§3. ДЕКАРТОВЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

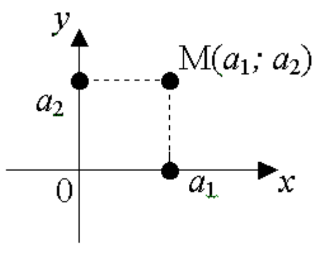
n°1. Понятие кортежа

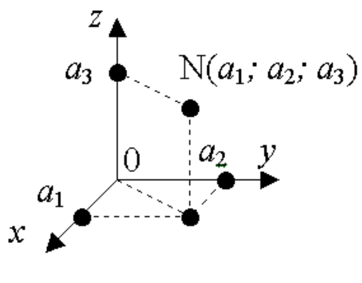
Понятие *кортежа* будем считать основным, неопределяемым (слово кортеж происходит от французского слова *«cortege»* – торжественное шествие). Ограничимся интуитивным описанием этого понятия.

Пусть имеем объекты: $a_1, a_2, ..., a_n$, среди которых могут быть совпадающие, при этом, исходя из некоторых соображений, объект a_1 считается 1-ым, объект a_2 считается 2-ым, и так далее, наконец объект a_n считается n-ым. Тогда будем говорить, что имеем *кортеж* или *упорядоченный набор* $(a_1; a_2; ...; a_n)$ *длины n*, называя объекты $a_1, a_2, ..., a_n$ соответственно 1-ой, 2-ой, …, n-ой *компонентами* этого кортежа. Кортежи длины 2 иногда называют *парами*, длины 3 – *тройками*, длины 4 – *четверками*, и так далее.

$(a_1; a_2;...; a_n) = (в_1; в_2;...; в_n)$ тогда и только тогда, когда $a_1=в_1$ и $a_2=в_2$ и ... и $a_n=в_n$.

Если a_1, a_2, a_3 – числа, то пару $(a_1; a_2)$ можно изобразить точкой $M(a_1; a_2)$ на координатной плоскости $(0xy)$, а тройку $(a_1; a_2; a_3)$ можно изобразить точкой $N(a_1; a_2; a_3)$ в пространственной системе координат $(0xyz)$.





n°2. Декартовы произведения множеств

Определение. Пусть $A_1, A_2, … A_n$, где $n \in \boldsymbol{N}$ и $n>1$, – некоторые непустые множества. *Декартовым произведением* данных множеств называется множество, обозначаемое символом $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ и состоящее из всевозможных кортежей вида $(a_1, a_2, ..., a_n)$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, … , $a_n \in A_n$. Если $A_1=A_2=\ldots=A_n=A$, то вместо символа $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ иногда используется символ A^n, причем множество A^n называется *n-ой декартовой степенью множества A*. Множества A^2 и A^3 называется еще *декартовым квадратом* и *кубом* множества A соответственно.

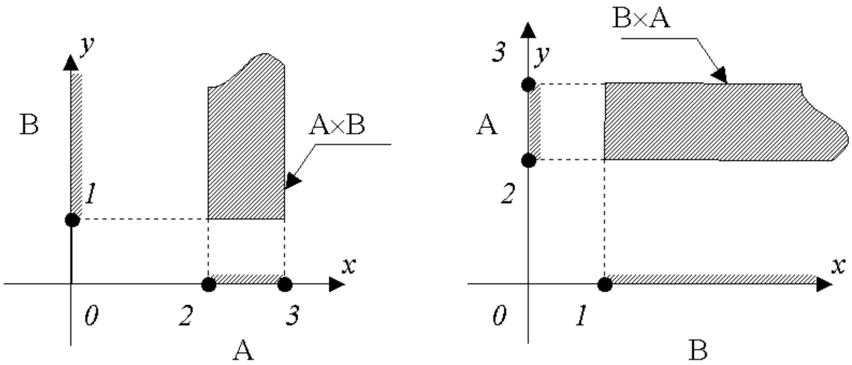
Итак, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \overset{df}{=} \{(a_1; a_2; ...; a_n) \mid a_1 \in A_1 \text{ и } a_2 \in A_2 \text{ и } \ldots \text{ и } a_n \in A_n\}$.

Если A_1, A_2, A_3 – числовые множества, то множество $A_1 \times A_2$ можно изобразить на координатной плоскости $(0xy)$ множеством $\{M(x; y) \mid x \in A_1$ и $y \in A_2\}$, а множество $A_1 \times A_2 \times A_3$ можно изобразить множеством $\{M(x; y; z) \mid x \in A_1$ и $y \in A_2$ и $z \in A_3\}$ в пространственной системе координат $(0xyz)$.

Пример. Найти $A \times B$, если 1) $A = \{m; n; q\}$ и $B = \{□; \bullet\}$; 2) $A=[2;3]$ и $B=[1; +\infty]$.

Решение. 1) $A \times B \overset{df}{=} \{(a; в) \mid a \in A$ и $в \in B\} = \{(m; □); (m; \bullet); (n; □); (n; \bullet); (q; □); (q; \bullet)\}$.

2) $A \times B \overset{df}{=} \{(a; в) \mid 2 \le a \le 3$ и $в \ge 1\}$. Так как A и B – числовые множества, то декартово произведение $A \times B$ можно изобразить на координатной плоскости $(0xy)$ множеством $\{M(x; y) \mid x \in A$ и $y \in B\}$, то есть множеством $\{M(x; y) \mid 2 \le x \le 3$ и $y \ge 1\}$. Сравнивая $A \times B$ с множеством $B \times A = \{(a; в) \mid a \ge 1$ и $2 \le в \le 3\}$, убеждаемся, что $A \times B \ne B \times A$. Действительно, например, $(2; 4) \in (A \times B)$, но $(2; 4) \notin (B \times A)$.



Как следует из рассмотренного выше примера, декартово произведение двух множеств не обладает свойством коммутативности