Вопрос №1

Аксиоматическое определение множества действительных чисел. Свойство полноты.

Аксиоматическое определение множества действительных чисел.

Множество R называется множеством действитель-ных (вещественных) чисел , а его элементы — действительными (веществен-ными) числами , если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:

Аксиомы сложения. Определено отображение (операция сложе-ния)

$$+: R \times R \to R$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из R некоторый элемент $x + y \in R$, называемый суммой x и y. При этом выполнены следующие условия:

1+. Существует нейтральный элемент 0 (называемый в случае сложения нулем) такой, что для любого $x \in R$

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

2+. Для любого элемента $x \in R$ имеется элемент $-x \in R$, называемый противоположным к x, такой, что

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3+. Операция + ассоциативна, т. е. для любых элементов x, y, z из R выполнено

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

4+. Операция + коммутативна, т. е. для любых элементов x, y из R выполнено

$$x + y = y + x.$$

Аксиомы умножения. Определено отображение (операция умножения)

$$\cdot : R \times R \to R,$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из R некоторый элемент $x \cdot y \in R$, называемый произведением x и y, причем так, что выполнены следующие условия:

1. Существует нейтральный элемент $1 \in R \setminus 0$ (называемый в случае умножения единицей) такой, что $\forall x \in R$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

2. Для любого элемента $x \in R \setminus 0$ имеется элемент $x^{-1} \in R$, называемый обратным, такой, что

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

3. Операция · ассоциативна, т. е. для любых x, y, z из R

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

4. Операция · коммутативна, т. е. для любых x, y из R

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Заметим, что по отношению к операции умножения множество $R \setminus 0$, как можно проверить, является (мультипликативной) группой.

Связь сложения и умножения. Умножение дистрибутивно по отношению к сложению, т. е. $\forall x, y, z \in R$

$$(x + y)z = xz + yz.$$

Отметим, что ввиду коммутативности умножения последнее равенство сохранится, если в обеих его частях поменять порядок множителей.

Если на каком-то множестве G действуют две операции, удовлетворяющие всем перечисленным аксиомам, то G называется алгебраическим полем или просто полем.

Аксиомы порядка. Между элементами R имеется отношение ≤, т. е. для элементов x, y из R установлено, выполняется ли $x \le y$ или нет. При этом должны удовлетворяться следующие условия:

$$0.\ \forall x \in R\ (x \le x).$$

$$1.\ (x \le y) \wedge (y \le x) \Rightarrow (x = y).$$

$$2.\ (x \le y) \wedge (y \le z) \Rightarrow (x \le z).$$

$$3.\ \forall x \in R\ \forall y \in R\ (x \le y) \vee (y \le x).$$

Отношение ≤ в R называется отношением неравенства.

Множество, между некоторыми элементами которого имеется отношение, удовлетворяющее аксиомам 0≤, 1≤, 2≤, как известно, называют частично упорядоченным, а если, сверх того, выполнена аксиома 3≤, т. е. любые два элемента множества сравнимы, то множество называется линейно упорядоченным.

Таким образом, множество действительных чисел линейно упорядочено отношением неравенства между его элементами.

Свойство полноты.

Если X и Y — непустые подмножества R, обладающие тем свойством, что для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \le y$, то существует такое $c \in R$, что $x \le c \le y$ для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$.

Вопрос №2. Следствия из аксиом множества действительных чисел.

a. Следствия аксиом сложения

1

◦ В множестве действительных чисел имеется только один нуль.

Если 0_1 и 0_2 — нули в R, то по определению нуля

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$$

◦ В множестве действительных чисел у каждого элемента имеется единственный противоположный элемент.

Если x_1 и x_2 — элементы, противоположные $x \in R$, то

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2$$

Здесь мы использовали последовательно определение нуля, определение противоположного элемента, ассоциативность сложения, снова определение противоположного элемента и, наконец, снова определение нуля.

◦ Уравнение

$$a + x = b$$

в R имеет и притом единственное решение

$$x = b + (-a).$$

Это вытекает из существования и единственности у каждого элемента $a \in R$ противоположного ему элемента:

$$(a + x = b) \Leftrightarrow ((x + a) + (-a) = b + (-a)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + (a + (-a)) = b + (-a)) \Leftrightarrow (x + 0 = b + (-a)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = b + (-a)).$$

Выражение $b + (-a)$ записывают также в виде $b - a$. Этой более короткой и привычной записи мы, как правило, и будем придерживаться.

b. Следствия аксиом умножения

◦ В множестве действительных чисел имеется только одна единица.

