Конспект к билетам по мат. анализу

Выполнил великий и могучий Файтельсон Антон

1. Аксиоматическое определение множества действительных чисел. Свойство полноты.

   Определение 1. *Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных (вещественных) чисел, а его элементы — действительными (вещественными) числами, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:*

   Краткая сводка. *Закон (правило) f, посредством которого каждому a $\in$ A сопоставляется единственный b $\in$ B, называют отображением. Обычно это записывают так: b = f(a) или f: A $\rightarrow$ B (отображение из A в B).*

   (I) Аксиомы сложения

   Определено отображение (Операция сложения)

   $$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

   сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из $\mathbb{R}$ некоторый элемент x y $\in$ $\mathbb{R}$, называемый суммой x и y. При этом выполнены следующие условия:

   - Нейтральный элемент(называемый в случае сложения нулем)

     $$\forall x \in \mathbb{R} : \exists 0 : x + 0 = 0 + x = x$$

   - Противоположный элемент

     $$\forall x \in \mathbb{R} : \exists(-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = (-x) + x = 0$$

   - Ассоциативность

     $$\forall x,y,z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$$

- Коммунитативность

$$\forall x,y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$$

(II) Аксиомы умножения

Определено отображение (Операция умножения)

$$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из $\mathbb{R}$ некоторый элемент x $\bullet$ y $\in \mathbb{R}$, называемый произведением x и y. При этом выполнены следующие условия:

- Нейтральный элемент(называемый в случае умножения единицей)

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists 1 \in \mathbb{R} \backslash 0 : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

- Обратный элемент

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash 0 : \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$$

- Ассоциативность

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

- Коммунитативность

$$\forall x,y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$$

(I, II) Связь сложения и умножения (Дистрибутивность умножения к сложению)

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R} : (x + y)z = xz + yz$$

(III) Аксиомы порядка

Между элементами $\mathbb{R}$ имеется отношение $\leq$, т.е. для элементов x, y из $\mathbb{R}$ установлено, выполняется ли x $\leq$ y или нет. При этом должны удолетворяться следующие условия:

- $\forall x \in \mathbb{R}(x \leq x)$
- $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$

- $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (x \leq y) \vee (y \leq x)$

  Отношение $\leq$ в $\mathbb{R}$ называется отношением неравенства.

(I, III) Связь сложения и порядка в $\mathbb{R}$

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R} : (x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$$

(II, III) Связь умножения и порядка в $\mathbb{R}$

$$\forall x,y \in \mathbb{R} : (0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x \cdot y)$$

(IV) Аксиома полноты(непрерывности)

Если X и Y — непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для любых элементов x $\in$ X и y $\in$ Y выполнено x $\leq$ y, то $\exists c \in \mathbb{R}$, что $x \leq c \leq y$ для любых элементов x $\in$ X и y $\in$ Y.

Определение через кванторы(мне было весело это писать):

$$\forall x \in X, y \in Y : x \leq y \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$$

2. Следствия из аксиом множества действительных чисел.

   Замечание. Следствий много, и поэтому часть из них не будет представлено, я хз какие будут на экзамене.

   (a) Следствия аксиом сложения

   - В множестве действительных чисел имеется только один нуль.

     Доказательство. Если 0_1 и 0_2 — нули в $\mathbb{R}$, то по определению нуля

     $$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$$

     □

   - В множестве действительных чисел у каждого элемента имеется единственный противоположный элемент.

Доказательство. Если x_1 и x_2 — элементы, противоположные x $\in \mathbb{R}$, то

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2$$

□

- Уравнение $a + x = b$ в $\mathbb{R}$ имеет единственное решение:

  $$x = b + (-a)$$

  Доказательство. Это вытекает из существования и единственности у каждого элемента a $\in \mathbb{R}$ противоположного ему элемента:

  $$(a + x = b) \Leftrightarrow ((x + a) + (-a) = b + (-a)) \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow (x + (a + (-a)) = b + (-a)) \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow (x + 0 = b + (-a)) \Leftrightarrow (x = b + (-a))$$

  □

(b) Следствия аксиом умножения

- В множестве действительных чисел имеется только одна единица.
- Для каждого числа x $\neq 0$ имеется только один обратный элемент x^{-1}.
- Уравнение a·x = b при a $\in \mathbb{R}\backslash 0$ имеет притом единственное решение x = b $\cdot\, a^{-1}$

  Замечание. Доказательства? Нахуй они нужны? Скопируй с верхних следствий епта, если так нужны

(c) Следствия аксиомы связи сложения и умножения

- $\forall x \in \mathbb{R} : x\cdot 0 = 0\cdot x = 0$

  Доказательство. $(x\cdot 0 = x\cdot (0 + 0) = x\cdot 0 + x\cdot 0) \Rightarrow$
  $\Rightarrow (x\cdot 0 = x\cdot 0 + 0 = x\cdot 0 + x\cdot 0 + (-x)\cdot 0 = x\cdot 0 + (-x)\cdot 0 = 0)$

  □

- $x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

  Доказательство. Если, например, y $\neq 0$, то из единственности решения уравнения x · y = 0 относительно x находим x = 0 · y^{-1} = 0 $\square$

- $\forall x \in \mathbb{R} : -x = (-1) \cdot x$

  Доказательство. $x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 = x + (-x)$, и утверждение следует из единственности противоположного элемента. $\square$

- $\forall x \in \mathbb{R} : (-1)(-x) = x$

  Доказательство. Следует из предыдущего док-ва и единственности противоположного элемента. $\square$

- $\forall x \in \mathbb{R} : (-x)(-x) = x \cdot x$

  Доказательство. $(-x)(-x) = ((-1) \cdot x)(-x) =$
  $= (x \cdot (-1))(-x) = x((-1)(-x)) = x \cdot x$ $\square$

(d) Следствия аксиом порядка.