

## 1. Площадь фигуры относительно оси Ох

Площадь между графиком функции  $y = f(x)$ , осью Ох и прямыми  $x = a$  и  $x = b$  вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

**Пример:** Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = x^2$ , осью Ох и прямыми  $x = -1$  и  $x = 1$ .

$$S = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3} - \left( -\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

Ответ:  $S = \frac{2}{3}$ .

## 2. Площадь фигуры относительно оси Оу

Площадь между графиком функции  $x = g(y)$ , осью Оу и прямыми  $y = c$  и  $y = d$  вычисляется по формуле:

$$S = \int_c^d |g(y)| dy$$

**Пример:** Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $x = y^2$ , осью Оу и прямыми  $y = -1$  и  $y = 1$ .

$$S = \int_{-1}^1 y^2 dy = \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3} - \left( -\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

Ответ:  $S = \frac{2}{3}$ .

## 3. Площадь фигуры относительно кривой

Площадь между двумя функциями  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  на интервале от  $x = a$  до  $x = b$  вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

**Пример:** Найти площадь между графиками функций  $y = x^2$  и  $y = 2x$  на интервале от  $x = 0$  до  $x = 2$ .

$$S = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx$$

Разбиваем на два участка, где функции пересекаются (при  $x = 0$  и  $x = 2$ ):

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left( 4 - \frac{8}{3} \right) - (0 - 0) = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12}{3} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Ответ:  $S = \frac{4}{3}$ .

#### 4. Объём фигуры, полученной при вращении относительно оси Ох

Объём тела вращения при вращении графика функции  $y = f(x)$  вокруг оси Ох на интервале от  $x = a$  до  $x = b$  вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

**Пример:** Найти объём тела, полученного при вращении графика функции  $y = \sqrt{x}$  вокруг оси Ох на интервале от  $x = 0$  до  $x = 1$ .

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Ответ:  $V = \frac{\pi}{2}$ .

#### 5. Объём фигуры, полученной при вращении относительно оси Оу

Объём тела вращения при вращении графика функции  $x = g(y)$  вокруг оси Оу на интервале от  $y = c$  до  $y = d$  вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

**Пример:** Найти объём тела, полученного при вращении графика функции  $x = y^2$  вокруг оси Оу на интервале от  $y = 0$  до  $y = 1$ .

$$V = \pi \int_0^1 (y^2)^2 dy = \pi \int_0^1 y^4 dy = \pi \left[ \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \pi \cdot \frac{1}{5} = \frac{\pi}{5}$$

Ответ:  $V = \frac{\pi}{5}$ .