◦ Для каждого числа $x \ne 0$ имеется только один обратный элемент x^{-1}

3◦ Уравнение $a \cdot x = b$ при $a \in R \setminus 0$ имеет и притом единственное решение

$x = b \cdot a^{-1}$

Доказательства этих утверждений, разумеется, повторяют доказательства соответствующих утверждений для сложения (с точностью до замены символа и названия операции), поэтому мы их опустим.

c. Следствия аксиомы связи сложения и умножения. Привлекая дополнительно аксиому (I, II), связывающую сложение и умножение, получаем дальнейшие следствия.

1◦ Для любого $x \in R$

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$$

$$(x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0) \Rightarrow (x \cdot 0 = x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = 0).$$

Отсюда, между прочим, видно, что если $x \in R \setminus 0$, то $x^{-1} \in R \setminus 0$.

2◦

$$(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0).$$

Если, например, $y \ne 0$, то из единственности решения уравнения $x \cdot y = 0$ относительно x находим $x = 0 \cdot y^{-1} = 0$.

3◦ Для любого $x \in R$

$$-x = (-1) \cdot x.$$

$$x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0,$$

и утверждение следует из единственности противоположного элемента. É

4◦ Для любого числа $x \in R$

$$(-1)(-x) = x.$$

Следует из 3◦ и единственности элемента x, противоположного −x.

5◦ Для любого числа $x \in R$

$$(-x)(-x) = x \cdot x.$$

$$(-x)(-x) = ((-1) \cdot x)(-x) = (x \cdot (-1))(-x) = x((-1)(-x)) = x \cdot x.$$

Мы последовательно воспользовались двумя предыдущими утверждениями, а также коммутативностью и ассоциативностью умножения.

d. Следствия аксиом порядка. Отметим сначала, что отношение $x \le y$ (читается «x меньше или равно y») записывают также в виде $y \ge x$ (« y больше или равно x»); отношение $x \le y$ при $x \ne y$ записывают в виде $x < y$ (читается «x меньше y») или в виде $y > x$ (« y больше x») и называют строгим неравенством.

1◦ Для любых $x, y \in R$ всегда имеет место в точности одно из соотношений:

$$x < y,\ x = y,\ x > y.$$

Это следует из приведенного определения строгого неравенства и аксиом $1_{\le}$ и $3_{\le}$.

2◦ Для любых чисел x, y, z из R

$$(x < y) \wedge (y \le z) \Rightarrow (x < z),$$

$$(x \le y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z).$$

Приведем для примера доказательство последнего утверждения.

По аксиоме 2≤ транзитивности отношения неравенства имеем

$(x \le y) \wedge (y < z) \Leftrightarrow (x \le y) \wedge (y \le z) \wedge (y \ne z) \Rightarrow (x \le z).$

Осталось проверить, что $x \ne z$. Но в противном случае

$(x \le y) \wedge (y < z) \Leftrightarrow (z \le y) \wedge (y < z) \Leftrightarrow (z \le y) \wedge (y \le z) \wedge (y \ne z).$

В силу аксиомы 1≤ отсюда следует

$(y = z) \wedge (y \ne z)$

— противоречие.

e. Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением. Если в дополнение к аксиомам сложения, умножения и порядка использовать аксиомы (I, III), (II, III), связывающие порядок с арифметическими операциями, то можно получить, например, следующие утверждения:

1◦ Для любых чисел x, y, z, w из R

$$(x < y) \Rightarrow (x + z) < (y + z),$$

$$(0 < x) \Rightarrow (-x < 0),$$

$$(x \le y) \wedge (z \le w) \Rightarrow (x + z \le y + w),$$

$$(x \le y) \wedge (z < w) \Rightarrow (x + z < y + w).$$

Ê Проверим первое из этих утверждений.

По определению строгого неравенства и аксиоме (I, III) имеем

$$(x < y) \Rightarrow (x \le y) \Rightarrow (x + z) \le (y + z).$$

Остается проверить, что $x + z \ne y + z$. В самом деле,

$$((x + z) = (y + z)) \Rightarrow (x = (y + z) - z = y + (z - z) = y),$$

что несовместимо с условием $x < y$. É

2◦ Если x, y, z — числа из R, то

$$(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < xy),$$

$$(x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow (0 < xy),$$

$$(x < 0) \wedge (0 < y) \Rightarrow (xy < 0),$$

$$(x < y) \wedge (0 < z) \Rightarrow (xz < yz),$$

$$(x < y) \wedge (z < 0) \Rightarrow (yz < xz).$$

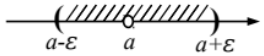
Вопрос №3. Определение окрестности. Типы окрестностей. Теоремы о состоянии вложенных отрезков и последовательности стягивающихся отрезков.

