Министерство образования Российской Федерации

ФГБОУ ВО Курский государственный университет

Кафедра алгебры, геометрии и теории обучения математике

Дискретная математика

учебно-методического обеспечение для самостоятельной работы обучающихся
по направлению 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Составители:
Водолад С.Н.

Курск 2017

Самостоятельная работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности.

Самостоятельная работа проводится с целью:

– систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;

– углубления и расширения теоретических знаний;

– формирования умений использовать литературу, интернет источники, электронные информационные и образовательные ресурсы;

– развития познавательных способностей и активности обучающихся;

– формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

– развития исследовательских умений.

Самостоятельная работа по дисциплине включает в себя:

– подготовку к аудиторным занятиям (лекциям и практическим занятиям);

– самостоятельную работу над отдельными темами дисциплины;

– выполнение контрольных работ, электронных презентаций;

– подготовку ко всем видам контроля.

Формы и виды самостоятельной работы студентов:

– самостоятельное изучение материала по литературным источникам;

– работа с библиотечным каталогом, самостоятельный подбор необходимой литературы;

– поиск необходимой информации в сети Интернет;

– конспектирование источников информации;

– подготовка к различным формам контроля (к контрольной работе, зачету с оценкой).

– выполнение домашних работ.

Формы контроля самостоятельной работы:

– просмотр и проверка выполнения самостоятельной работы преподавателем;

– обсуждение результатов выполненной работы на занятии;

– проведение письменного опроса;

– проведение устного опроса;

– организация и проведение индивидуального собеседования.

Темы для самостоятельной работы

Раздел 1. Множества

1. Множества. Способы их задания.
2. Отношения между множествами.
3. Операции над множествами. Основные свойства операций над множествами.
4. Разбиение множества на попарно-непересекающиеся классы.
5. Декартово произведение множеств.
6. Бинарные отношения.
7. Виды отношений.

Раздел 2. Комбинаторика.

1. Сочетания, размещения перестановки без повторений.
2. Сочетания, размещения перестановки с повторениями.
3. Основные комбинаторные правила.
4. Метод включения-исключения.
5. Определение биномиальных коэффициентов.
6. Треугольник Паскаля и его свойства.
7. Основные тождества с биномиальными коэффициентами.
8. Бином Ньютона. Биномиальные формулы.

Раздел 3. Рекуррентные соотношения

1. Понятие рекуррентного соотношения.
2. Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.
3. Теорема о решении ЛОРС с постоянными коэффициентами и ее следствия.
4. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Раздел 4. Булевы функции

1. Булевы функции.
2. ДНФ, КНФ.
3. СДНФ, СКНФ.
4. Теорема о функциональной полноте.
5. Многочлены Жегалкина.
6. Линейность многочленов Жегалкина.

Раздел 5. Элементы теории графов

1. Основные понятия теории графов.
2. Элементы графов.
3. Виды графов.
4. Операции над графами.
5. Изоморфизм графов.
6. Матрицы смежности и инцидентности.
7. Связность в графах.
8. Матрицы достижимости и контрдостижимости.

Раздел 6. Расстояния в графах

1. Маршруты, цепи, циклы.
2. Расстояния в графах.
3. Выявление маршрутов с заданным количеством ребер.
4. Алгоритмы нахождения кратчайших путей в графе..

Раздел 7. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Раскраски графов.

1. Эйлеровы графы. Алгоритм Флери.
2. Гамильтоновы графы.
3. Обходы графа по ширине и глубине.
4. Раскраски графов
5. Теорема о пяти красках, гипотеза четырех красок.

Раздел 8. Сети.

1. Планарность графов.
2. Деревья. Основные определения и свойства.
3. Ориентированные, упорядоченные и бинарные деревья.
4. Алгоритм выделения остовного дерева.
5. Минимальные остовные деревья нагруженных графов.
6. Сети. Транспортные сети

Основная литература

1. Шевелев Ю.П. - Дискретная математика: учеб. пособие, доп. МО РФ - СПб.: Лань, 2008.

2. Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В. - Дискретная математика: учебник - Новосибирск: НГТУ, 2012.

3. Жигалова Е.Ф. - Дискретная математика: учебное пособие - Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Эль Контент, 2014.

