Аксиоматическое определение множества действительных чисел. Свойство полноты.

Множество R называется множеством действительных (вещественных) чисел, а его элементы — действительными (вещественными) числами, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:

(I)Аксиомы сложения. Определено отображение (операция сложения) $+: R\times R \to R$, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из R некоторый элемент $x + y \in R$, называемый суммой x и y. При этом выполнены условия:

1.Существует нейтральный элемент 0 такой, что для любого $x \in R$: $x +0 = 0+ x = x$.

2. Для любого элемента $x \in R$ имеется элемент $-x \in R$, называемый противоположным к x: $x +(-x) = (-x)+ x = 0$.

3. Операция + ассоциативна: $x +(y + z) = (x + y)+ z$.

4. Операция + коммутативна: $x + y = y + x$.

(II) Аксиомы умножения. Определено отображение (операция умножения) $\cdot : R\times R \to R$, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из R некоторый элемент $x \cdot y \in R$, называемый произведением x и y, причем так, что выполнены следующие условия:

1. Существует нейтральный элемент $1 \in R \setminus 0$ (назв. единицей) такой, что $\forall x \in R$: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

2. Для любого элемента $x \in R \setminus 0$ имеется элю $x -1 \in R$, наз. обратным: $x \cdot x -1 = x -1 \cdot x = 1$.

3. Операция · ассоциативна: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

4. Операция · коммутативна: $x \cdot y = y \cdot x$.

(III)Аксиома порядка. Между элементами R имеется отношение ≤, т. е. для элементов x, y из R установлено, выполняется ли $x \le y$ или нет. При этом должны удовлетворяться следующие условия:

$0_\le$. $\forall x \in R\ (x \le x)$.

$1_\le$. $(x \le y)\wedge(y \le x) \Rightarrow (x = y)$.

$2_\le$. $(x \le y)\wedge(y \le z) \Rightarrow (x \le z)$.

$3_\le$. $\forall x \in R\ \forall y \in R\ (x \le y)\vee(y \le x)$.

(IV) Аксиома полноты(непрерывности). Если X и Y — непустые подмножества R, обладающие тем свойством, что для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \le y$, то существует такое $c \in R$, что $x \le c \le y$ для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$.

Определение. Говорят, что множество $X \subset R$ ограничено сверху (снизу), если существует число $c \in R$ такое, что $x \le c$ $(c \le x)$ для любого $x \in X$. Число c в этом случае называют верхней (нижней) границей или мажорантой (минорантой).

Определение. Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется ограниченным.

Определение. Элемент $a\in X$ называется максимальным (минимальным) элементом множества $X \subset R$, если $x \le a$ для любого элемента $x \in X$: $(a = \max X) := (a \in X \wedge \forall x \in X\ (x \le a))$,
$(a = \min X) := (a \in X \wedge \forall x \in X\ (a \le x))$.

Определение. Наименьшее из чисел, ограничивающих множество $X \subset R$ сверху, называется верхней гранью (или точной верхней границей) множества X и обозначается sup X (читается «супремум X») или $\sup x \in X x$: $(s = \sup X) := \forall x \in X\ ((x \le s)\wedge(\forall s'<s \exists x'\in X\ (s'<x')))$.

Определение. $(i = \inf X) := \forall x \in X\ ((i \le x)\wedge(\forall i' >i \exists x'\in X\ (x' < i')))$. Наряду с обозначением inf X (читается «инфимум X») для нижней грани X употребляется также обозначение $\inf x\in X x$:
$\sup X := \min\{c \in R \mid \forall x \in X\ (x \le c)\}$, $\inf X := \max\{c \in R \mid \forall x \in X\ (c \le x)\}$.

Теорема. (принцип верхней грани). Всякое непустое ограниченное сверху подмножество множества вещественных чисел имеет и притом единственную верхнюю грань.

Док-во. Поскольку единственность минимального элемента числового множества нам уже известна, необходимо лишь убедиться в существовании верхней грани.

Пусть $X \subset R$ — данное подмножество, а $Y = \{y \in R \mid \forall x \in X\ (x \le y)\}$ — множество верхних границ X. По условию, $X\ne\varnothing$ и $Y\ne\varnothing$. Тогда в силу аксиомы полноты существует число $c\in R$ такое, что $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ (x \le c\le y)$. Число c, таким образом, является мажорантой X и минорантой Y. Как мажоранта X, число c является элементом Y, но как миноранта Y, число c является минимальным элементом множества Y. Итак, $c=\min Y =\sup X$. É

Теорема. (X не пусто и ограничено снизу) $\Rightarrow$ ($\exists!$ inf X).

Следствия из аксиом множества действительных чисел.

Следствия аксиом сложения

1.В множестве действительных чисел имеется только один нуль. Если 0_1 и 0_2 — нули в R, то по определению нуля: $0_1 = 0_1 +0_2 = 0_2 +0_1 = 0_2$.

2.В множестве действительных чисел у каждого элемента имеется единственный противоположный элемент: если x_1 и x_2 — элементы, противоположные $x \in R$, то $x_1 = x_1 + 0 = x_1 +(x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0+ x_2 = x_2$.

3.Уравнение: $a + x = b$ в R имеет и притом единственное решение $x = b +(-a)$. Это вытекает из существования и единственности у каждого элемента $a\in R$ противоположного ему элемента: $(a + x = b) \Leftrightarrow ((x + a)+(-a) = b +(-a)) \Leftrightarrow (x +(a + (-a)) = b +(-a)) \Leftrightarrow (x +0 = b +(-a)) \Leftrightarrow (x = b +(-a))$. Выражение $b +(-a)$ записывают также в виде $b - a$.

Следствия аксиом умножения.

1. В множестве действительных чисел имеется только одна единица.

2. Для каждого числа $x\ne0$ имеется только один обратный эл. $x -1$.

3. Уравнение $a \cdot x =b$ при $a\in R\setminus 0$ имеет и притом единственное решение $x =b \cdot a -1$.

