УДК 517
ББК 22.161я73
Н 64

Печатается по решению
учебно-методического управления
Курского госуниверситета

Никоненок В.Г.

Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисления функции многих переменных: контрольно-измерительные материалы по курсу «Математический анализ» для студ. фак. физики, математики, информатики. – Курск: Курск. гос. ун-т, 2014. – 19 с.

Пособие составлено в соответствии с учебной программой по дисциплине «Математический анализ» и предназначено для выполнения студентами самостоятельной работы и контроля полученных ими знаний. Приведены 10 вариантов минимумов по теме «Дифференциальное и интегральное исчисления функции многих переменных». Подбор учебных задач проводился таким образом, чтобы обеспечивалось овладение предмета на уровне ФГОСа. Предназначено для студентов направления подготовки «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», а также других математических направлений подготовки и специальностей.

УДК 517
ББК 22.161я73

Рецензент – доцент, канд. физ.-мат. наук Г.С. Толстова

Минимум № 1

Функция многих переменных

Дифференциальное исчисление

1.1 – 1.10. Найти области определения функций двух переменных, заданных формулами:

1.1. $u=\ln\left(y^2-4x+8\right)$

1.2. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-16\left(y^2+1\right)}}$

1.3. $u=\dfrac{1}{5x^2-4xy+2y^2+2x-2y+3}$

1.4. $u=\ln(3x+y-3)+\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{3x-2y+6}}$

1.5. $u=\ln\sin\pi\left(x^2+y^2\right)$

1.6. $u=\ln\left(y^2-4x+8\right)$

1.7. $u=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$

1.8. $u=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$

1.9. $u=\sqrt{x-\sqrt{y}}$

1.10. $u=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$

2.1 – 2.10. Построить линии уровня следующих функций (для $z=1,2,3$):

2.1. $z=x^2-y^2$

2.2. $z=\sqrt{yx}$

2.3. $z=|x|+y$

2.4. $z=(x+y)^2$

2.5. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$

2.6. $z=x^2-y^2$

2.7. $z=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

2.8. $z=\dfrac{y-x^2}{x^2}$

2.9. $z=\ln(xy)$

2.10. $z=e^{xy}$

3.1 – 3.10. Найти пределы функции $u=f(x;y)$:

3.1. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

3.6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y+9}-3}$

3.2. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

3.3. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}$

3.4. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

3.5. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$

3.7. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to a}}=\frac{xy^2\left(x^2+y^2\right)}{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}$

3.8. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to a}}=\frac{xy}{1-\sqrt[3]{1+xy}}$

3.9. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to a}}=\sqrt{x^2+y^2}\ln\left(x^2+y^2\right)$

3.10. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to a}}=\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$

4.1 – 4.10. Найти дифференциал функции f(x;y), если:

4.1. $f=x^{\frac{y}{z}}$;

4.2. $f=(xy)^z$;

4.3. $f=\frac{\cos(x-2y)}{\cos(x+2y)}$, $\left(\frac{\pi}{4};\pi\right)$;

4.4. $f=\ln\frac{4\sqrt{2-x}-xy}{1+\cos y}$, $(1;0)$;

4.5. $f=2^{tg\left(\frac{\pi x}{x+3y}\right)}$, $(1;1)$;

4.6. $f=(1+xy)^y$;

4.7. $f=e^{x-1}arctg\frac{2x+3y}{1-6xy}$, $(1;1)$;

4.8. $f=\ln\arcsin\left(x+y^3\right)$;

4.9. $f=\arcsin\ln\left(\sqrt{x}+y^4\right)$, $\left(e^2;0\right)$;

4.10. $f=\ln\sin\frac{x+1}{\sqrt{y}}$.

5.1 – 5.10. Сложная функция

Найти w'_u, w'_v, если $x=u\cos v$, $y=\frac{u}{\sqrt{1-v^2}}$, $z=e^{uv}$.

5.1. $w=xe^{yz}$

5.2. $w=y^{zx^2}$

5.3. $w=y^2xe^z$

5.4. $w=z\sin x\cos y$

5.5. $w=\frac{x+y}{\ln(z-x)}$

5.6. $w=xye^z$

5.7. $w=\frac{x^2+z}{y^2}$

5.8. $w=ze^{x^2y}$

5.9. $w=x^{yz}$

5.10. $w=xy^z$

6.1 – 6.10. Неявно заданные функции

Для функции $u=(x,y)$ найти частные производные первого и второго порядка.

