

Задача 1

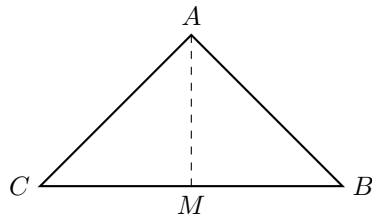
Дано:

A(1, 2)

B(4, 4)

C(2, -2)

Составить: уравнение медианы треугольника ABC, проходящую через вершину A.



Решение:

1. Пусть AM – медиана, тогда точка M – середина отрезка BC, значит:

$$M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = M(3, 1)$$

$$2. \overline{AM} : \{2, -1\}, M(3, 1) \Rightarrow AM : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1}$$

Ответ: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1}$

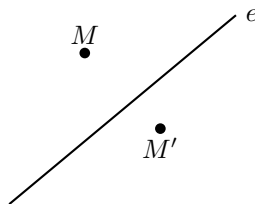
Задача 2

Дано:

M(8, 11)

$l : 2x + 3y + 3 = 0$

Найти: точку симметричную M относительно l.



Решение:

1. Из уравнения прямой l получаем вектор нормали:

$$2x + 3y + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}\{2, 3\}$$

2. Вектор нормали будет являться направляющим вектором к прямой MM', где M' - искомая точка.

$$\text{Ур-ние } MM': \begin{cases} 2t + 8 = x \\ 3t + 11 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{2} - 4 \\ t = \frac{y}{3} - \frac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow x/2 - y/3 - 1/3 = 0$$

$$MM': 3x - 2y - 2 = 0$$

3. Найдем O - т. пересечения MM' и l:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & -5 \\ 0 & 13 & -13 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 5y + 5 = x \end{cases} \Rightarrow O(0, -1)$$

4. OM = OM' и M' ∈ MM'

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2 = 0 \\ 8^2 + 11^2 = (y + 1)^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}(y + 1) \\ \frac{13}{9}(y + 1)^2 = 208 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}(y + 1) \\ y + 1 = \pm 12 \end{cases} \Rightarrow M'(-8; 13)$$

Ответ: M'(-8; 13)

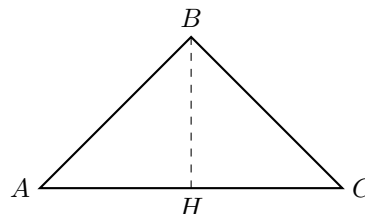
Задача 3

Дано: A(-2,3)

B(7,-3)

C(4,8)

Составить: уравнение высоты треугольника ABC, проходящего через вершину B.



Решение:

1. $\overline{AC}(6, 5) \Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BH}$
2. Ур-ние прямой через точку и вектор нормали:

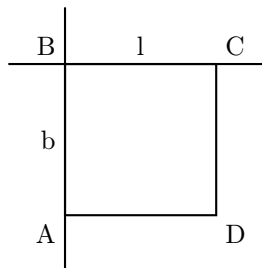
Ответ - ВН: $(x - 7)6 + (y + 3)5 = 0$

Задача 4

Дано: A(1,1)

l: $x - y - 2 = 0$

Найти: S



Решение:

1. По уравнению прямой становится ясно, что точка A не лежит на l.
2. Из уравнения l найдем вектор нормали к данной прямой, он будет являться направляющим вектором некоторой прямой. На этой прямой будет лежать точка A, а также сторона квадрата.
 $\vec{n}(1, -1)$
3. Найдем ту самую, некоторую прямую, и обозначим ее b. Для простоты вычисления возьмем вектор нормали к b $(1, 1)$
 $b: 1(x - 1) + 1(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$
4. Найдем еще одну вершину квадрата она будет лежать в пересечении этих прямых, назовем ее B.

