§4. ПОНЯТИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ДАННЫХ МНОЖЕСТВ

n°1. Понятие отношения между элементами данного множества

Определение 1. Пусть X и Y – некоторые непустые множества, G – непустое подмножество декартова произведение $X \times Y$. Тогда упорядоченная тройка $\varphi = (G, X, Y)$ называется (*бинарным*) *отношением* между элементами множеств X и Y.
При этом множества G, X, Y называются соответственно *графиком, областью отправления и областью прибытия* отношения φ. Множество $D(\varphi)$ ($E(\varphi)$) всех первых (вторых) координат всевозможных упорядоченных пар из G называются *областью определения (областью значений)* отношения φ.
Если $(a, в) \in G$, то пишут: $a\varphi в$ и говорят, что «объекты a и $в$ находятся в отношении φ» или «при отношении φ объекту a сопоставляется объект $в$».
Если X, Y – числовые множества, то отношение φ называется *числовым.*
В случае, когда $X=Y=M$, отношение $\varphi = (G, M, M)$ называется (*бинарным*) *отношением* между элементами множества M.

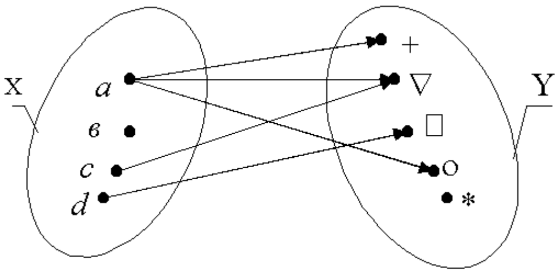
Итак, по определению $D(\varphi)=\{x \in X \mid \exists y \in Y\ ((x,y) \in G)\}$,
$E(\varphi)=\{y \in Y \mid \exists x \in X\ ((x,y) \in G)\}$.

Говорят, что задан *граф* отношения $\varphi=(G, X, Y)$, если множества X и Y изображены диаграммами Венна на некоторой плоскости π, а каждая пара ($a; в$) из G изображена «стрелкой» плоскости π, началом (концом) которой является точка, изображающая объект a ($в$). Граф отношения φ между элементами множеств X и Y является наглядным способом задания этого отношения для случая, когда X и Y – конечные множества.

В случае, когда $\varphi = (G, X, Y)$ – числовое отношение, *графиком* отношения φ наряду с G называют так же и изображение множества G на координатной плоскости (Oxy), то есть множество:

$$\Gamma_\varphi \overset{df}{=} \{M(x, y) \mid (x, y) \in G\}.$$

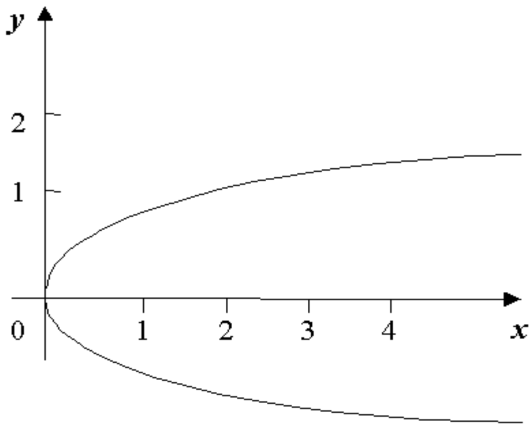
Пример 1. Пусть $X=\{a;\ в;\ c;\ d\}$, $Y=\{+;\ \nabla;\ □;\ о;\ *\}$, $G=\{(a;\ +),\ (a;\ \nabla),\ (a;\ о),\ (c;\ \nabla),\ (d;\ □)\}$ и $\varphi=(G, X, Y)$ – отношение между элементами множеств X и Y.



Граф отношения φ

Так как множества X и Y конечные, то отношение φ можно задать его графом. Область определения $D(\varphi)=\{a;\ c;\ d\}$ (область значений $E(\varphi)=\{+;\ \nabla;\ □;\ о\}$) можно рассматривать как множество всех тех элементов множества $X(Y)$, которые изображаются точками, являющимися началами (концами) стрелок построенного графа. Заметим, что при отношении φ элементу a сопоставляются три элемента +, ∇ и о из Y и элементу $в$ не сопоставляется ни одного элемента из Y.

