Вот ответы на вопросы для подготовки к экзамену по дискретной математике:

1. Сочетания без повторений и с повторениями:
   - Сочетания без повторений:
     Из n элементов выбирается k элементов, порядок не важен и элементы не повторяются.
     Если X – n-элементное множество, то любое его k-элементное подмножество, где n, $k \in N$ и k<=n, называется сочетанием из n элементов (множества X) по k.
     Сочетания неупорядоченные!
     Число всех сочетаний без повторений определяется формулой: $C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
   - Сочетания с повторениями:
     Сочетанием с повторениями из n-элементов данного множества X по k элементов, где $k \in N$ называется любое разложение вида: $(a_1,a_1, \cdots ,a_1; a_2,a_2 \cdots ,a_2; a_n,a_n, \cdots ,a_n)$.
     Из n элементов выбирается k элементов, порядок не важен, но элементы могут повторяться.
     Число всех сочетаний с повторениями определяется формулой: $C(n + k - 1, k) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.
   - Примеры:
     - Без повторений: Сколькими способами можно выбрать 2 студента из 5? Ответ:$C(5, 2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$.
     - С повторениями: Сколькими способами можно выбрать 3 конфеты из 4 видов? Ответ:$C(4 + 3 - 1, 3) = \frac{6!}{3!3!} = 20$.
2. Размещения без повторений и с повторениями:
   - Размещения без повторений:
     Размещением без повторений из n элементов по k называется упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества
     Из n элементов выбирается k элементов, порядок важен и элементы не повторяются. Число всех размещений без повторений определяется формулой:
     $A(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
   - Размещения с повторениями:
     Пусть X – данное n-элементное множество, n∈N. Любой кортеж длины k, где k∈N, элементы которого принадлежат множеству X, называется размещениями с повторениями из n элементов данного множества.
     Из n элементов выбирается k элементов, порядок важен и элементы могут повторяться.
     Число всех размещений с повторениями определяется формулой:n^k.
   - Примеры:
     - Без повторений: Сколькими способами можно расставить 3 книги из 5? Ответ:$A(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$.

- С повторениями: Сколькими способами можно создать код из 2 символов, если доступно 3 различных символа? Ответ:$3^2 = 9$.

3. Перестановки без повторений и с повторениями:
   - Перестановки без повторений:
     Расположение различных элементов в определенном порядке называется перестановкой без повторений из элементов.
     Все n элементов располагаются в определенном порядке. Число всех перестановок без повторений определяется формулой: $P(n) = n!$.
   - Перестановки с повторениями:
     Перестановкой с повторениями из n элементов данного множества с кортежем кратности $(r_1, \ldots, r_n)$ называется размещение из n элементов данного множества по k, где элемент a_1 повторяется r_1 раз,элемент a_2 повторяется r_2 раз, элемент a_3 повторяется r_3 раз. Если среди n элементов есть повторяющиеся элементы, число всех перестановок определяется формулой:
     $P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$, где $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.
   - Примеры:
     - Без повторений: Сколькими способами можно расставить 4 человека в ряд? Ответ:$P(4) = 4! = 24$.
     - С повторениями: Сколькими способами можно расставить слово “AAB”? Ответ:$P(3; 2, 1) = \frac{3!}{2!1!} = 3$.
4. Основные комбинаторные правила:
   - Правило суммы: Если событие A может произойти m способами, а событие B—n способами, и эти события не могут произойти одновременно, то общее число способов для A или B равно $m + n$.
   - Правило произведения: Если событие A может произойти m способами, и после него событие B может произойти n способами, то общее число способов для A и B равно $m \times n$.
5. Метод включения-исключения:
   - Метод используется для вычисления числа элементов в объединении нескольких множеств, корректируя избыточные подсчеты пересечений. Формула для трех множеств:
     $$\|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (1)$$
     .
6. Определение биномиальных коэффициентов:
   - Биномиальный коэффициент $C(n, k)$ или $\binom{n}{k}$ равен числу способов выбрать k элементов из n и определяется формулой: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
     Бином Ньютона:
     $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$
     $$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$
7. Треугольник Паскаля и его свойства:

