100 Задач по теме "Комбинаторика"

Выполнил студент 113 группы Файтельсон Антон

1. задача Пароль

   Источник: ICPC 2022-2023 NERC (NEERC), квалификационный этап Чемпионата Юга и Поволжья России

   Монокарп забыл пароль от своего телефона. Пароль состоит ровно из 6 цифр от 0 до 9 (обратите внимание, что пароль может начинаться с цифры 0).

   Монокарп помнит, что в его пароле были ровно две различные цифры, причем каждая из этих цифр встречалась в пароле ровно по три раза. Также Монокарп помнит количество цифр (n), которых точно не было в его пароле .

   Посчитайте количество последовательностей из 6 цифр, которые могли бы быть паролем Монокарпа (то есть которые подходят под все описанные условия).

   ## Решение:

   Так как Монокарп помнит количество цифр, которых точно не было в пароле, тогда количество цифр, которые возможно были в пароле равно

   $$(10 - n)$$

   Возьмем простейший случай, когда всего два возможных претендента на числа в пароле - 1 и 0.

   Найдем, сколькими способами мы можем выбрать 3 позиции из 6 возможных:

   $$\mathrm{C}_6^3 = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

Вернемся к случаю, когда у нас $10-n$ возможных чисел. Найдем сколько можно составить пар из этих чисел.

$$C^2_{10-n} = \frac{(10-n)!}{(8-n)! \times 2!} = \frac{(10-n)! \times (9-n)!}{2}$$

Тогда решением задачи будет формула:

$$C^3_6 \times C^2_{10-n} = 20 \times \frac{(10-n)! \times (9-n)!}{2} = 10 \times (10-n)! \times (9-n)!$$

Ответ: $10 \times (10-n)! \times (9-n)!$

2. задача

Источник: С.Якунин сайт kompege.ru

Полина составляет 21-буквенные слова из букв слова РЕКОГНОСЦИРОВКА. Каждая гласная в них используется столько раз, сколько в слове РЕКОГНОСЦИРОВКА. Каждая согласная может использоваться сколько угодно раз или не использоваться совсем. Сколько слов может составить Полина, если известно, что сумма порядковых номеров гласных букв, в каждом из них, равна 21? Буквы нумеруются слева направо, начиная с единицы.

Решение:

Подсчёт конфигураций: 21 нам даёт единственный набор, состоящий из 6 неповторяющихся гласных: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6. Гласные, которые могут стоять на этих местах: 3 буквы О, одна буква А, одна буква И и одна буква Е. Так как неповторяющихся букв у нас всего 3, значит нам нужно выбрать только для них позиции, значит всего:

$$\frac{6!}{3!} = 4 \times 5 \times 6 = 120$$

Размещение согласных: Любая согласная может занимать одну из следующих 15 позиций. Имеем 15 перемноженных семёрок (размещения с повторениями) или 7^{15} = 4747561509943.

Итоговый подсчёт слов: Итак, в каждой из 120 конфигураций есть 4747561509943 вариантов. Значит, всего слов:

$$120 \times 4747561509943 = 569707381193160$$

Ответ: 569707381193160

3. задача

Источник: Дискретная математика. Учебник и задачник для Вузов (Баврин И.И.)

Пусть имеется n сортов мономеров (например, азотистых оснований). Из этих мономеров образуется полимер, который можно представить как цепочку из k мономеров. При этом k, как правило, больше n, и мономеры в цепочке могут повторяться. Какое количество различных полимеров длины k можно образовать из данных n сортов мономеров?

Решение:

Будем считать набор мономеров алфавитом из n элементов. Тогда каждый полимер, состоящий из k мономеров, есть слово длины n. Число таких слов, как известно, равно n^k, а число различных полимеров будет в два раза меньше, так как, например, молекулы $a_1a_2a_3$ и $a_3a_2a_1$ не различаются (одна из них превращается в другую, если ее повернуть на $180°$).

