Аксиоматическое определение множества действительных чисел. Свойство полноты.

Множество R называется множеством действительных (вещественных) чисел, а его элементы — действительными (вещественными) числами, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:

(I)Аксиомы сложения. Определено отображение (операция сложения) +: R×R → R, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из R некоторый элемент x + y ∈ R, называемый суммой x и y. При этом выполнены условия:

1.Существует нейтральный элемент 0 такой, что для любого x ∈R: x +0 = 0+ x = x.

2. Для любого элемента x ∈ R имеется элемент −x ∈ R, называемый противоположным к x: x +(−x) = (−x)+ x = 0.

3. Операция + ассоциативна: x +(y + z) = (x + y)+ z.

4. Операция + коммутативна: x + y = y + x.

(II) Аксиомы умножения. Определено отображение (операция умножения) · : R×R → R, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из R некоторый элемент x · y ∈ R, называемый произведением x и y, причем так, что выполнены следующие условия:

1. Существует нейтральный элемент 1 ∈ R \ 0 (назв. единицей) такой, что ∀x ∈R: x · 1 = 1 · x = x.

2. Для любого элемента x ∈ R \ 0 имеется элю x −1 ∈ R, наз. обратным: x · x −1 = x −1 · x = 1.

3. Операция · ассоциативна: x · (y · z) = (x · y) · z.

4. Операция · коммутативна: x · y = y · x.

(III)Аксиома порядка. Между элементами R имеется отношение ≤, т. е. для элементов x, y из R установлено, выполняется ли x ≤ y или нет. При этом должны удовлетворяться следующие условия:

$0_{\leq}$. ∀x ∈R (x ≤ x).

$1_{\leq}$. (x ≤ y)∧(y ≤ x)⇒(x = y).

$2_{\leq}$. (x ≤ y)∧(y ≤ z)⇒(x ≤ z).

$3_{\leq}$. ∀x ∈R ∀y ∈R (x ≤ y)∨(y ≤ x).

(IV) Аксиома полноты(непрерывности). Если X и Y — непустые подмножества R, обладающие тем свойством, что для любых элементов x ∈ X и y ∈ Y выполнено x ≤ y, то существует такое c ∈ R, что x ≤ c ≤ y для любых элементов x ∈ X и y ∈Y.

Определение. Говорят, что множество X ⊂ R ограничено сверху (снизу), если существует число c ∈ R такое, что x ≤c (c ≤ x) для любого x ∈ X. Число c в этом случае называют верхней (нижней) границей или мажорантой (минорантой).

Определение. Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется ограниченным.

Определение. Элемент a∈ X называется максимальным (минимальным) элементом множества X ⊂ R, если x ≤a для любого элемента x ∈ X: (a = max X) := (a ∈ X ∧ ∀x ∈ X (x ≤ a)), (a = min X) := (a ∈ X ∧ ∀x ∈ X (a ≤ x)).

Определение. Наименьшее из чисел, ограничивающих множество X ⊂ R сверху, называется верхней гранью (или точной верхней границей) множества X и обозначается sup X (читается «супремум X») или supx ∈Xx: (s = sup X) := ∀x ∈ X ((x ≤ s)∧(∀s'<s∃x'∈ X (s'<x'))).

Определение. (i = inf X) := ∀x ∈ X ((i ≤ x)∧(∀i' >i∃x'∈ X (x' < i'))). Наряду с обозначением inf X (читается «инфимум X») для нижней грани X употребляется также обозначение inf x∈X x: sup X := min{c ∈ R | ∀x ∈ X (x ≤ c)}, inf X := max{c ∈ R | ∀x ∈ X (c ≤ x)}.

Теорема. (принцип верхней грани). Всякое непустое ограниченное сверху подмножество множества вещественных чисел имеет и притом единственную верхнюю грань.

Док-во. Поскольку единственность минимального элемента числового множества нам уже известна, необходимо лишь убедиться в существовании верхней грани.

Пусть X ⊂ R — данное подмножество, а Y = {y ∈R|∀x ∈ X (x ≤ y)} — множество верхних границ X. По условию, X≠∅ и Y≠∅. Тогда в силу аксиомы полноты существует число c∈ R такое, что ∀x ∈ X ∀y ∈Y (x ≤ c≤y). Число c, таким образом, является мажорантой X и минорантой Y. Как мажоранта X, число c является элементом Y, но как миноранта Y, число c является минимальным элементом множества Y. Итак, c=min Y =sup X. É

Теорема. (X не пусто и ограничено снизу) ⇒(∃! inf X).

Следствия из аксиом множества действительных чисел.

Следствия аксиом сложения

1.В множестве действительных чисел имеется только один нуль. Если 0_1 и 0_2 — нули в R, то по определению нуля: $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$.

2.В множестве действительных чисел у каждого элемента имеется единственный противоположный элемент: если x_1 и x_2 — элементы, противоположные x ∈R, то $x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2$.

3.Уравнение: a + x = b в R имеет и притом единственное решение x = b +(−a). Это вытекает из существования и единственности у каждого элемента a∈R противоположного ему элемента: (a + x = b) ⇔ ((x + a)+(−a) = b +(−a)) ⇔ (x +(a +(−a)) = b +(−a)) ⇔ (x +0 = b +(−a)) ⇔ (x = b +(−a)). Выражение b +(−a) записывают также в виде b − a.

Следствия аксиом умножения.

1. В множестве действительных чисел имеется только одна единица.

2. Для каждого числа x≠0 имеется только один обратный эл. x −1.

3. Уравнение a · x =b при a∈R\ 0 имеет и притом единственное решение x =b · a −1.