Следствия аксиомы связи сложения и умножения. Привлекая дополнительно аксиому (I, II), связывающую сложение и умножение, получаем дальнейшие следствия. **1.** Для любого $x \in R$ $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$. $(x \cdot 0= x \cdot (0+0)= x \cdot 0+ x \cdot 0) \Rightarrow (x \cdot 0= x \cdot 0+(-(x \cdot 0))=0)$. Отсюда, между прочим, видно, что если $x \in R\setminus 0$, то $x -1 \in R\setminus 0$.

2. $(x \cdot y =0) \Rightarrow (x =0)\vee(y =0)$. Если, например, $y \ne 0$, то из единственности решения уравнения $x \cdot y =0$ относительно x находим $x =0 \cdot y -1 =0$.

3. Для любого $x \in R$ $-x = (-1) \cdot x$. $x +(-1) \cdot x =(1+(-1)) \cdot x =0 \cdot x = x \cdot 0=0$, и утверждение следует из единственности противоположного элемента.

4. Для любого числа $x \in R$ $(-1)(-x) = x$. Следует из 3◦ и единственности элемента x, противоположного -x.

5. Для любого числа $x \in R$ $(-x)(-x) = x \cdot x$. $(-x)(-x)=((-1) \cdot x)(-x)=(x \cdot (-1))(-x)= x((-1)(-x))= x \cdot x$. Мы последовательно воспользовались двумя предыдущими утверждениями, а также коммутативностью и ассоциативностью умножения.

Следствия аксиом порядка.

1.Для любых $x, y \in R$ всегда имеет место в точности одно из соотношений: $x < y$, $x = y$, $x > y$. Это следует из приведенного определения строгого неравенства и аксиом $1_\le$ и $3_\le$.

2. Для любых чисел x, y, z из R $(x < y)\wedge(y \le z) \Rightarrow (x < z)$, $(x \le y)\wedge(y < z) \Rightarrow (x < z)$. Приведем для примера доказательство последнего утверждения. По аксиоме $2_\le$ транзитивности отношения неравенства имеем: $(x \le y)\wedge(y < z) \Leftrightarrow (x \le y)\wedge(y \le z)\wedge(y \ne z) \Rightarrow (x \le z)$. Осталось проверить, что $x \ne z$. Но в противном случае $(x \le y)\wedge(y < z) \Leftrightarrow (z \le y)\wedge(y < z) \Leftrightarrow (z \le y)\wedge(y \le z)\wedge(y \ne z)$. В силу аксиомы $1_\le$ отсюда следует $(y = z)\wedge(y \ne z)$ — противоречие.

Определение окрестности. Типы окрестностей. Теоремы о состоянии вложенных отрезков и последовательности стягивающихся отрезков

Окрестность - интервал, содержащий точку $a \in R$. В частности, при $\delta>0$ интервал $(a - \delta, a + \delta)$ называется δ-окрестностью точки a. Его длина 2δ. Под точкой понимается как действительное число, так и элементы $+\infty, -\infty, \infty$. ε-окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$.

Типы окрестностей:**1)** a - действительное число $U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ **2)** $a = +\infty$ $U(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$ **3)** $a = -\infty$ $U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$ **4)** $a = \infty$ $U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$

Определение. Системой вложенных отрезков называется множество M такое, что: $\forall \Delta_m, \Delta_n \in M (\Delta_m \subset \Delta_n \vee \Delta_n \subset \Delta_m)$.

Определение. Последовательность вложенных отрезков – система вложенных отрезков, если все отрезки пронумерованы и отрезки с большими номерами содержатся с меньшими номерами.

Теорема. (Непрерывность множества действительных чисел по Кантору). Для всякой системы вложенных отрезков существует точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.

Док-во. Для системы вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотрим два непустых множества: $A=\{ a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{a1, a2,\ldots\}$ $B=\{ b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{ b1, b2,\ldots\}$. Т.к. $\forall n, m \in N \to$

$[a_{n+m}; b_{n+m}] \subset [a_n; b_n] \Rightarrow a_n\le a_{n+m}$; $\forall n, m \in N \to [a_{n+m}; b_{n+m}] \subset [a_m; b_m] \Rightarrow b_{n+m}\le b_m$.

Следовательно $\forall n, m \in N \to a_n\le a_{n+m}\le b_{n+m} \le b_m$. Т.е. $\forall a\in A, b\in B \to a\le b$. В силу аксиомы непрерывности существует такое c, что $\forall a\in A, b\in B \to a \le c \le b$. В частности $\forall n \in N \to c \in[a_n; b_n]$. чтд.

Определение. Последовательность вложенных отрезков называется стягивающейся, если среди входящих в него отрезков содержатся отрезки сколь угодной малой длинны. $\forall\varepsilon>0$

$$\exists \delta=[a, b]\in M\left(\left|b-a\right|<\varepsilon\right)$$

Теорема. Стягивающаяся система вложенных отрезков имеет ровно одну точку, принадлежащую всем отрезкам.

Док-во. Допуская противное, предположим, что каждая из двух различных точек c и c′ является общей для всех отрезков системы. Пусть, для определенности, $c' < c$, т.е. $\varepsilon = c - c'>0$. По определению стягивающейся системы, $\exists n \in N:$ $b_n- a_n< \varepsilon$. Тогда $a_n\le c'\le c \le b_n$. Отсюда $a_n\le c' \Rightarrow -c'\le$

$-a_n \Rightarrow c-c' \le c-a_n$; $c \le b_n \Rightarrow c-a_n \le b_n-a_n$. Поэтому $\varepsilon = c - c' \le c-a_n \le b_n-a_n \le \varepsilon$. Получили противоречие. Т. док

<u>Определение предела последовательности. Единственность предела сходящейся последовательности.</u>

Последовательность - функция $f : N \to X$, областью определения которой является множество натуральных чисел.

Определение. Число $A \in R$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при всех $n > N$ имеем $|x_n - A| < \varepsilon$. ¿):= $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in N\ \forall n > N\ (|x_n - A| < \varepsilon)$.