Дополнительная литература

1. Кузнецов О.П. - Дискретная математика для инженера - СПб.: Лань, 2007.
2. Ерусалимский Я.М. - Дискретная математика: теория,задачи, приложения: учеб. пособие для вузов, доп. МО РФ - М.: Вузовская книга, 2006.
3. Соболева Т.С., Чечкин А.В. - Дискретная математика: учеб. пособие для вузов, доп. МО РФ - М.: Академия, 2006.
4. Поздняков С.Н., Рыбин С.В. - Дискретная математика: учебник, доп. МО РФ - М.: Академия, 2008.
5. Шойтова Г.Ю. - Дискретная математика: сб. задач - Курск: РОСИ, 2008.
6. Ковалева Л. Ф. - Дискретная математика в задачах - Москва: Евразийский открытый институт, 2011.
7. Храмова Т. В. - Дискретная математика. Элементы теории графов: Учебное пособие - Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2014.

МНОЖЕСТВА

Множество является основным (неопределяемым) понятием «Теории множеств», раздела математики, сформировавшегося во второй половине XIX века, в основном, благодаря работам немецкого математика Георга Кантора (1845–1918). Синонимы слова «множество»: «совокупность», «собрание», «коллекция», «семейство», «класс», «система», «комплекс», «ансамбль», и т.д.

Г. Кантор рассматривал множество как любое собрание определенных и различных между собой объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое как единое целое.

Примеры множеств: множество всех корней данного уравнения, множество студентов в аудитории, множество молекул данного тела, и т.д.

Множества чаще всего обозначаются большими латинскими буквами: A, B, C, … , снабженными, возможно, индексами. Некоторые множества имеют «персональные» обозначения: N - множество всех натуральных чисел, Z – множество всех целых чисел, Q - множество всех рациональных чисел, R – множество всех действительных чисел, [a; b], [a; b), (a; +∞), … – числовые промежутки.

Объекты, составляющие данное множество, называются его элементами. Если a – элемент множества A, то это записывается так: $a \in A$, при этом говорят, что «объект a принадлежит множеству A» или «множество A содержит объект a». Если же a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$. Символ $\in$ называется знаком принадлежности. Знак $\in$ является стилизацией первой буквы греческого слова «εστι» (есть, быть).

Для удобства и единства обозначений условились считать, что существует множество, не имеющее элементов. Это множество называют пустым множеством и обозначают символом $\varnothing$. Введение пустого множества позволяет, например, говорить о множестве всех корней данного уравнения даже в том случае, когда это уравнение корней не имеет.

Если для множества A существуют натуральное число k, равное числу его элементов, то множество A называется конечным, точнее k-элементным. Пустое множество относят к конечным множествам. Множество, не являющееся конечным, называется бесконечным. Число элементов конечного множества A обозначается одним из символов: n(A) или |A|, причем $n(\varnothing) \overset{df}{=} 0$.

Примеры конечных множеств: множество всех корней уравнения x3–5x2+6x=0, множество всех песчинок на берегу Черного моря, множество всех отрицательных натуральных чисел и т.д. Примеры бесконечных множеств: N, Z, Q, R, (-2; 5], множество всех окружностей данной плоскости и т.д.

Будем считать, что множество A задано, если задано правило, позволяющее для каждого объекта a ответить на вопрос: какое из данных утверждений верно $a \in A$ или $a \notin A$.

Предложим следующие способы задания множеств.

Если A – данное множество, состоящее из n элементов: x1, x2, …, xn, то пишут:

A = {x1 ; x2 ; …; xn} (1)

и говорят, что множество A задано перечислением всех его элементов.

Заметим, что в записи (1) порядок перечисления элементов не существенен, и стоит различать символы a и {a} (a – некоторый объект, {a} – множество, состоящее из одного элемента a). Например, A = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} – множество всех цифр десятичной системы счисления, B = {р, и, а} – трехэлементное множество некоторых букв русского алфавита.