6.1. $u^2\ln(u+x)=xy$

6.2. $x\cos y+y\cos u+u\cos x=1$

6.3. $x-2y^2+3u^2-yu+y=0$

6.4. $x-u=u\ln\left(\frac{u}{y}\right)$

6.5. $\frac{u}{\sqrt{x^2-y^2}}-arctg\frac{u}{\sqrt{x^2-y^2}}-1=0$

6.6. $u+\ln(x+y+u)=0$

6.7. $\pi yu=4arctgxu$

6.8. $u^3-3(x+y)u^2+z^3=0$

6.9. $u-x=yctg(u-x)$

6.10. $x^2+y^2+z^2=3xyz$

7.1 – 7.10. Повторное дифференцирование

7.1 - 7.2. Проверить, что $\frac{d^3z}{dydx^2}=\frac{d^3z}{dxdydx}$, для функций:

7.1. $z=y^{x^2}+x^{y^2}$;

7.2. $z=x\sin y$.

7.3 - 7.8. Проверить, что $\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dydx}$, для функций:

7.3. $z=arctg\frac{x+y}{xy}$;

7.4. $z=\frac{y^2}{1+x}$;

7.5. $z=y\ln x$;

7.6. $z=ye^x$;

7.7. $z=e^{x+y^2}$;

7.8. $z=\sin x\cos 2y$.

7.9. Показать, что функция $z=\frac{xy}{x-y}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d^2z}{dy^2}=\frac{2}{x-y}.$$

7.10. $z=arctg\frac{y}{x}$. Убедиться, что $\frac{d^3z}{dy^2dx}=\frac{d^3z}{dxdy^2}$.

8.1 – 8.10. Найти d^2u.

8.1. $u = x^2ze^y$

8.2. $u = xy\ln(y-z)$

8.3. $u = \dfrac{x^2y}{y^2+z}$

8.4. $u = \dfrac{x^2}{y-2z}$

8.5. $u = \ln(x^2+y-2z)$

8.6. $u = \dfrac{x+y^2}{2z}$

8.7. $u = xy\cos\sqrt{z}$

8.8. $u = x\ln(y+z)$

8.9. $u = \dfrac{y^2}{x+z}$

8.10. $u = x\,\mathrm{arctg}\,yz$

9.1 – 9.10. Исследовать на экстремум функции нескольких переменных.

9.1. $z = (x-y+1)^2$

9.2. $z = e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$

9.3. $z = x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$

9.4. $z = xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}\quad (x>0,\quad y>0)$

9.5. $z = (5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$

9.6. $z = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

9.7.
$u = x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{2}{x}\quad (x>0,\quad y>0,\quad z>0)$

9.8. $z = e^{x^2-y}(5-2x+y)$

9.9. $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$

9.10.
$u = xy^2z^3(a-x-2y-3z)\quad (a>0)$

10.1 – 10.10. Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции и на заданном множестве.

10.1. $u = x^3+8y^3-6xy+1,\quad 0\le x\le 2,\quad |y|\le 1$

10.2. $u = x^2-xy+y^2,\quad |x|+|y|\le 1$

10.3. $u = (x+y)e^{xy},\quad -2\le x+y\le 1$

10.4. $u = 1+x+2y,\quad x+y\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$

10.5. $u = x+3y,\quad x+y\le 6,\quad x+4y\ge 4,\quad y\le 2$

10.6. $u = x^2-2y+3,\quad y-x\le 1,\quad x\le 0,\quad y\ge 0$

10.7. $u = x^2+y^2-xy-x-y,\quad x+y\le 3,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$

10.8. $u = xy(6-x-y),\quad x+y\le 12,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$

10.9. $u = (x-6)^2+(y+8)^2,\quad x^2+y^2\le 25$

10.10. $u = x^2-y^2,\quad x^2+y^2\le 2x$

11.1 – 11.10. Наибольшее и наименьшее значение функции

11.1. Найти прямоугольник данного периметра 2p, который вращением вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

11.2. Найти треугольник данного периметра 2p, который вращением вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

11.3. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

11.4. Найти наибольший объем, который может иметь прямоугольный параллелепипед, если сумма длин ребер равна а.

11.5. Определить наибольшую вместимость цилиндрического ведра, поверхность которого (без крышки) равна S.

11.6. Определить наибольшую вместимость конической воронки, поверхность которой равна S.

11.7. Найти наибольший объем тела, образованного вращением треугольника с периметром p вокруг одной из его сторон.

11.8. Найти наименьшую поверхность, которую может иметь прямоугольный параллелепипед, если его объем равен V.

11.9. В прямой круговой конус, образующая которого l наклонена к плоскости основания под углом α, вписать прямоугольный параллелепипед с наибольшей полной поверхностью.

11.10. Найти наибольший объем, который может иметь прямоугольный параллелепипед, если поверхность его равна S.