0.1 Плоскость

0.1.1 Уравнения

1. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $\mathrm{M}_0\{x_0.y_0,z_0\}$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{N} = \{A,B,C\}$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

2. Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{где } \vec{N} = \{A,B,C\} \text{ - вектор нормали}$$

3. Уравнение плоскости "в отрезках"

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1\{x_1,y_1,z_1\}$, $M_2\{x_2,y_2,z_2\}$, $M_3\{x_3,y_3,z_3\}$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Условие компланарности векторов:

$$(\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

0.1.2 Необходимая информация

Важные св-ва плоскостей:

- Если в уравнении плоскости отсутствует одна переменная, то плоскость проходит параллельно той оси координат, переменной которой нет в уравнении.

- Если в уравнении плоскости отсутствует свободный коэффициент , то плоскость проходит через начало координат.

- Если в уравнении плоскости отсутствуют две переменные, то плоскость проходит параллельно координатной плоскости, переменных которой нет в уравнении.

  Уравнения координатных плоскостей:

  x = 0 - уравнение плоскости YOZ

  y = 0 - уравнение плоскости XOZ

  z = 0 - уравнение плоскости XOY

Взаимное расположение плоскостей:

- Условие параллельности плоскостей

$$\overrightarrow{N_1} \| \overrightarrow{N_2} \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

- Условие перпендикулярности плоскостей

$$\overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}\right) = 0$$

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$$

- Косинус угла между плоскостями

  Угол между плоскостями - это угол между векторами нормалей этих плоскостей

$$\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{N_1}, \vec{N_2}\right) = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_1\left(x_1; y_1; z_1\right)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Расстояние - это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве:

- Условие параллельности прямой и плоскости

$$\vec{s} \perp \vec{N} \quad (\vec{N} \cdot \vec{s}) = 0$$
$$Am + Bn + Cp = 0$$

- Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\vec{N} \| \vec{s} \quad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

- Нахождение угла между прямой и плоскостью

  Углом между прямой и плоскость называется угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

  Из уравнений прямой и плоскости известны направляющий вектор прямой и вектор нормали плоскости. Угол между этими векторами - α. Так как в сумме углы дают 90 градусов, а значит $\cos\alpha = \sin\varphi$ Поэтому при нахождении угла между прямой и плоскостью находят не косинус, а синус угла. Так как синус угла между прямой и плоскостью может быть только положительным, то:

$$\sin\varphi = \frac{|(\vec{N} \cdot \vec{s})|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$