Пример 2. Пусть $X=Y=\boldsymbol{R}$, $G=\{(x;\ y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid x=y^2\}$, $\varphi=(G,\ X,\ Y)=(G,\ \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{R})$ – бинарное отношение между элементами множества $\boldsymbol{R}$. Так как φ – числовое отношение, то можно говорить о графике Γ_φ на координатной плоскости (Oxy). График Γ_φ представляет собой параболу, и область определения $D(\varphi)$ (область значений $E(\varphi)$) можно рассматривать как проекцию построенного графика на ось (Ox) $((Oy))$. $D(\varphi)=[0;\ +\infty)$, $E(\varphi)=\boldsymbol{R}$.



Пример 3. Пусть $X=\boldsymbol{\pi}$ – некоторая плоскость, Y – семейство всех прямых плоскости $\boldsymbol{\pi}$, $G=\{(M,\ l) \mid M\in l \wedge l\in Y\}$, тогда $\varphi=(G, X, Y)$ – бинарное отношение между элементами множеств X и Y, называемое *отношением принадлежности* для точек и прямых плоскость $\boldsymbol{\pi}$.

Введенное понятие отношения между элементами двух множеств можно обобщить на случай n множеств, где $n\geq 2$.

Определение 2. Пусть X_1, X_2, … , X_n, где $n\geq 2$, – некоторые непустые множества, G – непустое подмножество декартова произведения $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$. Тогда картеж $\varphi=(G,\ X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ называется *n-местным* или *n-арным отношением* между элементами множеств X_1, X_2, … , X_n (при $n=2$ и $n=3$ отношение φ называется соответственно *бинарным* и *тернарным*).

Если $X_1=X_2=\ldots=X_n=X$, то φ называется еще n-арным или n-местным отношением между элементами множества X.

Про элементы a_1, a_2, $\ldots a_n$, для которых $(a_1,\ a_2,\ \ldots a_n)\in G$ говорят, что они *находятся в отношении* φ, $\varphi=(G, X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Пример 4. Пусть X_1 и X_3 – множества всевозможных окружностей плоскости $\boldsymbol{\pi}$, X_2 – семейство всевозможных квадратов той же плоскости, $G=\{(x_1, x_2, x_3)\in(X_1\times X_2\times X_3) \mid$ окружность x_3 вписана в квадрат x_2, который в свою очередь вписан в окружность $x_1\}$. Тогда $\varphi=(G, X_1, X_2, X_3)$ – тернарное отношение между элементами множеств X_1, X_2, X_3.

n°2. Некоторые разновидности бинарных отношений между элементами данного множества

В результате сравнения различных отношений между элементами данного множества (*определение 1 из §4*) выделяются ряд разновидностей таких отношений.

Определение 1. Пусть φ бинарное отношение между элементами множества M. Это отношение называют:

1) *рефлексивным*, если истинно высказывание $\forall x\in M\ (x\ \varphi\ x)$, то есть $x\in M \Rightarrow x\ \varphi\ x$;

2) *симметричным*, если истинно высказывание $\forall x, y\in M\ (x\ \varphi\ y \to y\ \varphi\ x)$, то есть $x, y\in M \wedge x\ \varphi\ y \Rightarrow y\ \varphi\ x$;

3) *транзитивным*, если истинно высказывание $\forall x, y, z\in M\ (x\ \varphi\ y \wedge \wedge\ y\ \varphi\ z \to x\ \varphi\ z)$, то есть $x, y, z \in M \wedge x\ \varphi\ y \wedge y\ \varphi\ z \Rightarrow x\ \varphi\ z$;

4) *антирефлексивным*, если истинно высказывание $\forall\ x\in M\ \rceil(x\ \varphi\ x)$, то есть $x\in M \Rightarrow\ \rceil(x\ \varphi\ x)$;

5) *антисимметричным*, если истинно высказывание $\forall\ x, y \in M\ (x\ \varphi\ y \wedge \wedge\ y\ \varphi\ x \to x = y)$, то есть $x, y\in M \wedge x\ \varphi\ y \wedge y\ \varphi\ x \Rightarrow x = y$;

6) *связным*, если истинно высказывание $\forall\ x, y \in M\ (x \neq y \to x\ \varphi\ y \vee \vee\ y\ \varphi\ x)$, то есть $x, y \in M \wedge x \neq y \Rightarrow x\ \varphi\ y \vee y\ \varphi\ x$;

7) *отношением эквивалентности*, если φ является одновременно рефлексивным, симметричным и транзитивным;

8) *отношением порядка (частичного порядка)*, если φ является одновременно рефлексивным, антисимметричным и транзитивным;

9) *отношением линейного порядка*, если φ является рефлексивным, антисимметричным, транзитивным и связным, то есть является связным отношением порядка.