- Треугольник Паскаля — это таблица биномиальных коэффициентов. Каждое число в треугольнике равно сумме двух чисел, расположенных над ним. Свойства включают симметрию и свойство начальных строк. - Числа треугольника симметричны (равны) относительно вертикальной оси.
  - В строке с номером n (нумерация начинается с 0):
  - первое и последнее числа равны 1;
  - второе и предпоследнее числа равны n;
  - третье число равно треугольному числу $T_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$, что также равно сумме номеров предшествующих строк;
  - четвёртое число является тетраэдрическим;
  - m-е число (при нумерации с 0) равно биномиальному коэффициенту $C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.
  - Сумма чисел восходящей диагонали, начинающейся с первого элемента (n - 1)-й строки, есть n-е число Фибоначчи:

  $$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots = F_n.$$

  - Если вычесть из центрального числа в строке с чётным номером соседнее число из той же строки, то получится число Каталана.
  - Сумма чисел n-й строки треугольника Паскаля равна 2^n.
  - Все числа в n-й строке, кроме единиц, делятся на число n тогда и только тогда, когда n является простым числом [4] (следствие теоремы Люка).
  - Если в строке с нечётным номером сложить все числа с порядковыми номерами вида $3n, 3n+1, 3n+2$, то первые две суммы будут равны, а третья на 1 меньше.
  - Каждое число в треугольнике равно количеству способов добраться до него из вершины, перемещаясь либо вправо-вниз, либо влево-вниз.

8. Основные тождества с биномиальными коэффициентами:
   - Основные тождества включают:
     - Симметрия: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
     - Рекуррентное соотношение: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
     - $$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$$
     - $$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$$
     - $$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} \tag{1.3}$$
     - $$C_{m+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i \cdot C_m^{k-i}$$

–

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

9. Бином Ньютона. Биномиальные формулы:
   - Бином Ньютона описывает разложение$(a+b)^n$в сумму: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
10. Свойства бинома Ньютона:

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$
$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$
$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$

   - Основное свойство бинома Ньютона заключается в его применении для вычисления коэффициентов в разложении многочленов. Также он используется для доказательства тождеств с биномиальными коэффициентами.
11. Булевы функции:
   - Булевы функции — это функции, которые принимают значения 0 и 1. Примеры включают логические операции И (конъюнкция), ИЛИ (дизъюнкция), НЕ (отрицание).
12. ДНФ, КНФ. Определения и примеры:
   - Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ): Это дизъюнкция конъюнкций. Пример:$(A \wedge B) \vee (C \wedge \neg D)$.
   - Конъюнктивная нормальная форма (КНФ): Это конъюнкция дизъюнкций. Пример:$(A \vee B) \wedge (C \vee \neg D)$.
13. СДНФ, СКНФ. Определения и примеры:
   - СДНФ (совершенная дизъюнктивная нормальная форма): Это ДНФ, в которой каждое слагаемое содержит все переменные.
   - СКНФ (совершенная конъюнктивная нормальная форма): Это КНФ, в которой каждый множитель содержит все переменные.
14. Многочлены Жегалкина:
   - Многочлен Жегалкина — это полином, представляющий булеву функцию с использованием операции сложения по модулю 2 и умножения. Пример:$f(x,y) = x \oplus y \oplus xy$.
15. Основные понятия теории графов:
   - Основные понятия включают вершины, ребра, смежность, инцидентность, степени вершин.
     1. Граф: абстрактная структура, состоящая из вершин (узлов) и ребер (связей) между ними.
     2. Вершина: элемент графа, обозначающий отдельный узел или объект.
     3. Ребро: связь между двумя вершинами графа.
     4. Ориентированный граф: граф, в котором каждое ребро имеет направление, указывающее на порядок вершин.
     5. Неориентированный граф: граф, в котором ребра не имеют направления.
     6. Смежные вершины: вершины, соединенные ребром.