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B: \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

5. Тогда длина стороны квадрата равна $|\overline{AB}| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. Тогда площадь равна $\sqrt{2}^2 = 2$

Ответ: 2

Задача 5

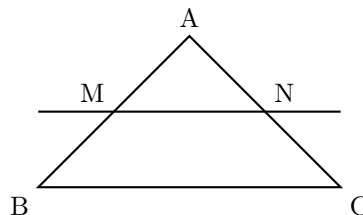
Дано:

A(-1,-1)

B(5,-3)

C(-3,-3)

Составить ур-ние: средней линии ABC, параллельной BC



Решение:

1. Найдем \overline{MN} , где М и N - середины АВ и АС

$$M\left\{\frac{-1+5}{2}, \frac{-1-3}{2}\right\}, N\left\{\frac{-1-3}{2}, \frac{-1-3}{2}\right\} \Rightarrow \overline{MN}\{-4, 0\}$$

2. Найдем уравнение прямой MN

$$MN: \frac{x-2}{-4} = \frac{y+2}{0} \Leftrightarrow (x-2) \cdot 0 = (y+2) \cdot (-4) \Rightarrow y = -2$$

Ответ: $y=-2$

Задача 6

Дано:

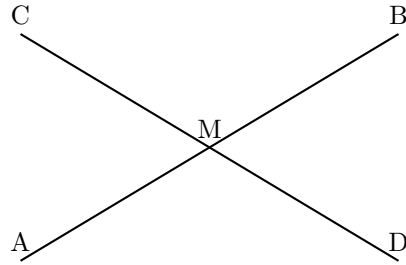
A(-5,1)

B(4,-2)

C(3,0)

D(-3,-3)

Найти: пересечение АВ и CD



Решение:

$$1. \overline{AB}(9, -3) \Rightarrow AB: \frac{x+5}{9} = \frac{y-1}{-3} \Leftrightarrow AB: -3x - 9y - 6 = 0$$

$$2. \overline{CD}(-6, -3) \Rightarrow CD: \frac{x-3}{-6} = \frac{y-0}{-3} \Leftrightarrow CD: -3x + 6y + 9 = 0$$

3. Найдем пересечение данных уравнений прямых:

$$\begin{cases} -3x - 9y - 6 = 0 \\ -3x + 6y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5y = -5 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ответ: (1,-1)

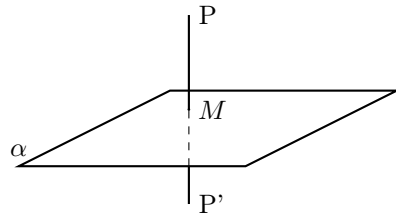
Задача 7

Дано:

P(9,0,-2)

a: $4x - 6y - z + 15 = 0$

Найти: точку симметричную данной отн. а



Решение:

1. $a \Rightarrow \vec{n}(4, -6, -1)$ - вектор нормали

2. Найдем прямую PM, где $PM \perp a$, а М - т.пересечения PM и а

$$PM: \frac{x-9}{4} = \frac{y-0}{-6} = \frac{z+2}{-1}$$

3. Найдем точку М $\in a$:

$$\begin{cases} \frac{y}{-6} = \frac{x-9}{4} \\ \frac{y}{-6} = \frac{z+2}{-1} \\ 4x - 6y - z + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y + 9 \\ z = \frac{1}{6}y - 2 \\ 4x - 6y - z + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{8}{3}y + 36 - 6y - \frac{1}{6}y + 2 + 15 = 0 \mid \cdot 6$$

$$-16y + 6 \cdot 36 - 36y - y + 12 + 15 \cdot 6 = 0 \Leftrightarrow -53y = -6 \cdot 53 \Rightarrow M : \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = -1 \end{cases}$$

4. точка М - середина отрезка РР', где Р'(х,у) - точка симметричная данной, тогда:

$$\begin{cases} \frac{x+9}{2} = 5 \\ \frac{y+0}{2} = 6 \\ \frac{z-2}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow P' : \begin{cases} x = 1 \\ y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ответ: Р'(1,12,0)

Задача 8

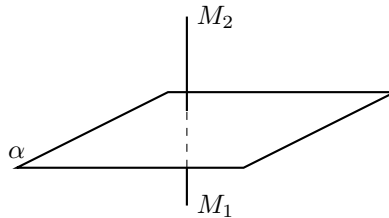
Дано:

ОУ $\Rightarrow M(0,y,0)$

$\alpha : 3x - 6y - 2z + 6 = 0$

$\rho(M, \alpha) = 6$

Найти: М



Решение:

1. Расстояние от точки до плоскости находится по формуле:

$$\rho((x_0, y_0, z_0), ax + by + cz + d) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

