Самостоятельная работа по геометрии и топологии

Вариант 1

1 задача Составьте уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны вектору $\vec{a}(1{,}2{,}0)$, а направляющая задана системой:

$$\alpha\colon \begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Алгоритм 1) Пусть $M(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$. Если она принадлежит α, то ее ур-ние удолетворяет системе

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{4} + \frac{z_0^2}{9} = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad => M(0, y_0, z_0)$$

2) Так как это цилиндр, то образующая l || $\vec{a}$, $M \in l$.

Напишем уравнение образующей.

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-y_0}{2} = \frac{z-z_0}{0}$$

$$\begin{cases} x = \frac{y-y_0}{2} \\ x = \frac{z-z_0}{0} \end{cases} \quad => \begin{cases} y_0 = y - 2x \\ z_0 = z \end{cases}$$

3) Подставим уравнение данной прямой в уравнение направляющей, получим ответ.

$$\frac{(y-2x)^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Ответ: $\frac{(y-2x)^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

№2. Напишите уравнения прямолинейных образующих однополосного гиперболоида: $100x^2 - 36y^2 + 225z^2 = 900$, проходящих через точку $A(3; 2; 0{,}8)$.

Решение:

1) Пусть $\vec{l}(a{,}b{,}c)$ - направляющий вектор, прямолинейной образующей l, где

$A \in l$

$$l: \begin{cases} x = at + 3 \\ y = bt + 2 \\ z = ct + 0.8 \end{cases}$$, Подставляем в уравнение из условия

$$100(at+3)^2 - 36(bt+2)^2 + 225(ct+0.8) - 900 = 0$$

Так как ур-ние должно выполнятся $\forall t$, то тогда должно выполнятся:

$$\begin{matrix} t^2| & 100a^2 - 36b^2 + 225c^2 = 0 \\ t^1| & 600at - 144b + 360c = 0 \\ t^0| & 900 - 144 + 144 - 900 = 0 \end{matrix} => \begin{cases} 100a^2 - 36b^2 + 225c^2 = 0 \\ 600at - 144b + 360c = 0 \end{cases}$$

Для направ. вектора $\vec{l}(a,b,c)$ возьмем 2 варианта $\vec{l}(0,b,c)$, $\vec{l}(1,b,c)$

$\vec{l}(0,b,c)$:

$$\begin{cases} -36b^2 + 225c^2 = 0 \\ -144b + 360c = 0 \end{cases} => b = \frac{360}{144}c = \frac{5}{2}c$$

$$-36 * \frac{25}{4}c^2 + 225c^2 = 0 => 0 * c^2 = 0 => c \in \mathbb{R}$$

При c = 0, b = 0, получается нулевой вектор, поэтому данный вектором будет

$\vec{l1}(0, \frac{5}{2}c, c) c \in \mathbb{R}/0$

$\vec{l}(1,b,c)$:

$$\begin{cases} 100 - 36b^2 + 225c^2 = 0 \\ 600 - 144b + 360c = 0 \end{cases} => b = \frac{29}{12}, c = -\frac{7}{10}$$ (Подсчитано на калькуляторе)

$\vec{l2}(1, \frac{29}{12}, -\frac{7}{10})$

2) Подставляем значения напр. векторов в l:

$$l1: \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2}ct + 2 \\ z = ct + 0.8 \end{cases}$$, где $c \in \mathbb{R}/0$, $$l2: \begin{cases} x = t + 3 \\ y = \frac{29}{12}t + 2 \\ z = \frac{-7}{10}t + 0.8 \end{cases}$$

Что и является ответом.

№3. Напишите уравнения прямолинейных образующих гиперболического параболоида:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 10x,$$

параллельных вектору $\vec{a}(2; 10; -15)$.

№4*. №9.905 (1).

905. Даны две точки F_1, F_2, расстояние между которыми равно $2c > 0$ и число $a > 0$. Найти фигуры:

$$1. \quad \Phi_1 = \{M | \rho(M, F_1) + \rho(M, F_2) = 2a, \quad a > c\};$$

$$2. \quad \Phi_2 = \{M | \rho(M, F_1) - \rho(M, F_2) = 2a, \quad a < c\}.$$

1 задача