§2. СРАВНЕНИЕ ДВУХ МНОЖЕСТВ. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

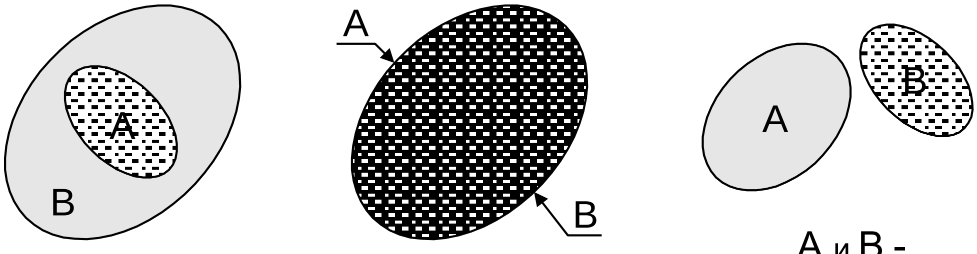
n°1. Понятие включения и равенства для двух множеств

Определение. Если каждый элемент множества A является также элементом множества B, то пишут $A\subset B$ и говорят, что множество A *включается* во множество B, или, что множество B *включает* множество A (символ $\subset$ – знак включения). При этом множество А называется *подмножеством* множества В. Если одновременно $A\subset B$ и $B\subset A$, то пишут $A=B$ и говорят, что множество A и B *совпадают,* или, что множество A *равно* множеству B. Если утверждение $A\subset B$ ($A=B$) ложно, то пишут $A\not\subset B$ ($A\neq B$).
В случае, когда множества A и B не имеют общих элементов, эти множества называются *непересекающимися.*
Любое подмножество множества $\boldsymbol{R}$ называется *числовым множеством*.

Для большей наглядности множества иногда «изображают» в виде плоских фигур, называя такие изображения *диаграммами Венна* (по имени английского математика и логика Джона Венна, 1834-1923).

Числовые множества чаще всего будем изображать множествами координатной прямой, как это делалось в средней школе.

Воспользуемся диаграммами Венна для геометрической иллюстрации введенных в *определении 1* понятий:



A⊂B

A⊂B и B⊂A, т.е. A=B

A и B - непересекающиеся множества

Замечание. Множество, обладающее тем свойством, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами, а рассматриваемые объекты – элементы этого множества называется универсумом универсальным множеством и обозначается U.

Определение. Множество всех подмножеств множества M, называется *булеаном множества M* и обозначается *P(M).*

Пример. Составим булеан для множества $M=\left(\alpha,\beta,\varphi\right)$

Решение. По определению имеем

$$P(M)=\{\varnothing,\{\alpha\},\{\beta\},\{\varphi\},\{\alpha,\beta\},\{\alpha,\varphi\},\{\beta,\varphi\},\{\alpha,\beta,\varphi\}\}.$$

Для конечного множества M имеет место формула

$$n(P(M))=2^{n(M)}.$$

Для приведенного примера

$n(M)=3$

$n(P(M))=2^{n(M)}=2^3=8$

n°2. Объединение, пересечение и разность двух множеств

Определение. Пусть A и B – какие-либо множества. *Объединением* множеств A и B называется множество, обозначаемое символом $A\cup B$ и состоящее из всех объектов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B.
Пересечением множеств A и B называется множество, обозначаемое символом $A\cap B$ и состоящее из всех объектов, принадлежащих одновременно каждому из множеств A, B.
Разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое символом $A\backslash B$ и состоящее из всех объектов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B. В случае, когда $B\subset A$, разность $A\backslash B$ называется еще *дополнением* множества B до множества A и обозначается символом C_AB.
Дополнение множества B до универсального множества U будем называть дополнением множества B и обозначать одним из символов C_UB, $\overline{C}$ или B'.

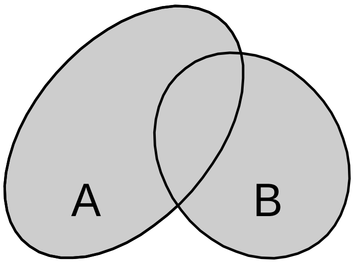
Итак, по определению 2 имеем:

$$A\cup B\overset{df}{=}\{x\mid x\in A \text{ или } x\in B\},\ A\cap B\overset{df}{=}\{x\mid x\in A \text{ и } x\in B\},\ A\backslash B\overset{df}{=}\{x\mid x\in A \text{ и } x\notin B\}.$$

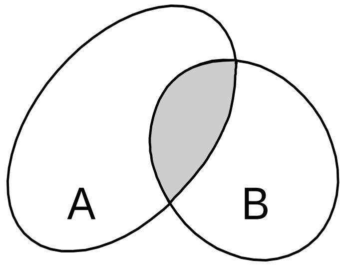
Здесь и далее каждая из записей $a\overset{опр.}{=}b$, $a\overset{df}{=}b$, $a\overset{def}{=}b$ обозначает совпадение объектов a, b по определению; *df* и *def* – первая и третья, первые три буквы латинского слова «*definito*» (определение) соответственно.