2. Подставим значения под формулу:

$$6 = \frac{|-6y + 6|}{7} \Rightarrow \begin{cases} -6y + 6 = 42 \\ 6y - 6 = 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(0, -6, 0) \\ M_2(0, 6, 0) \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} M_1(0, -6, 0) \\ M_2(0, 6, 0) \end{cases}$

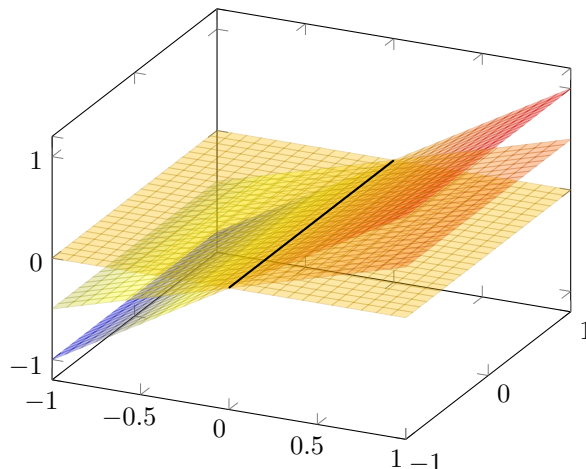
Задача 9

Дано:

$\alpha : 2x - 3y - 2z + 3 = 0$

$\beta : x + 4y - 4 = 0$

Найти: Уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные данными плоскостями.



Решение:

1. Расстояние от точки до плоскости вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

2. Если плоскость является биссектрисой двугранного угла, тогда все ее точки равноудаленны от плоскостей, образующих двугранный угол:

$$\frac{|2x - 3y - 2z + 3|}{\sqrt{4 + 9 + 4}} = \frac{|x + 4y - 4|}{\sqrt{1 + 4^2}} \Leftrightarrow |2x - 3y - 2z + 3| = |x + 4y - 4| \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 2z + 3 = x + 4y - 4 \\ 2x - 3y - 2z + 3 = -x - 4y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1 : x - 7y + 7 = 0 \\ \phi_2 : 3x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} \phi_1 : x - 7y + 7 = 0 \\ \phi_2 : 3x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$

Задача 10

Дано:

A(5,-9,-2)

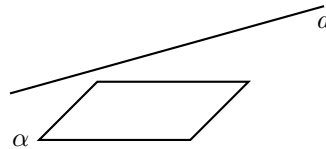
B(3,-6,-1)

C(4,-9,-1)

$$a : \frac{x}{3} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-4}{-1}$$

Выяснить: взаимное расположение прямой и плоскости, проходящей через 3 точки.

Решение:



1. Уравнение плоскости через 3 точки находится через матрицу вида:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}$$

2. Уравнение плоскости α через 3 данные точки имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - 5 & y + 9 & z + 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 3(x - 5) + (-2 + 1)(y + 9) + 3(z + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + y + 3z = 0$$

3. Проверим пересекаются ли прямая и плоскость:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-4}{-1} \\ 3x + y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6z - 29 \\ x = -3z + 12 \\ 3x + y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow -9z + 36 + 6z - 29 + 3z = 0 \Leftrightarrow$$

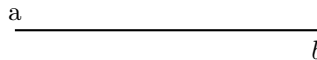
$7 = 0$ - неверно, значит прямая и плоскость параллельны.

Ответ: Параллельны

Задача 11

Дано:

$$a: \begin{cases} 4x - 6y - z - 49 = 0 \\ 5x - 8y - 2z - 65 = 0 \end{cases} \quad b: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -6 + 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$



Выяснить: взаимное расположение прямых

Решение:

1. Найдем вектора нормали к обр. плоскостям прямой а, произведение из векторов нормали есть направляющий вектор к прямой а.

$$\begin{cases} 4x - 6y - z - 49 = 0 \\ 5x - 8y - 2z - 65 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n_1(4, -6, -1) \\ n_2(5, -8, -2) \end{matrix} \Rightarrow l_a = [n_1, n_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -6 & -1 \\ 5 & -8 & -2 \end{vmatrix} = 4i + 3j - 2k \Rightarrow l_a(4, 3, -2)$$

2. Приведем прямую b к каноническому виду, получим точку на этой прямой и напр. вектор.

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -6 + 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{4} = t \\ \frac{y+6}{3} = t \\ \frac{z+1}{-2} = t \end{cases} \Rightarrow l_b(4, 3, -2), M(3, -6, 1) \in b$$

Так как $l_b = l_a$, тогда прямые коллинеарны.

