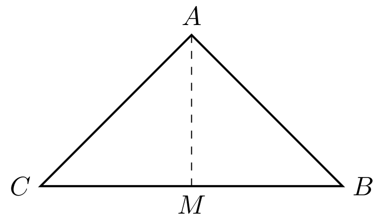
Задача 1

Дано:
A(1, 2)
B(4, 4)
C(2, -2)
Составить: ур-ние медианы треугольника ABC, проходящую через вершину A.



Решение:

1. Пусть AM – медиана, тогда точка M – середина отрезка BC, значит:

$$M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = M(3,1)$$

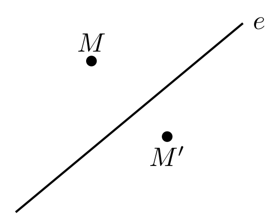
2. $\overline{AM} : \{2, -1\}$, $M(3,1) \Rightarrow AM : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1}$

Ответ: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1}$

Задача 2

Дано:
$M(8, 11)$
$l : 2x + 3y + 3 = 0$

Найти: точку симметричную M относительно l.



Решение:

1. Из уравнения прямой l получаем вектор нормали:

$$2x + 3y + 3 = 0 \Rightarrow \overline{n}\{2, 3\}$$

2. Вектор нормали будет являться направляющим вектором к прямой MM',где M' - искомая точка.

$$\text{Ур-ние } MM‘\text{:} \begin{cases} 2t+8 = x \\ 3t+11 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{2} - 4 \\ t = \frac{x}{3} - \frac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow x/2 - y/3 - 1/3 = 0$$

MM‘: 3x - 2y - 2 = 0

3. Найдем O - т. пересечения MM‘ и l:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & -5 \\ 0 & 13 & -13 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 5y + 5 = x \end{cases} \Rightarrow O(0; -1)$$

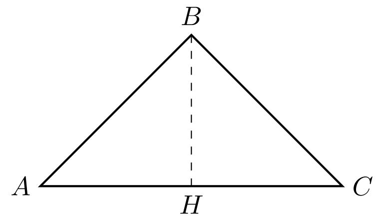
4. OM = OM’ И M’ $\in$ MM’

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2 = 0 \\ 8^2 + 12^2 = (y+1)^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}(y+1) \\ \frac{13}{9}(y+1)^2 = 208 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}(y+1) \\ y + 1 = \pm 12 \end{cases} \Rightarrow M'(-8; 13)$$

Ответ: $M'(-8; 13)$

Задача 3

Дано: A(-2,3)
B(7,-3)
C(4,8)
Составить:уравнение высоты треугольника ABC, проходящего через вершину B.



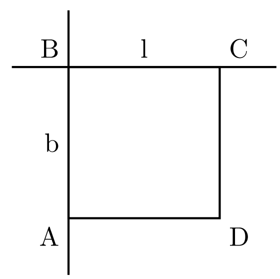
Решение:

1. $\overline{AC}(6,5) \Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BH}$
2. Ур-ние прямой через точку и вектор нормали:

Ответ - ВН: $(x-7)6+(y+3)5=0$

Задача 4

Дано: A(1,1)
l: x-y-2=0
Найти: S



Решение:

1. По уравнению прямой становится ясно, что точка A не лежит на l.
2. Из уравнения l найдем вектор нормали к данной прямой, он будет являтся направляющим вектором некоторой прямой. На этой прямой будет лежать точка A, а также сторона квадрата.
   $\overline{n}(1,-1)$
3. Найдем ту самую, некоторую прямую, и обозначим ее b. Для простоты вычисления возьмем вектор нормали к b (1,1)
   $b: 1(x-1)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$
4. Найдем еще одну вершину квадрата она будет лежать в пересечении этих прямых, назовем ее B.

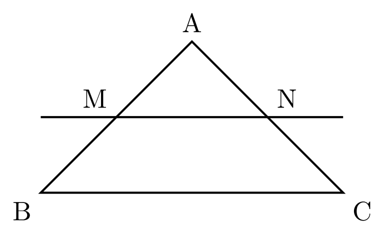
$$\begin{cases} x-y-2=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \text{B: } \begin{cases} x=2y=0 \end{cases}$$

5. Тогда длина стороны квадрата равна $|\overline{AB}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Тогда площадь равна $\sqrt{2}^2 = 2$

Ответ: 2

Задача 5

Дано:
A(-1,-1)
B(5,-3)
C(-3,-3)
Составить ур-ние: средней линии ABC, параллельной BC