Множество может быть задано указанием характеристического свойства его элементов, то есть такого свойства, которым обладает каждый элемент данного множества и не обладает не один объект, не являющийся его элементом. Если P(x) – характеристическое свойство элементов множества A, то пишут: A = {x | P(x)} (чтение: «A – множество всех x, таких, что x обладает свойством P(x)) и говорят, что множество A задано описанием характеристического свойства его элементов. Например, A = {x | x3-5x2+6x=0} – множество всех x таких, что x – корень уравнения x3-5x2+6x=0 (короче, A – множество всех корней уравнения x3-5x2+6x=0), B = {x | 2≤x<5} – бесконечное множество, имеющее персональное обозначение: [2; 5) и название: числовой промежуток от 2 до 5, включая 2.

В речевой практике множества чаще всего задаются словесным описанием характеристического свойства элементов данного множества. Такой способ задания множества естественно назвать словесным. Пример словесного задания множества: C – множество всех гласных букв слова «заморозки». Заметим, что, то же множество C можно задать перечислением его элементов: C = {а; о; и} или описанием характеристического свойства его элементов: C = {x | x – гласная буква слова «заморозки»}.

Наконец, некоторые множества могут быть заданы использованием «персональных» обозначений множеств. Например, A = (–∞; 2], то есть A – числовой промежуток от –∞ до 2, включая 2.

СРАВНЕНИЕ ДВУХ МНОЖЕСТВ. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Определение 1. Если каждый элемент множества A является также элементом множества B, то пишут A⊂B и говорят, что множество A включается во множество B, или, что множество B включает множество A (символ ⊂ – знак включения). При этом множество A называется подмножеством множества B. Если одновременно A⊂B и B⊂A, то пишут A=B и говорят, что множество A и B совпадают, или, что множество A равно множеству B. Если утверждение $A \subset B$ ($A=B$) ложно, то пишут $A \not\subset B$ ($A \neq B$).

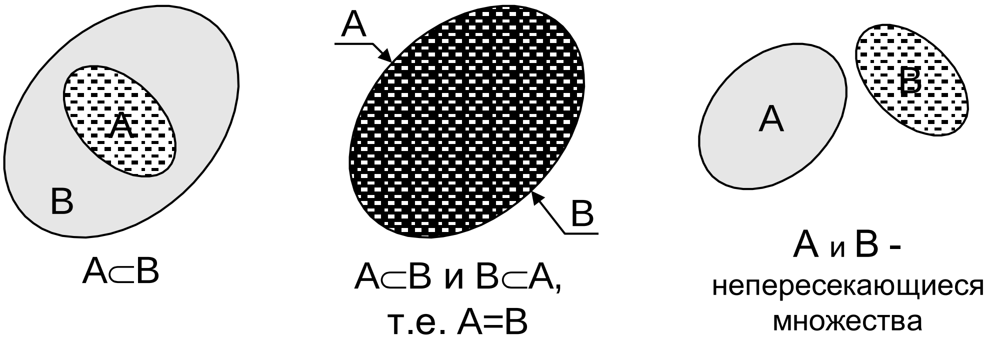
В случае, когда множества A и B не имеют общих элементов, эти множества называются непересекающимися.

Любое подмножество множества R называется числовым множеством.

Для большей наглядности множества иногда «изображают» в виде плоских фигур, называя такие изображения диаграммами Венна (по имени английского математика и логика Джона Венна, 1834-1923).

Числовые множества чаще всего будем изображать множествами координатной прямой, как это делалось в средней школе.

Воспользуемся диаграммами Венна для геометрической иллюстрации введенных в определении 1 понятий:



Если X – n-элементное множество, то любое его k-элементное подмножество, где $n, k \in N$ и $k \leq n$, называется сочетанием из n элементов (множества X) по k. При этом число всех сочетаний из n элементов по k обозначается символом C_n^k. Можно убедиться, что

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Так, например, для множества X={a; b; c; d; e} подмножество {b; d; e} является сочетанием из пяти элементов по три, а число всех таких сочетаний равно $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$.

Замечание. Желая избежать ряда логических трудностей, будем полагать, что в каждом конкретном исследовании все рассматриваемые множества являются подмножествами фиксированного множества U, а рассматриваемые объекты – элементы этого множества. Множество U будем называть универсальным множеством (для данного исследования).

Определение 2. Пусть A и B – какие-либо множества. Объединением множеств A и B называется множество, обозначаемое символом $A\cup B$ и состоящее из всех объектов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B.

Пересечением множеств A и B называется множество, обозначаемое символом $A\cap B$ и состоящее из всех объектов, принадлежащих одновременно каждому из множеств A, B.

Разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое символом A\B и состоящее из всех объектов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B. В случае, когда $B\subset A$, разность A\B называется еще дополнением множества B до множества A и обозначается символом CAB.

Дополнение множества B до универсального множества U будем называть дополнением множества B и обозначать одним из символов CUB, $\overline{C}$ или B′.

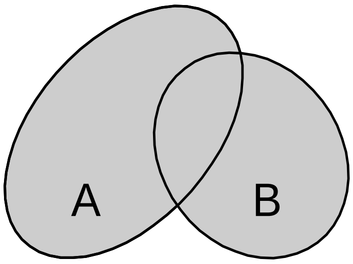
Итак, по определению 2 имеем:

$A\cup B \overset{df}{=} \{x \mid x\in A \text{ или } x\in B\}$, $A\cap B \overset{df}{=} \{x \mid x\in A \text{ и } x\in B\}$, $A\setminus B \overset{df}{=} \{x \mid x\in A \text{ и } x\notin B\}$.

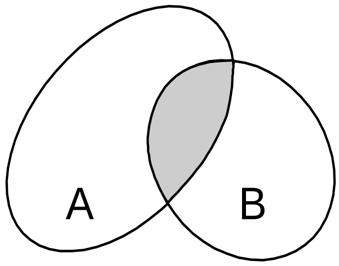
Здесь и далее каждая из записей $a \overset{опр.}{=} b$, $a \overset{df}{=} b$, $a \overset{def}{=} b$ обозначает совпадение объектов a, b по определению; df и def – первая и третья, первые три буквы латинского слова «definito» (определение) соответственно.

Первая буква слова Union («объединение») помогает вспомнить, что из знаков $\cup$, $\cap$ для обозначения объединения множеств используется знак $\cup$.

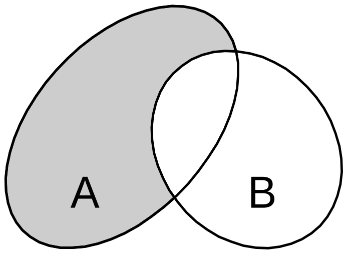
Дадим геометрическую иллюстрацию понятий, введенных в определении 2, используя диаграммы Венна:



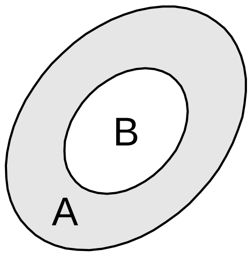
$A\cup B$



$A\cap B$



$A \setminus B$



$B\subset A$, $C_A B = A \setminus B$

Пример. Найти $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, CAB, CBA, если A и B – множество всех букв слов «волокита» и «титан» соответственно.

Решение. От словесного задания множеств A и B перейдем к заданию этих множеств перечислением их элементов: A = {в; о; л; к; и; т; а},
B = {т; и; а; н}. По определению 2 имеем: $A\cup B$ = {в; о; л; к; и; т; а; н}, $A\cap B$ = {т; и; а}, $A\setminus B$ = {в; о; л; к}, $B\setminus A$ = {н}. Так как н$\in$B и н$\notin$A, то $B\not\subset A$. Так как, например, в$\in$A и в$\notin$B, то $A\not\subset B$. Следовательно, множества CAB и CBA не определены.

Отметим основные свойства операций нахождения объединения, пересечения и разности двух множеств.

Теорема 1. Пусть X, Y и Z – какие-либо множества. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) $X\cup Y=Y\cup X$; 1′) $X\cap Y=Y\cap X$;

2) $(X\cup Y)\cup Z=X\cup(Y\cup Z)$; 2′) $(X\cap Y)\cap Z=X\cap(Y\cap Z)$;

3) $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$; 3′)$(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$;

4) $X\cup X=X$ и $X\cup\varnothing=X$; 4′) $X\cap X=X$ и $X\cap\varnothing=\varnothing$;

5) $X\subset(X\cup Y)$, $(X\cap Y)\subset X$, $(X\setminus Y)\subset X$;

6) $Z\backslash(X\cup Y)=(Z\backslash X)\cap(Z\backslash Y)$; 6′) $Z\backslash(X\cap Y)=(Z\backslash X)\cup(Z\backslash Y)$.