7. Степень вершины: количество ребер, связанных с данной вершиной.
8. Путь: последовательность вершин и ребер, соединяющих эти вершины. Для орграфов цепь называется путем, а цикл — контуром.
9. Цикл: путь, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине.
10. Дерево: связный граф без циклов.
11. Гамильтонов путь: путь, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз.
12. Эйлеров путь: путь, проходящий через каждое ребро графа ровно один раз.
13. Матрица смежности: матрица, используемая для представления графа, в которой элементы указывают наличие или отсутствие ребер между вершинами.
14. Матрица инцидентности: матрица, используемая для представления графа, в которой элементы указывают наличие или отсутствие ребер между вершинами и их направление.
15. Подграф: граф, полученный из исходного графа путем удаления некоторых вершин и/или ребер.
Часто рассматриваются следующие родственные графам объекты:
1. Если элементами множества E являются упорядоченные пары (т. е. E с Vx V), то граф называется ориентированным (или орграфом). В этом случае элементы множества V называются узлами, а элементы множества E — дугами. 2. Если элементом множества E может быть пара одинаковых (не различных) элементов V, то такой элемент множества E называется петлей, а граф называется графом с петлями (или псевдографом). 3. Если E является не множеством, а мультимножеством, содержащим некоторые элементы по несколько раз, то эти элементы называются кратными рёбрами, а граф называется мультиграфом. 4. Если элементами множества E являются не обязательно двухэлементные, а любые (непустые) подмножества множества V, то такие элементы множества E называются гипердугами, а граф называется гиперграфом. 5. Если задана функция F : V —» M и/или F : E —> M, то множество M называется множеством пометок, а граф называется помеченным (или нагруженным). В качестве множества пометок обычно используются буквы или целые числа. Если функция F инъективна, то есть разные вершины (рёбра) имеют разные пометки, то граф называют нумерованным.

16. Элементы графов:
    - Вершины (узлы), ребра (дуги), петли, кратные ребра, смежные вершины, инцидентные вершины и ребра.

1. Вершина (узел): Отдельный элемент графа, обозначающий конкретный объект или узел. Вершины могут быть связаны друг с другом

ребрами.
2. Ребро (связь): Связь между двумя вершинами графа, указывающая на отношение между этими вершинами. Ребро может быть ориентированным (с указанием направления) или неориентированным.
Эти два элемента образуют основу для построения различных структур и алгоритмов в теории графов. В зависимости от конкретной задачи, в графах могут также использоваться дополнительные элементы, такие как веса ребер, метки вершин и другие атрибуты. После рассмотрения определений, относящихся к графам как к цельным объек- там, естественно дать определения различным элементам графов.
7.2.1. Подграфы Граф G'(V',E') называется подграфом (или частью) графа G(V,E) (обозначает- ся G' с G), если V' с V к E' с E. Если V' = V, то G' называется остовным подграфом G. Если V' C V к E' C E & (V' ф V V E' ф E), то граф G' называет- ся собственным подграфом графа G. Подграф G'(V',Ef) называется правильным подграфом графа G(V, E), если G' содержит все возможные рёбра G: u,veV' ((u,v) e E (u,v) e E'). Правильный подграф G'(V', E') графа G(V, E) определяется подмножеством вер- шин V . ЗАМЕЧАНИЕ Иногда подграфами называют только правильные подграфы, а неправильные подграфы называют изграфами. 7.2.2. Валентность Количество рёбер, инцидентных вершине v, называется степенью (или валент- ностью) вершины v и обозначается d(v): Таким образом, степень dv) вершины v совпадает с количеством смежных с ней вершин. Количество вершин, не смежных с v, обозначают d(v). Ясно, что VueV (dv)+ dv) = p - 1). Обозначим минимальную степень вершины графа G через 8(G), а максималь- ную — через A(G): 8(G(V,E)) =f min d(v), A(G(V,E)) = ma xd(v). v£V vEV Ясно, что и Д(G) являются инвариантами. Если степени всех вершин равны к, то граф называется регулярным степени к: 8(G) = Д(<7) = к, Vu e V (d(v) = к). Степень регулярности обозначается r(G). Для нерегулярных графов r(G) не опре- делено. Примеры На рис. 7.7 приведена диаграмма регулярного графа степени 3. На рис. 7.6 при- ведены диаграммы двух регулярных, но неизоморфных графов степени 3.
7.2. Элементы графов 247 Если степень вершины равна нулю (то есть d(v) = 0), то вершина называет- ся изолированной. Если степень вершины равна единице (то есть d(v) = 1), то вершина называется концевой, или висячей. Для орграфа число дуг, исходящих из узла v, называется полустепенью исхода, а число входящих — полустепенью захода. Обозначаются эти числа, соответственно, d (v) и d+(v). Т Е О Р Е М А (Лемма о рукопожатиях) Сумма степеней вершин графа (мультиграфа) равна удвоенному количеству рёбер: £ =vev ДОКАЗАТЕЛЬСТВО При подсчёте суммы степеней вершин каждое ребро учитыва- ется два раза: для одного конца ребра и для другого. • С Л Е Д С Т В И Е 1 Число вершин нечётной степени чётно. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО П О теореме сумма степеней всех вершин — чётное число. Сумма степеней вершин чётной степени чётна, значит, сумма степеней вершин нечётной степени также чётна, следовательно, их чётное число. • С Л Е Д С Т

