Поскольку перемещение $\vec{r}(\tau)-\vec{r}(\tau_0)$ (как разность двух векторов) является вектором, то и скорость движения материальной точки будет вектором в силу определения 1.3.1. Рассуждая аналогично, можно прийти к заключению, что вектором является также и ускорение. С другой стороны, согласно второму закону Ньютона, ускорение материальной точки пропорционально действующей на нее силе, и, следовательно, сила тоже есть вектор.

Наконец, принимая во внимание пропорциональность силы, действующей на заряженное тело, и напряженности электрического поля, заключаем, что последняя характеристика также векторная.

§ 1.4. Линейная зависимость векторов

Вначале введем часто используемые в приложениях понятия коллинеарности и компланарности векторов.

Определение 1.4.1. Два вектора, параллельные одной и той же прямой, называются *коллинеарными*.

Три вектора, параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными*.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому другому вектору. Нулевой вектор считается компланарным любой паре векторов.

Определение 1.4.2. Выражение вида $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$, где $\lambda_i;\ i=[1,n]$ – некоторые числа, называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Если все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ равны нулю одновременно (что равносильно условию $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_n| = 0$), то такая линейная комбинация называется *тривиальной*.

Если хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ отлично от нуля (то есть $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_n| > 0$), то данная линейная комбинация называется *нетривиальной*.

Соглашение о суммировании

В тех случаях, когда явная запись суммы некоторого числа слагаемых нецелесообразна или невозможна, но известно, как зависит значение каждого из слагаемых от его номера, то допускается использование специальной формы записи операции суммирования:

$$F(k) + F(k+1) + \ldots + F(n) = \sum_{i=k}^{n} F(i),$$

(читается: сумма $F(i)$ по i от k до n), где i – индекс суммирования, k – минимальное значение индекса суммирования, n – максимальное значение индекса суммирования и, наконец, $F(i)$ – общий вид слагаемого.

Пример 1.4.1. По соглашению о суммировании будут справедливы следующие равенства:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 \quad =$$

$$= \quad \frac{n^2 (n+1)^2}{4} \quad = \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)^2,$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} \quad = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} \quad = \quad \frac{i-1}{i}.$$

Используя данное соглашение о суммировании, линейную комбинацию $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$ можно записать в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i$.

Приведем теперь определение важного понятия линейной зависимости системы векторов.

Определение 1.4.3. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i$, такая, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o}$.

Определение 1.4.4. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если из условия $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o}$ следует *тривиальность* линейной комбинации $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i$, то есть что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Иначе говоря, если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ линейно независимы, то для любого набора чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, не равных нулю одновременно, линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$ не нулевой вектор.

Лемма 1.4.1. **Для линейной зависимости векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.**

Доказательство.

Докажем необходимость. Пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ линейно зависимы, тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, одновременно не равные нулю, такие, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}$. Для определенности можно считать, что $\lambda_1 \neq 0$, но тогда

$$\vec{a}_1 = \sum_{k=2}^{n} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right) \vec{a}_k ,$$

что и доказывает необходимость.

Докажем теперь достаточность. Пусть для определенности $\vec{a}_1 = \sum\limits_{k=2}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$, тогда $(-1)\vec{a}_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}$, причем

$$|-1| + |\lambda_2| + ... + |\lambda_n| > 0 .$$

То есть линейная комбинация векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, равная нулевому вектору, нетривиальная.

Лемма доказана.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.4.1. **Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой.**

Теорема 1.4.2. **Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.**

Теорема 1.4.3. **Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.**

Теоремы 1.4.1 и 1.4.2 предлагаются для самостоятельного доказательства. Здесь же мы рассмотрим подробно теорему 1.4.3.

Доказательство.

Докажем необходимость. Пусть три вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависимы, то есть существуют три, одновременно не равных нулю, числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, таких, что

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{o}\,.$$

Тогда по лемме 1.4.1 один из векторов есть линейная комбинация двух остальных, и, значит, данные три вектора компланарны.

Докажем достаточность в предположении, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарны. Пусть даны три компланарных вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Перенесем эти векторы таким образом, чтобы их начала попали в одну точку.

Через конец вектора $\vec{a}_3$ проведем прямые, параллельные векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. При этом получим пару векторов $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$, таких, что $\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ (рис. 1.4.1).