Определение. Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к A или стремится к A и пишут $x_n \to A$ при $n \to \infty$. Последовательность, имеющая (не имеющая) предел, называется сходящейся(расходящейся).

Теорема. (единственность предела последовательности). Сходящаяся последовательность имеет только один предел. Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится. Предположим, что $x_n \to a$, $x_n \to b$, $n \to \infty$, и $a \neq b$. В силу свойства R найдутся непересекающиеся окрестности $U(a, \varepsilon')$ и $U(b, \varepsilon'')$. По определению предела последов. эти окрестности содержат бесконечное число членов последовательности и вне этих окр. находится лишь конечное число членов, что невозможно.

<u>Критерии существования предела числовой последовательности. Доказательство критерия о существовании предела ограниченной и монотонной последовательности.</u>

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей, если $\forall n \in N$ ($x_n < x_n$+1); неубывающей, если $\forall n \in N$ ($x_n \le x_n$+1); невозрастающей, если $\forall n \in N$ ($x_n \ge x_n$+1); убывающей, если $\forall n \in N$ (xn > xn+1). Последовательности этих четырех типов называют монотонными последовательностями.

Теорема. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Док-во. Все члены последовательности, кроме конечного их числа, принадлежат окрестности предела — ограниченному множеству. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N : \forall n \ge N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $A = \max\{|x_1|,\dots,|x_N|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$. Тогда, $\forall n \in N : |x_n| \le A$.

Теорема. Неубывающая числовая последовательность имеет предел, причём он в точности равен точной верхней границе (нижней границе, для ограниченной невозрастающей ч.п.).

Док-во. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная неубывающая числовая последовательность. Тогда множество $\{x_n\}_{n\in N|}$ ограничено, следовательно, из определения супремума, имеет супремум. Обозначим его через S. Тогда е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = S$ Действительно, так как $S = sup\{x_n\}_{n\in N}$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow S - \varepsilon < x_N \le x_n \le S \Rightarrow |x_n - S| < \varepsilon$. Аналогичное доказательство для ограниченной невозрастающей ч.п

<u>Критерии существования предела числовой последовательности. Доказательство критерия Коши.</u>

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши1), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in N$, что из $n > N$ и $m > N$ следует $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Теорема. (критерий Коши сходимости последовательности). Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Док-во. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$. По числу $\varepsilon > 0$ найдем номер N так, чтобы при $n > N$ иметь $|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если теперь $m > N$ и $n > N$, то $|x_m - x_n| < |x_m - A| + |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, таким образом, проверено, что сходящаяся последовательность фундаментальна. Пусть теперь $\{x_k\}$ — фундаментальная последовательность. По заданному $\varepsilon > 0$ найдем номер N такой, что из $m \ge N$ и $k \ge N$ следует $|x_m - x_k| < \frac{\varepsilon}{3}$. Фиксировав $m = N$, получаем, что при любом $k > N$: $x_N - \frac{\varepsilon}{3} < x_k < x_N + \frac{\varepsilon}{3}$(1), но поскольку имеется всего конечное число членов последовательности $\{x_n\}$ с номерами, не превосходящими N, то мы доказали, что фундаментальная последовательность ограничена. Для $n \in N$ положим теперь $a_n := \lim\limits_{k \ge n} x_k$, $b_n :=$ ¿ $\underset{k \ge n}{} x_k$. Из этих определений видно, что $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ (поскольку при переходе к меньшему множеству нижняя грань не уменьшается, а верхняя не увеличивается). Последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ имеет, по лемме о вложенных отрезках, общую точку A. Поскольку при любом $n \in N$: $a_n \le A \le b_n$, а при $k \ge n$: $a_n = \inf\limits_{k \ge n} x_k \le x_k \le$ ¿ $\underset{k \ge n}{} x_k = b_n$ то при $k \ge n$ имеем $|A - x_k| \le b_n - a_n$(2). Но из (1) следует, что при $n > N$: $x_N - \frac{\varepsilon}{3} \le \inf\limits_{k \ge n} x_k =$ ¿ $a_n \le b_n =$ ¿ $\underset{k \ge n}{} x_k \le x_N + \frac{\varepsilon}{3}$, поэтому при $n > m$: $b_n - a_n \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$(3). Сравнивая (2) и (3), находим, что при любом $k > N$ $|A - x_k| < \varepsilon$, и мы показали, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$.

<u>Определение предела функции по Коши и по Гейне. Их эквивалентность.</u>

Определение1.(предел функции по Гейне). Число b называется пределом функции y=f(x) в точке a, если для любой последовательности значений аргумента x1, x2,…,x_n,…, сходящейся к a и состоящей из чисел x_n, отличных от

a, соответствующая последовательности значений функции f(x1), f(x2),… f(x_n)… сходится к числу b.
Определение1*.(предел функции по Коши). Число b называется пределом функции y=f(x) в точке a, если для любого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию 0<|x-a|<δ, справедливо неравенство: |f(x)-b|< ε. Для обозначения предельного значения функции y=f(x) в точке a используют символику: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.
Теорема. Определения 1 и 1* предела функции по Гейне и Коши являются эквивалентными.
Док-во. **1)** Пусть сначала число b является пределом функции y=f(x) в точке a по Коши. Докажем, что это число b является пределом функции y=f(x) в точке a и по Гейне. Пусть {x_n}-любая сходящаяся к a последовательность значений аргумента, все элементы которой отличны от a. Требуется доказать, что соответствующая последовательность значений {f(x_n)} сходится к b. фиксируем произвольное положительно число ε и по нему положительное число δ, которое в силу определения предела функции по Коши гарантирует справедливость равенства |f(x)-b|<ε для всех значений x, для которых 0<|x-a|<δ. В силу сходимости последовательности {x_n} к a для указанного положительного числа δ найдется номер N такой, что при всех n≥N справедливо неравенство|x_n-a|<δ. Поскольку $x_n \neq a$ для всех номеров n, то при всех n≥N справедливы неравенства 0<|x_n-a|<δ и, значит, в силу определения предела функции по Коши при всех n≥N справедливо неравенство|f(x_n)-b|<ε. Это и означает что последовательность {f(x_n)} сходится к числу b. **2)** Пусть теперь число b является пределом функции y=f(x) в точке a и по Коши. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого положительного числа ε и для сколь угодно малого положительного числа δ найдется хотя бы одно значение аргумента x такое, что 0<|x-a|<δ, но |f(x_n)-b|≥ε. Таким образом мы можем взять последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}(n = 1, 2\ldots)$ и утверждать, что для каждого ее элемента $\delta_n = \frac{1}{n}$ найдется хотя бы одно значение аргумента x_n такое, что 0<|x_n-a|<$\frac{1}{n}$, но|f(x_n)-b|≥ε(/). Левое из неравенств / означает что последовательность{x_n} сходится к a и состоит из чисел, отличных от a. Но в таком случае согласно определению предела по Гейне соответствующая последовательность значений функции {f(x_n)} обязана сходиться к числу b, а этому противоречит правое из неравенств /, справедливое для всех номеров n. Полученное противоречие доказывает теорему.

