Лекция 08.11.24

В чем суть интегрирующего мн-жителя, допустим есть диф. уравнение:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\frac{Dm}{Dy} != \frac{Dn}{Dx} => \text{не явл. ур. в Полных дифференциалах}$$

f(x,y) называется. интегрирующим мн-жителем, если умножение этой функции на ур-ние, получаем мн-во:

$$f(x,y)(M(x,y)dx + N(x,y)dy) = 0, (f! = 0)$$

$$\frac{D(f \cdot M)}{Dy} = \frac{D(f(N))}{Dx}$$

Условия, при которых f(x) явля. инт. множителем.

Пусть f(x) - инт. мн-житель, тогда выполн.

$$\frac{D(f \cdot M)}{Dy} = \frac{D(f \cdot N)}{Dx}$$

$$\frac{D(f(x) \cdot M(x,y))}{Dy} = f(x) \cdot \frac{DM(x,y)}{Dy}$$

$$\frac{D(f(x) \cdot M(x,y))}{D(x)} = \frac{Df(x)}{Dx} \cdot N(x,y) + \frac{DN(x,y)}{Dx} \cdot f(x)$$

$$f(x) \cdot \frac{DM}{Dy} = \frac{Df(x)}{f(x)} \cdot N + \frac{DN}{Dx} \cdot f(x)$$

$$\frac{df(x)}{dx \cdot f(x)} = \frac{1}{N}(\frac{DM}{Dy} - \frac{DN}{Dx})$$

Если выполняется отношение:

$$\frac{\frac{DM}{Dy} - \frac{DN}{Dx}}{N} = \phi(x)$$

, то инт. мн-житель находится как функция от x

Условия, при которых f(y) явля. инт. множителем.

$$f(y)(\frac{DN}{Dx} - \frac{DM}{Dy} = \frac{Df(y)}{Dy} \cdot M)$$

$$\frac{Df(y)}{Dy \cdot f(y)} = \frac{1}{M}(\frac{DN}{Dx} - \frac{DM}{Dy})$$
$$\frac{\frac{DN}{Dx} - \frac{DM}{Dy}}{M} = \phi(y)$$

Пример:

$$(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$$
$$\frac{DM}{Dy} = \frac{DN}{Dx}$$
$$\frac{D(xy^2 - y^3)}{Dy}! = \frac{D(1 - xy^2)}{Dx}$$
$$\frac{D(xy^2 - y^3)}{Dy} = 2xy - 3y^2$$
$$\frac{D(1 - xy^2)}{Dx} = -y^2$$
$$\frac{\frac{DM}{Dy} - \frac{DN}{Dx}}{N} = \frac{2xy - 3y^2 + y^2}{1 - xy^2} = \frac{2xy - 2y^2}{1 - xy^2}! = f(x)$$
$$\frac{\frac{DN}{Dx} - \frac{DM}{Dy}}{M} = \frac{-y^2 - 2xy + 3y^2}{xy^2 - y^3} = \frac{2y^2 - 2xy}{xy^2 - y^3} = \frac{2y(y - x)}{y^2(y - x)^2} = \frac{2}{y}$$

Таким образом инт. множитель можно находить через f(y)

$$(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$$

$$f(y)(xy^2 - y^3)dx + f(y)(1 - xy^2)dy = 0$$
$$M = f(y)(xy^2 - y^3), N = f(y)(1 - xy^2)$$
$$\frac{DM}{Dy} = \frac{Df}{dy}(xy^2 - y^3) + f * (2xy - 3y^3)$$
$$\frac{DN}{Dx} = f(y) * (-y^2)$$
$$f'_y(xy^2 - y^3) + f(2xy - 3y^2) = f(-y^2)$$
$$f'_y(xy^2 - y^3) + f(2xy - 3y^2 + y^2) = 0$$
$$f'y^2(x - y) + 2yf(x - y) = 0$$
$$f'y^2 + 2yf = 0$$

$$\frac{df}{dy}y^2 + 2yf = 0$$

$$\frac{df}{dy}y + 2f = 0$$

$$\frac{df}{f} = -\frac{2dy}{y}$$

$$ln(f) = -2ln(y)$$

$$f = \frac{1}{y^2}$$

Вернемся к первоначальному ура-нию и домножим на $\frac{1}{y^2}$

$$(x - y)dx + (\frac{1}{y^2} - x)dy = 0$$

$$M = (x - y), N = (\frac{1}{y^2} - x)$$

$$\frac{DM}{Dy} = -1; \frac{DN}{Dx} = -1$$

$$\begin{cases} \frac{Du(x,y)}{Dx} = M \\ \frac{Du(x,y)}{Dy} = N \end{cases}$$

$$\frac{Du}{Dx} = x - y$$

$$u = \int (x - y)dx + C(y)$$

$$u = \frac{x^2}{2} - xy + C(y)$$

$$\frac{Du}{Dy} = -x + C'(y)$$

$$N' = (\frac{1}{y^2} - x)$$

$$-x + C'(y) = \frac{1}{y^2} - x$$

$$C'(y) = \frac{1}{y^2}$$

$$C(y) = \int \frac{1}{y^2}dy + C_1 = -\frac{1}{y} + C_1$$

$$(y^2 - 2x - 2)dx + 2ydy = 0$$

$$\frac{DM}{Dy} = \frac{DN}{Dx}$$

$$\frac{D(y^2 - 2x - 2)}{Dy} = 2y, \frac{D2y}{Dx} = 0$$

$$\frac{\frac{DM}{Dy} - \frac{DN}{Dx}}{N} = \frac{2y}{2y} = 1! = f(x)$$

$$\frac{\frac{DN}{Dx} - \frac{DM}{Dy}}{M} = \frac{2y}{y^2 - 2x - 2}! = f(y)$$

$$f(x) * (y^2 - 2x - 2)dx + f(x) * 2ydy = 0$$

$$\frac{DM}{Dy} = f(x) * 2y$$

$$\frac{DN}{dx} = f'(x) * 2y$$

$$f(x) * 2y = f'(x) * 2y$$

$$f(x) = f'(x), f = e^x$$

$$\frac{df}{dx} = f$$

$$\frac{df}{f} = dx => ln(f) = x$$

$$e^x(y^2 - 2x - 2)dx + e^x * 2ydy = 0$$

$$\begin{cases} M = e^x(y^2 - 2x - 2) \\ N = e^x * 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dx} = e^x(y^2 - 2x - 2) \\ \frac{Du}{Dy} = e^x * 2y \end{cases}$$

$$u = \int e^x 2ydy = e^x y^2 + C(x)$$

$$\frac{Du}{Dx} = e^x * y^2 + C'(x)$$

$$e^x * y^2 + C'(x) = e^x(y^2 - 2x - 2)$$

$$e^x y^2 + C'(x) = e^x y^2 - e^x 2x - 2e^x$$

$$C'(x) = -e^x 2x - 2e^x$$

$$C(x) = 2\int (-e^x x - e^x)dx + C_1$$