3. Подставим точку М в уравнение прямой а:

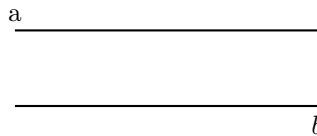
$$\begin{cases} 12 = 36 + 1 - 49 = 0 - \text{верно} \\ 15 + 48 + 2 - 65 = 0 - \text{верно} \end{cases} \Rightarrow \text{Прямые совпадают}$$

Ответ: Прямые совпадают.

Задача 12

Дано:

$$a: \begin{cases} 3x + 8y + 5z + 10 = 0 \\ 5x - 4y + z + 2 = 0 \end{cases} \quad b: \begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y+6}{3} = \frac{z+4}{-6} \end{cases}$$



Найти: расстояние между прямыми

Решение:

1. Получим направляющий вектор из прямой а ($[\overline{n_1}, \overline{n_2}] = l_a$):

$$l_a: \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 8 & 5 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 28i + 42j - 84k \Rightarrow l_a(28, 42, -84) \quad l_a(2, 3, -6)$$

2. Получим точку $M_a(x, y, z) \in a$ путем обнуления координаты x в системе уравнений:

$$\begin{cases} 8y + 5z + 10 = 0 \\ -4y + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow M_a(0, 0, -2)$$

3. Проанализируем уравнение прямой b, получим $l_b(2, 3, -6), M_b(3, -6, -4) \in b$. Направляющие вектора прямой а и прямой b совпадают, а значит считать расстояние между прямыми нужно через векторное произведение $M_a M_b()$ и l_b . Напишем общее уравнение для вычисления расстояния между параллельными прямыми:

$$\rho(a, b) = \frac{|[M_a M_b, l_b]|}{|l_b|}$$

4. Решим по последней формуле, выполнив промежуточные вычисления:

$$\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \end{matrix} \right\| = |42i + 14j + 21k| = \sqrt{42^2 + 14^2 + 21^2} = 49$$

$$\rho(a, b) = \frac{49}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = 7$$

Ответ: 7

Задача 13

Дано:

$$a: \begin{cases} 5x - 3y + 4z - 35 = 0 \\ 7x - 3y + 5z - 49 = 0 \end{cases}$$

$$b: \frac{x-3}{9} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{-1}$$

Найти: угол между прямыми

Решение:

1. Найдем направляющий вектор к прямой а:

$$l_a = [n_1(5, -3, 4), n_2(7, -3, 5)] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 4 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -3x + 3y + 6z \Rightarrow l_a(-3, 3, 6)$$

2. Формула для подсчета угла между прямыми а и b по направляющим векторам l_a и l_b :

$$\alpha = \arccos\left(\left|\frac{(l_a, l_b)}{|l_a||l_b|}\right|\right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\left|\frac{-27}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 6^2}\sqrt{9^2 + 2^2 + 1}}\right|\right) \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{3\sqrt{129}}{86}\right)$$

Ответ: $\arccos\left(\frac{3\sqrt{129}}{86}\right)$

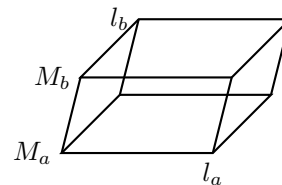
Задача 14

Дано:

$$a: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z+3}{1}$$

$$b: \frac{x-27}{21} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-5}{14}$$

Найти:



Решение:

1. Найдем для прямых точку и направляющий вектор:

$$a \Rightarrow \begin{matrix} l_a(1, 0, 1) \\ M_a(0, -3, -3) \end{matrix}$$

$$b \Rightarrow \begin{matrix} l_b(21, 6, 14) \\ M_b(27, -4, 5) \end{matrix}$$

2. Расстояние между скрещивающимися прямыми (направляющие вектора разные) вычисляется по формуле:

$$\rho(a, b) = \frac{(M_a M_b, l_a, l_b)}{|[l_a, l_b]|}$$

3. Промежуточные вычисления:

$$(M_a M_b, l_a, l_b) = \begin{vmatrix} 27 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 21 & 6 & 14 \end{vmatrix} = 121$$

$$[l_a, l_b] = \left\| \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 21 & 6 & 14 \end{pmatrix} \right\| = |-6i + 7j + 6k| = 11$$

$$\rho(a, b) = \frac{121}{11} = 11$$

Ответ: 11

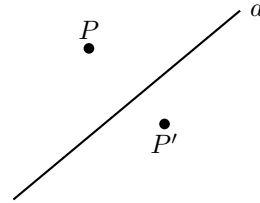
Задача 15

Дано:

$P(21, 11, -6)$

$a: \frac{x}{5} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-3}{-1}$

Найти: точку симметричную P отн. a .