Критерии существования пределов функции.
1.Предел монотонной функции. Если функция монотонно возрастает(убывает) на интервале (a,b) то в точках a и b функции f(x) существует односторонний предел. $\lim\limits_{x \to a+¿} f(x) = \inf\limits_{(a,b)} f(x) ¿$,

$\lim\limits_{x \to a-¿} f(x) \underset{(a,b)}{=} {}^{f}(x) ¿$ (квадратная система)[
Следствие 1. Монотонная на интервале функция имеет конечный предел, как слева, так и справа в любой точке интервала.
Следствие 2. Если функция ограничена сверху(снизу) то предел ее правой(левой) точки конечны.
2. Критерий Коши. Для того чтобы f(x) имела конечный предел, при x→a, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие
$\forall\ \delta > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall$ $x_1, x_2 \in D_f$(|x_1-x_2|<δ=>|f(x_1)-f(x_2)|<ε.
Аналогичное свойство критерия коши есть для фундаментальной последовательности, а именно существует предел функции тогда и только тогда, когда последняя является фундаментальной: ε>0 $\exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall$ n,m∈ $\mathbb{N}$ (n,m>N=>|x_n-x_m|< ε).
3. Связь 2-х пределов в с 2-х сторонними. Функция f(x)имеет предел в точке тогда и только тогда, когда в этой точке существуют пределы как слева так и справа. Причем они равны соответственно значению функции предела в этой т.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a+¿} f(x) \le ¿ \lim_{x \to a} f(x) = A ¿$$

Определение. Будем говорить, что функция y=f(x) удовлетворяет в точке a условию Коши, если для любого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число δ, такое, что для любых двух значений аргумента x' и x" удовлетворяющих условиям 0<|x'—a|< δ, 0<|x"—a|< δ, справедливо неравенство |f(x')-f(x")|< ε.
Теорема. (критерий Коши существования предела функции в точке a). Для того чтобы, функция y=f(x) имела в точке a конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы функция y=f(x) удовлетворяла в точке a условию Коши.
Док-во. 1) Необходимость. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Фиксируем произвольное положительное число ε. В силу определения 1* предела функции по Коши для положительного числа $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется положительное число δ такое, что, каковы бы ни были два значения аргумента x' и x", удовлетворяющие условиям 0<|x'—a|< δ, 0<|x"—a|< δ, для соответствующих значений функции справедливы неравенства |f(x')-b|<$\frac{\varepsilon}{2}$, |f(x")-b|<$\frac{\varepsilon}{2}$(1). Так как модуль суммы двух величин не превосходит суммы их модулей, то в силу неравенств (1) мы получим, что |f(x')-f (x")| = |[f{x')-b] + [b-f(x')] ≤|f(x')-b|+|f(x")-b|< ε, а означает, что функция y=f(x) удовлетворяет в точке a условию Коши. **2)** Достаточность. Пусть функция f(x) удовлетворяет в точке a условию Коши. Требуется доказать, что функция f(x) имеет в точке a предел. Пусть {x_n} — произвольная последовательность значений аргумента, сходящаяся к a и состоящая из чисел, отличных от a. В силу определения 1 предела по Гейне достаточно доказать, что соответствующая последовательность значений функции {f(x_n)} сходится к некоторому числу b и что это число b одно и то же для всех сходящихся к a последовательностей {x_n}, состоящих из чисел, отличных от a. Докажем сначала, что для каждой сходящейся к a последовательности {x_n} значений аргумента, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции {f(xn)} сходится к некоторому пределу. Фиксируем произвольное положительное число ε и по нему отвечающее ему, согласно условию Коши, положительное число δ. В силу сходимости последовательности {x_n} к a и в силу условия $x_n \neq a$для этого δ >0 найдется номер N такой, что 0<|x_n—a|< δ при n≥N. Если теперь p — любое натуральное число (p=1, 2, 3, ...), то тем более 0<|x_{n+p}—a|< δ при n≥N*(т.к. n≥N, то и подавно

n+p≥N). Таким образом, при n≥N и для любого натурального p справедливы два неравенства: $0<|x_{n+p}-a|<\delta$, $0<|x_n-a|<\delta$. Из этих двух неравенств и из условия Коши вытекает, что при n≥N и для любого натурального p: $|f(x_{n+p})-f(x_n)|<\varepsilon$, а это означает фундаментальность последовательности {f(xn)}. В силу критерия Коши сходимости числовой последовательности последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу Ь. Остается доказать, что для любых двух сходящихся к а последовательностей значений аргумента $\{x_n\}$ и $\{x_n'\}$, все элементы которых отличны от а, соответствующие последовательности значений функции $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ сходятся к одному и тому же пределу. Предположим, что последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ сходятся к пределам b и b' соответственно. Рассмотрим новую последовательность значений аргумента x1, x1', x2, x2',..x_n, x_n'.., также сходящуюся к а и состоящую из чисел, отличных от а. В силу доказанного выше соответствующая последовательность значений функции f(x1), f(x1'), f(x2), f(x2'),... $f(x_n)$, $f(x_n')$,... обязана сходиться к некоторому пределу b''. Но тогда в силу утверждения, что любая подпоследовательность этой последовательности обязана сходиться к тому же самому пределу b''. Значит, как подпоследовательность нечетных элементов f(x1), f(x2),... $f(x_n)$,.., так и подпоследовательность четных элементов f(x1'), f(x2'),..$f(x_n')$,... обе сходятся к b''. Отсюда вытекает, что b= b'=b''. Теорема полностью доказана.