Определение окрестности. Интервал, содержащий точку $x \in R$, будем называть окрестностью этой точки. В частности, при $\delta > 0$ интервал $]x - \delta, x + \delta[$ называется δ-окрестностью точки x. Его длина 2δ.

Типы окрестностей.

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a, т.е.

$$\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus a.$$



Помимо двусторонней окрестности U(a, ε) для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность

$$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon),$$

$$\overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$$

2) левосторонняя окрестность

$$U_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a],$$

$$\overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a)$$

3) Открытая окрестность точки a.

$$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Теорема о состоянии вложенных отрезков.

Лемма о вложенных отрезках (принцип Коши—Кантора)

Определение 1. Функцию $f : N \to X$ натурального аргумента называют последовательностью или, полнее, последовательностью элементов множества X. Значение f (n) функции f , соответствующее числу $n \in N$, часто обозначают через xn и называют n-м членом последовательности.

Определение 2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность каких-то множеств. Если $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$, т. е. $\forall n \in N\ (X_n \supset X_{n+1})$, то говорят, что имеется последовательность вложенных множеств.

Лемма (Коши—Кантор). Для любой последовательности $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ вложенных отрезков найдется точка $c \in R$, принадлежащая всем этим отрезкам.

Если, кроме того, известно, что для любого $\varepsilon > 0$ в последовательности можно найти отрезок I_k, длина которого $|I_k| < \varepsilon$, то c — единственная общая точка всех отрезков.

Вопрос №4. Определение предела последовательности. Единственность предела сходящейся последовательности

Определение 1. Функция $f : N \to X$, областью определения которой является множество натуральных чисел, называется последовательностью.

Определение 2. Число $A \in R$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности V(A) точки A существует такой номер N (выбираемый в зависимости от V(A)), что все члены последовательности, номера которых больше N, содержатся в указанной окрестности точки A.

Определение 3. . Если $\lim_{n \to \infty}(x_n) = A$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к A или стремится к A и пишут $x_n \to A$ при $n \to \infty$.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. Последовательность, не имеющая предела, называется расходящейся.

Единственность предела.

Теорема. Последовательность не может иметь более одного предела.

Док-во. Следует из того, что последовательность может одновременно приближаться к двум разным числам одновременно.

Выберем ε значительно меньше разницы между числами A и B. Тогда очевидно, что мы не сможем указать такого номера N, начиная с которого одновременно будут выполнены два условия:

$$|a_n - A| < \varepsilon \text{ и } |a_n - B| < \varepsilon.$$

Вопрос №5. Критерии существования предела числовой последовательности. Доказательство критерия о существовании предела ограниченной и монотонной последовательности.

Определение 1. Последовательность {xn} называется возрастающей,
если $\forall n \in N$ ($x_n < x_{n+1}$); неубывающей, если $\forall n \in N$ ($x_n \le x_{n+1}$); невозрастающей, если $\forall n \in N$ ($x_n \ge x_{n+1}$); убывающей, если $\forall n \in N$ ($x_n > x_{n+1}$).
Последовательности этих четырех типов называют монотонными последовательностями.
Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если существует число M такое, что $\forall n \in N$ ($x_n < M$).
Аналогично определяется последовательность, ограниченная снизу.
Теорема 5 (Вейерштрасс). Для того чтобы неубывающая последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной сверху.
То, что любая сходящаяся последовательность ограничена, было доказано при рассмотрении общих свойств предела последовательности, поэтому интерес представляет только второе утверждение теоремы.
По условию множество значений последовательности $\{x_n\}$ ограничено
сверху, значит, оно имеет верхнюю грань $s = \sup x_n$
По определению верхней грани, для любого ε >0 найдется элемент $x_N \in \{x_n\}$ такой, что $s - \varepsilon < x_N \le s$.
Поскольку последовательность $\{x_n\}$ неубывающая, при любом n > N теперь получаем $s - \varepsilon < x_N \le x_n \le s$, т. е. $|s - x_n| = s - x_n < \varepsilon$. Таким образом, доказано, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = s$$

Разумеется, аналогичную теорему можно сформулировать и доказать для невозрастающей последовательности, ограниченной снизу. В этом случае

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf x_n.$$

Замечание. Ограниченность сверху (снизу) неубывающей (невозрастающей) последовательности на самом деле, очевидно, равносильна ограниченности этой последовательности.

Вопрос №6. Критерии существования предела числовой последовательности. Доказательство критерия Коши.