Решение:

1. Найдем $\overline{MN}$, где M и N - середины AB и AC

$$M\{\frac{-1+5}{2}, \frac{-1-3}{2}\}, N\{\frac{-1-3}{2}, \frac{-1-3}{2}\} \Rightarrow \overline{MN}\{-4, 0\}$$

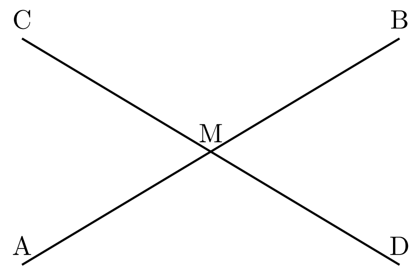
2. Найдем ур-ние прямой MN

$$MN : \frac{x-2}{-4} = \frac{y+2}{0} \Leftrightarrow (x-2)*0 = (y+2)*(-4) \Rightarrow y = -2$$

Ответ: y=-2

Задача 6

Дано:
A(-5,1)
B(4,-2)
C(3,0)
D(-3,-3)
Найти: пересечение AB и CD



Решение:

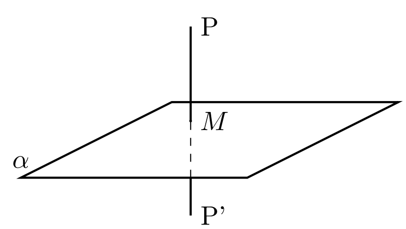
1. $\overline{AB}(9, -3) \Rightarrow AB : \dfrac{x+5}{9} = \dfrac{y-1}{-3} \Leftrightarrow AB : -3x - 9y - 6 = 0$
2. $\overline{CD}(-6, -3) \Rightarrow CD : \dfrac{x-3}{-6} = \dfrac{y-0}{-3} \Leftrightarrow CD : -3x + 6y + 9 = 0$
3. Найдем пересечение данных уравнений прямых:

$$\begin{cases} -3x - 9y - 6 = 0 \\ -3x + 6y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5y = -5 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ответ: (1,-1)

Задача 7

Дано:
P(9,0,-2)
a: 4x - 6y - z + 15 = 0
Найти: точку симметричную данной отн. a



Решение:

1. a $\Rightarrow \overline{n}(4, -6, -1)$ - вектор нормали
2. Найдем прямую PM, где PM $\perp$ a, а M - т.пересечения PM и a

$$PM : \frac{x-9}{4} = \frac{y-0}{-6} = \frac{z+2}{-1}$$

3. Найдем точку M $\in$ a:

$$\begin{cases} \frac{y}{-6} = \frac{x-9}{4} \\ \frac{y}{-6} = \frac{z+2}{-1} \\ 4x - 6y - z + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y + 9 \\ z = \frac{1}{6}y - 2 \\ 4x - 6y - z + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{8}{3}y + 36 - 6y - \frac{1}{6}y + 2 + 15 = 0| \cdot 6$$

$$-16y+6\cdot 36-36y-y+12+15\cdot 6=0 \Leftrightarrow -53y=-6\cdot 53 \Rightarrow M:\begin{cases}x=5\\y=6\\z=-1\end{cases}$$

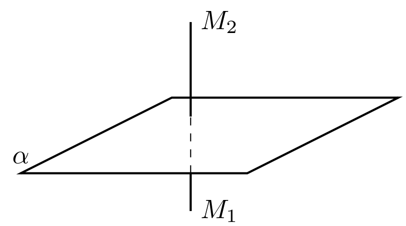
4. точка M - середина отрезка PP', где P'(x,y) - точка симметричная данной, тогда:

$$\begin{cases}\frac{x+9}{2}=5\\\frac{y+0}{2}=6\\\frac{z-2}{2}=-1\end{cases} \Rightarrow P':\begin{cases}x=1\\y=12\\z=0\end{cases}$$

Ответ: P'(1,12,0)

Задача 8

Дано:
OY ⇒ M(0,y,0)
α : 3x-6y -2z+6 = 0
$\rho(M,\alpha)=6$
Найти: M



Решение:

1. Расстояние от точки до плоскости находится по формуле:

$$\rho((x_0,y_0,z_0),ax+by+cz+d)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

2. Подставим значения под формулу:

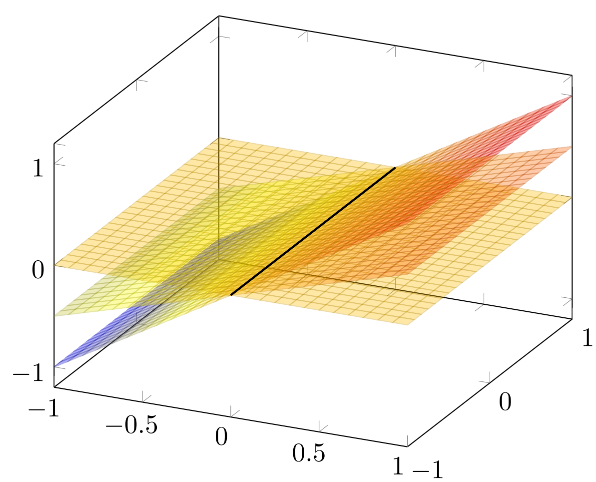
$$6=\frac{|-6y+6|}{7} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-6y+6=42\\\ \ 6y-6=42\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}M_1(0,-6,0)\\M_2(0,6,0)\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}M_1(0,-6,0)\\M_2(0,6,0)\end{array}\right.$

Задача 9

Дано:
$\alpha: 2x-3y-2z+3=0$
$\beta: x+4y-4=0$

Найти: Уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные данными плоскостями.



Решение:

1. Расстояние от точки до плоскости вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

2. Если плоскость является биссектрисой двугранного угла, тогда все ее точки равноудаленны от плоскостей, образующих двугранный угол:

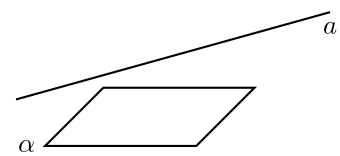
$$\frac{|2x - 3y - 2z + 3|}{\sqrt{4 + 9 + 4}} = \frac{|x + 4y - 4|}{\sqrt{1 + 4^2}} \Leftrightarrow |2x - 3y - 2z + 3| = |x + 4y - 4| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3y - 2z + 3 = x + 4y - 4 \\ 2x - 3y - 2z + 3 = -x - 4y + 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \phi_1 : x - 7y + 7 = 0 \\ \phi_2 : 3x + y - 2z - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \phi_1 : x - 7y + 7 = 0 \\ \phi_2 : 3x + y - 2z - 1 = 0 \end{array}\right.$

Задача 10

Дано:
A(5,-9,-2)
B(3,-6,-1)
C(4,-9,-1)
$a : \frac{x}{3} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-4}{-1}$



Выяснить: взаимное расположение прямой и плоскости, проходящей через 3 точки.
Решение:

1. Уравнение плоскости через 3 точки находится через матрицу вида:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}$$

2. Уравнение плоскости α через 3 данные точки имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - 5 & y + 9 & z + 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 3(x - 5) + (-1) \cdot (-2 + 1)(y + 9) + 3(z + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + y + 3z = 0$$

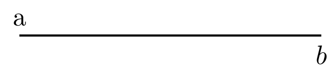
3. Проверим пересекаются ли прямая и плоскость:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-4}{-1} \\ 3x + y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6z - 29 \\ x = -3z + 12 \\ 3x + y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow -9z + 36 + 6z - 29 + 3z = 0 \Leftrightarrow$$

$7 = 0$ - неверно, значит прямая и плоскость параллельны.

Ответ: Параллельны

Задача 11



Дано:

a: $\begin{cases} 4x-6y-z-49=0 \\ 5x-8y-2z-65=0 \end{cases}$ b: $\begin{cases} x=3+4t \\ y=-6+3t \\ z=-1-2t \end{cases}$

Выяснить: взаимное расположение прямых

Решение:

1. Найдем вектора нормали к обр. плоскостям прямой a, произведение из векторов нормали есть направляющий вектор к прямой a.

$$\begin{cases} 4x-6y-z-49=0 \\ 5x-8y-2z-65=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n_1(4,-6,-1) \\ n_2(5,-8,-2) \end{matrix} \Rightarrow l_a=[n_1,n_2]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -6 & -1 \\ 5 & -8 & -2 \end{vmatrix}=4i+3j-2k \Rightarrow l_a(4,3,-2)$$

2. Приведем прямую b к каноническому виду, получим точку на этой прямой и напр. вектор.

$$\begin{cases} x=3+4t \\ y=-6+3t \\ z=-1-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{4}=t \\ \frac{y+6}{3}=t \\ \frac{z+1}{-2}=t \end{cases} \Rightarrow l_b(4,3,-2), M(3,-6,1)\in b$$

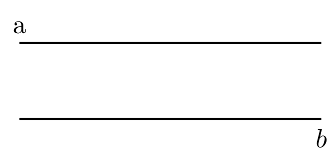
Так как $l_b=l_a$, тогда прямые коллинеарны.

