} => M': \begin{cases} x = x_0 - A\frac{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{(A^2+B^2+C^2)} \\ y = y_0 - B\frac{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{(A^2+B^2+C^2)} \\ z = z_0 - C\frac{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{(A^2+B^2+C^2)} \end{cases}$$

M’ - ответ.

Задача

Найти ур-ния прямолинейных образующих некоторой фигуры F(x,y,z), проходящих через точку A(x_0,y_0,z_0).

Решение:

1) Пусть $\vec{l}(a,b,c)$ - направляющий вектор, прямолинейной образующей l, где $A \in l$

$$l: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$, Подставляем в уравнение из условия

$F(at+x_0),(bt+y_0),(ct+z_0))$

Так как ур-ние должно выполнятся $\forall t$, то тогда должно выполнятся:

$$\begin{array}{ll} t^2| & G(A,B,C)=0 \\ t^1| & H(A,B,C)=0 \\ t^0| & 0=0 \end{array} => \begin{cases} G(A,B,C)=0 \\ H(A,B,C)=0 \end{cases}$$

Для направ. вектора $\vec{l}(a,b,c)$ возьмем 2 варианта $\vec{l}(0,b,c)$, $\vec{l}(1,b,c)$
$\vec{l}(0,b,c)$ и подставляем в G, H:

$$\begin{cases} -36b^2+225c^2=0 \\ -144b+360c=0 \end{cases} \quad => b = \text{Дупля}; C = \text{Дупля}$$

Получили l_1 $\vec{l}(1,b,c)$:

$$\begin{cases} G(A,B,C)=0 \\ H(A,B,C)=0 \end{cases} \quad => b = \text{Дупля}; C = \text{Дупля}$$

Получили l_2 2) Подставляем значения напр. векторов в l:

$$l1: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + b_1 t \\ z = z_0 + c_1 t \end{cases}, l2: \begin{cases} x = x_0 + a_2 t \\ y = y_0 + b_2 t \\ z = z_0 + c_2 t \end{cases}$$

Что и является ответом.

Пример Напишите уравнения прямолинейных образующих однополосного гиперболоида: $100x^2 - 36y^2 + 225z^2 = 900$, проходящих через точку $A(3;2;0{,}8)$.

Решение:

1) Пусть $\vec{l}(a,b,c)$ - направляющий вектор, прямолинейной образующей l, где

$A \in l$

$$l: \begin{cases} x = at + 3 \\ y = bt + 2 \\ z = ct + 0.8 \end{cases} \text{, Подставляем в уравнение из условия}$$

$$100(at+3)^2 - 36(bt+2)^2 + 225(ct+0.8) - 900 = 0$$

Так как ур-ние должно выполнятся $\forall t$, то тогда должно выполнятся:

$$\begin{matrix} t^2| & 100a^2 - 36b^2 + 225c^2 = 0 \\ t^1| & 600at - 144b + 360c = 0 \\ t^0| & 900 - 144 + 144 - 900 = 0 \end{matrix} => \begin{cases} 100a^2 - 36b^2 + 225c^2 = 0 \\ 600at - 144b + 360c = 0 \end{cases}$$

Для направ. вектора $\vec{l}(a,b,c)$ возьмем 2 варианта $\vec{l}(0,b,c)$, $\vec{l}(1,b,c)$

$\vec{l}(0,b,c)$:

$$\begin{cases} -36b^2 + 225c^2 = 0 \\ -144b + 360c = 0 \end{cases} => b = \frac{360}{144}c = \frac{5}{2}c$$

$$-36\frac{25}{4}c^2 + 225c^2 = 0 => 0c^2 = 0 => c \in \mathbb{R}$$

При c = 0, b = 0, получается нулевой вектор, поэтому данный вектором будет $\vec{l1}(0,\frac{5}{2}c,c)c \in \mathbb{R}/0$

$\vec{l}(1,b,c)$:

$$\begin{cases} 100 - 36b^2 + 225c^2 = 0 \\ 600 - 144b + 360c = 0 \end{cases} => b = \frac{29}{12}, c = -\frac{7}{10} \text{ (Подсчитано на калькуляторе)}$$

$\vec{l2}(1,\frac{29}{12},-\frac{7}{10})$

2) Подставляем значения напр. векторов в l:

$$l1: \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2}ct + 2 \\ z = ct + 0.8 \end{cases} \text{, где } c \in \mathbb{R}/0 \text{ , } l2: \begin{cases} x = t + 3 \\ y = \frac{29}{12}t + 2 \\ z = \frac{-7}{10}t + 0.8 \end{cases}$$

Что и является ответом.

Задача

Известны координаты двух точек A($x_1 + a$,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2) одна из координат с параметром a, известно, что расстояние между ними равно c. Найти параметр a;

Решение:

$$c = \sqrt{(x_1 + a - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} - >$$

$$c^2 = x_1^2 + a^2 + x_0^2 + 2ax_1 - 2x_0x_1 - 2ax_0 + y_1^2 - 2y_0y_1 + y_0^2$$

$$a^2 + 2a(x_1 - x_0) + x_1^2 + x_0^2 - 2x_0x_1 + y_1^2 - 2y_0y_1 + y_0^2 - c^2 = 0$$

$$a = -(x_1 - x_0) \pm \sqrt{(x_1 - x_0)^2 - x_1^2 + x_0^2 - 2x_0x_1 + y_1^2 - 2y_0y_1 + y_0^2 - c^2}$$

Задача

Найти кратчайшее расстояние между прямыми $l_1(a,b,c)$, $l_2(d,e,f)$в пространстве: 1) Прямые скрещиваются(определяются по направляющему вектору)<=> Координаты направляющих векторов не пропорциональны! Берем по точке на каждой прямой, точка M на одной,точка N на другой, получаем вектор MN(x,y,z)

Строим параллепипед на MN, l1,l2 $h = \frac{|(MN,l_1,l_2)|}{|[l_1,l_2]|}$,где

$$|(MN, l_1, l_2)| = \begin{vmatrix} x; y; z \\ a; b; c \\ d; e; f; \end{vmatrix} ;\ \text{модуль от } [l_1, l_2] = \begin{vmatrix} \bar{i}\bar{j}\bar{k} \\ a; b; c; \\ d; e; f; \end{vmatrix}$$