Следствия аксиомы связи сложения и умножения. Привлекая дополнительно аксиому (I, II), связывающую сложение и умножение, получаем дальнейшие следствия. **1.** Для любого x ∈R x · 0 = 0 · x = 0. (x · 0= x · (0+0)= x · 0+ x · 0)⇒(x · 0= x · 0+(−(x · 0))=0). Отсюда, между прочим, видно, что если x ∈R\ 0, то x −1 ∈R\ 0.

2. (x · y =0)⇒(x =0)∨(y =0). Если, например, y ≠ 0, то из единственности решения уравнения x · y =0 относительно x находим x =0 · y −1 =0.

3. Для любого x ∈R −x = (−1) · x. x +(−1) · x =(1+(−1)) · x =0 · x = x · 0=0, и утверждение следует из единственности противоположного элемента.

4. Для любого числа x ∈R (−1)(−x) = x. Следует из 3◦ и единственности элемента x, противоположного −x.

5. Для любого числа x ∈R (−x)(−x) = x · x. (−x)(−x)=((−1) · x)(−x)=(x · (−1))(−x)= x((−1)(−x))= x · x. Мы последовательно воспользовались двумя предыдущими утверждениями, а также коммутативностью и ассоциативностью умножения.

Следствия аксиом порядка.

1.Для любых x, y ∈R всегда имеет место в точности одно из соотношений: x < y, x = y, x > y. Это следует из приведенного определения строгого неравенства и аксиом $1_{\leq}$ и $3_{\leq}$.

2. Для любых чисел x, y, z из R (x < y)∧(y ≤ z) ⇒ (x < z), (x ≤ y)∧(y < z) ⇒ (x < z). Приведем для примера доказательство последнего утверждения. По аксиоме $2_{\leq}$ транзитивности отношения неравенства имеем: (x ≤ y)∧(y < z) ⇔ (x ≤ y)∧(y ≤ z)∧(y ≠ z) ⇒ (x ≤ z). Осталось проверить, что x ≠ z. Но в противном случае (x ≤ y)∧(y < z) ⇔ (z ≤ y)∧(y < z) ⇔ (z ≤ y)∧(y ≤ z)∧(y ≠ z). В силу аксиомы $1_{\leq}$ отсюда следует (y = z)∧(y ≠ z) — противоречие.

Определение окрестности. Типы окрестностей. Теоремы о состоянии вложенных отрезков и последовательности стягивающихся отрезков

Окрестность - интервал, содержащий точку a ∈ R. В частности, при δ>0 интервал (a − δ, a + δ) называется δ-окрестностью точки a. Его длина 2δ. Под точкой понимается как действительное число, так и элементы +∞, −∞, ∞. ε-окрестность точки a обозначается как U(a, ε).

Типы окрестностей:**1)** a - действительное число U(a, ε) = (a − ε, a + ε) **2)** a = +∞ U(+∞, ε) = (ε, +∞] **3)** a = −∞ U(−∞, ε) = [−∞, −ε) **4)** a = ∞ U(∞, ε) = (−∞, −ε) ∪ (ε, +∞) ∪ {∞} **Определение.** Системой вложенных отрезков называется множество M такое, что:∀ Δm, Δn∈M(Δm ⊂ Δn ∨Δn⊂ Δm).

Определение. Последовательность вложенных отрезков – система вложенных отрезков, если все отрезки пронумерованы и отрезки с большими номерами содержатся с меньшими номерами.

Теорема. (Непрерывность множества действительных чисел по Кантору). Для всякой системы вложенных отрезков существует точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.

Док-во. Для системы вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотрим два непустых множества: $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{a1, a2,\ldots\}$ $B=\{b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{b1, b2,\ldots\}$. Т.к. ∀n, m ∈ N -> $[a_{n+m}; b_{n+m}] \subset [a_n; b_n]$=> $a_n \leq a_{n+m}$; ∀n, m ∈ N -> $[a_{n+m}; b_{n+m}] \subset [a_m; b_m]$=> $b_{n+m} \leq b_m$. Следовательно ∀n, m ∈ N -> $a_n \leq a_{n+m} \leq b_{n+m} \leq b_m$. Т.е. ∀a∈A, b∈B-> a≤b. В силу аксиомы непрерывности существует такое c, что ∀a∈A, b∈B-> a ≤ c ≤ b. В частности ∀n ∈ N -> c $\in [a_n; b_n]$. чтд.

Определение. Последовательность вложенных отрезков называется стягивающейся, если среди входящих в него отрезков содержатся отрезки сколь угодной малой длинны. ∀ε>0$\exists\delta = [a,b] \in M(|b-a| < \varepsilon)$

Теорема. Стягивающаяся система вложенных отрезков имеет ровно одну точку, принадлежащую всем отрезкам.

Док-во. Допуская противное, предположим, что каждая из двух различных точек c и c' является общей для всех отрезков системы. Пусть, для определенности, c' < c, т.е. ε = c - c'>0. По определению стягивающейся системы, $\exists n \in \mathbf{N}$: $b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда $a_n \leq c' \leq c \leq b_n$. Отсюда $a_n \leq c'$=> $-c' \leq -a_n$=> $c-c' \leq c-a_n$; $c \leq b_n$=> $c-a_n \leq b_n-a_n$. Поэтому $\varepsilon = c - c' \leq c-a_n \leq b_n-a_n \leq \varepsilon$. Получили противоречие. Т. док

Определение предела последовательности. Единственность предела сходящейся последовательности.

Последовательность - функция f : N→ X, областью определения которой является множество натуральных чисел.