Если заданно некоторое отношение порядка (линейного порядка) между элементами множества M, то множество M называется *упорядоченным (линейно упорядоченным)*.

Если φ – отношение эквивалентности между элементами множества M, то вместо записи $x\ \varphi\ y$ использую записи $x \underset{\varphi}{\sim} y$ или $x \sim y$ (чтение последней записи «x эквивалентно y»).

Пример 1. Пусть M – семейство всех числовых множеств; φ – отношение между элементами множества M, задаваемое условием: $X\varphi Y \Leftrightarrow X\subset Y$.

Это отношение является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, так как:

$X\in M \Rightarrow X\subset X \Rightarrow X\varphi X$;

$X, Y\in M \wedge X\varphi Y \wedge Y\varphi X \overset{df}{\Rightarrow} X\subset Y \wedge Y\subset X \overset{df}{\Rightarrow} X=Y$;

$X, Y, Z\in M \wedge X\varphi Y \wedge Y\varphi Z \Rightarrow X\subset Y \wedge Y\subset Z \Rightarrow X\subset Z \overset{df}{\Rightarrow} X\varphi Z$.

Следовательно, отношение φ является отношением порядка, а M – упорядоченным множеством.

Отношение φ не является симметричным. Действительно, для множеств $X_0 \overset{df}{=} [2,\ 5]$ и $Y_0 \overset{df}{=} (0;\ +\infty)$ импликация $X_0\subset Y_0 \rightarrow Y_0\subset X_0$ ложна, поэтому высказывание $\forall X, Y\in M\ (X\subset Y \rightarrow Y\subset X)$ ложно. Но тогда согласно *определению 1* φ не является и отношением эквивалентности.

Так как для числовых множеств $X_1 \overset{df}{=} [0;\ 2]$ и $Y_1 \overset{df}{=} [5;\ 10)$ импликация $X_1\neq Y_1 \rightarrow X_1\varphi Y_1 \vee Y_1\varphi X_1$ ложна, то φ не является связным, а следовательно, и не является отношением линейного порядка.

n°3. Классы эквивалентности и их основные свойства

Определение 2. Если φ – отношение эквивалентности между элементами множества M, и a – какой-либо элемент множества M, то множество $K_a \overset{df}{=} \{x\in M \mid a\ \varphi\, x\}$ называется *классом эквивалентности* множества M по отношению φ, порожденным элементом a. Семейство всевозможных классов эквивалентности множества M по отношению φ обозначают символом $M/_{\varphi}$ и называется *фактор-множеством* множества M по отношению φ.

Для отношения φ сонаправленности лучей данной плоскости π, рассмотренного в *примере 2* , класс эквивалентности K_a, порожденный лучом a, $a\subset\pi$, представляет семейство всех лучей плоскости, которым сонаправлен луч a, называемое направлением плоскости π.

Ниже устанавливается ряд важнейших свойств классов эквивалентности и фактор множества.

Теорема 1. Пусть φ – отношение эквивалентности между элементами множества M. Тогда любые два класса эквивалентности множества M по отношению φ совпадают или не пересекаются, а именно, a, $в\in M \wedge$ $\wedge\ a\ \varphi\ в \Rightarrow K_a=K_в$; $a, в\in M \wedge \rceil(a\ \varphi\ в) \Rightarrow K_a\cap K_в=\varnothing$.

Доказательство. Пусть φ – отношение эквивалентности между элементами множества M, то есть φ является одновременно рефлексивным (реф.), симметричным (сим.) и транзитивным (тр.) отношением.

1) Рассмотрим случай, когда a, $в \in M \wedge a\ \varphi\ в$.