Решение:

1. $a \Rightarrow l(5, 6, -1)$

2. Найдем уравнение плоскости α , проходящей через P' и перпендикулярной a .

$$5(x - 21) + 6(y - 11) - (z + 6) = 0 \Leftrightarrow 5x + 6y - z - 177 = 0$$

3. Найдем M - т. пересечения α и a :

$$\begin{cases} 5x + 6y - z - 177 = 0 \\ \frac{x}{5} = \frac{y+1}{6} \\ \frac{y+1}{6} = \frac{z-3}{-1} \end{cases} \Rightarrow M(15, 17, 0)$$

4. M - середина PP' , где $P'(x, y, z)$ - искомая точка

$$\begin{cases} \frac{x+21}{2} = 15 \\ \frac{y+11}{2} = 17 \\ \frac{z-6}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow P'(9, 23, 6)$$

Ответ: $P'(9, 23, 6)$

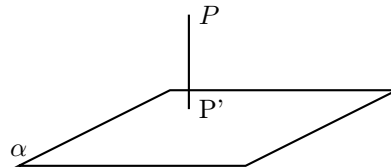
Задача 16

Дано:

$P(9, 0, 3)$

$a: 4x + 3y + z - 13 = 0$

Найти: Проекцию точки P на a



Решение:

1. $a \Rightarrow n(4, 3, 1) \perp a$

2. Найдем прямую $l \perp a$ и $P \in l$:

$$l: \frac{x-9}{4} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-3}{1}$$

3. Найдем искомую точку P' - пересечение l и α .

$$\begin{cases} \frac{x-9}{4} = \frac{y-0}{3} \\ \frac{y-0}{3} = \frac{z-3}{1} \\ 4x + 3y + z - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow P'(5, -3, 2)$$

Ответ: $P'(5, -3, 2)$

Задача 17

Дано:

$P(-6, -4, -6)$

$\alpha: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}$

Найти: Проекцию P на α

Решение:



$$1. a \Rightarrow l(4, 1, 5) \Rightarrow \alpha \perp a \wedge P \in \alpha$$

$$\alpha: 4(x+6) + (y+4) + 5(z+6) = 0 \Leftrightarrow 4x + y + 5z - 58 = 0$$

$$2. P' \in \alpha \wedge P' \in a:$$

$$\begin{cases} 4x + y + 5z - 58 = 0 \\ \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} \\ \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5} \end{cases} \Rightarrow P'(-5, -3, -7)$$

Ответ: $P'(-5, -3, -7)$

Задача 18

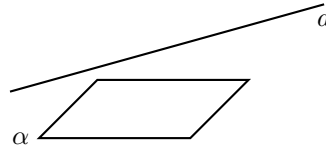
Дано: $\alpha: \begin{cases} 4x + 3y + z - 29 = 0 \\ 5x + 4y + z - 36 = 0 \end{cases}$

$a: 3x + 2y + z + 4 = 0$

Выяснить: взаимное расположение прямой и

плоскости

Решение:



$$1. a \Rightarrow l_a = [n_1(4, 3, 1), n_2(5, 4, 1)] = -i + j + k \Leftrightarrow l_a(-1, 1, 1)$$

2. Проверим есть ли пересечение a и α :

$$\begin{cases} 4x + 3y + z - 29 = 0 \\ 5x + 4y + z - 36 = 0 \\ 3x + 2y + z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & 29 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & 1 & 36 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 33 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & 1 & 36 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 33 \\ 0 & -1 & 1 & -4 - 33 * 3 \\ 0 & -1 & 1 & 36 - 33 * 5 \end{array} \right) \Rightarrow \text{(н. стр. - ср. стр)} 0 = 40 - 33 * 2 - \text{неверно, тогда } a \parallel \alpha$$

Ответ: Прямая параллельна плоскости