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для любого числа ε > 0 найдется такой номер N ∈ N, что из n > N и m > N следует $|x_m - x_n| < \varepsilon$.
Теорема 1 (критерий Коши сходимости последовательности). Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.
Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = A$
По числу ε > 0 найдем номер N так, чтобы при n > N иметь $|x_n - A| < \varepsilon / 2$. Если теперь m > N и n > N, то $|x_m - x_n| < |x_m - A| ++ |xn - A| < \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon$
и, таким образом, проверено, что сходящаяся последовательность фундаментальна.
Пусть теперь $\{x_k\}$ — фундаментальная последовательность. По заданному
ε > 0 найдем номер N такой, что из m ≥ N и k ≥ N следует $|x_m - x_k| < \varepsilon / 3$.
Фиксировав m = N, получаем, что при любом k > N

$$x_N - \varepsilon / 3 < x_k < x_N + \varepsilon / 3$$

но поскольку имеется всего конечное число членов последовательности $\{x_n\}$ с номерами, не превосходящими N, то мы доказали, что фундаментальная последовательность ограничена.

Вопрос №7. Определение предела функции по Коши и по Гейне. Их эквивалентность.

По Коши. Будем (следуя Коши) говорить, что функция f : E → R стремится к A при x, стремящемся к a, или что A является пределом функции f при x, стремящемся к a, если для любого числа ε > 0 существует число δ > 0 такое, что для любой точки x ∈ E такой, что 0 < |x − a| < δ, выполнено соотношение | f (x)− A|< ε.
В логической символике сформулированные условия запишутся в виде

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

По Гейне. Пусть функция f(x) определена на множестве *X* и – x_0 предельная точка этого множества. Число *A* называется ***пределом*** функции f(x) в точке x_0 (или при $x \to x_0$, если для любой последовательности значений аргумента $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, сходящейся к x_0 и состоящей из чисел, отличных от x_0, соответствующая последовательность значений функции f(1), f(2), …, f(n), …, сходится к числу *A*. Пишут:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Доказательство. Пусть *b* является пределом функции y = f(x) в точке *a* по Коши. Докажем, что это же число является пределом функции y = f(x) в точке *a* по Гейне. Пусть $\{x_n\}$ – любая сходящаяся к *a* последовательность значений аргумента, все элементы которой отличны от *a.* Требуется доказать, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к *b*.
Фиксируем произвольное положительное число *ε* и по нему положительное число *δ*, которое в силу определения предела функции по Коши гарантирует справедливость неравенства |f(x) – b < ε для всех значений *x*, для которых 0<|*x*–*a*|<*δ*. В силу сходимости последовательности $\{x_n\}$ к *a* для указанного числа *δ* найдётся такой номер *N*, что при всех *n* ≥ *N* справедливо неравенство $|x_n - a| < \delta$. Поскольку $x_n \ne a$ для всех номеров *n*, то при всех n ≥ N справедливы неравенства $0 < |x_n - a| < \delta$ и, значит, в силу определения предела функции по Коши $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, но это и означает сходимость последовательности $\{f(x_n)\}$ к числу *b*.

Вопрос №8. Критерии существования пределов функции.

Прежде чем формулировать критерий Коши, дадим следующее полезное
Определение 1. Колебанием функции f : X → R на множестве E ⊂ X
называется величина

$$\omega(f; E) := \sup(x_1, x_2 \in E) |f(x_1) - f(x_2)|,$$

т. е. верхняя грань модуля разности значений функции на всевозможных парах точек $x_1, x_2 \in E$
Теорема 1 (критерий Коши существования предела функции). Пусть
X — множество и B — база в X.
Функция f : X →R имеет предел по базе B в том и только в том случае,
когда для любого числа ε > 0 найдется элемент B ∈ B базы, на котором колебание функции меньше ".
Итак,

$$\exists \lim_B f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in B\ (\omega(f; B) < \varepsilon)$$

Необходимость. Если $\lim_B f(x) = A$
то для любого ε > 0 найдется элемент B базы B, в любой точке x которого | f (x) − A| < ε /3. Но тогда для любых x_1, x_2 из B $|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < 2/3\ \varepsilon$
и, значит, ω(f ; B)< ε.
Достаточность. Докажем теперь основную часть критерия, утверждающую, что если для любого ε > 0 найдется элемент B базы B, на котором
ω(f ; B)< ε, то функция f имеет предел по базе B.
Придавая " последовательно значения 1, 1/2, …, 1/n, …, получим последовательность $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ элементов базы таких, что $\omega(f; B_n) < 1/n$,
n ∈ N. Поскольку Bn ≠ ∅, в каждом Bn можно взять по точке x_n. Последовательность $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ фундаментальная. Действительно, Bn ∩ Bm ≠ ∅, и, взяв вспомогательную точку x ∈ Bn ∩ Bm, получим,что

$$|f(x_n) - f(x_m)| < |f(x_n) - f(x)| + |f(x) - f(x_m)| < 1/n + 1/m.$$

Вопрос №9. Свойства функций, имеющих предел.