Найти координаты вектора, если известны координаты базисных векторов. Базис = e_1,e_2,e_3 $\bar{x} = \mathrm{c}1e1 + c2e2 + c3e3$, где x(c1; c2; c3)

Пример

Найдите координатный вектор $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ для $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ относительно базиса $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

Координаты c_1, c_2, c_3 вектора $\mathbf{x}$ относительно базиса $\mathcal{B}$ удовлетворяют уравнению:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Увеличенная матрица из уравнения (3) приводится к виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 3 & 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Таким образом, $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{x} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Тогда координаты x(-2, 0, 5)

Задача

Нахождение кр. расстояния в пр-ре Составить канонические ур-ния эллипса , гиперболический, когда известны фокус, большая или малая ось , эксцентриситент Примеры задач

Каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где:

- a — большая полуось,
- b — малая полуось,
- c — фокусное расстояние, связанное с a и b соотношением $c^2 = a^2 - b^2$,
- Эксцентриситет e определяется как $e = \frac{c}{a}$.

2. Каноническое уравнение гиперболы: Каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где:

- a — действительная полуось,
- b — мнимая полуось,
- c — фокусное расстояние, связанное с a и b соотношением $c^2 = a^2 + b^2$,
- Эксцентриситет e определяется как $e = \frac{c}{a}$.

—

Примеры задач

Задача 1 (Эллипс): Даны фокусы эллипса $F_1(-3, 0)$ и $F_2(3, 0)$, а также большая полуось $a = 5$. Найти каноническое уравнение эллипса и его эксцентриситет.

Решение:

1. Фокусное расстояние $c = 3$ (так как фокусы находятся на расстоянии 3 от центра).

2. По формуле $c^2 = a^2 - b^2$ находим b:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4.$$

3. Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

4. Эксцентриситет:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

Ответ:

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \quad e = 0.6}.$$

—

Задача 2 (Гипербола): Даны фокусы гиперболы $F_1(-5, 0)$ и $F_2(5, 0)$, а также эксцентриситет $e = \frac{5}{3}$. Найти каноническое уравнение гиперболы.

Решение:

1. Фокусное расстояние $c = 5$ (так как фокусы находятся на расстоянии 5 от центра).

2. По формуле $e = \frac{c}{a}$ находим a:

$$a = \frac{c}{e} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3.$$

3. По формуле $c^2 = a^2 + b^2$ находим b:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4.$$

4. Каноническое уравнение гиперболы:
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Ответ:
$$\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}.$$

—

Задача 3 (Эллипс): Даны малая полуось эллипса $b = 4$ и эксцентриситет $e = 0.8$. Найти каноническое уравнение эллипса.

Решение:

1. По формуле $e = \frac{c}{a}$ выразим c:
$$c = e \cdot a = 0.8a.$$

2. По формуле $c^2 = a^2 - b^2$ подставляем $c = 0.8a$:
$$(0.8a)^2 = a^2 - 16 \Rightarrow 0.64a^2 = a^2 - 16.$$

3. Решаем уравнение относительно a:
$$0.36a^2 = 16 \Rightarrow a^2 = \frac{16}{0.36} = \frac{1600}{36} = \frac{400}{9} \Rightarrow a = \frac{20}{3}.$$

4. Теперь находим c:
$$c = 0.8 \cdot \frac{20}{3} = \frac{16}{3}.$$

5. Каноническое уравнение эллипса:
$$\frac{x^2}{\left(\frac{400}{9}\right)} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{9x^2}{400} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Ответ:
$$\boxed{\frac{9x^2}{400} + \frac{y^2}{16} = 1}.$$

—

Задача 4 (Гипербола): Даны действительная полуось гиперболы $a = 6$ и эксцентриситет $e = 1.5$. Найти каноническое уравнение гиперболы.

Решение:

1. По формуле $e = \frac{c}{a}$ находим c:

$$c = e \cdot a = 1.5 \cdot 6 = 9.$$

2. По формуле $c^2 = a^2 + b^2$ находим b:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 81 - 36 = 45 \Rightarrow b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

3. Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1.$$

Ответ:

$$\boxed{\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1}.$$

Вот перевод решений задач в LaTeX:

—

Задача 1 (Эллипс): Составьте каноническое уравнение эллипса, если один из его фокусов находится в точке $(3, 0)$, длина большой оси равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = 0.6$.

Решение: 1. Центр эллипса — $(0, 0)$, так как фокус лежит на оси Ox. 2. Длина большой оси: $2a = 10 \Rightarrow a = 5$. 3. Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \varepsilon \cdot a = 0.6 \cdot 5 = 3$. 4. Фокус в точке $(3, 0)$ подтверждает $c = 3$. 5. Находим b: $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4$. 6. Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Ответ:

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

—

Задача 2 (Гипербола): Составьте каноническое уравнение гиперболы, если один из фокусов находится в точке $(5, 0)$, длина действительной оси равна 6, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

Решение: 1. Центр гиперболы — $(0, 0)$, фокус на оси Ox: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. 2. Длина действительной оси: $2a = 6 \Rightarrow a = 3$. 3. Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c =$

$\varepsilon \cdot a = \frac{5}{3} \cdot 3 = 5$. 4. Фокус в точке $(5, 0)$ подтверждает $c = 5$. 5. Находим b: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$. 6. Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Ответ:

$$\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}$$

—

Задача 3 (Эллипс): Составьте каноническое уравнение эллипса с фокусом в точке $(0, 4)$, длиной малой оси 6 и эксцентриситетом $\varepsilon = 0.8$.

Решение: 1. Центр эллипса — $(0, 0)$, фокус на оси Oy: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. 2. Длина малой оси: $2b = 6 \Rightarrow b = 3$. 3. Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \varepsilon \cdot a = 0.8a$. 4. Фокус в точке $(0, 4) \Rightarrow c = 4 \Rightarrow 0.8a = 4 \Rightarrow a = 5$. 5. Проверка: $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = 25 - 9$ (верно). 6. Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Ответ:

$$\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1}$$

—

Задача 4 (Гипербола): Составьте каноническое уравнение гиперболы с фокусом в точке $(0, -5)$, длиной мнимой оси 8 и эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

Решение: 1. Центр гиперболы — $(0, 0)$, фокус на оси Oy: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. 2. Длина мнимой оси: $2b = 8 \Rightarrow b = 4$. 3. Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \varepsilon \cdot a = \frac{5}{3}a$. 4. Фокус в точке $(0, -5) \Rightarrow c = 5 \Rightarrow \frac{5}{3}a = 5 \Rightarrow a = 3$. 5. Проверка: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + 16$ (верно). 6. Уравнение гиперболы: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$.