Доказательство. Утверждения 1), 1′), 2), 2′), 4), 4′) и 5) являются простыми следствиями определений 1 и 2. Докажем утверждение 3, то есть равенство M1=M2, где $M1 \overset{df}{=} ((X\cup Y)\cap Z)$ и $M2 \overset{df}{=} ((X\cap Z)\cup(Y\cap Z))$.

1 этап. Предположим, что $a\in M1$. Тогда по определению множества M1 и определениям пересечения и объединения множеств имеем: ($a\in X$ или $a\in Y$) и $a\in Z$. Отсюда следует, что ($a\in X$ и $a\in Z$) или ($a\in Y$ и $a\in Z$), и по определениям пересечения и объединения множеств заключаем, что $a\in((X\cap Z)\cup(Y\cap Z))$, то есть $a\in M2$. Итак, каждый элемент множества M1 является также элементом множества M2. По определению 1 делаем вывод: $M1\subset M2$.

2 этап. Предположим, что $a\in M2$. Аналогично тому, как доказывалось на 1-ом этапе, убеждаемся, что $a\in M1$. Но тогда $M2\subset M1$.

Из утверждений: $M1\subset M2$, $M2\subset M1$ и определения 1 следует, что M1=M2, что и требовалось доказать.

Аналогично доказываются утверждения 3′), 6) и 6′). Теорема доказана. ■

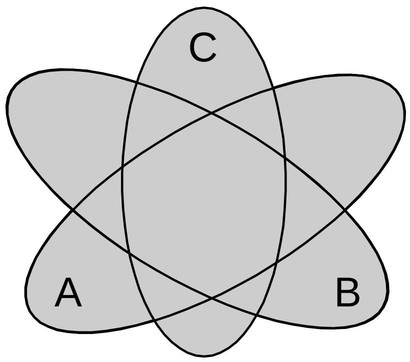
Свойства 1), 1′), 2), 2′), 3) и 3′), установленные выше, носят названия: коммутативность объединения множеств, коммутативность пересечения множеств, ассоциативность объединения множеств, ассоциативность пересечения множеств, дистрибутивность пересечения относительно объединения множеств, дистрибутивность объединения относительно пересечения множеств соответственно. Свойства 6) и 6′) называются законами де Моргана для множеств (по имени шотландского математика и логика де Августуса Моргана, 1806-1871). Для частного случая, когда $X\subset Z$ и $Y\subset Z$, следовательно, и $(X\cup Y)\subset Z$, $(X\cap Y)\subset Z$ утверждения 6) и 6′) могут быть записаны в виде: $C_Z(X\cup Y)=(C_ZX)\cap(C_ZY)$ и $C_Z(X\cap Y)=(C_ZX)\cup(C_ZY)$ соответственно.

Если же Z=U – универсальное множество, то 6) и 6′) принимают вид: $\overline{X\cup Y}=\overline{X}\cap\overline{Y}$ и $\overline{X\cap Y}=\overline{X}\cup\overline{Y}$.

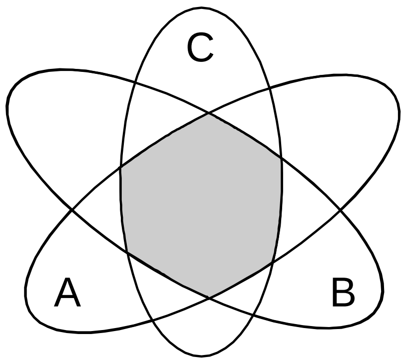
Введенные понятия объединения и пересечения для двух множеств обобщаются на случай любого числа множеств.

Пусть A1, A2, . . . , An, где $n \in N$ и $n>1$,– данные множества (A1, A2, ... , Ak,… – бесконечное число данных множеств). Объединением данных множеств называется множество, обозначаемое символами $A1 \cup A2 \cup ... \cup An$ или $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ ($A1 \cup A2 \cup ... \cup Ak \cup ...$ или $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$) и состоящее из всех тех объектов, которые принадлежат хотя бы одному из данных множеств. Аналогично вводится понятие пересечения данных множеств, обозначаемое символами $A1 \cap A2 \cap ... \cap An$ или $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ ($A1 \cap A2 \cap ... \cap Ak \cap ...$ или $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$).