Свойство 1. Если функция f(x) имеет предел в точке a, то существует такая проколотая окрестность точки a, в которой эта функция ограничена.
Пусть lim(x→a) f(x)=A. В силу определения предела по заданному числу ε=1можно найти число δ>0 такое, что для всех x∈U˙δ(a) выполняется неравенство |f(x)−A|<1 или A−1<f(x)<A+1. Это означает, что функция f ограничена на множестве U˙δ(a).
Свойство 2. Свойство сохранения знака предела.
Если lim(x→a) f(x)=A, причем A≠0, то найдется такая проколотая окрестность точки a, в которой значения функции f имеют тот же знак, что и число A.
Согласно определению предела по заданному числу ε=|A|/2>0 можно найти такое число δ>0, что для всех x∈U˙δ(a) выполняется неравенство |f(x)−A|<|A|/2, или

A−|A|/2<f(x)<A+|A|/2.(11)

Если A>0, то из левого неравенства (11) следует, что f(x)>A2>0 для x∈U˙δ(a).
Если A<0, то из правого неравенства (11) следует, что f(x)<A2 <; 0 для x∈U˙δ(a).
Свойство 3. Если lim(x→a)g(x)=B, причем B≠0, то существует число δ>0 такое, что функция 1/g(x) ограничена на множестве U˙δ(a).
Доказательство
В силу определения предела по заданному числу ε=|B|/2 можно найти число δ>0, такое, что для всех x∈U˙δ(a) выполняется неравенство

|g(x)−B|<|B|/2.(12)

Из неравенства (12) и известного неравенства |B|−|g(x)|≤|g(x)−B| следует, что |B|−|g(x)|<|B|/2, откуда |g(x)|>|B|/2,и поэтому 1\|g(x)|<2\|B| для x∈U˙δ(a), то есть функция 1\g(x) ограничена на множестве U˙δ(a).
Свойство 4. Если существует число δ>0 такое, что для всех U˙δ(a) выполняются неравенства

g(x)≤f(x)≤h(x),(13)

и если lim(x→a) g(x)=lim(x→a) h(x)=A,(14)
то существует lim(x→a) f(x)=A.
Доказательство
Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность такая, что x_n∈U˙δ(a) для n∈N и lim(n→∞) f(x)=a. Тогда в силу условия (14) lim(n→∞)g(x_n)=lim(n→∞)h(x_n)=A.
Так как, согласно условию (13), для всех n∈N выполняется неравенство

g(x_n)≤f(x_n)≤h(x_n),

то в силу свойств пределов последовательностей lim(n→∞) f(x_n)=A. Следовательно, lim(n→a) f(x)=A.

Свойство 5. Если существует число δ>0 такое, что для всех x∈U˙δ(a) справедливо неравенство f(x)≤g(x), и если lim(x→a) f(x)=A, lim(x→a) g(x)=B, то A≤B.

Доказательство
Для доказательства этого свойства достаточно воспользоваться определением предела функции по Гейне и соответствующими свойствами пределов последовательностей.

Вопрос №10. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Эквивалентные бесконечно малые величины. Примеры выполнения пределов с эквивалентными бесконечно малыми величинами.

Функцию f : E → R принято называть бесконечно малой величиной при E ∈ x → a, если $\lim_{E\ni x\to a} f(x) = 0$.
a) Если α: E → R и β : E → R — бесконечно малые функции при E ∈ x → a, то их сумма α + β : E → R — также бесконечно малая
функция при E ∈ x →a.
b) Если α: E → R и β : E → R — бесконечно малые функции при E ∈ x → a,
то их произведение α · β : E →R — также бесконечно малая функция при E ∈ x →a.
c) Если α: E →R — бесконечно малая функция при E ∈ x →a, a β : E →R —
финально ограниченная функция при E ∈ x → a, то произведение α· β : E →R
есть бесконечно малая функция при E ∈ x →a.

Функцию, стремящуюся к бесконечности при данной базе, называют бесконечно большой величиной или просто бесконечно большой при данной базе.
Если f и g — бесконечно большие при базе B и f = o(g), то говорят, что g есть бесконечно большая более высокого порядка по сравнению с f .