Ответ:

$$\boxed{\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1}$$

Задача

Найти объем тетраэдра, когда известны 4 его вершины.

Решение:

1) Находим координаты векторов 3 векторов, выходящих из одной точки,

назовем их a1(x1;y1;z1), a2(x2;y2;z2),a3(x3;y3;z3)

2) V = $\frac{1}{6}(a1,a2,a3)$ = $\begin{vmatrix} x1; y1; z1 \\ x2; y2; z2 \\ x3; y3; z3 \end{vmatrix}$, что являяется ответом

Глава 3

Дальше начинается ИИ..

Задача

Составить ур-ние общего перпендикуляра для данных прямых

Решение:

1) Определяем напр. вектора и точки

2) Составляем ур-ния плоскости через направляющий вектор одной прямой и точку другой прямой, этот направляющий вектор - нормаль для плоскости.

Аналогично делаем для другой прямой и другой точки

Составляем систему из этих двух плоскостей и все Это ответ

Даны две прямые в пространстве. Необходимо найти уравнение общего перпендикуляра для этих прямых.

Решение:

1. Определим направляющие векторы и точки прямых.

Пусть даны две прямые:

$$L_1 : \vec{r}_1 = \vec{a}_1 + t\vec{b}_1$$

$$L_2 : \vec{r}_2 = \vec{a}_2 + s\vec{b}_2$$

где $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — точки на прямых L_1 и L_2, $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ — направляющие векторы прямых.

2. Составим уравнения плоскостей.

- Первая плоскость Π_1 проходит через прямую L_1 и параллельна направляющему вектору $\vec{b}_2$ прямой L_2. Нормаль к плоскости Π_1 будет перпендикулярна как $\vec{b}_1$, так и $\vec{b}_2$, поэтому её можно найти как векторное произведение:

$$\vec{n}_1 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$$

Уравнение плоскости Π_1:

$$(\vec{r} - \vec{a}_1) \cdot \vec{n}_1 = 0$$

- Вторая плоскость Π_2 проходит через прямую L_2 и параллельна направляющему вектору $\vec{b}_1$ прямой L_1. Нормаль к плоскости Π_2 также будет перпендикулярна как $\vec{b}_1$, так и $\vec{b}_2$, поэтому её можно найти как векторное произведение:

$$\vec{n}_2 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$$

Уравнение плоскости Π_2:

$$(\vec{r} - \vec{a}_2) \cdot \vec{n}_2 = 0$$

3. Составим систему уравнений плоскостей.

Общий перпендикуляр будет линией пересечения плоскостей Π_1 и Π_2. Уравнение общего перпендикуляра можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} (\vec{r} - \vec{a}_1) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0 \\ (\vec{r} - \vec{a}_2) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0 \end{cases}$$

Это и есть уравнение общего перпендикуляра.

Ответ:

Уравнение общего перпендикуляра для прямых L_1 и L_2 задаётся системой:

$$\boxed{\begin{cases} (\vec{r}-\vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)=0 \\ (\vec{r}-\vec{a}_2)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)=0 \end{cases}}$$

Задача

Вычислить объем параллепипеда по координатам. 1) Находим координаты векторов, выходящих из одной точки, а дальше смешанное произведение Чтобы вычислить объём параллелепипеда, построенного на трёх векторах, выходящих из одной вершины, используем смешанное произведение этих векторов. Объём равен модулю смешанного произведения.

Дано:

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}$$

Решение:

1. Найдём векторное произведение векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\3&4&5\\2&1&7\end{vmatrix}=\mathbf{i}(4\cdot7-5\cdot1)-\mathbf{j}(3\cdot7-5\cdot2)+\mathbf{k}(3\cdot1-4\cdot2)$$

$$=\mathbf{i}(28-5)-\mathbf{j}(21-10)+\mathbf{k}(3-8)=23\mathbf{i}-11\mathbf{j}-5\mathbf{k}=\begin{pmatrix}23\\-11\\-5\end{pmatrix}$$

2. Вычислим скалярное произведение вектора $\mathbf{a}$ и результата векторного произведения:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}23\\-11\\-5\end{pmatrix}=1\cdot23+0\cdot(-11)+2\cdot(-5)=23-0-10=13$$

3. Найдём объём параллелепипеда:

$$V = |13| = 13$$

Ответ: Объём параллелепипеда равен $\boxed{13}$.

Задача

С-вить ур-ние прямой, проходящей через точку, перпенд. вектору, пересек. другую прямую.
Решение:
Берем направляющий вектор (0,m,n), (1,m,n). Каждый случай р/м отдельно.
Сост. направляющий вектор, так как прямая перпенд. вектору, скалярно произведение обратится в ноль, значит будет связь между m,n
Переписываем канонические ур-ние прямы как пересечение двех плоскостей
Решение будет совместным
Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, перпендикулярной вектору и пересекающей другую прямую

Дано: - Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит искомая прямая. - Вектор $\vec{N} = (a, b, c)$, которому прямая перпендикулярна. - Прямая L, заданная каноническими уравнениями: $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$.

Решение: 1. Направляющий вектор искомой прямой Пусть направляющий вектор искомой прямой $\vec{s} = (p, q, r)$. Так как прямая перпендикулярна вектору $\vec{N}$, их скалярное произведение равно нулю:

$$a \cdot p + b \cdot q + c \cdot r = 0. \quad (1)$$

2. Условие пересечения с прямой L Прямые пересекаются, если они лежат в одной плоскости. Для этого смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{s}$ и

направляющего вектора $\vec{s_L} = (l, m, n)$ прямой L должно быть равно нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ p & q & r \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

3. Определение направляющего вектора Рассмотрим два случая для упрощения вычислений: - Случай 1: $p = 1$. Из уравнения (1):

$$a + b \cdot q + c \cdot r = 0 \implies q = -\frac{a + c \cdot r}{b} \quad (b \neq 0).$$

Подставляем q и $p = 1$ в уравнение (2) и находим r. - Случай 2: $p = 0$. Из уравнения (1):

$$b \cdot q + c \cdot r = 0 \implies q = -\frac{c}{b} \cdot r \quad (b \neq 0).$$

Подставляем $p = 0$ и q в уравнение (2) и находим r.