Определение. Число A∈ R называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого ε > 0 существует номер N такой, что при всех n> N имеем $|x_n - A| < \varepsilon$. $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A)$:= ∀ ε > 0 ∃$N$ ∈ ℕ ∀n > N ($|x_n - A| < \varepsilon$).

Определение. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к A или стремится к A и пишут $x_n \to A$ при n→∞. Последовательность, имеющая (не имеющая) предел, называется сходящейся(расходящейся).

Теорема. (единственность предела последовательности). Сходящаяся последовательность имеет только один предел. Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится. Предположим, что $x_n \to a$, $x_n \to b$, n → ∞ , и a ≠ b. В силу свойства R найдутся непересекающиеся окрестности U(a, ε') и U(b, ε''). По определению предела последов. эти окрестности содержат бесконечное число членов последовательности и вне этих окр. находится лишь конечное число членов, что невозможно.

Критерии существования предела числовой последовательности. Доказательство критерия о существовании предела ограниченной и монотонной последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей, если ∀n ∈ N ($x_n < x_n$+1); неубывающей, если ∀n ∈ N ($x_n \leq x_n$+1); невозрастающей, если ∀n ∈ N ($x_n \geq x_n$+1); убывающей, если ∀n ∈ N (xn > xn+1). Последовательности этих четырех типов называют монотонными последовательностями.

Теорема. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Док-во. Все члены последовательности, кроме конечного их числа, принадлежат окрестности предела — ограниченному множеству. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $A = \max\{|x_1|,\ldots,|x_N|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$. Тогда, $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq A$.

Теорема. Неубывающая числовая последовательность имеет предел, причём он в точности равен точной верхней границе (нижней границе, для ограниченной невозрастающей ч.п.).

Док-во. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная неубывающая числовая последовательность. Тогда множество $\{x_n\}_{n\in N|}$ ограничено, следовательно, из определения супремума, имеет супремум. Обозначим его через S. Тогда е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = S$ Действительно, так как $S = sup\{x_n\}_{n\in N}$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow S - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq S \Rightarrow |x_n - S| < \varepsilon$. Аналогичное доказательство для ограниченной невозрастающей ч.п

Критерии существования предела числовой последовательности. Доказательство критерия Коши.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши1), если для любого числа ε >0 найдется такой номер N ∈ ℕ, что из n> N и m > N следует $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Теорема. (критерий Коши сходимости последовательности). Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Док-во. Пусть$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. По числу ε > 0 найдем номер N так, чтобы при n > N иметь $|x_n$ –

$A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если теперь $m > N$ и $n > N$, то $|x_m - x_n| < |x_m - A| + |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, таким образом, проверено, что сходящаяся последовательность фундаментальна. Пусть теперь $\{x_k\}$ — фундаментальная последовательность. По заданному $\varepsilon > 0$ найдем номер N такой, что из $m \geq N$ и $k \geq N$ следует $|x_m - x_k| < \frac{\varepsilon}{3}$. Фиксировав $m = N$, получаем, что при любом $k > N$: $x_N - \frac{\varepsilon}{3} < x_k < x_N + \frac{\varepsilon}{3}$(1), но поскольку имеется всего конечное число членов последовательности $\{x_n\}$ с номерами, не превосходящими N, то мы доказали, что фундаментальная последовательность ограничена. Для $n \in N$ положим теперь $a_n := \lim_{k \geq n} x_k$, $b_n := \sup_{k \geq n} x_k$. Из этих определений видно, что $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ (поскольку при переходе к меньшему множеству нижняя грань не уменьшается, а верхняя не увеличивается). Последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ имеет, по лемме о вложенных отрезках, общую точку A. Поскольку при любом $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq A \leq b_n$, а при $k \geq n$: $a_n = \inf_{k \geq n} x_k \leq x_k \leq \sup_{k \geq n} x_k = b_n$ то при $k \geq n$ имеем $|A - x_k| \leq b_n - a_n$(2). Но из (1) следует, что при $n > N$: $x_N - \frac{\varepsilon}{3} \leq \inf_{k \geq n} x_k = a_n \leq b_n = \sup_{k \geq n} x_k \leq x_N + \frac{\varepsilon}{3}$, поэтому при $n > m$: $b_n - a_n \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$(3). Сравнивая (2) и (3), находим, что при любом $k > N$ $|A - x_k| < \varepsilon$, и мы показали, что $\lim_{n \to \infty} x_n = A$.

Определение предела функции по Коши и по Гейне. Их эквивалентность.

Определение1.(предел функции по Гейне). Число b называется пределом функции y=f(x) в точке a, если для любой последовательности значений аргумента x1, x2,…,x_n,…, сходящейся к a и состоящей из чисел x_n, отличных от a, соответствующая последовательности значений функции f(x1), f(x2),… f(x_n)…сходится к числу b.

Определение1*.(предел функции по Коши). Число b называется пределом функции y=f(x) в точке a, если для любого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, справедливо неравенство: $|f(x)-b|<\varepsilon$. Для обозначения предельного значения функции y=f(x) в точке a используют символику: $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Теорема. Определения 1 и 1* предела функции по Гейне и Коши являются эквивалентными.

