Лабораторная работа №2-4
Реализация алгоритмов на графах, представленных с помощью матриц

Цель работы

Изучить основные алгоритмы теории графов

Методические указания.

При выполнении индивидуального задания придерживаться следующей последовательности действий:

1. изучить словесную постановку задачи;
2. выбрать переборный алгоритм;
3. разработать программу, решающую поставленную задачу;
4. оттестировать и отладить программу;
5. написать и представить к защите отчет по работе.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Словесная постановка задачи.
3. Алгоритм решения задачи в текстуальном виде.
4. Обоснование правильности выбора алгоритма.
5. Листинг программы.

Варианты индивидуальных заданий

Во всех задачах под термином "**граф**" понимается: (а) "неориентированный граф"; (б) "ориентированный граф".

1. Граф задан матрицей смежности (матрицей достижимости). Определите, существует ли в графе путь между двумя заданными вершинами?

2. Граф задан матрицей смежности (матрицей достижимости). Определите, минимальную длину пути между двумя заданными вершинами?

3. Граф задан матрицей смежности (матрицей достижимости). Определите, количество путей в графе путей от вершины А до вершины В длины не более m?

4. Граф задан матрицей смежности (матрицей достижимости). Определите, является ли граф связным?

Указание. В связанном графе для любых двух вершин существует цепь из одной вершины в другую.

5. Граф задан матрицей смежности (матрицей достижимости). Определите, является ли заданный граф деревом.

Указание. Граф должен быть связным, а количество его ребер на единицу больше количества вершин.

6. Граф задан матрицей смежности (матрицей достижимости). Определите будет ли заданный граф связным, если удалить ребро, соединяющее две заданные вершины?

7. Граф задан матрицей смежности (матрицей достижимости). Определите количество путей длины 3 из i-ой вершины в j-ю вершину данного графа.

8. Граф задан матрицей смежности (матрицей достижимости). Найдите все вершины, в которые существует путь длины не более 3 из заданной вершины.

9. Граф задан матрицей смежности (матрицей достижимости). Найдите все вершины, в которые существует путь из заданной вершины.

10. Граф задан матрицей смежности. Найдите все вершины, из которых существует путь в заданную вершину.

11. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] Граф задан матрицей смежности (матрицей достижимости). Найдите все вершины заданного графа, недостижимые от его заданной вершины.

12. [Лэнгсам, Огенстейн, Тененбаум, 1989, с.389] Напишите программу, которая по заданной матрице смежностей и двум вершинам графа вычисляет: (а) количество путей заданной длины между данными двумя вершинами; (б) общее количество путей между заданными двумя вершинами; (в) длину кратчайшего пути между заданными двумя вершинами.

13. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] Определите, верно ли, что для любой пары вершин заданного ориентированного графа одна из этих вершин достижима от другой.

14. Найдите все вершины ориентированного графа, к которым существует путь заданной длины от выделенной его вершины.

15. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] Найдите все вершины ориентированного графа, от которых существует путь заданной длины к выделенной вершине.

16. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] **Источником** ориентированного графа назовем вершину, из которой достижимы все другие вершины; **стоком** - вершину, достижимую из всех других вершин. Найдите все источники и стоки данного ориентированного графа с помощью представления графа в виде матрицы смежностей.

17. **Источником** ориентированного графа назовем вершину, из которой достижимы все другие вершины, а **стоком** - вершину, достижимую из всех других вершин. Найдите все источники и стоки данного ориентированного графа с помощью представления графа в виде матрицы достижимости.

18. **Расстояние** $d(v_i,v_j)$ **между вершинами** v_i и v_j графа G равно наименьшему из целых чисел n, для которых (i,j)-й элемент $a_{ij}^{(n)}$ матрицы A^n (A - матрица смежностей графа G) отличен от нуля, т.е. $d(v_i,v_j)=\min \{n: a_{ij}^{(n)}-0\}$. Если граф связный, то "v_i,v_j приведенный выше минимум достигается при конечных n. Найдите расстояние между заданными двумя вершинами графа.