Первая буква слова Union («объединение») помогает вспомнить, что из знаков $\cup$, $\cap$ для обозначения объединения множеств используется знак $\cup$.

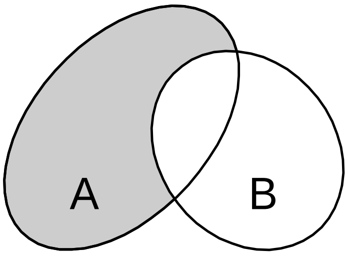
Дадим геометрическую иллюстрацию понятий, введенных в *определении 2*, используя диаграммы Венна:



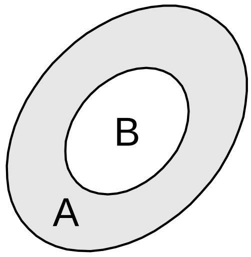
$A\cup B$



$A\cap B$



$A \setminus B$



$B\subset A$, $C_A B = A \setminus B$

Пример. Найти $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $C_A B$, $C_B A$, если A и B – множество всех букв слов «волокита» и «титан» соответственно.

Решение. От словесного задания множеств A и B перейдем к заданию этих множеств перечислением их элементов: A = {в; о; л; к; и; т; а}, B = {т; и; а; н}. По *определению 2* имеем: $A\cup B$ = {в; о; л; к; и; т; а; н}, $A\cap B$ = {т; и; а}, $A\setminus B$ = {в; о; л; к}, $B\setminus A$ = {н}. Так как н$\in B$ и н$\notin A$, то $B\not\subset A$. Так как, например, в$\in A$ и в$\notin B$, то $A\not\subset B$. Следовательно, множества $C_A B$ и $C_B A$ не определены.

Отметим основные свойства операций нахождения объединения, пересечения и разности двух множеств.

Теорема 1. Пусть X, Y и Z – какие-либо множества. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) $X\cup Y=Y\cup X$; 1′) $X\cap Y=Y\cap X$;

2) $(X \cup Y)\cup Z=X\cup(Y\cup Z)$; 2′) $(X \cap Y)\cap Z=X\cap(Y\cap Z)$;

3) $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$; 3′) $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$;

4) $X\cup X=X$ и $X\cup\varnothing=X$; 4′) $X\cap X=X$ и $X\cap\varnothing=\varnothing$;

5) $X\subset(X\cup Y)$, $(X\cap Y)\subset X$, $(X\setminus Y)\subset X$;

6) $Z\setminus(X\cup Y)=(Z\setminus X)\cap(Z\setminus Y)$; 6′) $Z\setminus(X\cap Y)=(Z\setminus X)\cup(Z\setminus Y)$.

Доказательство. Утверждения 1), 1′), 2), 2′), 4), 4′) и 5) являются простыми следствиями определений 1 и 2**.** Докажем утверждение 3, то есть равенство $M_1=M_2$, где $M_1 \overset{df}{=} ((X\cup Y)\cap Z)$ и $M_2 \overset{df}{=} ((X\cap Z)\cup(Y\cap Z))$.

1 этап. Предположим, что $a\in M_1$. Тогда по определению множества M_1 и определениям пересечения и объединения множеств имеем: ($a\in X$ или $a\in Y$)

и $a \in Z$. Отсюда следует, что ($a \in X$ и $a \in Z$) или ($a \in Y$ и $a \in Z$), и по определениям пересечения и объединения множеств заключаем, что $a \in ((X \cap Z) \cup (Y \cap Z))$, то есть $a \in M_2$. Итак, каждый элемент множества M_1 является также элементом множества M_2. По определению 1 делаем вывод: $M_1 \subset M_2$.

2 этап. Предположим, что $a \in M_2$. Аналогично тому, как доказывалось на 1-ом этапе, убеждаемся, что $a \in M_1$. Но тогда $M_2 \subset M_1$.

Из утверждений: $M_1 \subset M_2$, $M_2 \subset M_1$ и определения 1 следует, что $M_1 = M_2$, что и требовалось доказать.

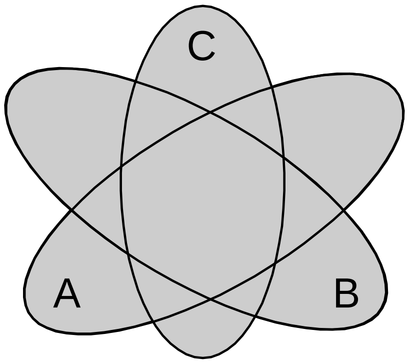
Аналогично доказываются утверждения 3′), 6) и 6′). Теорема доказана. ■