Док-во. **1)** Пусть сначала число b является пределом функции y=f(x) в точке a по Коши. Докажем, что это число b является пределом функции y=f(x) в точке a и по Гейне. Пусть $\{x_n\}$- любая сходящаяся к a последовательность значений аргумента, все элементы которой отличны от a. Требуется доказать, что соответствующая последовательность значений $\{f(x_n)\}$ сходится к b. фиксируем произвольное положительно число ε и по нему положительное число δ, которое в силу определения предела функции по Коши гарантирует справедливость равенства $|f(x)-b|<\varepsilon$ для всех значений x, для которых $0<|x-a|<\delta$. В силу сходимости последовательности $\{x_n\}$ к a для указанного положительного числа δ найдется номер N такой, что при всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n-a|<\delta$. Поскольку $x_n \neq a$ для всех номеров n, то при всех $n \geq N$ справедливы неравенства $0<|x_n-a|<\delta$ и, значит, в силу определения предела функции по Коши при всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|f(x_n)-b|<\varepsilon$. Это и означает что последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b. **2)** Пусть теперь число b является пределом функции y=f(x) в точке a и по Коши. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого положительного числа ε и для сколь угодно малого положительного числа δ найдется хотя бы одно значение аргумента x такое, что $0<|x-a|<\delta$, но $|f(x_n)-b| \geq \varepsilon$. Таким образом мы можем взять последовательность $\delta_n = \frac{1}{n} (n = 1,2 \ldots)$ и утверждать, что для каждого ее элемента $\delta_n = \frac{1}{n}$ найдется хотя бы одно значение аргумента x_n такое, что $0<|x_n-a|<\frac{1}{n}$, но $|f(x_n)-b| \geq \varepsilon$(/). Левое из неравенств / означает что последовательность$\{x_n\}$ сходится к a и состоит из чисел, отличных от a. Но в таком случае согласно определению предела по Гейне соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ обязана сходиться к числу b, а этому противоречит правое из неравенств /, справедливое для всех номеров n. Полученное противоречие доказывает теорему.

Критерии существования пределов функции.

1.Предел монотонной функции. Если функция монотонно возрастает(убывает) на интервале (a,b) то в точках a и b функции f(x) существует односторонний предел.
$\lim_{x \to a+} f(x) = \inf_{(a,b)} f(x)$, $\lim_{x \to a-} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x)$(квадратная система)[

Следствие 1. Монотонная на интервале функция имеет конечный предел, как слева, так и справа в любой точке интервала.

Следствие 2. Если функция ограничена сверху(снизу) то предел ее правой(левой) точки конечны.

2. Критерий Коши. Для того чтобы f(x) имела конечный предел, при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие$\forall \delta > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D_f(|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. Аналогичное свойство критерия коши есть для фундаментальной последовательности, а именно существует предел функции тогда и только тогда, когда последняя является фундаментальной: $\varepsilon>0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n,m \in \mathbb{N}(n,m>N \Rightarrow |x_n-x_m|<\varepsilon)$.

3. Связь 2-х пределов в с 2-х сторонними. Функция f(x)имеет предел в точке тогда и только тогда, когда в этой точке существуют пределы как слева так и справа. Причем они равны соответственно значению функции предела в этой т. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) <=> \lim_{x \to a} f(x) = A$

Определение. Будем говорить, что функция y=f(x) удовлетворяет в точке a условию Коши, если для любого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число δ, такое, что для любых двух значений аргумента x' и x" удовлетворяющих условиям $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Теорема. (критерий Коши существования предела функции в точке a). Для того чтобы, функция y=f(x) имела в точке a конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы функция y=f(x) удовлетворяла в точке a условию Коши.

Док-во. 1) Необходимость. Пусть существует конечный предел $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Фиксируем произвольное положительное число ε. В силу определения 1* предела функции по Коши для положительного числа $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется положительное число δ такое, что, каковы бы ни были два значения аргумента x' и x", удовлетворяющие условиям $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta$, для соответствующих значений функции справедливы неравенства $|f(x')-b|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x'')-b|<\frac{\varepsilon}{2}$(1). Так как модуль суммы двух величин не превосходит суммы их модулей, то в силу неравенств (1) мы получим, что $|f(x')-f(x'')| = |[f(x')-b] + [b-f(x')]| \leq |f(x')-b|+|f(x'')-b| < \varepsilon$, а означает, что функция y=f(x) удовлетворяет в точке a условию Коши. **2)** Достаточность. Пусть функция f(x) удовлетворяет в точке a условию Коши. Требуется доказать, что функция f(x) имеет в точке a предел. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность значений аргумента, сходящаяся к a и состоящая из чисел, отличных от a. В силу определения 1 предела по Гейне достаточно доказать, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу b и что это число b одно и то же для всех сходящихся к a последовательностей $\{x_n\}$, состоящих из чисел, отличных от a. Докажем сначала, что для каждой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции {f(xn)} сходится к некоторому пределу. Фиксируем произвольное положительное число ε и по нему отвечающее ему, согласно условию Коши, положительное число δ. В силу сходимости последовательности $\{x_n\}$ к a и в силу условия $x_n \neq a$для этого $\delta > 0$ найдется номер N такой, что $0<|x_n-a|<\delta$ при $n \geq N$. Если теперь p — любое натуральное число (p=1, 2, 3, ...), то тем более $0<|x_{n+p}-a|<\delta$ при $n \geq N$*(т.к. $n \geq N$, то и подавно $n+p \geq N$). Таким образом, при $n \geq N$ и для любого натурального p справедливы два неравенства: $0<|x_{n+p}-a|<\delta$, $0<|x_n-a|<\delta$. Из этих двух неравенств и из условия Коши вытекает, что при $n \geq N$ и для любого натурального p: $|f(x_{n+p})- f(x_n)|<\varepsilon$, а это означает фундаментальность последовательности {f(xn)}. В силу критерия Коши сходимости числовой последовательности последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу Ь. Остается доказать, что для любых двух сходящихся к a последовательностей значений аргумента $\{x_n\}$ и $\{x_n'\}$, все элементы которых отличны от a, соответствующие последовательности значений функции $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ сходятся к одному и тому же пределу. Предположим, что последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ сходятся к пределам b и b' соответственно. Рассмотрим новую последовательность значений аргумента x1, x1’, x2, x2’,..x_n, x_n'.., также сходящуюся к a и состоящую из чисел, отличных от a. В силу доказанного выше соответствующая последовательность значений функции f(x1), f(x1’), f(x2), f(x2'),... f(x_n), f(x_n'),... обязана сходиться к некоторому пределу b". Но тогда в силу утверждения, что любая подпоследовательность этой последовательности обязана сходиться к тому же самому пределу b". Значит, как подпоследовательность нечетных элементов f(x1), f(x2),... f(x_n),.., так и подпоследовательность четных элементов f(x1’), f(x2'),..f(x_n'),... обе сходятся к b". Отсюда вытекает, что b= b'=b". Теорема полностью доказана.