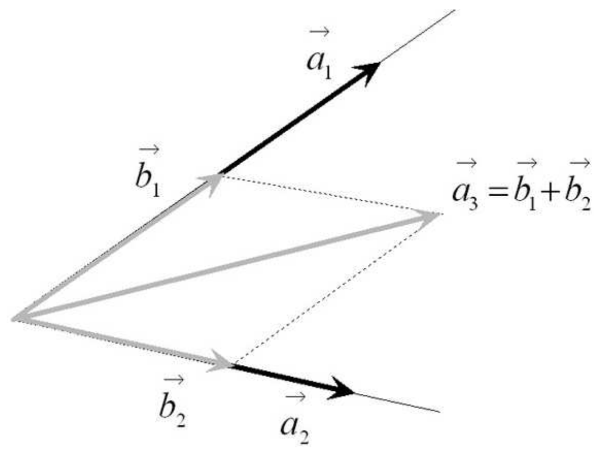

Рис. 1.4.1

Поскольку вектор $\vec{b}_1$ коллинеарен вектору $\vec{a}_1$, а вектор $\vec{b}_2$ коллинеарен вектору $\vec{a}_2$, по лемме 1.4.1 и теореме 1.4.2 получаем, что

$$\vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1; \ \vec{b}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2 ,$$

но тогда

$$\vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 ,$$

и векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ по лемме 1.4.1 линейно зависимы. Случай коллинеарных $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ рассмотрите самостоятельно.

Теорема доказана.

Свойства линейно независимых векторов

1°. Один вектор линейно независим тогда и только тогда, когда он ненулевой.

2°. Два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.

3°. Три вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они некомпланарны.

Теорема 1.4.4. **Если среди векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ имеется подмножество линейно зависимых, то и все векторы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ линейно зависимы**.

Доказательство.

Без ограничения общности можно считать, что линейно зависимы первые $k < n$ векторов (иначе просто перенумеруем эти векторы), то есть существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a_i} = \vec{o}$.

Построим нетривиальную линейную комбинацию векторов $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}\}$, взяв в качестве первых k коэффициентов числа λ_i, $i = [1, k]$ и нули в качестве остальных. Тогда получим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a_i} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a_i} + \sum_{i=k+1}^{n} 0 \cdot \vec{a_i} = \vec{o}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.4.1. **Если среди векторов $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}\}$ имеется хотя бы один нулевой, то векторы $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}\}$ линейно зависимы.**

§ 1.5. Базис. Координаты вектора в базисе

Определение 1.5.1. *Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.

Базисом на плоскости называется любая упорядоченная пара линейно независимых векторов, принадлежащих этой плоскости.

Базисом в пространстве называется любая упорядоченная тройка линейно независимых векторов.

Определение 1.5.2. Базис называется *ортогональным*, если образующие его векторы попарно ортогональны (взаимно перпендикулярны).

Определение 1.5.3. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если образующие его векторы имеют единичную длину.

Пространственный базис, составленный из линейно независимых векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$, будем обозначать $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$. Ортогональный или ортонормированный базис условимся обозначать как $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Теорема 1.5.1. **Пусть дан базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, тогда любой вектор $\vec{x}$ в пространстве может быть представлен и притом единственным образом в виде**

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 ,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 – некоторые числа.

Доказательство.

1°. Докажем вначале существование таких чисел.

Совместим начала всех векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ и $\vec{x}$ в точке O и проведем через конец вектора $\vec{x}$ плоскость, параллельную плоскости $O, \vec{g}_1, \vec{g}_2$ (рис. 1.5.1).