4. Запись уравнения прямой После нахождения p, q, r, записываем канонические уравнения искомой прямой:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

Пример: Пусть $M_0(1, 2, 3)$, $\vec{N} = (2, -1, 4)$, прямая L: $\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{-1}$.

1. Случай 1: $p = 1$. Из уравнения (1):

$$2 \cdot 1 + (-1) \cdot q + 4 \cdot r = 0 \implies -q + 4r = -2 \implies q = 4r + 2.$$

Подставляем $\overrightarrow{M_0M_1} = (-1, -1, -3)$, $\vec{s} = (1, 4r + 2, r)$, $\vec{s_L} = (1, 2, -1)$ в (2):

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 4r + 2 & r \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, находим $r = 1$, тогда $q = 6$. Направляющий вектор: $\vec{s} = (1, 6, 1)$. Уравнение прямой:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{6} = \frac{z - 3}{1}.$$

Ответ:

$$\boxed{\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{6} = \frac{z - 3}{1}}$$

Задача

Определить вид линии пересечения некоторой фигуры с плоскостью.

Выражаем одну из координат из ур-ний плоскости и подставляем в ур-ние фигуры.

Определям гиперболический, элиптический или гиперболический, одним из способов:

1) Через определитель (см. в теорию как по определит. тип по определителю) или выделить полные квадраты(приведение к кан. виду)

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0,$$

и плоскость

$$z = k.$$

Подставляем $z = k$ в уравнение поверхности:

$$Ax^2 + By^2 + Ck^2 + 2Dxy + 2Exk + 2Fyk + 2Gx + 2Hy + 2Ik + J = 0.$$

Обозначим $J' = Ck^2 + 2Ik + J$. Тогда получаем уравнение

$$Ax^2 + By^2 + 2Dxy + 2(Ex + Fy)k + 2Gx + 2Hy + J' = 0,$$

которое можно записать в виде

$$Ax^2 + 2Dxy + By^2 + 2Lx + 2My + N = 0,$$

где L и M — новые коэффициенты, а $N = J'$.

Для классификации кривой вводится дискриминант

$$\delta = D^2 - AB.$$

Тогда:

- Если $\delta < 0$, то кривая эллиптическая (или окружность при $A = B$ и $D = 0$).
- Если $\delta = 0$, то кривая параболическая (либо вырожденный случай).
- Если $\delta > 0$, то кривая гиперболическая.

Альтернативный метод заключается в приведении уравнения к каноническому виду с выделением полных квадратов. После поворота координат (если необходимо) и сдвига можно получить одно из канонических уравнений:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \quad (x-h)^2 = 2p(y-k),$$

которые соответствуют эллипсу (или окружности), гиперболе и параболе соответственно.

Задача

Пусть заданы координаты вершин тетраэдра

$$A(x_A, y_A, z_A), \quad B(x_B, y_B, z_B), \quad C(x_C, y_C, z_C), \quad D(x_D, y_D, z_D).$$

Выберем треугольник ABC за основание, тогда высота h определяется как расстояние от точки D до плоскости, содержащей ABC.

Сначала определим векторы:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix}.$$

Нормальный вектор к плоскости ABC задаётся векторным произведением:

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} (y_B - y_A)(z_C - z_A) - (z_B - z_A)(y_C - y_A) \\ (z_B - z_A)(x_C - x_A) - (x_B - x_A)(z_C - z_A) \\ (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A) \end{pmatrix}.$$

Пусть также

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \\ z_D - z_A \end{pmatrix}.$$

Тогда высота h вычисляется по формуле:

$$h = \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{AD}\right|}{\|\vec{n}\|},$$

где

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}.$$

Альтернативно, пользуясь объёмом V тетраэдра

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right]\right|$$

и площадью основания $S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\vec{n}\|$, получаем:

$$h = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{\left|\det\left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right]\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

Таким образом, окончательная формула для высоты имеет вид:

$$\boxed{h = \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{AD}\right|}{\|\vec{n}\|}, \quad \text{где} \quad \vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} \quad \text{и} \quad \vec{AD} = D - A.}$$

Задача

Найти координаты точки, симметричной отн. прямой

Дано:

- Точка M(x0,y0)M(x0,y0).
- Прямая l:ax+by+c=0l:ax+by+c=0.

Решение:

1. **Направляющий вектор прямой l: Найти:** Точку M’(x’,y’)M’(x’,y’), симметричную точке MM относительно прямой l. Вектор нормали прямой l равен $\overline{n} = (a, b)$. Этот вектор перпендикулярен прямой l.

2. **Уравнение прямой MM':**

   Поскольку M' симметрична M относительно прямой l, прямая MM' должна быть перпендикулярна прямой l. Следовательно, направляющий вектор прямой MM' совпадает с вектором нормали прямой l, то есть $\overline{n} = (a, b)$.

   Уравнение прямой MM' в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \end{cases}$$

   где t — параметр.

3. **Точка пересечения O прямых l и MM':**

   Точка O лежит на прямой l, поэтому её координаты удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$. Подставим параметрические уравнения прямой MM' в уравнение прямой l:

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0.$$

   Раскроем скобки:

$$ax_0 + a^2t + by_0 + b^2t + c = 0.$$

   Сгруппируем слагаемые:

$$(a^2 + b^2)t + (ax_0 + by_0 + c) = 0.$$

   Выразим параметр t:

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Подставим t в параметрические уравнения прямой MM', чтобы найти координаты точки O:

$$O\left(x_0 + a\left(-\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right), y_0 + b\left(-\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right)\right).$$

Упростим:

$$O\left(x_0 - \frac{a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}, y_0 - \frac{b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}\right).$$

4. **Координаты точки M':**

   Точка O является серединой отрезка MM'. Используем формулу середины отрезка:

   $$O\left(\frac{x_0 + x'}{2}, \frac{y_0 + y'}{2}\right).$$

   Приравняем координаты точки O:

   $$\frac{x_0 + x'}{2} = x_0 - \frac{a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2},$$

   $$\frac{y_0 + y'}{2} = y_0 - \frac{b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}.$$

   Умножим обе части на 2:

   $$x_0 + x' = 2x_0 - \frac{2a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2},$$

   $$y_0 + y' = 2y_0 - \frac{2b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}.$$

   Выразим x' и y':

   $$x' = x_0 - \frac{2a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2},$$

   $$y' = y_0 - \frac{2b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}.$$

Ответ:

Координаты точки M', симметричной точке $M(x_0, y_0)$ относительно прямой $l : ax + by + c = 0$, вычисляются по формулам:

$$x' = x_0 - \frac{2a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2},$$

$$y' = y_0 - \frac{2b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}.$$

Задача

Вопрос был написан ШИЗОМ, ахтунг!!