Свойства функций, имеющих предел.

1. Пусть f(x), g(x) две функции определенные на одном и том же промежутке множества D. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ A,B∈R причем A<B, тогда $\exists\delta>0\ \forall x\in U_\delta(a)(f(x)\text{-}g(x))$; $\lim\limits_{x\to b} g(x)=B$

2. Предел промежуточной функции. Пусть даны три функции f(x), $f_2(x)$, g(x) определенные на одном и том же множестве и существуют пределы: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f2(x)$ =A;

$\exists\delta>0\ \forall x\in U_\delta(a)(f(x)\le g(x)\le f_2(x))$, тогда $\lim\limits_{x\to b} g(x)=A$

Следствие. пусть существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to b} g(x)=B$; $\exists\delta>0\ \forall x\in U_\delta(a)(f(x)\le g(x))\Rightarrow A<B$.

Определение. Функция f (x) называется ограниченной на некотором множестве M, если для любого x∈ M выполняется неравенство |f(x)| ≤ C, где C – некоторая положительная константа.

Теорема. Пусть функция f(x) имеет предел в точке x_0, тогда существует проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0)$, в которой функция f(x) ограничена.

Док-во. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. Это значит, что для любого $\varepsilon>0$ и для $\varepsilon=1$ существует δ>0 такое, что для любого $x\in\mathring{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon=1$, т.е. b-1<f(x)<b+1. Пусть C = max{|b + 1|;|b-1|}. Тогда для любого $x\in\mathring{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство |f(x)|<C чтд.

Теорема. Если функция f(x) имеет предел при $x\to x_0$, то этот предел единственный.

Док-во. Предположим, что функция f(x) при $x\to x_0$ имеет два различных предела, т.е. $\lim\limits_{x\to x0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x0} f(x)=b$.

$\lim\limits_{x\to x0} f(x)=a$, следовательно: для любого ε>0 существует $\delta_1>0$ такое, что для любого x: $0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$(1);

$\lim\limits_{x\to x0} f(x)=b$ следовательно: для любого ε>0 существует $\delta_2>0$ такое, что для любого x: $0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$(2); Пусть $\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\}$. Тогда для любого x: $0<|x-x_0|<\delta$ будут одновременно выполняться неравенства1-2. Для этих значений x имеем: $|b-a|=|b+f(x)-f(x)-a|=|(b-f(x))+(f(x)-a)|$. По свойству модулей имеем: $|(b-f(x))+(f(x)-a)|\le|b-f(x)|+|f(x)-a|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$. Следовательно, $|b-a|\le2\varepsilon \Rightarrow |b-a|=0$, т.е. b=a . Следовательно, если предел у функции существует, то он единственный.

Теорема. (теорема о двух милиционерах). Пусть даны три функции f (x), ϕ(x), g(x), которые определены в некоторой окрестности $\mathring{U}_\delta(x_0)$ и удовлетворяют условию ϕ(x) ≤f(x) ≤g(x) в этой окрестности. Тогда если

$$\lim_{x\to x0}\phi(x)=\lim_{x\to x0} g(x)=b,\ mo\ \lim_{x\to x0} f(x)=b$$

.

Док-во. Пусть f(x) удовлетворяет условию ϕ(x) ≤f(x) ≤g(x)*. Пусть $\lim\limits_{x\to x0}\phi(x)=b$, следовательно: для любого ε>0 существует $\delta_1>0$ такое, что для любого x: $0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |\phi(x)-b|<\varepsilon$(3); Пусть $\lim\limits_{x\to x0} g(x)=b$, следовательно: для любого ε>0 существует $\delta_2>0$ такое, что для любого x: $0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-b|<\varepsilon$(4); Пусть $\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\}$. Тогда для любого x: $0<|x-x_0|<\delta$ будут одновременно выполняться неравенства 3-4. По условию выполняется неравенство (*). Тогда для любого $\mathring{U}_\delta(x_0)$ получаем: $\delta-\varepsilon<\phi(x)\le f(x)\le g(x)<\delta+\varepsilon$. Таким образом, имеем: для любого x: $0<|x-x_0|<\delta$ выполняется $\delta-\varepsilon<f(x)<\delta+\varepsilon \Leftrightarrow |f(x)-b|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x0} f(x)=b$

Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Эквивалентные бесконечно малые величины. Примеры выполнения пределов с эквивалентными бесконечно малыми величинами.

Определение. Функция f(x) называется б.м. функцией при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x0} f(x)=0.$ Пример: функции y = sin x и y = x являются б/м при $x \to x_0$, т.к. $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

Определение. Функции вида α(x) и β(x) называются эквивалентно бесконечно малыми, если значение $x \to x_0$, а $\frac{\lim\limits_{x \to x0} \alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$ Для нахождения пределов используют замены эквивалентных бесконечно малых.

Теорема. Пусть f(x) тождественно ненулевая функция $D_f \bigcap \mathring{U}\delta(a)$, тогда f(x) – б.м при x->a, тогда f(x) б.б. и наоборот.

Свойства. **1**. Произведение б.б.(б.м.) величин есть б.б.(б.м.) величина при x->a. **2**. Сумма б.м.(б.б.) величин есть б.м.(б.б.) величина при x->a(если возникает неопр. $\infty - \infty$). **3**. Произведение б.б. величины на ограниченную функцию есть б.м.