Свойства функций, имеющих предел.

1. Пусть f(x), g(x) две функции определенные на одном и том же промежутке множества D. $\lim_{x \to a} f(x) = A$ A,B∈R причем A<B, тогда $\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(a)(f(x)-g(x))$; $\lim_{x \to b} g(x) = B$

2. Предел промежуточной функции. Пусть даны три функции f(x), $f_2(x)$, g(x) определенные на одном и том же множестве и существуют пределы: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f2(x)$=A; $\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(a)(f(x) \leq g(x) \leq f_2(x))$, тогда $\lim_{x \to b} g(x) = A$

Следствие. пусть существует предел $\lim_{x \to a} f(x) = A$, $\lim_{x \to b} g(x) = B$; $\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(a)(f(x) \leq g(x)) \Rightarrow A<B$.

Определение. Функция f (x) называется ограниченной на некотором множестве M, если для любого x∈ M выполняется неравенство $|f(x)| \leq C$, где C – некоторая положительная константа.

Теорема. Пусть функция f(x) имеет предел в точке x_0, тогда существует проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0)$, в которой функция f(x) ограничена.

Док-во. Пусть $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Это значит, что для любого $\varepsilon>0$ и для $\varepsilon=1$ существует $\delta>0$ такое, что для любого $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon=1$, т.е. $b-1<f(x)<b+1$. Пусть $C = \max\{|b+1|;|b-1|\}$. Тогда для любого $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)|<C$ чтд.

Теорема. Если функция f(x) имеет предел при $x \to x_0$, то этот предел единственный.

Док-во. Предположим, что функция f(x) при $x \to x_0$ имеет два различных предела, т.е. $\lim_{x \to x0} f(x) = a$ и $\lim_{x \to x0} f(x) = b$. $\lim_{x \to x0} f(x) = a$, следовательно: для любого ε>0 существует $\delta_1>0$ такое, что для любого x: $0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$(1); $\lim_{x \to x0} f(x) = b$ следовательно: для любого ε>0 существует $\delta_2>0$ такое, что для любого x: $0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$(2); Пусть $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$. Тогда для любого x: $0<|x-x_0|<\delta$ будут одновременно выполняться неравенства1-2. Для этих значений x имеем: $|b-a|=|b+f(x)-f(x)-a|=|(b-f(x))+(f(x)-a)|$. По свойству модулей имеем: $|(b-f(x))+(f(x)-a)| \leq |b-f(x)|+|f(x)-a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Следовательно, $|b-a| \leq 2\varepsilon \Rightarrow |b-a| = 0$, т.е. b=a . Следовательно, если предел у функции существует, то он единственный.

Теорема. (теорема о двух милиционерах). Пусть даны три функции f (x), ϕ(x), g(x), которые определены в некоторой окрестности $\mathring{U}_\delta(x_0)$ и удовлетворяют условию $\phi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ в этой окрестности. Тогда если $\lim_{x \to x0} \phi(x) = \lim_{x \to x0} g(x) = b$, то $\lim_{x \to x0} f(x) = b$.

Док-во. Пусть f(x) удовлетворяет условию $\phi(x) \leq f(x) \leq g(x)$*. Пусть $\lim_{x \to x0} \phi(x) = b$, следовательно: для любого ε>0 существует $\delta_1>0$ такое, что для любого x: $0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |\phi(x)-b|<\varepsilon$(3); Пусть $\lim_{x \to x0} g(x) = b$, следовательно: для любого ε>0 существует $\delta_2>0$ такое, что для любого x: $0<|x-x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-b|<\varepsilon$(4); Пусть $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$. Тогда для любого x: $0<|x-x_0|<\delta$ будут одновременно выполняться неравенства 3-4. По условию выполняется неравенство (*). Тогда для любого $\mathring{U}_\delta(x_0)$ получаем: $\delta-\varepsilon<\phi(x)\le f(x)\le g(x)<\delta+\varepsilon$. Таким образом, имеем: для любого x: $0<|x-x_0|<\delta$ выполняется $\delta-\varepsilon<f(x)<\delta+\varepsilon \Leftrightarrow |f(x)-b|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x0} f(x) = b$

Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Эквивалентные бесконечно малые величины. Примеры выполнения пределов с эквивалентными бесконечно малыми величинами.

Определение. Функция f(x) называется б.м. функцией при $x\to x_0$, если $\lim_{x\to x0} f(x) = 0$. Пример: функции y = sin x и y = x являются б/м при $x\to x_0$, т.к. $\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \lim_{x\to 0} x = 0$.

Определение. Функции вида α(x) и β(x) называются эквивалентно бесконечно малыми, если значение $x\to x_0$, а $\lim_{x\to x0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Для нахождения пределов используют замены эквивалентных бесконечно малых.