В И Е 2 Сумма полустепеней узлов орграфа равна удвоенному количеству дуг: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Сумма полустепеней узлов орграфа равна сумме степеней вер- шин графа (мультиграфа), полученного из орграфа забыванием ориентации ДУГ.

17. Маршруты, цепи, циклы:
    - Маршрут: последовательность смежных ребер.
    - Цепь: маршрут без повторений ребер.
    - Цикл: цепь, начинающаяся и заканчивающаяся в одной и той же вершине.

    Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер, начинающаяся и кончающаяся вершиной, vo,e1,v1, e2, v2,..., ejt, Vk, в которой любые два соседних элемента инцидентны, причём однородные элементы (вершины, рёбра) через один смежны или совпадают.
    Если vq — Vk, то маршрут замкнут, иначе — открыт. Если все рёбра различны, то маршрут называется цепью. Если все вершины (а значит, и рёбра) различны, то маршрут называется простой цепью. В цепи v0,ei,... ,ek,Vk вершины vq И VK называются концами цепи. Говорят, что цепь с концами uwv соединяет вершины и и v. Цепь, соединяющая вершины и и г>, обозначается (и, v). Если нужно указать граф G, которому принадлежит цепь, то добавляют индекс: (u,v)G. Нетрудно показать, что если есть какая-либо цепь, соединяющая вершины и и v, то есть и простая цепь, соединяющая эти вершины. Замкнутая цепь называется циклом-, замкнутая простая цепь называется простым циклом. Число циклов в графе G обозначается z(G). Граф без циклов называется ациклическим.

    Говорят, что две вершины в графе связаны, если существует соединяющая их (простая) цепь. Граф, в котором все вершины связаны, называется связным. Нетрудно показать, что отношение связанности вершин является эквивалентно- стью. Классы эквивалентности по отношению связанности называются компонен- тами связности графа. Число компонентов связности графа G обозначается k(G). Граф G является связным тогда и только тогда, когда k(G) = 1. Если k(G) > 1, то G — несвязный граф. Граф, состоящий только из изолированных вершин (в котором k(G) = p(G) и r(G) = 0), называется вполне несвязным. 7.2.5. Расстояние между вершинами, ярусы и диаметр графа Длиной маршрута называется количество рёбер в нём (с учётом повторений). Если маршрут M = vq, e v e2, v2, • • •, vk, то длина M равна к (обозначается M — к). Расстоянием между вершинами и wv (обозначается d(u, v)) называется длина кратчайшей цепи (u,v), а сама кратчайшая цепь называется геодезической, d(u, г>) min l(n, гЛ1.<«,«» Если для любых двух вершин графа существует единственная геодезическая цепь, то граф называется геодезическим. З А М Е Ч А Н И Е Если -<3 ((u,v)), то по определению d(u,v) =f+oo. Множество вершин, находящихся на заданном расстоянии п от вершины v (обо- значение

D(v,n)), называется ярусом: D(v, п) и € V | d(v, и) —п . Ясно, что множество вершин V всякого связного графа однозначно разбивается на ярусы относительно дайной вершины. Диаметром графа G называется длиннейшая геодезическая. Длина диаметра обозначается D(G): D(G) max d(u,v). u,v(EV 7.2.6. Эксцентриситет и центр Эксцентриситетом e(v) вершины v в связном графе G(V, E) называется максимальное расстояние от вершины v до других вершин графа G: e(y) =f maxd(v, и). uGV Заметим, что наиболее эксцентричные вершины — это концы диаметра. Радиусом R(G) графа G называется наименьший из эксцентриситетов вершин:

18. Виды графов:
    - Ориентированные, неориентированные, взвешенные, невзвешенные, планарные, полные графы.