Определение. Эквивалентные величины – б.м. величины α, β при x->a называется эквивалентной: $\alpha \underset{x \to a}{\sim} \beta$, если

$$\frac{\lim\limits_{x \to a} \alpha}{\beta} = \frac{\lim\limits_{x \to a} A}{B} = 1$$

Теорема. Пусть α, α_1, β, β_1 б.м. величины при x->a: $\alpha \sim \alpha 1$, $\beta \sim \beta 1$, тогда

$$\frac{\lim\limits_{x \to a} \alpha}{\beta} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \alpha 1}{\beta 1}$$

Эквивалентности:1) $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ **2)** $1 - \cos(\alpha) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$ **3)** $tg(\alpha) \sim \alpha(x)$

4) $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ **5)** $arctg\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$ **6)** $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$ **7)** $(1 + \alpha(x))^p - 1 \sim p\alpha(x)$ **8)** $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$

Правила нахождения пределов.

Пусть есть предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, k – const f, тогда:

$$1. \lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B \, [\infty - \infty]$$

2.

$$\lim\limits_{x \to a} (f(x) * g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) * \lim\limits_{x \to a} g(x)$$

3.

$$\frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\left[\frac{0}{0}\right]$$

4.

$$\lim\limits_{x \to a} (kf(x)) = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = k \cdot A$$

Первый замечательный предел $\frac{\lim\limits_{x \to 0} \sin x}{x} = 1$

Следствия: $1 ¿ \frac{\lim\limits_{x \to 0} x}{\sin x} = 1$ **2)** $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{(k \cdot x)}{x} = k$ **3)**

$$\frac{\lim\limits_{x\to 0} tg\, x}{x}=1$$ 4) $$\frac{\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x}{x}=1$$

5) $$\frac{\lim\limits_{x\to 0} arctg\, x}{x}=1$$

Второй замечательный предел. Следствия второго замечательного предела. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Следствия: 1) $$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$$ 2)

$$\lim_{x\to 0} a^{x}-\frac{1}{x}=\ln a$$ 3)

$$\frac{\lim\limits_{x\to 0} e^{x}-1}{x}=1$$ 4)

$$\frac{\lim\limits_{x\to 0} \log_a\left(1+x\right)}{x}=\frac{1}{\ln a}$$ 5)

$$\frac{\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(1+x\right)}{x}=1$$

Определение непрерывности функции в точке. Свойства непрерывных функций.

Определение. Функция f(x) называется непрерывной в точке $x_0 \in D$, если выполнено одно из 4 эквивалентных условий:

$$1 ¿ \lim f\left(x\right) \underset{x\to x0}{=} f\left(x0\right)$$ 2)

$\forall\, \varepsilon>0\, \exists\, \delta>0\, \forall$ $x\in D(|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$. **3)** $f(x)=f(x_0)+$ $\alpha\left(x\right)$ (б.м. при x->a) **4)** б.м. приращению арг. соответствует б.м. прирощение. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f\left(x0\right)$ =0

Свойства. Пусть функция f и g непрерывна в точке x_0 тогда в т. x0 непрерывность функции: **1)** c_1+c_2*g, c_1, c_2 – const **2)** f*g **3)** $g*(g(x_0)\neq 0)$

Будет непрерывно: **4)** Если $f(x_0)\neq 0$ $\exists\, \delta>0\, \forall$ $x\in U_\delta(x_0)(f(x)*(x_0)|>0)$ **5)**

$0\, \exists\, \delta>0\, \forall$ $x\in U_\delta(x_0)$(f(x)-огр. ф.) **6)** f(x) непрерывна в т x_0, $g(y_0)$ в т. $g_0=x_0$ то, сложная ф. g(f(x)) непрерывная в т. x_0

Классификация точек разрыва. Примеры

Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода разряда x_0 функции f(x) если существуют конечные пределы:

$$\lim_{x\to x0-} ¿ f\left(x\right)¿,\quad \lim_{x\to x0+} ¿ f\left(x\right)¿¿$$ неравные значению $f(x_0)$.

Разрыв можно устранить доопределив функцию в точке x0, пологая, что $f(x_0)=$

$$\lim_{x\to x0-} ¿ f\left(x\right)¿ = \lim_{x\to x0+} ¿ f\left(x\right)¿¿$$, т.е. $f(x_0)=$

$$\lim_{x\to x0} f\left(x\right)$$. Точкой разрыва 1-го разрыва x_0 называется устраненным разрывом если оба предела односторонние конечны и равны между собой $$\lim_{x\to x0-} ¿ f\left(x\right)¿ = \lim_{x\to x0+} ¿ f\left(x\right)¿¿$$. Точка разрыва 1-го рода x_0 называется точкой разрыва скачка, если оба предела конечны, но неравны между собой. $$\lim_{x\to x0-} ¿ f\left(x\right)¿ \neq \lim_{x\to x0+} ¿ f\left(x\right)¿¿$$.

Точка x0 называется точкой разрыва 2-го рода, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен ∞.

Пример. **1)** $f(x)=\{x^3, x\neq 0\ \{3, x=0; f(0)=0$, $$\lim_{x\to 0-} ¿ f\left(x\right)=0¿ ¿$$,

$$\lim_{x\to 0+} ¿ f\left(x\right)=0¿ ¿$$. Оба предела конечны, равны между собой, но не равны значению функции в т. 0., x=0 т.р 1 рода устраненного разрыва,

доопределим функцию f(0)= $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ **2)** f(x)={x2,x<0

{x+2, x≥0; $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x^2) = 0$;

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x+2) = 2$; Оба предела конечны, неравны между собой, x0=0 т.р. 1 рода скачка. 3) f(x)=lnx,

$\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, x0= 0 т.р. 2 рода.