Теорема. Пусть f(x) тождественно ненулевая функция $D_f \cap \mathring{U}\delta(a)$, тогда f(x) – б.м при x->a, тогда f(x) б.б. и наоборот.

Свойства. **1**. Произведение б.б.(б.м.) величин есть б.б.(б.м.) величина при x->a. **2**. Сумма б.м.(б.б.) величин есть б.м.(б.б.) величина при x->a(если возникает неопр. $\infty - \infty$). **3**. Произведение б.б. величины на ограниченную функцию есть б.м.

Определение. Эквивалентные величины – б.м. величины α, β при x->a называется эквивалентной: $\alpha \underset{x\to a}{\sim} \beta$, если $\lim_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to a} \frac{A}{B} = 1$

Теорема. Пусть α, α_1, β, β_1 б.м. величины при x->a: $\alpha\sim\alpha 1$, $\beta\sim\beta 1$, тогда $\lim_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha 1}{\beta 1}$

Эквивалентности:**1)**$\sin \alpha(x)\sim\alpha(x)$ **2)**$1-\cos(\alpha)\sim\frac{\alpha^2(x)}{2}$ **3)**$\mathrm{tg}(\alpha)\sim\alpha(x)$ **4)**$\arcsin \alpha(x)\sim\alpha(x)$ **5)**$\mathrm{arctg}\, \alpha(x)\sim\alpha(x)$ **6)**$\ln\left(1+\alpha(x)\right)\sim\alpha(x)$ **7)**$\left(1+\alpha(x)\right)^p - 1\sim p\alpha(x)$ **8)**$a^{\alpha(x)} - 1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$

Правила нахождения пределов.

Пусть есть предел $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, k – const f, тогда: **1.**$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = A + B\ [\infty-\infty]$ **2.**$\lim_{x\to a}\left(f(x)*g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$ **3.**$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\left[\frac{0}{0}\right]$ **4.**$\lim_{x\to a}\left(kf(x)\right) = k\cdot\lim_{x\to a} f(x) = k\cdot A$

Первый замечательный предел $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Следствия: 1) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ **2)**$\lim_{x\to 0} \sin\frac{(k\cdot x)}{x} = k$ **3)**$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} = 1$ **4)**$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ **5)**$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x} = 1$

Второй замечательный предел. Следствия второго замечательного предела. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Следствия: **1)**$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ **2)**$\lim_{x\to 0} a^x - \frac{1}{x} = \ln a$ **3)**$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ **4)**$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ **5)**$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Определение непрерывности функции в точке. Свойства непрерывных функций.

Определение. Функция f(x) называется непрерывной в точке $x_0 \in D$, если выполнено одно из 4 эквивалентных условий:

1) $\lim_{x\to x0} f(x) = f(x0)$ **2)** $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in D(|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$. **3)**$f(x)=f(x_0)+\alpha(x)$(б.м. при x->a) **4)**б.м. приращению арг. соответствует б.м. прирощение. $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x0)=0$

Свойства. Пусть функция f и g непрерывна в точке x_0 тогда в т. x0 непрерывность функции:**1)** c_1+c_2*g, c_1,c_2 – const **2)**f*g **3)** $g*(g(x_0)\neq 0)$

Будет непрерывно: **4)** Если $f(x_0)\neq 0$ $\exists\delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0)(f(x)*(x_0)|>0)$ **5)** $0\exists\delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0)$(f(x)-огр. ф.) **6)** f(x) непрерывна в т x_0, $g(y_0)$ в т. $g_0=x_0$ то, сложная ф. g(f(x)) непрерывная в т. x_0

Классификация точек разрыва. Примеры

Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода разряда x_0 функции f(x) если существуют конечные пределы: $\lim_{x\to x0-} f(x)$, $\lim_{x\to x0+} f(x)$ неравные значению $f(x_0)$. Разрыв можно устранить доопределив функцию в точке x0, пологая, что $f(x_0)= \lim_{x\to x0-} f(x) = \lim_{x\to x0+} f(x)$, т.е. $f(x_0) = \lim_{x\to x0} f(x)$. Точкой разрыва 1-го разрыва x_0 называется устраненным разрывом если оба предела односторонние конечны и равны между собой $\lim_{x\to x0-} f(x) = \lim_{x\to x0+} f(x)$. Точка разрыва 1-го рода x_0 называется точкой разрыва скачка, если оба предела конечны, но неравны между собой. $\lim_{x\to x0-} f(x) \neq \lim_{x\to x0+} f(x)$. Точка x0 называется точкой разрыва 2-го рода, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен ∞.

Пример. **1)** f(x)={x^3, x≠0 {3, x=0; f(0)=0, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$. Оба предела конечны, равны между собой, но не равны значению функции в т. 0., x=0 т.р 1 рода устраненного разрыва, доопределим функцию f(0)= $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ **2)** f(x)={x2,x<0 {x+2, x≥0; $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x\hat{\ }2) = 0$; $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x+2) = 2$; Оба предела конечны, неравны между собой, x0=0 т.р. 1 рода скачка. 3) f(x)=lnx, $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, x0= 0 т.р. 2 рода.

Теорема. (о точках разрыва монотонной функции). Пусть функция (x)монотонна на отрезке a, b, тогда на этом отрезке она может иметь точки разрыва 1-го рода, причем $\lim_{x\to x0-} f(x) = \inf_{x<x0}(f(x))$ в случае возрастания; $\lim_{x\to x0+} f(x) = \sup_{x>x0}(f(x))$ в случае убывания

Непрерывность функции на множестве

Определение. Функция f(x) называется непрерывной на множестве X, если оно непрерывно в каждой точке множества X. Например, функция, непрерывная в каждой точке интервала, называется непрерывной на интервале. Условие непрерывности на всем множестве подразумевает отсутствие разрывов и прерываний значений функции.

