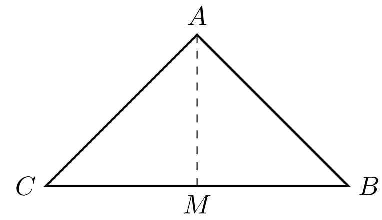
Задача 1

Дано:
A(1, 2)
B(4, 4)
C(2, -2)
Составить: ур-ние медианы треугольника ABC, проходящую через вершину A.



Решение:

1. Пусть AM – медиана, тогда точка M – середина отрезка BC, значит:

$$M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = M(3,1)$$

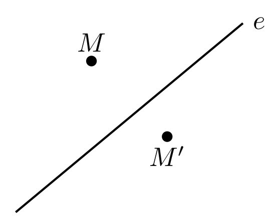
2. $\overline{AM} : \{2, -1\}$, $M(3,1) \Rightarrow AM : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1}$

Ответ: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1}$

Задача 2

Дано:
$M(8,11)$
$l : 2x + 3y + 3 = 0$

Найти: точку симметричную M относительно l.



Решение:

1. Из уравнения прямой l получаем вектор нормали:

$$2x + 3y + 3 = 0 \Rightarrow \overline{n}\{2,3\}$$

2. Вектор нормали будет являться направляющим вектором к прямой MM',где M' - искомая точка.

$$\text{Ур-ние } MM`\text{:} \begin{cases} 2t + 8 = x \\ 3t + 11 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{2} - 4 \\ t = \frac{x}{3} - \frac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow x/2 - y/3 - 1/3 = 0$$

MM‘: 3x - 2y - 2 = 0

3. Найдем O - т. пересечения MM‘ и l:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & -5 \\ 0 & 13 & -13 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 5y + 5 = x \end{cases} \Rightarrow O(0;-1)$$

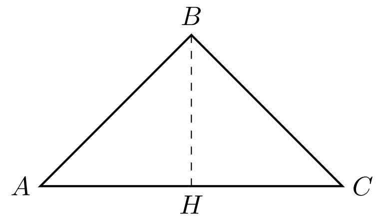
4. OM = OM’ И M’ $\in$ MM’

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2 = 0 \\ 8^2 + 12^2 = (y+1)^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}(y+1) \\ \frac{13}{9}(y+1)^2 = 208 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}(y+1) \\ y + 1 = \pm 12 \end{cases} \Rightarrow M'(-8;13)$$

Ответ: $M'(-8;13)$

Задача 3

Дано: A(-2,3)
B(7,-3)
C(4,8)
Составить:уравнение высоты треугольника ABC, проходящего через вершину B.



Решение:

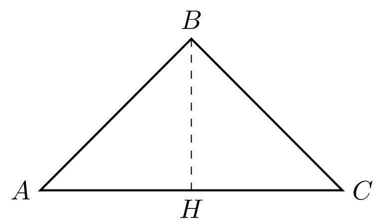
1. $\overline{AC}(6,5) \Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BH}$

2. Ур-ние прямой через точку и вектор нормали:

Ответ - BH: $(x-7)6+(y+3)5=0$

Задача 4

Дано: A(1,1)
l: x-y-2=0
Найти: S



Решение:

1. По уравнению прямой становится ясно, что точка A не лежит на l.

2. Из уравнения l найдем вектор нормали к данной прямой, он будет являтся направляющим вектором некоторой прямой. На этой прямой будет лежать точка A, а также сторона квадрата.
   $\overline{n}(1,-1)$

3. Найдем ту самую, некоторую прямую, и обозначим ее b. Для простоты вычисления возьмем вектор нормали к b (1,1)
   $b: 1(x-1)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$

4. Найдем еще одну вершину квадрата она будет лежать в пересечении этих прямых, назовем ее B.

$$\begin{cases} x-y-2=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \text{B: } \begin{cases} x=2 y=0 \end{cases}$$

5. Тогда длина стороны квадрата равна $|\overline{AB}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Тогда площадь равна $\sqrt{2}^2=2$

Ответ: 2