Эквивалентные бесконечно малые:
sin(a(x)) ↔ a(x)
tg(a(x)) ↔ a(x)
acrsin(a(x)) ↔ a(x)
arcctg(a(x)) ↔ a(x)
1-cos(a(x)) ↔ $((a(x))^2) / 2$
ln(1+a(x)) ↔ a(x)
$a^{a(x)} - 1$ ↔ a(x)lna
$(1 + a(x))^p - 1$ ↔ pa(x)
$(1 + a(x))^{1/p} - 1$ ↔ (a(x)) / p

Покажем, что $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при*x → 0*. **Решение***:*

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\ \lim_{x\to0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{\substack{x\to0\\ \frac{x}{2}\to0}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1 * 1 = 1$$

Вопрос №11. Правила нахождения пределов.

$$\lim_{x\to a} c = c \qquad (c - \text{константа})$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) + g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) - g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \qquad \left(\lim_{x\to a} g(x) \ne 0\right)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^m = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^m \qquad (m - \text{натуральное число})$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{\lim_{x\to a} f(x)} \qquad (m - \text{натуральное число})$$

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \qquad (\alpha - \text{угол в радианах})$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Вопрос №12. Первый замечательный предел.

Первый замечательный предел – это предел, на основе которого вычисляются производные тригонометрических функций.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Следствия: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$ 2)$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{(k\cdot x)}{x} = k$ 3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ 4)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$ 5)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Вопрос №13.Второй замечательный предел. Следствия второго замечательного предела.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Следствия: 1)$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 2)$\lim\limits_{x\to 0}a^x - \frac{1}{x} = \ln a$ 3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ 4)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ 5)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Вопрос №14. Определение непрерывности функции в точке. Свойства непрерывных функций.

Пусть f — вещественнозначная функция, определенная в некоторой окрестности точки a∈R

Функция f называется непрерывной в точке a, если для любой окрестности V(f (a)) значения f (a) функции в точке a найдется такая окрестность U(a) точки a, образ которой при отображении f содержится в V(f (a)).

Приведем формально-логическую запись этого определения вместе с двумя его вариациями, часто используемыми в анализе:

(f непрерывна в точке a) := ∀V(f (a)) ∃U(a) (f (U(a)) ⊂ V(f (a))), ∀ ε > 0 ∃U(a) ∀x ∈ U(a) (| f (x)– f (a)| < ε), ∀ ε > 0 ∃δ > 0 ∀x ∈ R (|x – a| < δ ⇒ | f (x)– f (a)| < ε

Пусть f : E →R — вещественнозначная функция, определенная на некотором множестве E ⊂R, и a — точка области определения функции.

Функция f : E →R называется непрерывной в точке a∈ ∈ E, если для любой окрестности V(f (a)) значения f (a) функции, принимаемого ею в точке a, найдется такая окрестность $U_E(a)$ точки a в множестве E, образ которой f ($U_E(a)$) содержится в V(f (a)).

Итак, (f : E → R непрерывна в a ∈ E) := ∀V(f (a)) ∃$U_E(a)$ (f ($U_E(a)$) ⊂ V(f (a)))

Свойства:

1)Теорема об ограниченности непрерывной функции

Пусть функция f(x) непрерывна в точке x0. Тогда существует такая окрестность U(x0), на которой функция ограничена.

2) Теорема о сохранении знака непрерывной функции

Пусть функция f(x) непрерывна в точке x_0. И пусть она имеет положительное (отрицательное) значение в этой точке:

$$f(x_0) > 0 \qquad (f(x_0) < 0)$$

Тогда существует такая окрестность U(x_0) точки x_0, на которой функция имеет положительное (отрицательное) значение:

$$f(x) > 0 \qquad (f(x) < 0) \text{ при } x \in U(x_0)$$

3) Арифметические свойства непрерывных функций

Пусть функции f(x) и g(x) непрерывны в точке x_0. Тогда функции f(x) + g(x), f(x) – g(x) и f(x) * g(x) непрерывны в x_0.

Если g(x_0) ≠ 0, то и функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0.

4) Свойство непрерывности слева и справа

Функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в x_0 справа и слева

Вопрос №15. Классификация точек разрыва. Примеры.

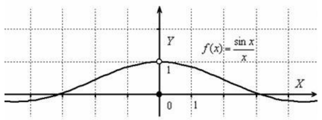
Точка a ∈ E называется точкой разрыва первого рода для функции f : E →R, если существуют пределы

$\lim\limits_{E\ni x\to a-0} f(x) =: f(a-0), \quad \lim\limits_{E\ni x\to a+0} f(x) =: f(a+0)$

но по крайней мере один из этих пределов не совпадает со значением f(a) функции в точке a.

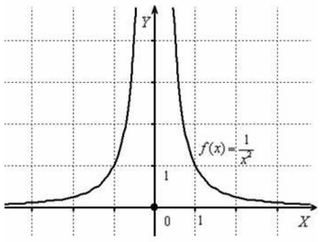
Пример:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$



Если a∈ E — точка разрыва функции f : E →R и в этой точке не существует по меньшей мере один из пределов, указанных в определении точки разрыва 1 рода, то a называется точкой разрыва второго рода.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



Вопрос №16. Непрерывность функции на множестве.