Определение. Функция f(x) называется непрерывной в точке a, если для любой окрестности точки f(a) найдется такая окрестность точки a, что образ всех точек множества задания функций, лежащих в этой окрестности точки a, при отображении, осуществляемом функцией f(x), целиком лежит в указанной окрестности точки f(a).

Пример. Функция f(x) = x. Эта функция представляет собой прямую линию. Она непрерывна на всей числовой прямой (ℝ), так как значение этой функции изменяется непрерывно при изменении аргумента. Как мы знаем, для любой точки c ∈(ℝ) значение функции f(c) определено, и предел ф. существует и равен f(c) ($\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Свойства. Пусть X = $\{x_0\}$ или X = (a; b) или X = [a; b]. **1)** Сумма, разность и произведение конечного числа непрерывных на множестве X функций является функцией непрерывной на X. **2)** Если функции f(x) и g(x) непрерывны на X и g(x) ≠ 0 , ∀x∈X , то частное f(x)/g(x) – непрерывная на множестве X функция. **3)** Пусть f: X → Y, φ: Y → Z. Если f(x) непрерывна на X, φ(x) – непрерывна на Y, то сложная функция φ(f(x)) непрерывна на X.

Общие свойства функций непрерывных на отрезке. Теоремы Больцано-Коши

Теорема. Пусть функция f(x) определена и непрерывна на отрезках [a, b] и на концах принимает значение разных знаков f(a) * f(b) < 0, тогда ∃c ∈ (a,b)(f(c) = 0)

Док-во. Пусть функция *f* (*x*) определена и непрерывна на отрезке [*a*, *b*]. Если на концах этого отрезка функция принимает неравные значения *f*(*a*) = A, *f* (*b*) = B, то, каково бы ни было число *m* ∈ (A, B), найдётся такая точка *x* = c∈(*a*, *b*), что *f* (*c*) = *m*. Как частный случай имеет место следующее утверждение. Пусть функция *f*(*x*) непрерывна на отрезке [*a*, *b*] и на концах отрезка имеет значения разных знаков. Тогда существует внутренняя точка отрезка *c*∈(*a*, *b*), в которой *f*(*c*) = 0.

Следствие: любое уравнение нечетной степени имеет хотя бы один корень.

Теорема. Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Док-во. Будем считать, что A < *m* < B. Рассмотрим на промежутке [*a*, *b*] вспомогательную функцию ϕ (x) = *f* (x) − *m*. Эта функция непрерывна на промежутке [*a*, *b*] и на концах его имеет разные знаки: ϕ (*a*) = *f* (*a*) − *m* = A − *m* < 0 и ϕ(*b*) = *f*(*b*) − *m* = B − *m* > 0. Тогда, по второй теореме Больцано – Коши, между *a* и *b* найдётся точка *x* = *c*, для которой ϕ(*c*) = *m*. Ч.т.д.

Свойства. 1)**Теорема о промежуточном значении непрерывной функции:** пусть f(x) непрерывна на отрезке [a, b], f(a) =α, f(b) = β. Тогда любое значение ϒ между α и β функция достигает хотя бы в одной точке c ∈ [a,b]. Если f(x) определена и непрерывна в каком-либо промежутке X, то принимаемые ею значения также заполняют некоторый промежуток. 2)**Ограниченность (Вейерштрасса):** Функция, непрерывная на отрезке [a, b], ограниченна на этом отрезке, т.е. выполняется условие: M ≤f(x) ≤ M. 3)**Теорема о достижении непрерывной функцией точно верхней и точно нижней грани(Вейерштрасса):** Функция, непрерывная на отрезке [a, b] достигает супремума и инфинума. ∃ x_1, x_2 ∈ [a, b] (f(x_1)= sup f(x) = max f(x)) (f(x_2)= inf f(x) = min f(x)). **Теорема Гейне – Кантора:** Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна

Общие свойства функций непрерывных на отрезке. Теоремы Вейерштрасса.

Теорема. Функция, непрерывная на отрезке [a, b], ограниченна на этом отрезке, т.е. выполняется условие: M ≤f(x) ≤ M.

Теорема. Непрерывность на отрезке [a,b] функции f достигает на нем своих нижней и верхней граней, то есть своего минимума и максимума: ∃ x_1, x_2 ∈ [a, b] (f(x_1)= sup f(x) = max f(x)) (f(x_2)= inf f(x) = min f(x)).

Свойства. **1)Теорема о промежуточном значении непрерывной функции:** пусть f(x) непрерывна на отрезке [a, b], f(a) =α, f(b) = β. Тогда любое значение ϒ между α и β функция достигает хотя бы в одной точке c ∈ [a,b]. Если f(x) определена и непрерывна в каком-либо промежутке X, то принимаемые ею значения также заполняют некоторый промежуток.

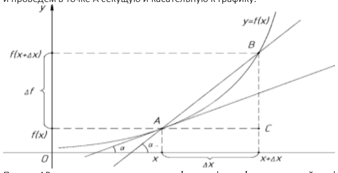
2) Теорема Гейне – Кантора: Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем. **3) теорема Больцано – Коши:** Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами. **3)теорема Больцано**

– Коши: Пусть функция f(x) определена и непрерывна на отрезках [a, b] и на концах этого отрезка принимает значение разных
знаков f(a) * f(b) < 0, тогда ∃c ∈ (a,b)(f(c) = 0)

Задачи, приводящие к понятию производной функции. Определение производной.