Дадим геометрическую иллюстрацию объединения и пересечения трех множеств A, B, C с помощью диаграмм Венна:



A∪B∪C



A∩B∩C

Напомним, что если M – конечное множество, то символом n(M) обозначается число элементов множества M, $n(\varnothing) \overset{df}{=} 0$. Для произвольных конечных множеств A, B, C имеют место равенства:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B);$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Приведенные свойства обобщаются на случай любого конечного числа множеств, а именно для конечных множеств A1, A2, …, Ak, где $k \in N$ и $k>1$, имеет место равенство:

$$n(A1 \cup A2 \cup \ldots \cup Ak) = n(A1) + n(A2) + \ldots + n(Ak) - (n(A1 \cap A2) + n(A1 \cap A3) + ... +$$
$$+ n(Ak\text{-}1 \cap Ak)) + (n(A1 \cap A2 \cap A3) + (A1 \cap A2 \cap A4) + \ldots + (Ak\text{-}2 \cap Ak\text{-}1 \cap Ak))$$

–...+
+ (–1)n-1n(A1∩A2∩…∩Ak).

В некоторых исследованиях приходится рассматривать множества, все или некоторые элементы которого в свою очередь являются множествами. В этих случаях, желая избежать громоздкого словосочетания «множество множеств», исходное множество называют семейством (напомним, что «семейство» – синоним слова «множество»).

Если M – какое-либо множество, то символами P(M) или 2M обозначим семейство всех подмножеств данного множества, то есть P(M) $\overset{df}{=}$ {X | X⊂M}. Например, для множества M={Δ; O; □} имеем, P(M) = {∅; {Δ}; {O}; {□}; {Δ; O}; {Δ; □}; {O; □}; {Δ; O; □}}.

Для конечного множества M имеет место формула: n(P(M))=2n(M), то есть n(2M)=2n(M). (Для приведенного выше примера n(M)=3 и n(P(M))=8=23=2n(M)).

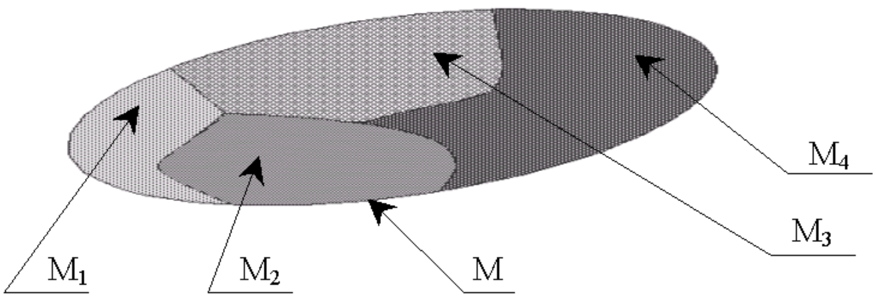
Определение 3. Семейство ℜ некоторых подмножеств данного множества M называется разбиением множества M, если выполняются следующие требования:

1) каждое из множеств, принадлежащее ℜ, не пустое;

2) любые два различных множества, принадлежащих ℜ, являются непересекающимися;

3) объединение всех множеств, принадлежащих ℜ, совпадает с M.

Множества, принадлежащие разбиению ℜ множества M, называются классами разбиения ℜ.



Если, например, ℜ = {M1, M2, M3, M4, M5, M6} – разбиение множества M, то согласно определению 3 имеем:

если $i \in N$ и $1 \leq i \leq 6$, то $Mi \neq \varnothing$;

если $i \neq j$ и $i, j \in N$ и $1 \leq i, j \leq 6$, то $Mi \cap Mj = \varnothing$;

$$\bigcup_{i=1}^{6} M_i = M$$

.

Пример. Установить являются ли семейства $\Re 1=\{[0; 2], (2; 3], [3; 6)\}$, $\Re 2=\{[0; 2], (2; 3], (3; 6]\}$ и $\Re 3=\{[0; 2], (2; 3], (3; 6)\}$ разбиениями множества $M=[0; 6)$.