Функция f : D → R непрерывна на множестве G | D тогда и только тогда, когда она непрерывна в каждой точке множества G.

Если X = [a, b] , то для непрерывности функции на требуется, чтобы f(x) была непрерывна во всех внутренних точках отрезка, непрерывна справа на левом его конце, т. е. в точке a, и непрерывна слева на правом его конце, т. е. в точке b.

Вопрос №17. Общие свойства функций непрерывных на отрезке. Теоремы Больцано-Коши.

Первая теорема Больцано – Коши. Пусть функция *f* (*x*) непрерывна в точке x_0 и кроме этого *f* (x_0) ≠ 0. Тогда существует δ > 0 такое, что для всех *x* ∈ (x_0 – δ; x_0 + δ) функция *f* (*x*) имеет тот же знак, что и *f* (x_0). Эта теорема характеризует устойчивость знака непрерывной функции.

Вторая теорема Больцано – Коши. Если функция *f* (*x*) определена и непрерывна на отрезке [*a*, *b*] , то она на этом отрезке принимает по крайней мере один раз любое значение, заключённое между её наименьшими и наибольшими значениями.

Теорема 1 *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке a,b, то она ограничена на этом отрезке: k≤ f(x)≤K*

Теорема 2 (теорема Вейерштрасса). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нём.*

Теорема 3 (о непрерывности основных элементарных функций). Основные элементарные функции непрерывны в области определения.

Теорема 4 (о непрерывности элементарных функций). Элементарные функции непрерывны в области определения

Теорема 5 (о промежуточных значениях непрерывной функции). Пусть функция непрерывна на некотором отрезке (в том числе бесконечном). Если в двух каких- либо точках этого отрезка a и в функция принимает различные значения: f(a)=A; f(b)=B, то каково бы ни было C , лежащее между A и B, найдется x0, лежащее между a и b , что f(x0)= C. Непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, принимает хотя бы раз и всякое промежуточное значение.

18. Общие свойства функций непрерывных на отрезке. Теоремы Вейерштрасса.

Теорема 1 *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке a,b, то она ограничена на этом отрезке: k≤ f(x)≤K*

Теорема Больцано-Коши . *Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и значения ее на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то есть f(a) f(b) < 0, то внутри отрезка найдется точка x0 пренадлежащая [a,b] такая, что $f(x_0) = 0$.*

Теорема 2 (теорема Вейерштрасса). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нём.*

Теорема 3 (о непрерывности основных элементарных функций). Основные элементарные функции непрерывны в области определения.

Теорема 4 (о непрерывности элементарных функций). Элементарные функции непрерывны в области определения

Теорема 5 (о промежуточных значениях непрерывной функции). Пусть функция непрерывна на некотором отрезке (в том числе бесконечном). Если в двух каких- либо точках этого отрезка a и в функция принимает различные значения: f(a)=A; f(b)=B, то каково бы ни было C , лежащее между A и B, найдется x0, лежащее между a и b , что f(x0)= C. Непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, принимает хотя бы раз и всякое промежуточное значение.

Теорема (вторая теорема Вейерштрасса). *Непрерывная функция f на отрезке $[a, b]$ достигает в некоторых точках отрезка $[a, b]$ своих точных верхней и нижней границ, т.е. существуют $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие,что $f(\alpha) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), f(\beta) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.*

19. Задачи, приводящие к понятию производной функции. Определение производной.

Геометрический смысл производной. Рассмотрим график функции *y* = *f* (*x*):

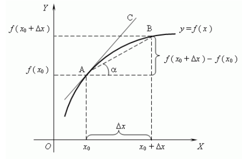


Рис. 1

Из рис.1 видно, что для любых двух точек A и B графика функции: $\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \tan\alpha$, где α- угол наклона секущей AB.

Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей. Если зафиксировать точку A и двигать по направлению к ней точку B, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая AB приближается к касательной AC. Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту касательной в точке A. Отсюда следует: *производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.* В этом и состоит *геометрический смысл* производной.

