Самостоятельная работа по геометрии и топологии

Вариант 1

1 задача Составьте уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны вектору $\vec{a}(1{,}2{,}0)$, а направляющая задана системой:

$$\alpha\colon \begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Алгоритм 1) Пусть $M(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$. Если она принадлежит α, то ее ур-ние удолетворяет системе

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{4} + \frac{z_0^2}{9} = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad => M(0, y_0, z_0)$$

2) Так как это цилиндр, то образующая l || $\vec{a}$, $M \in l$.

Напишем уравнение образующей.

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-y_0}{2} = \frac{z-z_0}{0}$$

$$\begin{cases} x = \frac{y-y_0}{2} \\ x = \frac{z-z_0}{0} \end{cases} => \begin{cases} y_0 = y - 2x \\ z_0 = z \end{cases}$$

3) Подставим уравнение данной прямой в уравнение направляющей, получим ответ.

$$\frac{(y-2x)^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Ответ: $\frac{(y-2x)^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

2 задача Напишите уравнения прямолинейных образующих однополосного гиперболоида: $100x^2 - 36y^2 + 225z^2 = 900$, проходящих через точку $A(3; 2; 0{,}8)$.

Решение:

1) Пусть $\vec{l}(a,b,c)$ - направляющий вектор, прямолинейной образующей l, где $A \in l$

$$l : \begin{cases} x = at + 3 \\ y = bt + 2 \\ z = ct + 0.8 \end{cases}$$, Подставляем в уравнение из условия

$$100(at+3)^2 - 36(bt+2)^2 + 225(ct+0.8) - 900 = 0$$

Так как ур-ние должно выполнятся $\forall t$, то тогда должно выполнятся:

$$\begin{matrix} t^2| & 100a^2 - 36b^2 + 225c^2 = 0 \\ t^1| & 600at - 144b + 360c = 0 \\ t^0| & 900 - 144 + 144 - 900 = 0 \end{matrix} => \begin{cases} 100a^2 - 36b^2 + 225c^2 = 0 \\ 600at - 144b + 360c = 0 \end{cases}$$

Для направ. вектора $\vec{l}(a,b,c)$ возьмем 2 варианта $\vec{l}(0,b,c)$, $\vec{l}(1,b,c)$

$\vec{l}(0,b,c)$:

$$\begin{cases} -36b^2 + 225c^2 = 0 \\ -144b + 360c = 0 \end{cases} => b = \frac{360}{144}c = \frac{5}{2}c$$

$$-36\frac{25}{4}c^2 + 225c^2 = 0 => 0c^2 = 0 => c \in \mathbb{R}$$

При c = 0, b = 0, получается нулевой вектор, поэтому данный вектором будет $\vec{l1}(0, \frac{5}{2}c, c) c \in \mathbb{R}/0$

$\vec{l}(1,b,c)$:

$$\begin{cases} 100 - 36b^2 + 225c^2 = 0 \\ 600 - 144b + 360c = 0 \end{cases} => b = \frac{29}{12}, c = -\frac{7}{10}$$ (Подсчитано на калькуляторе)

$\vec{l2}(1, \frac{29}{12}, -\frac{7}{10})$

2) Подставляем значения напр. векторов в l:

$$l1:\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{5}{2}ct+2 \\ z=ct+0.8 \end{cases}\quad \text{, где } c\in\mathbb{R}/0 \text{ , } l2:\begin{cases} x=t+3 \\ y=\frac{29}{12}t+2 \\ z=\frac{-7}{10}t+0.8 \end{cases}$$

Что и является ответом.

3 задача Напишите уравнения прямолинейных образующих гиперболического параболоида:

$$\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=10x,$$

параллельных вектору $\vec{a}(2;10;-15)$.

Решение

1) Пусть прямолинейная образующая $l\cap O_{xy}$ (Возможно 3 варианта - $l\cap O_{xy}$, $l\cap O_{xz}$, $l\cap O_{yz}$) 2) Составим ур-ние прямолинейной обр.:

$$l:\begin{cases} x=2t+x_0 \\ y=10t+y_0 \\ z=-15t+0 \end{cases}$$

3)Подставим уравнение прямой в уравнение параболоида:

$$\frac{(10t+y_0)^2}{4}-\frac{(-15t)^2}{9}=10(2t+x_0)$$

4)Группируем:

$$\begin{array}{ll} t^2| & \frac{100}{4}-\frac{225}{9}=0 \\ t^1| & \frac{20y_0}{4}=20 => \\ t^0| & \frac{y_0^2}{4}=10x_0 \end{array} \begin{cases} y_0=4 \\ x_0=\frac{4}{10} \end{cases}$$

5) Получим:

$$l:\begin{cases} x=2t+0.4 \\ y=10t+4 \\ z=-15t \end{cases}$$

Аналогично проверим ост. пересечения

$M_x z$

2) Составим ур-ние прямолинейной обр.:

$$l: \begin{cases} x = 2t + 0 \\ y = 10t + y_0 \\ z = -15t + z_0 \end{cases}$$

3)Подставим уравнение прямой в уравнение параболоида:

$$\frac{(10t + y_0)^2}{4} - \frac{(-15t + z_0)^2}{9} = 10(2t)$$

4)Группируем:

$$\begin{array}{ll} t^2| & \frac{100}{4} - \frac{225}{9} = 0 \\ t^1| & \frac{20y_0}{4} + \frac{30z_0}{9} = 20 \\ t^0| & \frac{y_0^2}{4} - \frac{z_0^2}{9} = 0 \end{array} => \begin{cases} y_0 = 4 \\ z_0 = 3 \end{cases} => l: \begin{cases} x = 2t \\ y = 10t + 2 \\ z = -15t + 3 \end{cases}$$