19. **Расстоянием между вершинами v и w** называется длина кратчайшей цепи из v в w. **Центром графа G** называется такая вершина v, что максимальное расстояние между v и любой другой вершиной является наименьшим из всех возможных. Это расстояние называется **радиусом графа**. Найдите центр и радиус заданного графа.

20. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] Найдите, используя матрицу смежностей, **медиану графа**, т.е. такую его вершину, что сумма расстояний от нее до остальных вершин минимальна.

21. **Диаметром** d связного графа называется максимальное возможное расстояние между любыми двумя его вершинами. Найдите диаметр данного графа, используя матрицу смежностей.

22. Обозначим $R(v_i)$ - множество вершин, достижимых из вершины v_i, а $Q(v_j)$ - множество вершин, из которых можно достигнуть v_j, тогда $R(v_i) \cap Q(v_j)$ - это множество таких вершин, каждая из которых принадлежит по крайней мере одному пути, идущему от v_i к v_j. Эти вершины называются **существенными (неотъемлемыми)** относительно вершин v_i и v_j, а все остальные вершины называются **несущественными (избыточными)**. Для данных двух вершин графа найдите существенные вершины.

23. **Деревом** называется связный граф без циклов. В дереве, все вершины которого имеют степень не больше 3, найдите самый длинный путь от выделенной вершины до вершины со степенью 1, используя матрицу смежностей дерева.

24*. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] Найдите минимальное подмножество вершин заданного ориентированного графа, от каждой вершины которого достижимы все остальные его вершины.

25*. Реализуйте следующий алгоритм отыскания контуров фиксированной длины [Евстигнеев,1985,с.113]. Алгоритм использует матрицу смежности A и матрицы A^{k-1} и Ak, если длина отыскиваемых контуров равна k. Выберем некоторое i, такое, что $a_{ii}^{(k)}=1$. Это означает, что вершина v_i принадлежит контуру длины k. Тогда вершина v_j принадлежит тому же контуру, если выполняются следующие три условия:

(a) $a_{jj}^{(k)}=1$;

(b) $a_{ij}=1$, т.е. существует путь длины 1 из v_i в v_j;

(c) $a_{ji}^{(k-1)}=1$, т.е. существует путь длины k-1 из v_j в v_i. Алгоритм основан на последовательной проверке условий до выявления всех вершин контура.

26*. [Евстигнеев,1985,с.105-106] Реализуйте описанный ниже алгоритм отыскания контуров с использованием матрицы достижимости.

Пусть заданы матрица смежности $A=(a_{ij})$ и матрица достижимости $R=(r_{ij})$ ориентированного графа G. Алгоритм начинается с того, что "рисуется" вершина и ей присваивается метка "1". Затем для каждого i, такого, что $a_{1i}\bullet$ □$r_{i1}=1$, $i \in[1:n]$, "рисуется" дуга и концевые вершины полученных дуг помечаются метками "i". Далее берем некоторую висячую вершину полученного корневого ориентированного дерева с меткой "k" ($k\neq1$), "рисуем" дугу из этой вершины для каждого j, такого, что $a_{kj}\bullet r_{j1}=1$,

$j \in [1:n]$, и присваиваем метку "j" концевой вершине такой дуги. Заметим, однако, что дугу нельзя построить, если $j \neq 1$ и при этом j уже выступала в роли некоторой вершины на пути от корня дерева к вершине, помеченной меткой "k". Продолжаем этот процесс до тех пор, пока все концевые вершины не будут иметь метку "1". Итак, получены все пути от корня дерева до концевой вершины для каждого простого контура, проходящего в ориентированном графе G через вершину v_1. Эти контуры определяются метками при вершинах в указанных путях.

Теперь образуем подматрицы A_2 и R_2, удаляя из A и R первую строку и первый столбец. Аналогичная процедура, примененная к A_2 и R_2, найдет контуры, проходящие через вершину v_2, но не проходящие через вершину v_1. На третьем шаге исключим из A и R по две первых строки и по два первых столбца. Работая с полученными подматрицами A_3 и R_3, найдем контуры, проходящие через вершину v_3, и т.д.

Алгоритм применим в случаях, когда матрица достижимости известна или когда граф задается с помощью **K-формул** [Берзтисс,1974].