Рассмотрим задачу нахождения точки, симметричной данной точке относительно прямой, заданной различными способами. Для этого рассмотрим все возможные варианты задания прямой и подробно распишем каждый шаг решения.

1. Прямая задана параметрически

Пусть прямая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct, \end{cases}$$

где (x_0, y_0, z_0) — точка на прямой, (a, b, c) — направляющий вектор прямой, t — параметр.

Шаг 1: Заданная точка

Пусть дана точка $P(x_1, y_1, z_1)$, которую нужно отразить относительно прямой.

Шаг 2: Уравнение плоскости, перпендикулярной прямой и проходящей через точку P

Направляющий вектор прямой (a, b, c) будет нормальным вектором искомой плоскости. Уравнение плоскости:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Шаг 3: Точка пересечения плоскости и прямой

Подставим параметрические уравнения прямой в уравнение плоскости:

$$a(x_0 + at - x_1) + b(y_0 + bt - y_1) + c(z_0 + ct - z_1) = 0.$$

Раскроем скобки и выразим параметр t:

$$a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) + t(a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

Отсюда:

$$t = -\frac{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Подставим t обратно в параметрические уравнения прямой, чтобы найти точку пересечения Q:

$$Q\left(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct\right).$$

Шаг 4: Симметричная точка

Точка P', симметричная точке P относительно прямой, находится как:

$$P' = 2Q - P.$$

Координаты P':

$$P'\left(2x_Q - x_1, 2y_Q - y_1, 2z_Q - z_1\right).$$

2. Прямая задана как пересечение двух плоскостей

Пусть прямая задана как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Шаг 1: Направляющий вектор прямой

Направляющий вектор прямой $\vec{s}$ можно найти как векторное произведение нормальных векторов плоскостей:

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Пусть $\vec{s} = (a, b, c)$.

Шаг 2: Уравнение плоскости, перпендикулярной прямой и проходящей через точку P

Уравнение плоскости:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Шаг 3: Точка пересечения плоскости и прямой

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0. \end{cases}$$

Находим точку пересечения Q.

Шаг 4: Симметричная точка

Точка P':

$$P' = 2Q - P.$$

3. Прямая задана канонически

Пусть прямая задана канонически:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Шаг 1: Направляющий вектор прямой

Направляющий вектор прямой $\vec{s} = (a, b, c)$.

Шаг 2: Уравнение плоскости, перпендикулярной прямой и проходящей через точку P

Уравнение плоскости:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Шаг 3: Точка пересечения плоскости и прямой

Подставляем параметрические уравнения прямой в уравнение плоскости:

$$a(x_0 + at - x_1) + b(y_0 + bt - y_1) + c(z_0 + ct - z_1) = 0.$$

Находим t и точку Q.

Шаг 4: Симметричная точка

Точка P':

$$P' = 2Q - P.$$

Заключение

Таким образом, независимо от способа задания прямой, алгоритм нахождения симметричной точки относительно прямой остается одинаковым. Основные шаги включают нахождение точки пересечения плоскости, перпендикулярной прямой и проходящей через данную точку, и последующее нахождение симметричной точки относительно этой точки пересечения.

Задача

Для вычисления объема тетраэдра с заданными вершинами $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ и $D(x_4, y_4, z_4)$ в трехмерном пространстве, можно использовать формулу объема тетраэдра через определитель матрицы. Объем V тетраэдра вычисляется по следующей формуле:

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix}\right|$$

Пошаговое решение:

1. Вычисление векторов: - Вектор $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ - Вектор $\vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ - Вектор $\vec{AD} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$

2. Составление матрицы:

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix}$$

3. Вычисление определителя матрицы:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Применительно к нашей матрице:

$$\det = (x_2 - x_1)\left[(y_3 - y_1)(z_4 - z_1) - (z_3 - z_1)(y_4 - y_1)\right] - (y_2 - y_1)\left[(x_3 - x_1)(z_4 - z_1) -\right.$$

4. Вычисление объема:

$$V = \frac{1}{6} |\det|$$

Пример вычисления:

Пусть вершины тетраэдра заданы координатами: - $A(0, 0, 0)$ - $B(1, 0, 0)$ - $C(0, 1, 0)$ - $D(0, 0, 1)$

1. Векторы: - $\vec{AB} = (1, 0, 0)$ - $\vec{AC} = (0, 1, 0)$ - $\vec{AD} = (0, 0, 1)$

2. Матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Определитель:

$$\det = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - 0 \cdot (0 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 0 \cdot (0 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = 1$$

4. Объем:

$$V = \frac{1}{6} |1| = \frac{1}{6}$$

Таким образом, объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$.

Задача

Чтобы найти расстояние между двумя параллельными плоскостями, заданными уравнениями:

$$P_1 : \quad ax + by + cz + d_1 = 0$$

$$P_2 : \quad ax + by + cz + d_2 = 0,$$

где коэффициенты a, b, c одинаковы для обеих плоскостей (что гарантирует их параллельность), расстояние h между ними вычисляется по формуле:

$$h = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Пошаговое решение:

1. Проверка параллельности плоскостей: Убедимся, что коэффициенты при x, y, z в уравнениях плоскостей совпадают:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Если это условие выполняется, плоскости параллельны.