2) Составим ур-ние прямолинейной обр.:

$$l: \begin{cases} x = 2t + x_0 \\ y = 10t \\ z = -15t + z_0 \end{cases}$$

3)Подставим уравнение прямой в уравнение параболоида:

$$\frac{(10t)^2}{4} - \frac{(-15t + z_0)^2}{9} = 10(2t + x_0)$$

4)Группируем:

$$\begin{array}{ll} t^2| & \frac{100}{4} - \frac{225}{9} = 0 \\ t^1| & \frac{30z_0}{9} = 20 \\ t^0| & -\frac{z_0^2}{9} = 10x_0 \end{array} => \begin{cases} x = \frac{-2}{5} \\ z = 6 \end{cases} => l: \begin{cases} x = 2t - 0.4 \\ y = 10t + 0 \\ z = -15t + 6 \end{cases}$$

№4. №9.905 (1).

905. Даны две точки F_1, F_2, расстояние между которыми равно $2c > 0$ и число $a > 0$. Найти фигуры:

$$1. \quad \Phi_1 = \{M|\rho(M,F_1) + \rho(M,F_2) = 2a, \quad a > c\};$$

$$2. \quad \Phi_2 = \{M|\rho(M,F_1) - \rho(M,F_2) = 2a, \quad a < c\}.$$

Даны две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$, и число a. Требуется определить геометрические фигуры Φ_1 и Φ_2, описанные в условии задачи.

1. Первая фигура Φ_1:

$$\Phi_1 = \{M \mid \rho(M,F_1) + \rho(M,F_2) = 2a, \quad a > c\}.$$

Эта фигура является эллипсом с фокусами F_1 и F_2 и большой полуосью a. Вспомним, что для эллипса сумма расстояний от любой точки M эллипса до его фокусов F_1 и F_2 равна $2a$. Поскольку $a > c$, эллипс действительно существует и удовлетворяет данному условию.

Параметры эллипса: - Фокусы: F_1 и F_2, - Большая полуось: a, - Фокусное расстояние: $2c$.

Уравнение эллипса в декартовых координатах, если $F_1 = (-c, 0)$ и $F_2 = (c, 0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

2. Вторая фигура Φ_2:

$$\Phi_2 = \{M \mid \rho(M,F_1) - \rho(M,F_2) = 2a, \quad a < c\}.$$

Эта фигура является гиперболой с фокусами F_1 и F_2. В случае гиперболы абсолютное значение разности расстояний от любой точки M гиперболы до фокусов F_1 и F_2 равно $2a$. Условие $a < c$ означает, что разность меньше расстояния между фокусами, поэтому гипербола существует и удовлетворяет данному условию.

Параметры гиперболы: - Фокусы: F_1 и F_2, - Параметр $2a$ — это расстояние между вершинами гиперболы, - Фокусное расстояние: $2c$.

Уравнение гиперболы в декартовых координатах, если $F_1 = (-c, 0)$ и $F_2 = (c, 0)$:

$$\frac{x^2}{c^2 - a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Ответ:

$$\Phi_1 \text{ — эллипс с уравнением } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \quad a > c,$$
$$\Phi_2 \text{ — гипербола с уравнением } \frac{x^2}{c^2 - a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad a < c.$$

Пояснение:

Для удобства выберем систему координат так, чтобы точки F_1 и F_2 находились на оси x симметрично относительно начала координат: - $F_1 = (-c, 0)$, - $F_2 = (c, 0)$.

1. Первая фигура Φ_1:

$$\Phi_1 = \{M \mid \rho(M, F_1) + \rho(M, F_2) = 2a, \quad a > c\}.$$

Это условие определяет эллипс с фокусами F_1 и F_2. Сумма расстояний от любой точки $M = (x, y)$ эллипса до фокусов равна $2a$.

Расстояния от M до F_1 и F_2:

$$\rho(M, F_1) = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad \rho(M, F_2) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Условие для эллипса:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

2. Вторая фигура Φ_2:

$$\Phi_2 = \{M \mid \rho(M, F_1) - \rho(M, F_2) = 2a, \quad a < c\}.$$

Это условие определяет гиперболу с фокусами F_1 и F_2. Абсолютное значение разности расстояний от любой точки $M = (x, y)$ гиперболы до фокусов равно $2a$.

Условие для гиперболы:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Ответ(Можно привести к прошлому, если начать раскрывать. Кто хочет, тот пусть проделает):

$$\begin{aligned}
&\Phi_2 \text{ — гипербола, заданная уравнением } \sqrt{(x+c)^2+y^2}- \\
&\qquad - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a, \quad a < c. \\
&\Phi_1 \text{ — эллипс, заданный уравнением } \sqrt{(x+c)^2+y^2}+ \\
&\qquad + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a, \quad a > c,
\end{aligned}$$