В частности, если алфавит состоит из четырех азотистых оснований А, Ц, Г и Т (т. е. n = 4), а полимером является ген (средняя длина гена равна 1000 единиц, т. е. k = 1000), то число всевозможных генов, которые можно получить из четырех оснований, равно

$$\frac{1}{2}n^k = \frac{1}{2}4^{1000} = \frac{2^{2000}}{2} = 2^{1999}$$

Это громадное число. По некоторым подсчетам, оно превосходит общее число атомов в Солнечной системе

Ответ: $\frac{1}{2}n^k$

4. задача

Источник: Дискретная математика. Учебник и задачник для Вузов (Баврин И.И.)

Хорошо известно, что хромосому схематично можно представить как цепочку из генов. При этом свойства хромосомы зависят не только от состава генов, но и от их расположения в цепочке. Существуют методы, позволяющие изменить порядок генов в хромосоме. Возникает вопрос: какое количество хромосом можно получить из данной, изменяя в ней порядок следования генов?

Решение:

Пусть исходная хромосома состоит из n генов. Обозначим их $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и пусть $\mathrm{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Тогда понятно, что каждая хромосома, имеющая данный набор генов, есть перестановка множества А. Число таких перестановок, как известно, равно $n!$.

Ответ: $n!$

5. задача

Источник: Джеймс Андерсон: Дискретная математика и комбинаторика

"Фулл хаус"содержит три карты одного ранга и две карты другого ранга. Например, расклад, содержащий три короля и две шестерки представляет собой "фулл хаус". Сколько существует 5-карточных раскладов с "фулл хаус"?

Решение:

Предположим, что "фулл хаус"составили три короля и две шестерки. Три короля выбираются из четырех, поэтому существуют $C_4^3 = 4$ способа выбрать трех королей. Две шестерки выбираются из четырех, поэтому существуют $C_4^2 = 6$ способов выбрать две шестерки. Поэтому, согласно комбинаторному принципу умножения существуют $4 \times 6 = 24$ способа выбрать трех королей и две шестерки или три карты одного ранга и две карты другого ранга. Существуют 13 способов выбрать три карты одного ранга и 12 способов выбрать две карты одного ранга. Поэтому существуют $13 \times 12 = 156$ различных способов сочетания рангов. Следовательно, существуют $156 \times 24 = 3744$ возможных 5-карточных раскладов с "фулл хаус".

Ответ: 3744

6. задача

Источник: Дагестанский государственный университет народного хозяйства учебное пособие по дисциплине "математика"

Сколько существует вариантов опроса 11 учащихся на одном занятии, если ни одни из них не будет подвергнут опросу дважды и на занятии может быть опрошено любое количество учащихся, причем порядок, в котором опрашиваются учащиеся, безразличен?

Решение:

Имеется генеральная совокупность объема 11 учащихся. Преподаватель может не опросить ни одного из 11 учащихся, что является одним из вариантов. Этому случаю соответствует C_{11}^0. Преподаватель может опросить только одного из учащихся, таких вариантов C_{11}^1 Если преподаватель опросит двух учащихся, то число вариантов опроса C_{11}^2 и т. д. Наконец, могут быть опрошены все учащиеся. Число вариантов в этом случае C_{11}^{11}

Число всех возможных вариантов опроса можно найти по правилу сложения:

$$C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + \ldots + C_{11}^1 1 = 2^{11} = 2048$$

Ответ: 2048

7. задача

Источник: Джеймс Андерсон: Дискретная математика и комбинаторика

Десять команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу, лучшие из которых занимают 1-е, 2-е и 3-е место. Две команды, занявшие последние места, не будут участвовать в следующем таком же первенстве. Сколько разных вариантов результата первенства может быть, если учитывать только положение первых трех и последних двух команд.