2. Применение формулы расстояния: Если плоскости параллельны, расстояние между ними вычисляется по формуле:

$$h = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Пример вычисления:

Пусть даны две параллельные плоскости:

$$P_1: \quad 2x - 3y + 6z + 5 = 0,$$

$$P_2: \quad 2x - 3y + 6z - 10 = 0.$$

1. Проверка параллельности: Коэффициенты при x, y, z совпадают:

$$\frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} = \frac{6}{6} = 1.$$

Плоскости параллельны.

2. Применение формулы расстояния: Здесь $a = 2$, $b = -3$, $c = 6$, $d_1 = 5$, $d_2 = -10$. Подставляем в формулу:

$$h = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-10 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{15}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{15}{\sqrt{49}} = \frac{15}{7}.$$

Таким образом, расстояние между плоскостями равно $\frac{15}{7}$.

Задача

АХТУНГ, Я ПРОЕБАЛ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ ПОЭТОМУ ПРИШЛОСЬ ВЫДУМЫВАТЬ

Рассмотрим задачу на составление уравнения гиперболоида, используя канонический вид уравнения.

—

Задача:

Составьте уравнение однополостного гиперболоида, если известно, что оси симметрии служат осями ортонормированного репера, а гиперболоид проходит через точки $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ и $C(0, 0, 4)$.

—

Решение:

1. Канонический вид уравнения однополостного гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c — полуоси гиперболоида.

2. Подставляем координаты точек в уравнение:

- Для точки $A(3, 0, 0)$:

$$\frac{3^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} - \frac{0^2}{c^2} = 1 \implies \frac{9}{a^2} = 1 \implies a^2 = 9 \implies a = 3.$$

- Для точки $B(0, 2, 0)$:

$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} - \frac{0^2}{c^2} = 1 \implies \frac{4}{b^2} = 1 \implies b^2 = 4 \implies b = 2.$$

- Для точки $C(0, 0, 4)$:

$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} - \frac{4^2}{c^2} = 1 \implies -\frac{16}{c^2} = 1 \implies c^2 = -16.$$

Здесь возникает противоречие, так как c^2 не может быть отрицательным. Это означает, что точка $C(0, 0, 4)$ не лежит на однополостном гиперболоиде с заданными параметрами.

3. Исправление задачи:

Поскольку точка $C(0, 0, 4)$ не подходит для однополостного гиперболоида, рассмотрим двуполостный гиперболоид, каноническое уравнение которого имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Подставим координаты точки $C(0, 0, 4)$:

$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} - \frac{4^2}{c^2} = -1 \implies -\frac{16}{c^2} = -1 \implies c^2 = 16 \implies c = 4.$$

4. Итоговое уравнение двуполостного гиперболоида:

Подставляем найденные значения $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = -1.$$

—

Ответ:

Уравнение двуполостного гиперболоида:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = -1.$$

Задача

Рассмотрим задачу на составление уравнения эллипсоида.

—

Задача:

Составьте уравнение эллипсоида, если известно, что оси симметрии служат осями ортонормированного репера, а эллипсоид проходит через точки $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ и $C(0, 0, 5)$.

—

Решение:

1. Канонический вид уравнения эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c — полуоси эллипсоида.

2. Подставляем координаты точек в уравнение:

- Для точки $A(2,0,0)$:

$$\frac{2^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}+\frac{0^2}{c^2}=1 \implies \frac{4}{a^2}=1 \implies a^2=4 \implies a=2.$$

- Для точки $B(0,3,0)$:

$$\frac{0^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}+\frac{0^2}{c^2}=1 \implies \frac{9}{b^2}=1 \implies b^2=9 \implies b=3.$$

- Для точки $C(0,0,5)$:

$$\frac{0^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}+\frac{5^2}{c^2}=1 \implies \frac{25}{c^2}=1 \implies c^2=25 \implies c=5.$$

3. Итоговое уравнение эллипсоида:

Подставляем найденные значения $a=2$, $b=3$, $c=5$:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1.$$

—

Ответ:

Уравнение эллипсоида:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1.$$

Задача

1: Вычислить площадь треугольника по трем вершинам

Условие: Даны три вершины треугольника в трехмерном пространстве: $A(1,2,3)$, $B(4,5,6)$, $C(7,8,9)$. Найти площадь треугольника ABC.

Решение: Площадь треугольника можно найти как половину модуля векторного произведения векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

1. Найдем векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$:

$$\vec{AB} = B - A = (4-1, 5-2, 6-3) = (3, 3, 3)$$

$$\vec{AC} = C - A = (7-1, 8-2, 9-3) = (6, 6, 6)$$

2. Найдем векторное произведение $\vec{AB} \times \vec{AC}$:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3\cdot6-3\cdot6)-\mathbf{j}(3\cdot6-3\cdot6)+\mathbf{k}(3\cdot6-3\cdot6) = (0, 0, 0)$$

3. Модуль векторного произведения равен нулю, следовательно, площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Ответ: Площадь треугольника ABC равна 0 (точки лежат на одной прямой).

—

Задача

2: Найти точку на оси, равноудаленную от заданной точки и плоскости

Условие: Даны точка $M(1, 2, 3)$ и плоскость $2x - y + 3z = 4$. Найти точку на оси Oz, которая равноудалена от точки M и плоскости.

Решение: Точка на оси Oz имеет координаты $P(0, 0, z)$.

1. Расстояние от точки $P(0, 0, z)$ до плоскости $2x - y + 3z = 4$:

$$d_{\text{плоскость}} = \frac{|2\cdot0 - 1\cdot0 + 3\cdot z - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{|3z-4|}{\sqrt{14}}$$

2. Расстояние от точки $P(0, 0, z)$ до точки $M(1, 2, 3)$:

$$d_{\text{точка}} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (3-z)^2} = \sqrt{1 + 4 + (3-z)^2}$$

3. Приравняем расстояния:

$$\frac{|3z-4|}{\sqrt{14}} = \sqrt{1 + 4 + (3-z)^2}$$

4. Возведем обе части в квадрат:

$$\frac{(3z-4)^2}{14} = 5 + (3-z)^2$$

5. Решим уравнение:

$$(3z-4)^2 = 14(5 + (3-z)^2)$$

$$9z^2 - 24z + 16 = 70 + 14(9 - 6z + z^2)$$

$$9z^2 - 24z + 16 = 70 + 126 - 84z + 14z^2$$

$$9z^2 - 24z + 16 = 196 - 84z + 14z^2$$

$$-5z^2 + 60z - 180 = 0$$

$$z^2 - 12z + 36 = 0$$

$$(z-6)^2 = 0 \Rightarrow z = 6$$

Ответ: Точка на оси Oz имеет координаты $P(0, 0, 6)$.

