Примитивно-рекурсивные функции

Практическое занятие 1

Теория рекурсивных функций

В теории рекурсивных функций, как и вообще в теории алгоритмов, принят конструктивный (финитный) подход, основной чертой которого является то, что все множество исследуемых объектов (в данном случае функций) строится из конечного числа исходных объектов — базиса — с помощью простых операций, эффективная вычислимость которых достаточно очевидна. Операции над функциями называют операторами.

Для простоты будем рассматривать только числовые функции, т.е. функции, аргументы и значения которых принадлежат множеству натуральных чисел N (в теории рекурсивных функций полагают $N = 0, 1, 2, \ldots$). Иначе говоря, числовой n-местной функцией $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция, определенная на некотором подмножестве $N \subseteq N^n$ с натуральными значениями. Если область определения $f : N^n \to N$ совпадает с множеством N^n, то говорят, что функция f всюду определена, в противном случае — частично определена.

Частичными числовыми функциями $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in N$ ($1 \leq i \leq n$), называют функции, определенные не на всех наборах $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in N^n$.

Простейшие числовые функции и операторы

- **Нуль-функция**: $0(x) = 0$;
- **Функция следования**: $S(x) = x + 1$;
- **Функция проекции**: $I^n_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m$ ($m \leq n$).

Операторы

- **Оператор суперпозиции**
- **Оператор примитивной рекурсии**
- **Оператор минимизации**

Оператор суперпозиции

Оператором суперпозиции F_m^n называется подстановка в функцию от m переменных m функций, каждая из которых зависит от n одних и тех же переменных. Суперпозиция дает новую функцию уже от n переменных. Например, для функций $h(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, …, $g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ их суперпозиция дает новую функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$F_m^n(h, g_1, g_2, \ldots, g_m) = h(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f(x_1, x$$

В этом случае говорят, что n-местная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получена с помощью оператора суперпозиции из m-местной функции $h(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и n-местных функций $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, \ldots, $g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Оператор примитивной рекурсии

Оператор примитивной рекурсии определяет $(n+1)$-местную функцию f через n-местную функцию g и $(n+2)$-местную функцию h следующим образом:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)). \end{cases}$$

Пара равенств называется схемой примитивной рекурсии.

Тот факт, что функция f определена схемой, выражается равенством

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = R_n(g, h).$$

Эта схема определяет f рекурсивно не только через другие функции, но и через значения f в предшествующих точках: значение f в точке $y+1$ зависит от значения f в точке y.

Для вычисления $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, k)$ понадобится $k+1$ вычислений по указанной схеме для $y = 0, 1, \ldots, k$.

Существенным в операторе примитивной рекурсии является то, что независимо от числа переменных в f, рекурсия ведется только по одной переменной y, а остальные n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на момент применения схемы зафиксированы и играют роль параметров.

В случае, когда $n = 0$, т.е. определяемая функция f является одноместной, схема принимает более простой вид:

$$\begin{cases} f(0) = C; \\ f(y+1) = h(y, f(y)) \end{cases}$$

где C — константа.

Функция называется **примитивно-рекурсивной**, если она может быть получена из нуль-функции $O(x)$, функции следования $S(x)$ и функции проекции I_m^n с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции и примитивной рекурсии.

Этому определению можно придать более формальный индуктивный вид:

1. Функции $O(x)$, $S(x)$ и I_m^n для всех натуральных n, m, где $m \leq n$, являются примитивно-рекурсивными.
2. Если $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots, $g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — примитивно-рекурсивные функции, то $F_m^n(h, g_1, g_2, \ldots, g_m)$ — примитивно-рекурсивные функции для любых натуральных n, m.
3. Если $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $h(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, z)$ — примитивно-рекурсивные функции, то $R_n(g, h)$ — примитивно-рекурсивная функция.
4. Других примитивно-рекурсивных функций нет.

Оператор минимизации

Пусть задана некоторая функция $f(x, y)$. Зафиксируем значение x и выясним, при каком y функция $f(x, y) = 0$.

Более сложной задачей является отыскание для данной функции $f(x, y)$ и фиксированного x наименьшего из тех значений y, при которых функция $f(x, y) = 0$. Так как результат решения задачи зависит от x, то наименьшее значение y, при котором функция $f(x, y) = 0$, есть функция x. Принято обозначение

$$\varphi(x) = \mu_y[f(x, y) = 0],$$

которое читается как: «наименьшее y такое, что $f(x, y) = 0$».

Аналогично определяется функция многих переменных:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_y[f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0].$$

Переход от функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ к функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принято называть применением μ**-оператора**.

Алгоритм вычисления функции φ

1. Вычислим $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$. Если это значение $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$ равно нулю, то полагаем $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) \neq 0$, то переходим к следующему шагу.

2. Вычислим $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)$. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1) = 0$, то полагаем $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Если же $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1) \neq 0$, то переходим к следующему шагу. И так далее.