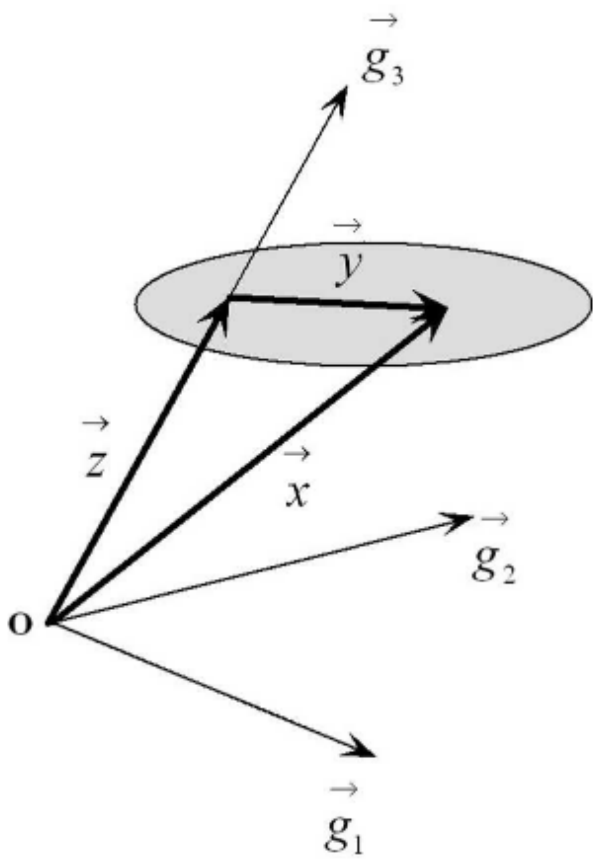

Рис. 1.5.1

Построим новые векторы $\vec{y}$ и $\vec{z}$ так, чтобы $\vec{x} = \vec{z} + \vec{y}$, а $\vec{z}$ и $\vec{g}_3$ были коллинеарны, тогда в силу коллинеарности векторов $\vec{z}$ и $\vec{g}_3$ имеем

$$\vec{z} = \xi_3 \vec{g}_3 .$$

Перенеся затем начало вектора $\vec{y}$ в точку O и рассуждая как при доказательстве теоремы 1.4.3, получим

$$\vec{y} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2$$

и, следовательно,

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 ,$$

что доказывает существование разложения.

2°. Докажем единственность разложения по базису. Пусть мы имеем $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ и допустим, что существует другая тройка чисел ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, таких, что

$$\vec{x} = \xi'_1 \vec{g}_1 + \xi'_2 \vec{g}_2 + \xi'_3 \vec{g}_3 .$$

Вычитая почленно эти равенства, получаем

$$(\xi_1 - \xi'_1)\vec{g}_1 + (\xi_2 - \xi'_2)\vec{g}_2 + (\xi_3 - \xi'_3)\vec{g}_3 = \vec{o} ,$$

где в силу сделанного предположения о неединственности разложения

$$|\xi_1 - \xi_1'| + |\xi_2 - \xi_2'| + |\xi_3 - \xi_3'| > 0 .$$

Но полученное неравенство означает, что линейная комбинация

$$(\xi_1 - \xi_1')\vec{g}_1 + (\xi_2 - \xi_2')\vec{g}_2 + (\xi_3 - \xi_3')\vec{g}_3$$

нетривиальна, векторы $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ линейно зависимы и, следовательно, не могут быть базисом в силу определения 1.5.1. Полученное противоречие доказывает единственность разложения.

Теорема доказана.

Определение 1.5.4. Числа ξ_1, ξ_2, ξ_3 – коэффициенты в разложении $\vec{x} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3$ – называются координатами (или компонентами) вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Для сокращенной записи координатного разложения вектора $\vec{x} = \xi_1\vec{g}_1 + \xi_2\vec{g}_2 + \xi_3\vec{g}_3$ используются формы:

1°. $\vec{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 2°. (ξ_1, ξ_2, ξ_3), 3°. $\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{Vmatrix}$,

4°. $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, 5°. $\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$, из которых в дальнейшем мы будем использовать последнюю. В общем случае утверждение «*вектор* $\vec{x}$ *в базисе* $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ *имеет координатное представление* $\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$» записывается как $\left\| \vec{x} \right\|_g = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$, но иногда, если это не приводит к неоднозначности толкования, будем использовать и сокращенную запись вида $\vec{x} = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$.

Наконец, если вектор $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости может быть представлен как $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2$, то его координатная запись имеет вид $\left\| \vec{x} \right\|_g = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix}$.

§ 1.6. Действия с векторами в координатном представлении

Поскольку в конкретном базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ каждый вектор полностью и однозначно описывается упорядоченной тройкой чисел ξ_1, ξ_2, ξ_3 – своим координатным представлением, то естественно возникает вопрос о том, как выполняются операции с векторами в координатном представлении.

Оказывается, что возможно не только записывать векторы при помощи матриц (столбцов), но и оперировать с ними в матричной форме, поскольку правила действий с векторами в координатной форме совпадают с правилами соответствующих операций с матрицами.