—

Задача

3: Составить уравнение конической поверхности

Условие: Даны вершина конической поверхности $V(1, 2, 3)$ и направляющая кривая $x^2 + y^2 = 4$ в плоскости $z = 0$. Составить уравнение конической поверхности.

Решение: Уравнение конической поверхности можно записать как:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{(z-z_0)^2}{c^2}$$

где (x_0, y_0, z_0) — вершина конуса, а a, b, c — параметры, определяющие форму конуса.

1. Вершина конуса $V(1, 2, 3)$, поэтому уравнение примет вид:

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = \frac{(z-3)^2}{c^2}$$

2. Направляющая кривая $x^2+y^2=4$ в плоскости $z=0$ задает окружность радиуса 2. Это означает, что конус симметричен относительно оси z, и $a=b=2$.

3. Подставим $a=b=2$ в уравнение:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{4}=\frac{(z-3)^2}{c^2}$$

4. Упростим уравнение:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{4(z-3)^2}{c^2}$$

Ответ: Уравнение конической поверхности:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{4(z-3)^2}{c^2}$$

—

Задача

4: Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах

Условие: Даны два вектора $\vec{a}=2\vec{m}+3\vec{n}$ и $\vec{b}=4\vec{m}-\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — базисные векторы. Длины векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равны 1, а угол между ними $\theta=60^\circ$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение: Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1. Выразим векторное произведение:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{m}+3\vec{n})\times(4\vec{m}-\vec{n})$$

2. Раскроем скобки:

$$\vec{a}\times\vec{b}=2\vec{m}\times4\vec{m}+2\vec{m}\times(-\vec{n})+3\vec{n}\times4\vec{m}+3\vec{n}\times(-\vec{n})$$

3. Упростим:

$$\vec{a}\times\vec{b}=8(\vec{m}\times\vec{m})-2(\vec{m}\times\vec{n})+12(\vec{n}\times\vec{m})-3(\vec{n}\times\vec{n})$$

4. Учтем, что $\vec{m} \times \vec{m} = 0$ и $\vec{n} \times \vec{n} = 0$, а также $\vec{n} \times \vec{m} = -\vec{m} \times \vec{n}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -2(\vec{m} \times \vec{n}) - 12(\vec{m} \times \vec{n}) = -14(\vec{m} \times \vec{n})$$

5. Модуль векторного произведения:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 14\|\vec{m} \times \vec{n}\|$$

6. Найдем $\|\vec{m} \times \vec{n}\|$:

$$\|\vec{m} \times \vec{n}\| = \|\vec{m}\|\|\vec{n}\| \sin\theta = 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

7. Площадь параллелограмма:

$$S = 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$$

Ответ: Площадь параллелограмма равна $7\sqrt{3}$.

—

Задача

5: Составить уравнение плоскости, равноудаленной от двух параллельных плоскостей

Условие: Даны две параллельные плоскости:

$$2x - 3y + 4z = 5 \quad \text{и} \quad 2x - 3y + 4z = 10.$$

Составить уравнение плоскости, равноудаленной от этих двух плоскостей.

Решение: Плоскость, равноудаленная от двух параллельных плоскостей, будет параллельна им и находиться посередине между ними.

1. Уравнения плоскостей имеют одинаковые коэффициенты при x, y, z, что подтверждает их параллельность.

2. Найдем расстояние между плоскостями. Расстояние между двумя параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Для данных плоскостей:

$$d = \frac{|10 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

3. Плоскость, равноудаленная от данных плоскостей, будет находиться на расстоянии $\frac{d}{2}$ от каждой из них. Уравнение такой плоскости:

$$2x - 3y + 4z = \frac{5 + 10}{2} = 7.5$$

Ответ: Уравнение плоскости:

$$2x - 3y + 4z = 7.5$$

—

Задача

6: Найти координаты вектора, перпендикулярного двум заданным векторам

Условие: Даны два вектора $\vec{a} = (1, 2, 3)$ и $\vec{b} = (4, 5, 6)$. Найти вектор $\vec{c}$, перпендикулярный $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и образующий с осью Ox острый угол. Длина вектора $\vec{c}$ равна 1.

Решение: Вектор $\vec{c}$ можно найти как векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$.

1. Найдем векторное произведение:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - \mathbf{j}(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + \mathbf{k}(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4)$$

$$\vec{c} = \mathbf{i}(12 - 15) - \mathbf{j}(6 - 12) + \mathbf{k}(5 - 8) = (-3, 6, -3)$$

2. Найдем длину вектора $\vec{c}$:

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

3. Нормируем вектор $\vec{c}$:

$$\vec{c}_{\text{норм}} = \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} = \left(\frac{-3}{3\sqrt{6}}, \frac{6}{3\sqrt{6}}, \frac{-3}{3\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

4. Проверим, что вектор $\vec{c}_{\text{норм}}$ образует с осью Ox острый угол. Угол между вектором $\vec{c}_{\text{норм}}$ и осью Ox определяется через скалярное произведение:

$$\cos\theta = \vec{c}_{\text{норм}} \cdot \mathbf{i} = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$

Так как $\cos\theta < 0$, угол тупой. Чтобы получить острый угол, умножим вектор на -1:

$$\vec{c}_{\text{норм}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Ответ: Вектор $\vec{c}$, перпендикулярный $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и образующий с осью Ox острый угол:

$$\vec{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

—

Задача

7: Составить уравнение плоскости, перпендикулярной прямой через точку

Условие: Дана прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{4}$ и точка $M(3, -1, 5)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной данной прямой.

Решение: Плоскость, перпендикулярная прямой, имеет нормальный вектор, совпадающий с направляющим вектором прямой.