    Граф, состоящий из одной вершины, называется тривиальным. Граф, состоящий из простого цикла с к вершинами, обозначается $\tilde{\text{N}}_k$.
    Граф, в котором любые две вершины смежны, называется полным.
    Полный подграф (некоторого графа) называется кликой (этого графа).
    Граф GV,E) называется двудольным (или биграфом, или чётным графом), если множество V может быть разбито па два непересекающихся множества V1 и V2 (V1 ∪ V2 = V,V1$\cap V2$ = 0), причём всякое ребро из E инцидентно вершине из V1 и вершине из V2 (то есть соединяет вершину из V1 с вершиной из V2). V1 и V2 - доли двудольного графа Если двудольный граф содержит все рёбра, соединяющие множества V1 и V2, то он называется полным двудольным графом. Если |V1| = m и |V2| = n, то полный двудольный граф обозначается $K_{m,n}$
    Theorem 1 (о двудольном графе). Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы имеют чётную длину.
    Если в графе ориентировать все рёбра, то получится орграф, который называется направленным, или антисимметричным. Направленный орграф, полученный из полпого графа, называется турниром.
    Если в орграфе полустепень захода некоторого узла равна нулю (то есть d+(v) = = 0), то такой узел называется источником, если же нулю равна полустепень исхода (то есть d (v) = 0), то узел называется стоком.
    Направленный слабосвязный (см. 8.5.1) орграф с одним источником и одним стоком называется сетью.
19. Операции над графами:
    - Объединение, пересечение, дополнение, декартово произведение графов.

    (a) Дополнением графа $G_1(V_1, E_1)$ (обозначение – $\overline{G_1(V_1, E_1)}$) называется граф $G_2(V_2, E_2)$, где $V_2 = V_1$ и $E_2 = \overline{E_1} = \{e \in V_1 \times V_1 \mid e \notin E_1\} = V \times V \setminus E$.
    Пример: $\overline{K_1} = K_1$.
    (b) Объединением (дизъюнктным) графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ (обозначение – $G_1(V_1, E_1) \cup G_2(V_2, E_2)$), при условии $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, называется граф $G(V, E)$, где $V = V_1 \cup V_2$ и $E = E_1 \cup E_2$.
    Пример: $K_{3,3} = C_3 \cup C_3$.

(c) Соединением графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ (обозначение – $G_1(V_1, E_1) + G_2(V_2, E_2)$), при условии $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, называется граф $G(V, E)$, где $V = V_1 \cup V_2$ и $E = E_1 \cup E_2 \cup \{e = (v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1 \& v_2 \in V_2\}$.
Пример: $K_{3,3} = C_3 + C_3$.

(d) Удаление вершины v из графа $G_1(V_1, E_1)$ (обозначение – $G_1(V_1, E_1) - v$ при условии $v \in V_1$) даёт граф $G_2(V_2, E_2)$, где $V_2 = V_1 - v$ и $E_2 = E_1 \setminus \{e = (v_1, v_2) \mid v_1 = v \vee v_2 = v\}$.
Пример: $C_3 - v = K_2$.

(e) Удаление ребра e из графа $G_1(V_1, E_1)$ (обозначение – $G_1(V_1, E_1) - e$ при условии $e \in E_1$) даёт граф $G_2(V_2, E_2)$, где $V_2 = V_1$ и $E_2 = E_1 - e$.
Пример: $K_2 = \overline{K_2}$.

(f) Добавление вершины v в граф $G_1(V_1, E_1)$ (обозначение – $G_1(V_1, E_1) + v$ при условии $v \notin V_1$) даёт граф $G_2(V_2, E_2)$, где $V_2 = V_1 + v$ и $E_2 = E_1$.
Пример: $K_2 + v = K_2 \cup K_1$.