Решение:

Имеется генеральная совокупность объема 10 команд. Из нее будем выбирать 5 команд в 2 этапа: 1) сначала на первые 3 места из 10 с учетом состава и порядка команд; 2) затем на последние 2 места из оставшихся 7 с учетом только состава (порядок выбывших команд не важен). Первые 3 места могут быть распределены $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 720$ способами. Число способов исключить 2 команды из оставшихся 7 равно $\mathrm{C}_7^2 = \frac{7!}{2! \times 5!} = 21$. Согласно правилу умножения получаем, что число разных результатов неравенства равно:

$$\mathrm{C}_7^2 \times A_{10}^3 = 15120$$

Ответ: 15120

8. задача

Источник: Задачи по комбинаторике, Шварц Д. А.

У бедного студента осталось гречки на две порции, риса на три порции и макарон на две порции. Сколько у студента способов съесть это на завтраки в течение недели (по одной порции в день)?

Решение:

Если студент разложит имеющиеся 7 порций еды по разным тарелкам, то количество вариантов выбора будет составлять $P_7 = 7!$, но поскольку разные порции, например, риса не отличимы, то общее количество необходимо разделить на количество перестановок из 2 элементов $P_2 = 2!$(число способов упорядочить 2 тарелки с гречкой), затем на $P_3 = 3!$ (число способов упорядочить 3 тарелки с рисом), затем на $P_2 == 2!$ (макароны). Итого получим кол-во способов завтракать в течение недели для нашего бедного студента.

$$\frac{7!}{2! \times 3! \times 2!} = 210$$

Ответ: 210

9. задача

Источник: Дагестанский государственный университет народного хозяйства учебное пособие по дисциплине "математика"

При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

Решение:

Так как у нас всего 28 костей, то каждому игроку необходимо дать $28 \div 4$ = 7 костей. Представим, что кости данные игроку 1 получают некоторое св-во и становяться одинаковыми. Аналогично с другими игроками. Тогда кол-во способов поделить кости будет равно

$$\overline{P_{7,7,7,7}} = \frac{28!}{7! \times 7! \times 7! \times 7!} = 472518347558400$$

Данное упрощение имеет смысл так, как нас не волнует порядок костей, которые мы дали игрокам, тогда для упрощения вычисления их можно считать равными Ответ: 472518347558400

10. задача

Источник: Джеймс Андерсон: Дискретная математика и комбинаторика

Сколькими способами можно расположить для фотографирования пять мальчиков и пять девочек, если ни две девочки, ни два мальчика не должны стоять рядом?

Решение:

В данной ситуации первым в ряду может быть либо мальчик, либо девочка. Если первой стоит девочка, то ряд имеет вид ДМДМДМДМДМ. Имеются $5!$ способов расставить девочек на позициях Д и $5!$ способов расставить мальчиков на позициях М. Поэтому, существуют $5! \times 5!$ способов расположить детей в ряд, если первой стоит девочка. Аналогично, существуют $5!x5!$ способов расположить детей в ряд, если первым стоит мальчик. Таким образом, имеются $2x5!x5! = 28800$ способов расположить детей в ряд для фотографирования.

Ответ: 28800

11. задача

Источник: Джеймс Андерсон: Дискретная математика и комбинаторика

Сколькими способами можно рассадить 10 человек за круглым столом, если имеет значение только порядок соседей.

Решение:

Предложим, что место за столом уникально. Посадим одного человека на это место и будем считать его место опорным элементом, тогда следующего человека(соседа опорного элемента) можно выбрать $10 - 1 = 9$ способами, находящегося рядом с соседом человека можно выбрать $9 - 1 = 8$ способами, тогда общее кол-во способов рассадки равно:

$$P_9 = P! = 362880$$

Ответ: 362880

12. задача

Источник: Джеймс Андерсон: Дискретная математика и комбинаторика

Сколько различных четырехзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, . . . , 9, если все цифры в каждом четырехзначном числе различны?

Решение:

Для формирования каждого четырехзначного числа выбираем четыре цифры из девяти, поэтому всего таких чисел существует:

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 3024$$

Ответ: 3024

13. задача

Источник: Дискретная математика. Учебник и задачник для Вузов (Баврин И.И.)

Нужно присудить первую, вторую и третью премии на конкурсе, в котором принимают участие 20 человек . Сколькими способами можно распредилить эти премии?