Механический смысл производной. Рассмотрим простейший случай: движение материальной точки вдоль координатной оси, причём закон движения задан: координата *x* движущейся точки – известная функция *x* (*t*) времени *t*. В течение интервала времени от t_0 до $t_0+\Delta t$ точка перемещается на расстояние: *x* ($t_0+\Delta t$) – *x* (t_0) = Δx, а её *средняя скорость* равна: $v_a = \Delta x / \Delta t$. При $\Delta t \longrightarrow 0$ значение средней скорости стремится к определённой величине, которая называется *мгновенной скоростью* *v* (t_0) материальной точки в момент времени t_0 . Но по определению производной мы имеем:

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0)$, отсюда, *v* (t_0) = *x*′ (t_0) , т.е. *скорость – это производная координаты по времени.* В этом и состоит *механический смысл* производной. Аналогично, *ускорение – это производная скорости по времени*: *a* = *v*′ (*t*).

Определение производной: Производной функции в точке x называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

20. Дифференцируемость. Правила дифференцируемости.

Функция f : E →R, определенная на множестве E ⊂ R, называется дифференцируемой в точке a ∈ E, предельной для множества E, если существует такая линейная относительно приращения x – a аргумента функция A · (x – a), что приращение f (x)– f (a) функции f представляется в виде f (x)– f (a) = A· (x – a)+ o(x – a) при x → a, x ∈ E.

Иными словами, функция дифференцируема в точке а, если изменение ее значений в окрестности исследуемой точки линейно с точностью до поправки, бесконечно малой по сравнению с величиной x – a смещения от точки a.

Линейная функция A· (x – a) из называется дифференциалом функции f в точке a

Дифференцируемость функции равносильна наличию у нее производной в соответствующей точке

Правила дифференцируемости:

(x + y)′ = x′ + y′

(x – y)′ = x′ – y′

(x * y)′ = x′ * y + x * y′

$$\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{x' * y - x * y'}{y^2}$$

21.Уравнения касательной и нормали к графику функции. Примеры.

Уравнение касательной: y = f(x0)+ f'(x0)(x − x0)

Уравнение нормали: $y = f(x0) - \frac{1}{f'(x0)}(x - x0)$

Примеры:

Первый:

Составить уравнение касательной и уравнение нормали к графику функции $y = x^2 - 5x + 4$, если абсцисса точки касания $x_0 = -1$.

Решение. Найдём ординату точки касания:

$y_0 = y(-1) = 1 + 5 + 4 = 10$

Найдём производную функции:

$f'(x) = y' = 2x - 5$

Найдём значение производной в точке касания, то есть угловой коэффициент касательной:

$f'(x_0) = y'(-1) = -2 - 5 = -7$

Подставляем все полученные данные и получаем уравнение касательной:

$y - 10 = -7(x + 1)$

$y - 10 = -7x - 7$

Приводим уравнение к общему виду (все буквы и числа, отличные от нуля, собираем в левой части, а в правой оставляем ноль): $7x + y - 3 = 0$

Составляем уравнение нормали:

$x + 1 - 7(y - 10) = 0$

$x + 1 - 7y + 70 = 0$

$x - 7y + 71 = 0.$

Второй:

Составить уравнение касательной и уравнение нормали к графику функции $y = \sqrt{x}$, если абсцисса точки касания $x_0 = 4$.

Решение. Найдём ординату точки касания:

$y_0 = y(4) = 2$

Найдём производную функции: $f'(x) = y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Найдём значение производной в точке касания, то есть угловой коэффициент касательной:

$f'(x_0) = y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Находим уравнение касательной:

$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$

$y - 2 = \frac{1}{4}x - 1$

$y = \frac{1}{4}x + 1.$

Перед тем, как привести уравнение к общему виду, нужно его немного "причесать": умножить почленно на 4. Делаем это и приводим уравнение к общему виду: $x - 4y + 4 = 0$

Составляем уравнение нормали:

$x - 4 + \frac{1}{4}(y - 2) = 0$

$x - 4 + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} = 0$

$x + \frac{1}{4}y - \frac{9}{2} = 0$

$4x + y - 18 = 0$

22. Производные элементарных функций.

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Ограничения на область изменения аргумента $x \in \mathbb{R}$
1. C (const)	0	
2. x^a	ax^{a-1}	$x > 0$ при $a \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}$ при $a \in \mathbb{N}$
3. a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
4. $\log_a \lvert x\rvert$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x \in \mathbb{R} \setminus 0$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
5. $\sin x$	$\cos x$	
6. $\cos x$	$-\sin x$	
7. $\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
8. $\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
9. $\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
10. $\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
11. $\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
12. $\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
13. $\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	
14. $\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$	
15. $\mathrm{th}\, x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	
16. $\mathrm{cth}\, x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$x \neq 0$
17. $\mathrm{arsh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
18. $\mathrm{arch}\, x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$	$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\lvert x\rvert > 1$
19. $\mathrm{arth}\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
20. $\mathrm{arcth}\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$	$\frac{1}{x^2-1}$	$\lvert x\rvert > 1$