(g) Добавление ребра e в граф $G_1(V_1, E_1)$ (обозначение – $G_1(V_1, E_1) + e$ при условии $e \notin E_1$) даёт граф $G_2(V_2, E_2)$, где $V_2 = V_1$ и $E_2 = E_1 + e$.
Пример: $C_3 + e = K_1 + e$.

(h) Вставление (правильного) подграфа A графа $G_1(V_1, E_1)$ (обозначение – $G_1(V_1, E_1)/A$ при условии $A \subset V_1, v \notin V_1$) даёт граф $G_2(V_2, E_2)$, где $V_2 = (V_1 \setminus A) + v$,
$E_2 = E_1 \setminus \{e = (u, w) \mid u \in A \wedge w \in A\} \cup \{e = (u, v) \mid e \in \Gamma(A) \setminus A\}$.
Пример: $K_4/C_3 = K_2$.

(i) Размножение вершин v графа $G_1(V_1, E_1)$ (обозначение – $G_1(V_1, E_1) \uparrow v$ при условии $v \in V_1, v' \notin V_1$) даёт граф $G_2(V_2, E_2)$, где
$V_2 = V_1 + v'$ и $E_2 = E_1 \cup \{(v', w)\} \cup \{e = (u, v') \mid e \in \Gamma^+(v)\}$.
Пример: $K_2 \uparrow v = C_3$.

Некоторые из примеров, приведённых в определениях операций, нетрудно обобщить. В частности, легко показать, что имеют место следующие соотношения:

$$K_{m,n} = \overline{K_m} + \overline{K_n}, \quad K_{p-1} = K_p - v, \quad G_1 + v = G \cup K_1, \quad K_{p-1} = K_p/K_2,$$

$$K_p/K_1 = K_2, \quad K_p = K_p \uparrow 1.$$

Введённые операции обладают рядом простых свойств, которые легко вывести из определений. В частности:

$$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1, \quad G_1 + G_2 = G_2 + G_1,$$
$$G_1 \cup G_2 \Leftrightarrow \overline{G_1} \cup \overline{G_2}, \quad G_1 + G_2 \Leftrightarrow \overline{G_1} + \overline{G_2}.$$

20. Изоморфизм графов:

- Графы изоморфны, если существует биекция между множествами их вершин, сохраняющая смежность. Говорят, что два графа, $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$, изоморфны (обозначается $G_1 \sim G_2$, или $G_1 = G_2$), если существует биекция $h : V_1 \to V_2$, сохраняющая смежность (см. 2.1.6):

$$e_1 = (u, v) \in E_1 \iff e_2 = (h(u), h(v)) \in E_2.$$

  Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности. Графы рассматриваются с точностью до изоморфизма, то есть рассматриваются классы эквивалентности по отношению изоморфизма Числовая характеристика, одинаковая для всех изоморфных графов, называется инвариантом графа. Так, p(G) и q(G) — инварианты графа G. Неизвестно никакого простого набора инвариантов, определяющих граф с точностью до изоморфизма.

21. Матрицы смежности и инцидентности:
    - Матрица смежности: квадратная матрица, где элемент$a_{ij} = 1$, если вершиныiиjсмежны.
    - Матрица инцидентности: матрица, где строки соответствуют вершинам, столбцы — ребрам, и элемент$a_{ij} = 1$, если вершинаiинцидентна ребруj.
22. Связность в графах: Связный граф — граф, содержащий ровно одну компоненту связности. Это означает, что между любой парой вершин этого графа существует как минимум один путь. Компонента связности графа G (или просто компонента графа G) — максимальный (по включению) связный подграф графа G
    - Граф связен, если существует путь между любыми двумя его вершинами. В ориентированных графах различают сильную и слабую связность.
23. Матрицы достижимости и контрдостижимости:
    - Матрица достижимости: матрица, где элемент$a_{ij} = 1$, если существует путь из вершиныiв вершинуj.
    - Матрица контрдостижимости: обратная матрица достижимости.
24. Выявление маршрутов с заданным количеством ребер:
    - Использование степеней матрицы смежности для нахождения количества маршрутов с точно заданным количеством ребер.
25. Расстояния в графах:
    - Расстояние между двумя вершинами — это длина кратчайшего пути между ними.