3. Подставим точку M в уравнение прямой a:

$$\begin{cases} 12=36+1-49=0 \text{ - верно} \\ 15+48+2-65=0 \text{ - верно} \end{cases} \Rightarrow \text{Прямые совпадают}$$

Ответ: Прямые совпадают.

Задача 12



Дано:

a: $\begin{cases} 3x+8y+5z+10=0 \\ 5x-4y+z+2=0 \end{cases}$

b: $\left\{ \frac{x-3}{2}=\frac{y+6}{3}=\frac{z+4}{-6} \right.$

Найти: расстояние между прямыми

Решение:

1. Получим направляющий вектор из прямой a ($[\overline{n_1},\overline{n_2}]=l_a$):

$$l_a: \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 8 & 5 \\ 9 & -4 & 1 \end{vmatrix}=28i+42j-84k \Rightarrow l_a(28,42,-84) \sim l_a(2,3,-6)$$

2. Получим точку $M_a(x,y,z)\in a$ путем обнуления координаты x в системе уравнений:

$$\begin{cases} 8y+5z+10=0 \\ -4y+z+2=0 \end{cases} \Rightarrow y=0 \Rightarrow z=-2 \Rightarrow M_a(0,0,-2)$$

3. Проанализиров уравнение прямой b, получим $l_b(2,3,-6), M_b(3,-6,-4)\in b$. Направляющие вектора прямой a и прямой b совпадают, а значит считать расстояние между прямыми нужно через векторное произведение $M_aM_b()$ и l_b. Напишем общее уравнение для вычисление расстояния между параллельными прямыми:

$$\rho(a,b)=\frac{|[M_aM_b,l_b]|}{|l_b|}$$

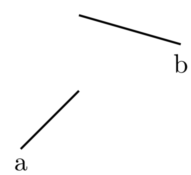
4. Решим по последней формуле, выполнив промежуточные вычисления:

$$\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix}\right\| = |42i + 14j + 21k| = \sqrt{42^2 + 14^2 + 21^2} = 49$$

$$\rho(a, b) = \frac{49}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = 7$$

Ответ: 7

Задача 13



Дано:

a: $\begin{cases} 5x - 3y + 4z - 35 = 0 \\ 7x - 3y + 5z - 49 = 0 \end{cases}$
b: $\frac{x-3}{9} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{-1}$
Найти: угол между прямыми
Решение:

1. Найдем направляющий вектор к прямой a:

$$l_a = [n_1(5, -3, 4), n_2(7, -3, 5)] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 4 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -3x + 3y + 6z \Rightarrow l_a(-3, 3, 6)$$

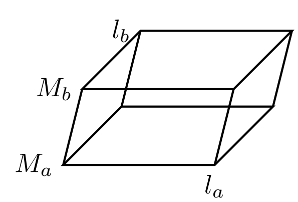
2. Формула для подсчета угла между прямыми a и b по направляющим векторам l_a и l_b:

$$\alpha = arccos(\left|\frac{(l_a, l_b)}{|l_a||l_b|}\right|)$$

$$\alpha = arccos(\left|\frac{-27}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 6^2}\sqrt{9^2 + 2^2 + 1}}\right|) \Rightarrow \alpha = arccos(\frac{3\sqrt{129}}{86})$$

Ответ: $arccos(\frac{3\sqrt{129}}{86})$

Задача 14



Дано:
a: $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z+3}{1}$
b: $\frac{x-27}{21} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-5}{14}$
Найти:

Решение:

1. Найдем для прямых точку и направляющий вектор:

$$a \Rightarrow \begin{matrix} l_a(1, 0, 1) \\ M_a(0, -3, -3) \end{matrix}$$

$$b \Rightarrow \begin{matrix} l_b(21, 6, 14) \\ M_b(27, -4, 5) \end{matrix}$$

2. Расстояние между скрещивающимися прямыми(направляющие вектора разные) вычисляется по формуле:

$$\rho(a, b) = \frac{|(M_aM_b, l_a, l_b)|}{|[l_a, l_b]|}$$

3. Промежуточные вычисления:

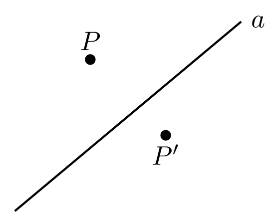
$$(M_aM_b, l_a, l_b) = \begin{vmatrix} 27 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 21 & 6 & 14 \end{vmatrix} = 121$$

$$[l_a, l_b] = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 21 & 6 & 14 \end{matrix} \right\| = |-6i + 7j + 6k| = 11$$

$$\rho(a, b) = \frac{121}{11} = 11$$

Ответ: 11

Задача 15



Дано:
P(21,11,-6)
a: $\frac{x}{5} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-3}{-1}$
Найти: точку симметричную P отн. a.