Решение:

Ответом на данную задачу будут являться количество размещений по 3 человека из 20:

$$A_{20}^3 = (20) \times (20-1) \times (20-2) = 20 \times 19 \times 18 = 6840$$

Ответ: 6840

14. задача

Источник: Дагестанский государственный университет народного хозяйства учебное пособие по дисциплине "математика"

В театре 10 актеров и 8 актрис. Сколькими способами можно распределить между ними роли в пьесе, в которой 5 мужских и 3 женские роли?

Решение:

Так как нам важен порядок при распределении ролей, то нам нужны размещения, тогда Ответом на данную задачу будут являться произведение размещения из 10 элементов по 5 и размещения из 8 элементов по 3:

$$A_{10}^5 \times A_8^3 = \frac{10!}{5!} \times \frac{8!}{5!} = 10160640$$

Ответ: 10160640

15. задача

Источник: Дискретная математика. Учебник и задачник для Вузов (Баврин И.И.)

Восемь лабораторных животных нужно проранжировать в соответствии с их способностями выполнять определенные задания. Каково число возможных ранжировок, если допустить, что одинаковых способностей нет?

Решение:

Так как одинаковых способностей нет, то тогда в комбинациях не будет повторений. Ответом на данную задачу будут являться количество перестановок из 8 лабораторных животных:

$$P_8 = 8! = 40320$$

Ответ: 40320

16. задача

Источник: Дискретная математика. Учебник и задачник для Вузов (Баврин И.И.)

Комитет состоит из 12 человек. Минимальный кворум на заседаниях этого комитета должен насчитывать восемь членов. Сколькими способами может достигаться минимальный кворум?

Решение:

Ответом на данную задачу будут являться количество сочетаний по 8 человека из 12:

$$C_{12}^{8} = \frac{12!}{8! \times 4!} = 495$$

Ответ: 495

17. задача

Источник: Дискретная математика. Учебник и задачник для Вузов (Баврин И.И.)

В лабораторной клетке содержатся 8 белых и 6 коричневых мышей. Найдите число способов выбора пяти мышей из клетки, если они могут быть любого цвета.

Решение:

Найдем кол-во мышей в общей сложности $8 + 6 = 14$, тогда ответом на данную задачу будут являться количество сочетаний по 5 мышей из 14 возможных:

$$C_{14}^{5} = \frac{14!}{9! \times 5!} = 2002$$

Ответ: 2002

18. задача

Источник: Джеймс Андерсон: Дискретная математика и комбинаторика

Сколько существует вариантов выбора 5 карт из стандартной ко- колоды, содержащей 52 карты?

Решение:

Поскольку порядок карт не имеет значения, речь идет о выборе 5 объектов из 52, поэтому существует всего комбинация:

$$C_{52}^{5} = \frac{52!}{5! \times 47!} = 2598960$$

Ответ: 2598960

19. задача

Источник: Джеймс Андерсон: Дискретная математика и комбинаторика

Сколькими способами можно вытянуть 5 карт трефовой масти из стандартной колоды, содержащей 52 карты?

Решение:

В колоде имеется 13 треф, из которых выбираются 5, поэтому существует всего:

$$C_{13}^{5} = \frac{13!}{8! \times 5!} = 1287$$

Ответ: 1287

20. задача

Источник: Джеймс Андерсон: Дискретная математика и комбинаторика

Сколькими способами можно выбрать комитет, включающий 6 мужчин и 8 женщин, из группы, состоящей из 12 мужчин и 20 женщин?

19!

Решение:

Найдем кол-во способов выбора мужчин и кол-во способов выбора женщин

$$C_{12}^{6} = \frac{12!}{6! \times 6!}$$
$$C_{20}^{8} = \frac{20!}{8! \times 12!}$$

Поэтому, согласно комбинаторному принципу умножения, найдем кол-во способов выбрать комитет:

$$C_{20}^{8} \times C_{12}^{6} = 116396280$$

Ответ: 116396280