    7.2.5. Расстояние между вершинами, ярусы и диаметр графа Длиной маршрута называется количество рёбер в нём (с учётом повторений). Если маршрут M = v0, e1,v1,e2, v2, • • •, ek,vk, то длина M равна к (обозначается |M| = к). Расстоянием между вершинами u и v (обозначается d(u, v)) называется длина кратчайшей цепи (u,v), а сама кратчайшая цепь называется геодезической, d(u, v) = min(|(u,v)|) Если для любых двух вершин графа существует единственная геодезическая цепь, то граф называется геодезическим. З А М Е Ч А Н И Е Если -<3 ((u,v)), то по определению d(u,v) =f+oo. Множество вершин, находящихся на заданном расстоянии п от вершины v (обо- значение D(v,n)), называется ярусом: D(v, п) и € V | d(v, и) —п . Ясно, что множество вершин V всякого связного графа однозначно разбивает- ся на ярусы относительно дайной вершины. Диаметром графа G называется длиннейшая геодезическая. Длина диаметра обозначается D(G): D(G) max d(u,v). u,v(EV

26. Алгоритм Дейкстры:
    - Алгоритм для нахождения кратчайших путей от одной вершины до всех остальных в графе с неотрицательными весами ребер.
27. Эйлеровы графы. Алгоритм Флери:
    - Эйлеров граф содержит цикл, проходящий через все ребра. Алгоритм Флери используется для нахождения эйлерова пути или цикла.
    - Алгоритм был предложен Флёри в 1883 году. Пусть задан граф G = (V , E). Начинаем с некоторой вершины p $\in$ V и каждый раз вычеркиваем пройденное ребро. Не проходим по ребру, если удаление этого ребра приводит к разбиению графа на две связные компоненты (не считая изолированных вершин), т.е. необходимо проверять, является ли ребро мостом или нет.
28. Гамильтоновы графы:
    - Граф содержит гамильтонов цикл, проходящий через все вершины ровно один раз.
    - Необходимое условие существования гамильтонова цикла в неориентированном графе: если неориентированный граф G содержит гамильтонов цикл, тогда в нём не существует ни одной вершины x (i) с локальной степенью p (x (i)) < 2 . Доказательство следует из определения.

      Условие Поша: Пусть граф G имеет p > 2 вершин. Если для всякого n , 0 < n < (p - 1) / 2 , число вершин со степенями меньшими или равными n меньше, чем n, и для нечетного p число вершин со степенью (p - 1) / 2 не превосходит (p - 1) / 2 , то G — гамильтонов граф. Это достаточное условие не является необходимым[6].

      Как следствие теоремы Поша, получаем более простые и менее сильные достаточные условия, найденные Дираком и Оре.

      В 1952 году было сформулировано условие Дирака существования гамильтонова цикла: пусть p — число вершин в данном графе и p > 3 ; если степень каждой вершины не меньше, чем p/2 , то данный граф — гамильтонов[7].

      Условие Оре: пусть p — количество вершин в данном графе и p > 2 . Если для любой пары несмежных вершин (x , y) выполнено неравенство deg x + deg y >= p , то данный граф — гамильтонов (другими словами: сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше общего числа вершин в графе)[7].

Теорема Бонди[англ.] — Хватала обобщает утверждения Дирака и Оре. Граф является гамильтоновым тогда и только тогда, когда его замыкание — гамильтонов граф. Для графа G с n вершинами замыкание строится добавлением в G ребра (u,v) для каждой пары несмежных вершин u и v, сумма степеней которых не меньше n[8].