Решение:

1. a $\Rightarrow l(5, 6, -1)$
2. Найдем уравнение плоскости α , проходящей через P' и перпендикулярной a.

$$5(x - 21) + 6(y - 11) - (z + 6) = 0 \Leftrightarrow 5x + 6y - z - 177 = 0$$

3. Найдем M - т. пересечения α и a:

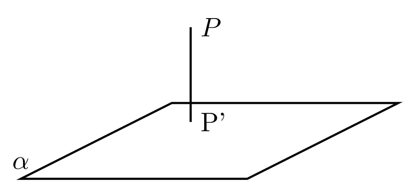
$$\begin{cases} 5x + 6y - z - 177 = 0 \\ \frac{x}{5} = \frac{y+1}{6} \\ \frac{y+1}{6} = \frac{z-3}{-1} \end{cases} \Rightarrow M(15, 17, 0)$$

4. M - середина PP', где P'(x,y,z) - искомая точка

$$\begin{cases} \frac{x+21}{2} = 15 \\ \frac{y+11}{2} = 17 \\ \frac{z-6}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow P'(9, 23, 6)$$

Ответ: P'(9,23,6)

Задача 16



Дано:
P(9,0,3)
a: 4x +3y + z -13 = 0
Найти: Проекцию точки P на a

Решение:

1. $a \Rightarrow n(4, 3, 1) \perp a$
2. Найдем прямую $l \perp a$ и $P \in l$:

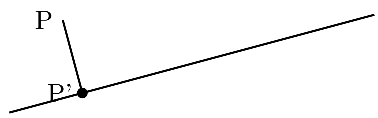
$$l : \frac{x - 9}{4} = \frac{y - 0}{3} = \frac{z - 3}{1}$$

3. Найдем искомую точку P' - пересечение l и a.

$$\begin{cases} \frac{x-9}{4} = \frac{y-0}{3} \\ \frac{y-0}{3} = \frac{z-3}{1} \\ 4x+3y+z-13=0 \end{cases} \Rightarrow P'(5,-3,2)$$

Ответ: P'(5,-3,2)

Задача 17



Дано:
P(-6,-4,-6)
a: $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}$
Найти: Проекцию P на a
Решение:

1. $a \Rightarrow l(4,1,5) \Rightarrow \alpha \perp a \wedge P \in \alpha$

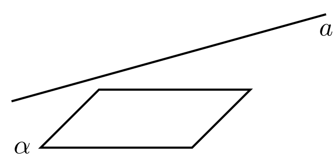
$$\alpha : 4(x+6)+(y+4)+5(z+6)=0 \Leftrightarrow 4x+y+5z-58=0$$

2. $P' \in \alpha \wedge P' \in a$:

$$\begin{cases} 4x+y+5z-58=0 \\ \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} \\ \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5} \end{cases} \Rightarrow P'(-5,-3,-7)$$

Ответ: P'(-5,-3,-7)

Задача 18



Дано: a: $\begin{cases} 4x+3y+z-29=0 \\ 5x+4y+z-36=0 \end{cases}$
α: 3x + 2y+z+4=0
Выяснить: взаимное расположение прямой и плоскости
Решение:

1. $a \Rightarrow l_a = [n_1(4,3,1), n_2(5,4,1)] = -i+j+k \Leftrightarrow l_a(-1,1,1)$

2. Проверим есть ли пересечение a и α:

$$\begin{cases} 4x+3y+z-29=0 \\ 5x+4y+z-36=0 \\ 3x+2y+z+4=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & 29 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & 1 & 36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 33 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & 1 & 36 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 33 \\ 0 & -1 & 1 & -4-33*3 \\ 0 & -1 & 1 & 36-33*5 \end{array}\right) \Rightarrow \text{(н. стр. - ср. стр) } 0 = 40 - 33*2 - \text{ неверно, тогда } a||\alpha$$

Ответ: Прямая параллельна плоскости