Теорема. (о точках разрыва монотонной функции). Пусть функция (x)монотонна на отрезке a, b, тогда на этом отрезке она может иметь точки разрыва 1-го рода, причем

$$\lim_{x\to x0-} f(x) = \inf_{x<x0} (f(x))\, \text{в случае возрастания}$$

;

$$\lim_{x\to x0+} f(x) = \underset{x>x0}{(} f(x))\, \text{в случае убывания}$$

Непрерывность функции на множестве

Определение. Функция f(x) называется непрерывной на множестве X, если оно непрерывно в каждой точке множества X. Например, функция, непрерывная в каждой точке интервала, называется непрерывной на интервале. Условие непрерывности на всем множестве подразумевает отсутствие разрывов и прерываний значений функции.

Определение. Функция f(x) называется непрерывной в точке a, если для любой окрестности точки f(a) найдется такая окрестность точки a, что образ всех точек множества задания функций, лежащих в этой окрестности точки a, при отображении, осуществляемом функцией f(x), целиком лежит в указанной окрестности точки f(a).

Пример. Функция f(x) = x. Эта функция представляет собой прямую линию. Она непрерывна на всей числовой прямой (ℝ), так как значение этой функции изменяется непрерывно при изменении аргумента. Как мы знаем, для любой точки c ∈(ℝ) значение функции f(c) определено, и предел ф. существует и равен f(c) ¿.

Свойства. Пусть X = {x_0} или X = (a; b) или X = [a; b]. **1)** Сумма, разность и произведение конечного числа непрерывных на множестве X функций является функцией непрерывной на X. **2)** Если функции f(x) и g(x) непрерывны на X и g(x) ≠ 0 , ∀x∈X , то частное f(x)/g(x) – непрерывная на множестве X функция. **3)** Пусть f: X → Y, φ: Y → Z. Если f(x) непрерывна на X, φ(x) – непрерывна на Y, то сложная функция φ(f(x)) непрерывна на X.

Общие свойства функций непрерывных на отрезке. Теоремы Больцано-Коши

Теорема. Пусть функция f(x) определена и непрерывна на отрезках [a, b] и на концах принимает значение разных знаков f(a) * f(b) < 0, тогда $\exists c \in$ (a,b)(f(c) = 0)

Док-во. Пусть функция *f* (*x*) определена и непрерывна на отрезке [*a*, *b*]. Если на концах этого отрезка функция принимает неравные значения *f*(*a*) = A, *f* (*b*) = B, то, каково бы ни было число *m* ∈ (A, B), найдётся такая точка *x* = c∈(*a*, *b*), что *f* (*c*) = *m*. Как частный случай имеет место следующее утверждение. Пусть функция *f*(*x*) непрерывна на отрезке [*a*, *b*] и на концах отрезка имеет значения разных знаков. Тогда существует внутренняя точка отрезка *c*∈(*a*, *b*), в которой *f*(*c*) = 0.

Следствие: любое уравнение нечетной степени имеет хотя бы один корень.

Теорема. Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Док-во. Будем считать, что A < *m* < B. Рассмотрим на промежутке [*a*, *b*] вспомогательную функцию ϕ (x) = *f* (x) - *m*. Эта функция непрерывна на промежутке [*a*, *b*] и на концах его имеет разные знаки: ϕ (*a*) = *f* (*a*) - *m* = A - *m* < 0 и ϕ(*b*) = *f*(*b*) - *m* = B - *m* > 0. Тогда, по второй теореме Больцано – Коши, между *a* и *b* найдётся точка *x* = *c*, для которой ϕ(*c*) = *m*. Ч.т.д.

Свойства. 1)**Теорема о промежуточном значении непрерывной функции:** пусть f(x) непрерывна на отрезке [a, b], f(a) =α, f(b) = β. Тогда любое значение Y между α и β функция достигает хотя бы в одной точке $c \in$ [a,b]. Если f(x) определена и непрерывна в каком-либо промежутке X, то принимаемые ею значения также заполняют некоторый промежуток. 2)**Ограниченность (Вейерштрасса):** Функция, непрерывная на отрезке [a, b], ограниченна на этом отрезке, т.е. выполняется условие: M ≤f(x) ≤ M. 3)**Теорема о достижении непрерывной функцией точно верхней и точно нижней грани(Вейерштрасса):** Функция, непрерывная на отрезке [a, b] достигает супремума и инфинума. $\exists x_1, x_2 \in$ [a, b] (f(x_1)= sup f(x) = max f(x)) (f(x_2)= inf f(x) = min f(x)). **Теорема Гейне – Кантора:** Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна

Общие свойства функций непрерывных на отрезке. Теоремы Вейерштрасса.

Теорема. Функция, непрерывная на отрезке [a, b], ограниченна на этом отрезке, т.е. выполняется условие: M ≤f(x) ≤ M.

Теорема. Непрерывность на отрезке [a,b] функции f достигает на нем своих нижней и верхней граней, то есть своего минимума и максимума:

$\exists x_1, x_2 \in$ [a, b] (f(x_1)= sup f(x) = max f(x)) (f(x_2)= inf f(x) = min f(x)).

Свойства. **1)Теорема о промежуточном значении непрерывной функции:** пусть f(x) непрерывна на отрезке [a, b], f(a) =α, f(b) = β. Тогда любое значение Y между α и β функция достигает хотя бы в одной точке $c \in$ [a,b]. Если f(x) определена и непрерывна в каком-либо промежутке X, то принимаемые ею значения также заполняют некоторый промежуток.