Если окажется, что для всех y функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \neq 0$, то функцию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в этом случае считают неопределенной. Но возможно, что существует такое y_0, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_0) = 0$ и, значит, есть и наименьшее y, при котором $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$, и в то же время может случиться, что при некотором z ($0 < z < y_0$) значение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ не определено. Очевидно, что в этом случае процесс вычисления наименьшего y, при котором $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$, не дойдет до y_0. И здесь функцию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ считают неопределенной.

Методология составления схем примитивной рекурсии

Для составления схемы примитивной рекурсии первоначально необходимо определить вид нужной схемы. Для этого следует ответить на вопрос: «От скольких переменных зависит данная функция?» Допустим, переменных $n \geq 2$. Значит, используется схема рекурсии с параметрами.

Следующие шаги:

1. Если не указано, по какой переменной составлять схему, то следует выбрать наиболее простую переменную (наименьшее количество операций с этой переменной или наиболее простые операции). Если при ответе на вопрос: «От скольких переменных зависит данная функция?» получено, что такая переменная одна единственная, значит, используется схема рекурсии без параметров.
2. Определить, чему равно значение функции в точке ноль? (верхний индекс в функциях и операциях для $n > 1$ будет равен $n - 1$).
3. Определить, чему равно значение функции в следующей точке (переменная, по которой берется рекурсия, плюс единица). Постарайтесь преобразовать получившееся значение к самой функции, верхний индекс в функциях и операциях для любого значения n будет равен $n + 1$.
4. Записать функцию через операцию примитивной рекурсии.

Примеры

Доказать примитивную рекурсивность суммы $f(x, y) = x + y$

Решение.

$$f_+(x,0) = x = I_1^1(x);$$

$$f_+(x,y+1) = f_+(x,y) + 1 = S(f_+(x,y)).$$

Таким образом,

$$f_+(x,y) = h(x,y-1,f(x,y-1)) = R_1(I_1^1(x), h(x,y,z)),$$

где $h(x,y,z) = z+1$.

Действительно, имеем:

$$f_+(x,0) = x;$$

$$f_+(x,1) = h(x,0,f_+(x,0)) = x+1;$$

$$f_+(x,2) = h(x,1,f_+(x,1)) = x+1+1 = x+2;$$

$$f_+(x,3) = h(x,2,f_+(x,2)) = x+2+1 = x+3;$$

$$\vdots$$

$$f_+(x,y-1) = h(x,y-2,f_+(x,y-2)) = x+(y-2)+1 = x+y-1;$$

$$f_+(x,y) = h(x,y-1,f_+(x,y-1)) = x+(y-1)+1 = x+y.$$

Доказать примитивную рекурсивность произведения $f(x,y) = xy$

Решение.

$$f_\times(x,0) = 0;$$

$$f_\times(x,y+1) = x \cdot (y+1) = x \cdot y + x = f_x(x,y) + x = f_+(x, f_x(x,y));$$

Или $f_x(x,y+1) = h(x,y,f_x(x,y)) = x+z$, где $z = f_x(x,y)$.

Выполняя действия по полученной схеме, получаем:

$$f_x(x,0) = 0;$$

$$f_x(x,1) = x+0 = x;$$

$$f_x(x,2) = x+x = 2x;$$

$$f_x(x,3) = x + 2x = 3x;$$

$$\vdots$$

$$f_x(x,y-1) = x + (y-2)x = x \cdot y - x;$$

$$f_x(x,y) = x + x \cdot y - x = x \cdot y.$$

Доказать примитивную рекурсивность возведения в степень $f\_exp(x,y) = x^y$

Решение.

$$f_{exp}(x,0) = x^0 = 1;$$

$$f_{exp}(x,y+1) = x^{y+1} = x^y \cdot x = x \cdot f_{exp}(x,y) = f_{\times}(x, f_{exp}(x,y)).$$

$$f_{exp}(x,y+1) = h(x,y,f_{exp}(x,y)) = x \cdot z, \quad \text{где } z = f_{exp}(x,y).$$

Действительно, выполняя вычисления по полученной схеме, получаем:

$$f_{exp}(x,0) = x^0 = 1;$$

$$f_{exp}(x,1) = x \cdot 1 = x;$$

$$f_{exp}(x,2) = x \cdot x = x^2;$$

$$f_{exp}(x,3) = x \cdot x^2 = x^3;$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$f_{exp}(x,y-1) = x \cdot x^{y-2} = x^{y-1};$$

$$f_{exp}(x,y) = x \cdot x^{y-1} = x^y.$$

Задания

---

1. Доказать примитивную рекурсивность факториала $f(x) = x!$.

2. Доказать примитивную рекурсивность псевдоразности

$$f(x,y) = x - y = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geq y; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3. Доказать примитивную рекурсивность знаковой функции

$$f(x) = sg(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

4. Доказать примитивную рекурсивность равенства

$$f(x,y) = eql(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

5. Доказать примитивную рекурсивность модуля разности:

$$f(x,y) = mod(x,y) = \begin{cases} x \div y, & \text{если } x \geq y; \\ y \div x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

6. Доказать примитивную рекурсивность функции «больше»:

$$f(x,y) = more(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > y; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

7. Доказать примитивную рекурсивность функции «больше или равно»:

$$f(x,y) = moreql(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq y; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$