Свойства 1), 1′), 2), 2′), 3) и 3′), установленные выше, носят названия: *коммутативность объединения* множеств, *коммутативность пересечения* множеств, *ассоциативность объединения* множеств, *ассоциативность пересечения* множеств, *дистрибутивность пересечения относительно объединения* множеств, *дистрибутивность объединения относительно пересечения* множеств соответственно. Свойства 6) и 6′) называются *законами де Моргана* для множеств (по имени шотландского математика и логика де Августуса Моргана, 1806-1871). Для частного случая, когда $X \subset Z$ и $Y \subset Z$, следовательно, и $(X \cup Y) \subset Z$, $(X \cap Y) \subset Z$ утверждения 6) и 6′) могут быть записаны в виде: $C_Z(X \cup Y) = (C_Z X) \cap (C_Z Y)$ и $C_Z(X \cap Y) = (C_Z X) \cup (C_Z Y)$ соответственно.
Если же $Z = U$ – универсальное множество, то 6) и 6′) принимают вид: $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ и $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

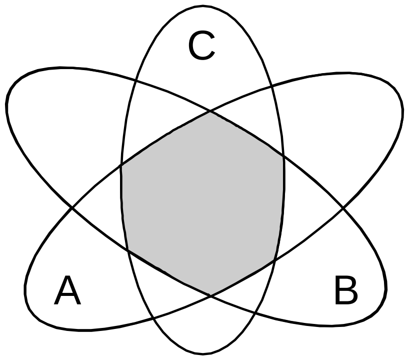
Введенные понятия объединения и пересечения для двух множеств обобщаются на случай любого числа множеств.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где $n \in \mathbf{N}$ и $n > 1$,– данные множества ($A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ – бесконечное число данных множеств). *Объединением* данных множеств называется множество, обозначаемое символами $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ или $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup \ldots$ или $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$) и состоящее из всех тех объектов, которые принадлежат хотя бы одному из данных множеств. Аналогично вводится понятие *пересечения* данных множеств, обозначаемое символами $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ или $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ ($A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \ldots$ или $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$).

Дадим геометрическую иллюстрацию объединения и пересечения трех множеств A, B, C с помощью диаграмм Венна:



A∪B∪C



A∩B∩C

n°3. Семейство всех подмножеств данного множества. Разбиение данного множества

В некоторых исследованиях приходится рассматривать множества, все или некоторые элементы которого в свою очередь являются множествами. В этих случаях, желая избежать громоздкого словосочетания «множество множеств», исходное множество называют семейством (напомним, что «семейство» – синоним слова «множество»).

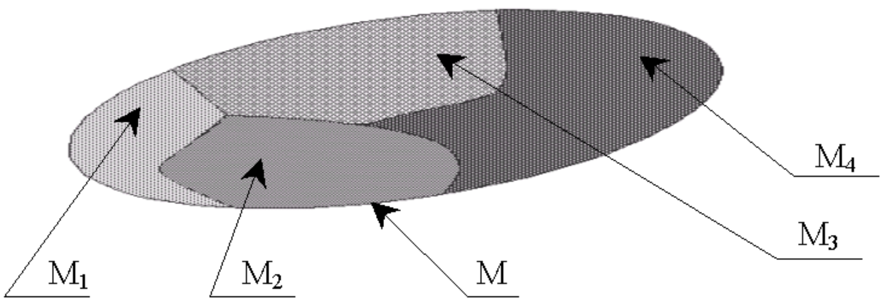
Определение. Семейство $\mathfrak{R}$ некоторых подмножеств данного множества M называется *разбиением множества M*, если выполняются следующие требования:

1) каждое из множеств, принадлежащее $\mathfrak{R}$, не пустое;

2) любые два различных множества, принадлежащих $\mathfrak{R}$, являются непересекающимися;

3) объединение всех множеств, принадлежащих $\mathfrak{R}$, совпадает с M.

Множества, принадлежащие разбиению $\mathfrak{R}$ множества M, называются *классами разбиения* $\mathfrak{R}$.



Если, например, $\mathfrak{R} = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$ – разбиение множества M, то согласно *определению 3* имеем:

1) если $i \in \boldsymbol{N}$ и $1 \le i \le 6$, то $M_i \ne \varnothing$;

2) если $i \ne j$ и $i, j \in \boldsymbol{N}$ и $1 \le i, j \le 6$, то $M_i \cap M_j = \varnothing$;

3) $\bigcup\limits_{i=1}^{6} M_i = M$.

Пример. Установить являются ли семейства $\mathfrak{R}_1$={[0; 2], (2; 3], [3; 6)}, $\mathfrak{R}_2$={[0; 2], (2; 3], (3; 6]} и $\mathfrak{R}_3$={[0; 2], (2; 3], (3; 6)} разбиениями множества M=[0; 6).

Решение. Так как $(2; 3]\cap(3; 6]=\{3\}\neq\varnothing$, то семейство $\mathfrak{R}_1$ не является разбиением множества M. Семейство $\mathfrak{R}_2$ также не является разбиением множества M в виду невыполнения 3-его требования, предъявляемого к разбиениям данного множества в *определении 3:* $[0; 2]\cup(2; 3]\cup(3; 6]=[0; 6]\neq M$. Проверка убеждает, что семейство $\mathfrak{R}_3$ – разбиение множества M.