29. Обходы графа по ширине и глубине:
    - Обход в ширину (BFS): посещение вершин уровня за уровнем.
    - Обход в глубину (DFS): углубление до конца ветки, затем возврат.
30. Деревья. Основные определения и свойства:
    - Дерево — связный ациклический граф. Основные свойства: любое дерево сnвершинами имеет$n-1$ребро.
    - Граф без циклов называется ациклическим, или лесом. Связный ациклический граф называется (свободным) деревом. Таким образом, компонентами связности леса являются деревья.
31. Ориентированные, упорядоченные и бинарные деревья:
    - Ориентированное дерево: дерево, где каждое ребро имеет направление.
    - Упорядоченное дерево: дерево с фиксированным порядком детей у каждой вершины.
    - Бинарное дерево: дерево, в котором каждая вершина имеет не более двух детей.
    - св-ва Древочисленность - количество ребер равно кол-ву вершин минус 1

      1. G — дерево, то есть связный граф без циклов,
      2. Любые две вершины соединены в G единственной простой цепью
      3. G — связный граф, и любое ребро есть мост,
      4. G — связный и древочисленный,
      5. G — ациклический и древочисленный,
      6. G — ациклический и субциклический,
      7. G — связный, субциклический и неполный,
      8. G — древочисленный и субциклический (за двумя исключениями),
32. Алгоритм выделения остовного дерева:
    - Алгоритмы Крускала и Прима для нахождения минимального остовного дерева.
    - Алгоритм с пар: Шаг 1: Выбираем в Г произвольную вершину в1. В в1 образует подграф Г1 графа Г, который является деревом. Полагаем i = 1

      Шаг 2: Если i = p(кол-во вершин), то задача решена и Гi - искомое оставное дерево в противном случае переходим к шагу 3.

      Шаг 3: Пусть уже постр. дерево Гi являющееся подграфом графа Г и содержю в нем вершины: в1,в2,. . . , вi , где 1<=i<=p-1.

      Строим граф Гi+1, добавляя к графу Гi новую вершину vi+1 смежную с нек. вершиной vj графа Гi и новое ребро(vi+1,vj) Указанная вершина vi+1 обязательно найдется. Прсваеваем по опр. i=i+1 и переходим к шагу 2

33. Минимальные остовные деревья нагруженных графов:
    - Использование алгоритмов Крускала и Прима для нахождения минимального остовного дерева в графе с весами ребер.
    - Алгоритм с пар(Алгоритм Прима): Шаг 1: Выберем в графе Г ребро минимальной длины вместе с инцидентной ему вершиной оно образует подграф Г2 графа Г, полагая i=2
      Шаг 2: Если i=p, то задача решена, то Гi - минимальное оставное дерево, иначе переходим к шагу 3.
      Шаг 3: Строим Gi+1, добавляя к графу Гi новое ребро минимально среди всех ребер графа Г, каждое из которых инцидентны какой-нибудь вершине графа Гi, и одновременно какой-нибудь инцидентна какой-нибудь вершине графа Г не содерж. в Гію Вместе с этим ребром включена в Gi+1 и инцидентная ему вершину, не содержащуюся в Gi. Переходим к шагу 2.
34. Планарность графов:
    - Граф планарен, если его можно нарисовать на плоскости без пересечения ребер. Теорема Куратовского характеризует планарные графы.
    - Theorem 2 (Теорема Куратовского). Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подразделений полного графа с пятью вершинами (K5) и полного двудольного графа с тремя вершинами в каждой доле
    - Конечный связный планарный граф удовлетворяет формуле Эйлера:
      V - E + F = 2, где V - количество вершин, E - количество рёбер, F - количество граней (областей, ограниченных рёбрами).
35. Раскраски графов:
    Раскраской графа G называется такое приписывание цветов (натуральных чи- сел) его вершинам, что никакие две смежные вершины пе получают одинаковый цвет. Если задана допустимая раскраска графа, использующая т цветов, то го- ворят, что граф m-раскрашиваемый. Наименьшее возможное количество цветов в раскраске называется хроматическим числом и обозначается x(G).
    - Процесс раскраски вершин графа в минимальное количество цветов так, чтобы смежные вершины были окрашены в разные цвета.
36. Теорема о пяти красках, гипотеза четырех красок:
    - Теорема о пяти красках утверждает, что любой планарный граф можно раскрасить не более чем в пять цветов.
    - Гипотеза четырех красок утверждает, что достаточно четырех цветов для раскраски любого планарного графа.

Эти ответы охватывают основные концепции и примеры для каждого вопроса.