2) Теорема Гейне – Кантора: Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем. **3) теорема Больцано – Коши:** Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами. **3)теорема Больцано – Коши:** Пусть функция f(x) определена и непрерывна на отрезках [a, b] и на концах этого отрезка принимает значение разных знаков f(a) * f(b) < 0, тогда $\exists c \in$(a,b)(f(c) = 0)

<u>Задачи, приводящие к понятию производной функции. Определение производной.</u>

Определение. Производная непрерывной функции в данной точке равна пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

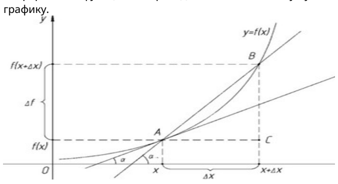
$$y' = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

. Если функция имеет производную в точке x_0, то ее называют дифференцируемой в точке x_0. Процедуру нахождения производной функции называют дифференцированием функции. ***Задачи, приводящие к понятию производной функции:*** **1) Механическая задача**. Мы знаем, что при равномерном движении v=S/t. При неравномерном движении по этой формуле находится средняя скорость на всем пути: v_{cp}=ΔS/Δt. Рассмотрим два момента времени: t и t+Δt, причем Δt – малый промежуток времени. Тогда за этот промежуток времени тело пройдет путь ΔS=S(t+Δt) – S(t) и v_{cp} =ΔS/Δt. Если Δt->0, то v_{cp}->v(t), значит, .

$$\lim_{\Delta t \to 0} v\,cp = v(t), \quad \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

Вывод: Физический смысл производной заключается в том, что мгновенная скорость – это производная пути по времени: v = S ′(t).

2.Задача о касательной к графику функции y = f(x). Рассмотрим график непрерывной функции и проведем в точке A секущую и касательную к графику.



Прямая AB – секущая, ее уравнение y = $k_{секущ}$ x +b, где $k_{секущ}$ – угловой коэффициент секущей, $k_{секущ}$ =Δy/Δx = tg$\alpha_{секущ}$, где $\alpha_{секущ}$ – угол наклона секущей (отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки). Пусть Δx стремится к нулю, тогда секущая стремится к своему предельному положению – к касательной в точке A, т. е. угловой коэффициент касательной равен пределу углового коэффициента секущей: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{секущ} = k_{касат}$

причем $k_{касат} = ¿$ tg α, где α – это угол наклона касательной, отсчитываемый от положительного направления оси Ox. Значит,

$$kкас = tg\alpha = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f}{\Delta x}$$

Вывод:

Геометрический смысл производной заключается в том, что угловой коэффициент или тангенс угла наклона касательной к графику функции в данной точке с абсциссой равен производной функции в этой точке: $k_{касат}$ = tg α = f ′(t).

<u>Дифференцируемость. Правила дифференцируемости.</u>

Определение. Функция f(x) называется дифференцируемой в точке x, если она имеет производную в этой точке. Операция отыскания производной называется дифференцированием функции. *Функция* y = f(x) называется дифференцируемой в точке x, если приращение Δy этой функции в точке x, отвечающее приращению аргумента Δx, может быть представлено в виде Δy = AΔx + α(Δx)Δx, где A – некоторое число. Независящее от Δx, a = α(Δx) – функция аргумента Δx, бесконечно малая в точке Δx = 0. В самой точке Δx = 0 эта функция α(Δx) не определена, и ей можно приписать в этой точке любое значение. В дальнейшем удобно считать это значение α(0) равным нулю. При такой договоренности функция α(Δx) будет непрерывна в точке Δx = 0 и равенство Δy = AΔx + α(Δx)Δx можно распространить и на значение Δx = 0.

Правила дифференцируемости:

1.f(x)= c, f′(x)=0.
2.(f(x)± g(x))′ = f′(x)± g′(x) .
3.(f(x)⋅g(x))′ = f′(x)⋅g(x)+ f(x)⋅g′(x) .
4.(c ⋅ f (x))′ = c ⋅ f′(x).

5.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)}{g^2(x)}$$

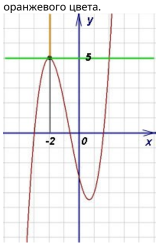
6. $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Уравнения касательной и нормали к графику функции. Примеры.

Определение. Касательная - это прямая, которая касается графика функции в одной точке и все точки которой находятся на наименьшем расстоянии от графика функции. Уравнение касательной выводится из уравнения прямой: $y = kx + b$.

Определение. Нормаль - это прямая, проходящая через точку касания к графику функции перпендикулярно касательной. Уравнение нормали: $(x - x_0) + f'(x_0)(y - y_0) = 0$.

Пример. Составить уравнение касательной и уравнение нормали к графику функции $y=x^3+2x^2-4x-3$, если абсцисса точки касания $x_0=-2$. Решение. Найдём ординату точки касания: $y_0=y(-2)=-8+2*4-4*(-2)-3=5$.Найдём производную функции: $y'=3x^2+4x-4$. Найдём значение производной в точке касания, то есть угловой коэффициент касательной: $y'(-2)=12-8-4=0$.Теперь у нас есть всё, чтобы получить уравнение касательной: $y-5=0(x+2)$, $y-5=0$. Теперь можем составить и уравнение нормали: $x+2+0(y-5)=0$, $x+2=0$. На рисунке ниже: график функции бордового цвета, касательная зелёного цвета, нормаль оранжевого цвета.



Пример. Составить уравнение касательной и уравнение нормали к графику функции $y=x^2+5x+4$, если абсцисса точки касания $x_0=1$.
Решение. Найдём ординату точки касания: $y_0=y(-1)=1+5+4=10$ Найдём производную функции: $y'=2x-5$.Найдём значение производной в точке касания, то есть угловой коэффициент касательной:$y'(-1)=-2-5=$
-7.Подставляем все полученные: $y-10=-7(x+1)$, $y-10=-7x-7 \Rightarrow 7x+y-3=0$.Составляем уравнение нормали: $x+1-7(y-10)=0$, $x-7y+71=0$.

Производные элементарных функций.

1.$c'=0$,c – const   8.$(\cos x)'=-\sin x$

2.$(x^n)'=nx^{n-1}$ 9.($\sqrt{x}$¿’=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. $(a^x)'=a^x*\ln a$ 10.$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

4. $(e^x)'= e^x$ 11.$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

5. $(\log_a x)'=\frac{1}{x*lna}$ 12.$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6.$(\ln x)'=\frac{1}{x}$ 13.$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7.$(\sin x)'=\cos x$ 14.$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$