Аффинные координаты

Аффинные координаты

Аффинная система координат на прямой, на плоскости, в пространстве

Пусть в пространстве фиксирована точка O. Совокупность точки O и базиса называется **аффинной (декартовой) системой координат**:

- Аффинная система координат на прямой (рис. 2.1, а) — это точка O и ненулевой вектор $\mathbf{e}_1$ (базис на прямой).
- Аффинная система координат на плоскости (рис. 2.1, б) — это точка O и два неколлинеарных вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, взятые в определённом порядке (базис на плоскости).
- Аффинная система координат в пространстве (рис. 2.1, в) — это точка O и три некомпланарных вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, взятые в определённом порядке (базис в пространстве).

Точка O называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются **координатными осями**:

- Ox — ось абсцисс,
- Oy — ось ординат,
- Oz — ось аппликат.

Плоскости, проходящие через две координатные оси, называются **координатными плоскостями**.

Аффинная система координат в пространстве (или на плоскости) называется **правой**, если её базис является правым, и **левой**, если её базис — левый.

Координаты векторов и точек в аффинной системе координат

Координатами вектора в заданной системе координат называются коэффициенты в разложении вектора по базису.

Для любой точки M в заданной аффинной системе координат можно рассмотреть вектор $\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец — с точкой M. Этот вектор называется **радиус-вектором точки** M.

Координатами точки M в заданной системе координат называются координаты радиус-вектора этой точки относительно заданного базиса. В пространстве это координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, т.е. коэффициенты x, y, z в разложении:

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Первая координата называется **абсциссой**, вторая — **ординатой**, третья — **аппликатой**.

На плоскости и на прямой координаты записывают в виде (x, y) и (x) соответственно.

Координаты точки записывают в виде координатного столбца (матрицы-столбца):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{(в пространстве)}, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{(на плоскости)}.$$

Правило вычисления координат вектора

Чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ и концом в точке $B(x_2, y_2, z_2)$, нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты его начала:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Замечания

1. В заданной системе координат каждой точке можно поставить в соответствие её координаты, причём это соответствие взаимно однозначное:

   $$\text{(точка)} \leftrightarrow \text{(её координаты)}.$$

   В частности, разным точкам соответствуют разные наборы координат.

2. Если вектор $\mathbf{v}(x, y, z)$ отложить от точки $A(x_1, y_1, z_1)$, то конец вектора будет иметь координаты:

   $$(x_1 + x, y_1 + y, z_1 + z).$$

3. Координаты точки M, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda : \mu$, находятся по координатам его концов $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$:

   $$M\left(\frac{\lambda x_2 + \mu x_1}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda y_2 + \mu y_1}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda z_2 + \mu z_1}{\lambda + \mu}\right).$$

В частности, координаты середины отрезка равны среднему арифметическому соответствующих координат концов отрезка:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

Пример

В некоторой аффинной системе координат известны координаты вершин треугольной пирамиды $ABCD$: $A(1,2,3), B(4,5,6), C(7,8,9), D(10,11,12)$. Найти координаты:

1. Точки M пересечения медиан треугольника ABC;
2. Точки N, которая делит отрезок AD в отношении $1:2$.

Решение:

1. Координаты точки M:

$$M\left(\frac{1+4+7}{3}, \frac{2+5+8}{3}, \frac{3+6+9}{3}\right) = (4,5,6).$$

2. Координаты точки N:

$$N\left(\frac{1\cdot 10+2\cdot 1}{1+2}, \frac{1\cdot 11+2\cdot 2}{1+2}, \frac{1\cdot 12+2\cdot 3}{1+2}\right) = (4,5,6).$$