§1. МНОЖЕСТВА И СПОСОБЫ ИХ ЗАДАНИЯ

П 1. Понятие множества

Множество является основным (неопределяемым) понятием «Теории множеств», раздела математики, сформировавшегося во второй половине XIX века, в основном, благодаря работам немецкого математика Георга Кантора (1845–1918).

Г. Кантор рассматривал (но не определял!) множество как любое собрание определенных и различных между собой объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое как единое целое («множество есть многое, мыслимое как единое целое»)

Синонимы слова «множество»: «совокупность», «собрание», «коллекция», «семейство», «класс», «система», и т.д.

Примеры множеств: множество всех корней данного уравнения, множество студентов в аудитории, множество книг в библиотеке университета и т.д.

Множества обозначаются большими латинскими буквами: A, B, C, … , снабженными, возможно, индексами.

Некоторые множества имеют «специальные» обозначения:

$\boldsymbol{N}$ - множество всех натуральных чисел,

$\boldsymbol{Z}$ – множество всех целых чисел,

$\boldsymbol{Q}$ - множество всех рациональных чисел,

$\boldsymbol{R}$ – множество всех действительных чисел,

$[a; b]$, $[a; b)$, $(a; +\infty)$, … – числовые промежутки.

Элементами множества называются объекты, составляющие данное множество.

Элементы множества обозначаются малыми латинскими буквами.

- Если a – элемент множества A, то это записывается так: $\boldsymbol{a \in A}$, при этом говорят, что «объект a принадлежит множеству A» или «множество A содержит объект a».
- если же a не является элементом множества A, то пишут $\mathbf{a \notin A}$.

Символ $\in$ называется *знаком принадлежности*. Знак $\in$ является стилизацией первой буквы греческого слова «εστι» (есть, быть).

Для удобства и единства обозначений условились считать, что существует множество, не имеющее элементов. Это множество называют ***пустым множеством*** и обозначают символом $\varnothing$. Введение пустого множества позволяет, например, говорить о множестве всех корней данного уравнения даже в том случае, когда это уравнение корней не имеет.

Различают конечные и бесконечные множества.

– Если для множества A существуют натуральное число k, равное числу его элементов, то множество A называется ***конечным***, точнее *k-элементным*. Пустое множество относят к конечным множествам.
  Число элементов конечного множества A называется **мощностью множества** и обозначается одним из символов: $n(A)$ или $|A|$, причем $n(\varnothing) \overset{df}{=} 0$.

– Множество, не являющееся конечным, называется ***бесконечным***.

Примеры конечных множеств: множество всех корней уравнения $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$, множество всех сотовых телефонов данной аудитории, множество всех отрицательных натуральных чисел и т.д.
Примеры бесконечных множеств: $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, (-2; 5], множество всех окружностей данной плоскости и т.д.

П 2. Способы задания множеств

Будем считать, что множество A задано, если задано правило, позволяющее для каждого объекта a ответить на вопрос: какое из данных утверждений верно $a \in A$ или $a \notin A$.

Рассмотрим следующие способы задания множеств.

1) ***Перечислением всех элементов множества.***

Если A – данное множество, состоящее из n элементов: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то пишут:

$$A = \{x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n\} \qquad (1)$$

и говорят, что множество A задано *перечислением всех его элементов.*
Заметим, что в записи (1) порядок перечисления элементов не существенен, и стоит различать символы a и $\{a\}$ (a – некоторый объект, $\{a\}$ – множество, состоящее из одного элемента a).
Например,
$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ – множество всех цифр десятичной системы счисления, $B = \{$р, и, а$\}$ – трехэлементное множество некоторых букв русского алфавита.

2) ***Указанием характеристического свойства элементов множества.***

Множество может быть задано указанием *характеристического свойства его элементов,* то есть такого свойства, которым обладает каждый элемент данного множества и не обладает не один объект, не являющийся его элементом.

Если $P(x)$ – характеристическое свойство элементов множества A, то пишут: $A = \{x \mid P(x)\}$ (чтение: «A – множество всех x, таких, что x обладает свойством $P(x)$) и говорят, что множество A задано *описанием характеристического* *свойства его элементов.*

Например,

$A = \{x \mid x^3\text{-}5x^2+6x=0\}$ – множество всех x таких, что x – корень уравнения x^3-$5x^2+6x=0$ (иначе A – множество всех корней уравнения $x^3\text{-}5x^2+6x=0$),

$B = \{x \mid 2 \leq x < 5\}$ – бесконечное множество, имеющее персональное обозначение: [2; 5) и название: числовой промежуток от 2 до 5, включая 2.

3) ***<u>Словесный способ задания.</u>***

Множества часто задаются словесным описанием характеристического свойства элементов данного множества. Такой способ задания множества называется *словесным*.

Пример словесного задания множества:

C – множество всех букв слова «математика». Заметим, что, то же множество C можно задать перечислением его элементов: C = {м; а; т; е; и; к;} или описанием характеристического свойства его элементов: $C = \{x \mid x$ – буква слова «математика»}.

4) ***<u>Специальные способы задания множеств.</u>***

Некоторые множества могут быть заданы использованием «персональных» обозначений множеств. Например, $A = (-\infty; 2]$, то есть A – числовой промежуток от $-\infty$ до 2, включая 2.

Заметим, что число элементов данного множества M обозначают $n(M)$ или $|M|$ или $\overline{\overline{M}}$ и называют мощностью множества М.