Основные комбинаторные тождества

1. Тождество, выражающее биномиальные коэффициенты (б. к.) через факториалы

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad (1.1)$$

Доказательство

По формуле б.к. имеем

$$C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Домножим числитель и знаменатель на произведение $(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\cdot\ldots\cdot 1 = (n-k)!$, чтобы в числителе получить $n!$. Получим

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\left[(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1\right]}{k!\,\left[(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1\right]} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$ Ч. т. д.

2. Тождество, выражающее основной принцип построения треугольника Паскаля или формула сложения

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k \qquad (1.2)$$

Доказательство.

Для доказательства воспользуемся формулой (1.1).

Рассмотрим левую часть тождества (1.2)

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} \overset{(1.1)}{=} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,((n-1)-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}^{(n-k)} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}^{k} =$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot(n-k) + (n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,(n-k+k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \overset{(1.1)}{=} C_n^k$$

Ч.т.д.

3. Тождество, допускающее внесение (вынесение) под (из-под) знака б.к.

$$C_n^k = \frac{n}{k}\, C_{n-1}^{k-1} \qquad (1.3)$$

Доказательство.

Рассмотрим правую часть тождества (1.3)

$$\frac{n}{k}\cdot C_{n-1}^{k-1} \overset{(1.1)}{=} \frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{k\cdot(k-1)!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \overset{(1.1)}{=} C_n^k. \qquad \text{Ч.т.д}$$

4. Формула Коши

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i \cdot C_m^{k-i} \qquad (1.4)$$

Доказательство.

Т.к. C_{n+m}^k — это число способов выбора из имеющихся $(n+m)$ объектов некоторых k объектов, что такие выборки осуществим в два приема:

- сначала из n объектов выберем некоторые i объектов, а затем
- из оставшихся m объектов, выберем недостающие до k $(k-i)$ объектов

Используя комбинаторное правило произведения получим

$$C_{n+m}^{k} = \sum_{i=0}^{k} C_n^i \cdot C_m^{k-i} \quad \text{ч.т.д.}$$

5. Тождество, выражающее свойство симметрии треугольника Паскаля

$$C_n^k = C_n^{n-k} \qquad (1.5)$$

Доказательство

Рассмотрим правую часть тождества (1.5) и воспользуемся формулой (1.1)

$$C_n^{n-k} \overset{(1.1)}{=} \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \overset{(1.1)}{=} C_n^k. \quad \text{ч.т.д.}$$

---

6. $P_n = n!$

7. $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$