1. Направляющий вектор прямой:

$$\vec{v} = (2, -1, 4)$$

2. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3, -1, 5)$ с нормальным вектором $\vec{v}$:

$$2(x - 3) - 1(y + 1) + 4(z - 5) = 0$$

3. Упростим уравнение:

$$2x - 6 - y - 1 + 4z - 20 = 0$$

$$2x - y + 4z - 27 = 0$$

Ответ: Уравнение плоскости:

$$2x - y + 4z - 27 = 0$$

—

Задача

8: Составить уравнение цилиндрической поверхности

Условие: Дана направляющая кривая $x^2 + y^2 = 9$ в плоскости $z = 0$ и образующая, параллельная вектору $\vec{v} = (1, 1, 1)$. Составить уравнение цилиндрической поверхности.

Решение: Уравнение цилиндрической поверхности можно записать как:

$$(x - z)^2 + (y - z)^2 = 9$$

Ответ: Уравнение цилиндрической поверхности:

$$(x - z)^2 + (y - z)^2 = 9$$

—

Задача

9: Найти четвертую вершину параллелограмма

Условие: Даны три вершины параллелограмма: $A(1, 2, 3)$, $B(4, 5, 6)$, $C(7, 8, 9)$. Найти четвертую вершину D.

Решение: В параллелограмме диагонали делятся пополам. Следовательно, середина диагонали AC совпадает с серединой диагонали BD.

1. Найдем середину диагонали AC:

$$M = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+8}{2}, \frac{3+9}{2}\right) = (4, 5, 6)$$

2. Пусть $D(x, y, z)$. Тогда середина диагонали BD:

$$M = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{5+y}{2}, \frac{6+z}{2}\right) = (4, 5, 6)$$

3. Решим уравнения:

$$\frac{4+x}{2} = 4 \Rightarrow 4 + x = 8 \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{5+y}{2} = 5 \Rightarrow 5 + y = 10 \Rightarrow y = 5$$
$$\frac{6+z}{2} = 6 \Rightarrow 6 + z = 12 \Rightarrow z = 6$$

Ответ: Четвертая вершина параллелограмма $D(4, 5, 6)$.

—

Задача

10: Составить уравнение плоскости через точку, параллельной другой плоскости

Условие: Дана плоскость $2x - 3y + 4z = 5$ и точка $M(1, 2, 3)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M и параллельной данной плоскости.

Решение: Плоскость, параллельная данной, имеет тот же нормальный вектор.

1. Нормальный вектор данной плоскости:

$$\vec{n} = (2, -3, 4)$$

2. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 2, 3)$ с нормальным вектором $\vec{n}$:

$$2(x - 1) - 3(y - 2) + 4(z - 3) = 0$$

3. Упростим уравнение:

$$2x - 2 - 3y + 6 + 4z - 12 = 0$$

$$2x - 3y + 4z - 8 = 0$$

Ответ: Уравнение плоскости:

$$2x - 3y + 4z - 8 = 0$$

—

Задача

Рассмотрим задачу на составление уравнения конической поверхности, если известны вершина и направляющая.

—

Задача:

Составьте уравнение конической поверхности, если известно, что её вершина находится в точке $V(1, 2, 3)$, а направляющая задана уравнением окружности в плоскости Oxy:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

—

Решение:

1. Общий вид уравнения конической поверхности:

Коническая поверхность образуется прямыми (образующими), проходящими через вершину $V(x_0, y_0, z_0)$ и каждую точку направляющей. Уравнение конической поверхности можно записать в параметрическом виде или в неявном виде, исключив параметры.

2. Направляющая:

Направляющая задана окружностью в плоскости Oxy:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

Это окружность радиуса 2 с центром в точке $(0, 0, 0)$.

3. Уравнение образующей:

Любая точка $P(x, y, z)$ на конической поверхности лежит на прямой, соединяющей вершину $V(1, 2, 3)$ и точку направляющей $(x_1, y_1, 0)$. Параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0), \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0), \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0), \end{cases}$$

где t — параметр, $(x_1, y_1, 0)$ — точка на направляющей.

4. Исключение параметра t:

Выразим t из третьего уравнения:

$$z = 3 + t(0 - 3) \implies z = 3 - 3t \implies t = \frac{3 - z}{3}.$$

Подставим t в первые два уравнения:

$$x = 1 + \left(\frac{3 - z}{3}\right)(x_1 - 1), y = 2 + \left(\frac{3 - z}{3}\right)(y_1 - 2).$$

5. Условие принадлежности точки $(x_1, y_1, 0)$ направляющей:

Точка $(x_1, y_1, 0)$ лежит на окружности $x_1^2 + y_1^2 = 4$. Подставим x_1 и y_1 из выражений выше:

$$\left(\frac{3(x - 1)}{3 - z} + 1\right)^2 + \left(\frac{3(y - 2)}{3 - z} + 2\right)^2 = 4.$$

6. Упрощение уравнения:

После раскрытия скобок и упрощения получим уравнение конической поверхности:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{4}{9}(z - 3)^2.$$

—

Ответ:

Уравнение конической поверхности:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{9}(z-3)^2.$$

—

Примечание:

Это уравнение описывает конус с вершиной в точке $V(1, 2, 3)$ и направляющей в виде окружности $x^2 + y^2 = 4$ в плоскости Oxy.

Задача

Рассмотрим задачу на составление уравнения цилиндра. —

Задача:

Составьте уравнение кругового цилиндра, если известно, что его ось симметрии совпадает с осью Oz, а радиус цилиндра равен 4.

—

Решение:

1. Канонический вид уравнения кругового цилиндра:

Если ось цилиндра совпадает с осью Oz, то уравнение цилиндра имеет вид:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

где r — радиус цилиндра.

2. Подставляем известное значение радиуса:

По условию задачи радиус $r = 4$, поэтому:

$$x^2 + y^2 = 4^2 \implies x^2 + y^2 = 16.$$

3. Итоговое уравнение цилиндра:

Уравнение кругового цилиндра с осью Oz и радиусом 4:

$$x^2 + y^2 = 16.$$

—

Ответ:

Уравнение цилиндра:

$$x^2 + y^2 = 16.$$

—

Примечание:

Если требуется составить уравнение цилиндра другого типа (например, эллиптического или гиперболического), то канонический вид уравнения будет зависеть от формы направляющей линии. Например:

- Для эллиптического цилиндра :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Для гиперболического цилиндра :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Если нужно, можно придумать задачу и для этих случаев.