Определение. Производная непрерывной функции в данной точке равна пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Если функция имеет производную в точке x_0, то ее называют дифференцируемой в точке x_0. Процедуру нахождения производной функции называют дифференцированием функции. ***Задачи, приводящие к понятию производной функции:*** 1) **Механическая задача**. Мы знаем, что при равномерном движении v=S/t. При неравномерном движении по этой формуле находится средняя скорость на всем пути: $v_{ср}$=ΔS/Δt. Рассмотрим два момента времени: t и t+Δt, причем Δt – малый промежуток времени. Тогда за этот промежуток времени тело пройдет путь ΔS=S(t+Δt) – S(t) и $v_{ср}$=ΔS/Δt. Если Δt->0, то $v_{ср}$->v(t), значит, . $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v\text{ср} = v(t)$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$ **Вывод**: Физический смысл производной заключается в том, что мгновенная скорость – это производная пути по времени: v = S ′(t).

2.Задача о касательной к графику функции y = f(x). Рассмотрим график непрерывной функции и проведем в точке А секущую и касательную к графику.



Прямая АВ – секущая, ее уравнение y = $k_{секущ}$x +b, где $k_{секущ}$ – угловой коэффициент секущей, $k_{секущ}$ =Δy/Δx = tg$\alpha_{секущ}$, где $\alpha_{секущ}$– угол наклона секущей (отсчитывается от положительного направления оси Ох против часовой стрелки). Пусть Δх стремится к нулю, тогда секущая стремится к своему предельному положению – к касательной в точке А, т. е. угловой коэффициент касательной равен пределу углового коэффициента секущей: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{секущ} = k_{касат}$ причем $k_{касат}$ = tg α, где α – это угол наклона касательной, отсчитываемый от положительного направления оси Ох. Значит, $k\text{кас} = tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ **Вывод**: Геометрический смысл производной заключается в том, что угловой коэффициент или тангенс угла наклона касательной к графику функции в данной точке с абсциссой равен производной функции в этой точке: $k_{касат}$ = tg α = f ′(t).

Дифференцируемость. Правила дифференцируемости.

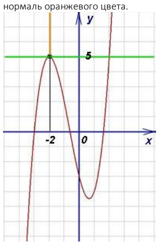
Определение. Функция f(x) называется дифференцируемой в точке x, если она имеет производную в этой точке. Операция отыскания производной называется дифференцированием функции. *Функция* y = f(x) называется дифференцируемой в точке x, если приращение Δy этой функции в точке x, отвечающее приращению аргумента Δx, может быть представлено в виде Δy = AΔx + α(Δx)Δx, где A – некоторое число. Независящее от Δx, a = α(Δx) – функция аргумента Δx, бесконечно малая в точке Δx = 0. В самой точке Δx = 0 эта функция α(Δx) не определена, и ей можно приписать в этой точке любое значение. В дальнейшем удобно считать это значение α(0) равным нулю. При такой договоренности функция α(Δx) будет непрерывна в точке Δx = 0 и равенство Δy = AΔx + α(Δx)Δx можно распространить и на значение Δx = 0. Правила дифференцируемости:

1.f(x)= c, f′(x)=0.
2.(f(x)± g(x))′ = f′(x)± g′(x) .
3.(f(x)·g(x))′ = f′(x)·g(x)+ f(x)·g′(x) .
4.(c · f (x))′ = c · f′(x).
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)}{g^2(x)}$
6. (g(f(x)))' = g'(f(x)) · f'(x)

Уравнения касательной и нормали к графику функции. Примеры.

Определение. Касательная - это прямая, которая касается графика функции в одной точке и все точки которой находятся на наименьшем расстоянии от графика функции. Уравнение касательной выводится из уравнения прямой: y = kx + b.

Определение. Нормаль - это прямая, проходящая через точку касания к графику функции перпендикулярно касательной. Уравнение нормали:$(x - x_0) + f\,'(x_0)(y - y_0) = 0$. **Пример**. Составить уравнение касательной и уравнение нормали к графику функции $y=x^3+2x^2-4x-3$, если абсцисса точки касания x_0=-2. Решение. Найдём ординату точки касания: y_0=y(-2)=-8+2*4-4*(-2)-3=5.Найдём производную функции: $y'=3x^2+4x-4$. Найдём значение производной в точке касания, то есть угловой коэффициент касательной: y’(-2)=12-8-4=0.Теперь у нас есть всё, чтобы получить уравнение касательной: y-5=0(x+2), y-5=0. Теперь можем составить и уравнение нормали: x+2+0(y-5)=0, x+2=0. На рисунке ниже: график функции бордового цвета, касательная зелёного цвета, нормаль оранжевого цвета.



Пример. Составить уравнение касательной и уравнение нормали к графику функции $y=x^2+5x+4$, если абсцисса точки касания x_0=1.

Решение. Найдём ординату точки касания: y_0=y(-1)=1+5+4=10 Найдём производную функции: y’=2x-5.Найдём значение производной в точке касания, то есть угловой коэффициент касательной:y’(-1)=-2-5=

-7.Подставляем все полученные: y-10=-7(x+1), y-10=-7x-7=>7x+y-3=0.Составляем уравнение нормали: x+1-7(y-10)=0, x-7y+71=0.

Производные элементарных функций.

1.c’=0,c – const 8.(cosx)’=-sinx
2.$(x^n)' = nx^{n-1}$ 9.$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $(a^x)' = a^x * \ln a$ 10.$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
4. $(e^x)' = e^x$ 11.$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x * \ln a}$ 12.$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6.$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 13.$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7.(sinx)’=cosx 14.$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$