В этом случае $x \in K_a \overset{df}{\Rightarrow} a\ \varphi\ в \wedge a\ \varphi\ x \overset{\varphi-сим.}{\Rightarrow} в\ \varphi\ a \wedge a\ \varphi\ x \overset{\varphi-тр.}{\Rightarrow} в\ \varphi\ x \overset{df}{\Rightarrow} x \in K_в$. Но тогда $K_a \subset K_в$.

Меняя ролями a и $в$ в проведенных выше рассуждениях, убеждаемся, что $K_в \subset K_a$.

Из включений $K_a \subset K_в$ и $K_в \subset K_a$ следует равенство $K_a = K_в$.

Итак, истинно высказывание $\forall a, в \in M\ (a\ \varphi\ в \to K_a = K_в)$, что и требовалось доказать.

2) Рассмотрим случай, когда a, $в \in M \wedge \rceil(a\ \varphi\ в)$. Докажем, что в этом случае $K_a \cap K_в = \varnothing$, воспользовавшись методом «от противного» (*п°2 §4 глава 2*).

Итак, требуется доказать теорему

$$\forall a, b \in M\ (P(a, b) \to \mathrm{Q}(a, b)),\text{ где}$$

$P(a, b) = \rceil(a\ \varphi\ в)$ и $\mathrm{Q}(a, b) = K_a \cap K_в = \varnothing$. Доказательство этой теоремы можно заменить доказательством следующей теоремы

$$\forall a, b \in M\ (P(a, b) \wedge \rceil \mathrm{Q}(a, b) \to \rceil P(a, b)),\text{ то есть}$$

$$\forall\ a, b \in M\ (\rceil(a\ \varphi\ в) \wedge K_a \cap K_в \neq \varnothing \to a\ \varphi\ в).$$

$$a, в \in M \wedge K_a \cap K_в \neq \varnothing \overset{df}{\Rightarrow} \exists x_0 \in M\ (x_0 \in K_a \wedge x_0 \in K_в) \overset{df}{\Rightarrow} \exists x_0 \in M\ (a\ \varphi\ x_0 \wedge$$

$\wedge\ в\ \varphi\ x_0) \overset{\varphi-сим.}{\Rightarrow} \exists x_0 \in M\ (a\ \varphi\ x_0 \wedge x_0\ \varphi\ в) \overset{\varphi-тр.}{\Rightarrow} a\ \varphi\ в$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана. ■

> ***Теорема 2.*** Пусть φ – отношение эквивалентности между элементами множества M. Тогда фактор-множество $M/_{\varphi}$ является разбиением множества M.

Доказательство. Итак, φ – отношение эквивалентности между элементами множества M, то есть φ является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Убедимся, что семейство M/φ является разбиением множества M, то есть элементы этого семейства не пусты, попарно не пересекаются, а их объединение совпадает с M.

1) $a \in M \overset{\varphi-реф.}{\Rightarrow} a\ \varphi\ a \Rightarrow a \in \{x \in M \mid a\ \varphi\ x\} \overset{df}{\Rightarrow} a \in K_a \Rightarrow K_a \neq \varnothing$. Следовательно, все элементы семейства M/φ не пусты.

2) По *теореме 1* различные классы эквивалентности множества M по отношению φ не пересекаются, то есть элементы семейства M/φ попарно не пересекаются.

3) Пусть K – объединение всех классов эквивалентности множества M по отношению φ. Тогда $K_a \in (M/\varphi) \Rightarrow K_a \overset{df}{=} \{x \in M \mid a\ \varphi\ x\} \subset M$, а поэтому согласно определениям объединения и включения для множеств имеем $K \subset M$.

С другой стороны, $x \in M \overset{1)}{\Rightarrow} x \in K_x \subset K \Rightarrow x \in K$, а поэтому $M \subset K$.

Из включений $K \subset M$ и $M \subset K$ следует равенство $K = M$.

Тогда из 1) – 3) и определения разбиения данного множества следует, что M/φ – разбиение множества M, что и требовалось доказать. Теорема доказана. ■

Теорема 3. *(обратная для теоремы 2)*. Любое разбиение множества M можно рассматривать как фактор-множество множества M по некоторому отношению φ.