Решение. Так как $(2; 3] \cap (3; 6]=\{3\} \neq \varnothing$, то семейство $\Re 1$ не является разбиением множества M. Семейство $\Re 2$ также не является разбиением множества M в виду невыполнения 3-его требования, предъявляемого к разбиениям данного множества в определении 3: $[0; 2] \cup (2; 3] \cup (3; 6]=$ $=[0; 6] \neq M$. Проверка убеждает, что семейство $\Re 3$ – разбиение множества M.

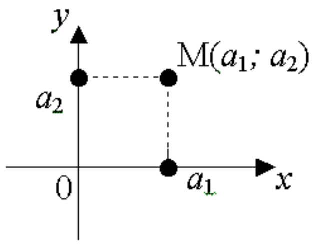
КОРТЕЖИ И ДЕКАРТОВЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

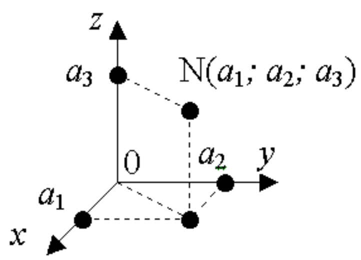
Понятие кортежа будем считать основным, неопределяемым (слово кортеж происходит от французского слова «cortege» – торжественное шествие). Ограничимся интуитивным описанием этого понятия.

Пусть имеем объекты: a1, a2, …, an, среди которых могут быть совпадающие, при этом, исходя из некоторых соображений, объект a1 считается 1-ым, объект a2 считается 2-ым, и так далее, наконец объект an считается n-ым. Тогда будем говорить, что имеем кортеж или упорядоченный набор (a1; a2; …; an) длины n, называя объекты a1, a2, …, an соответственно 1-ой, 2-ой, …, n-ой компонентами этого кортежа. Кортежи длины 2 иногда называют парами, длины 3 – тройками, длины 4 – четверками, и так далее.

(a1; a2;…; an) = (в1; в2;…; вn) тогда и только тогда, когда a1=в1 и a2=в2 и ... и aп=вп.

Если a1, a2, a3 – числа, то пару (a1; a2) можно изобразить точкой M(a1; a2) на координатной плоскости (0xy), а тройку (a1; a2; a3) можно изобразить точкой N(a1; a2; a3) в пространственной системе координат (0xyz).





Определение 4. Пусть A1, A2, … An, где n∈N и n>1, – некоторые непустые множества. Декартовым произведением данных множеств называется множество, обозначаемое символом A1×A2×…×An и состоящее из всевозможных кортежей вида (a1, a2, …, an), где a1∈A1, a2∈A2, … , an∈An. Если A1=A2=…=An=A, то вместо символа A1×A2×…×An иногда используется символ An, причем множество An называется n-ой декартовой степенью множества A. Множества A2 и A3 называется еще декартовым квадратом и кубом множества A соответственно.

Итак, A1×A2 ×…×An $\overset{df}{=}$ {(a1; a2; …; an) | a1∈A1 и a2∈A2 и … и an∈An}.

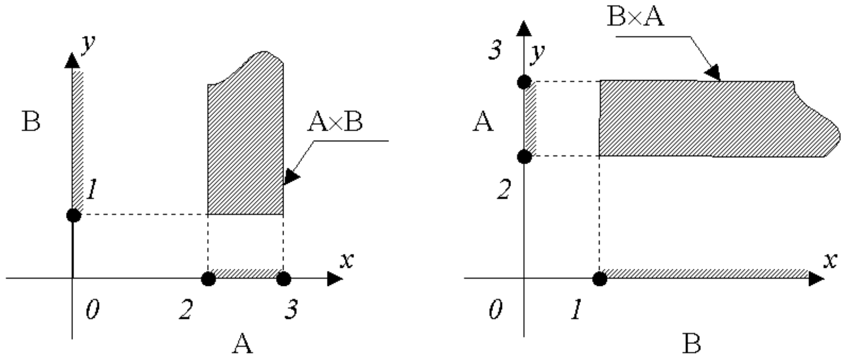
Если A1, A2, A3 – числовые множества, то множество A1×A2 можно изобразить на координатной плоскости (0xy) множеством {M(x; y) | x∈A1 и y∈A2}, а множество A1×A2×A3 можно изобразить множеством {M(x; y; z)| x∈A1 и y∈A2 и z∈A3} в пространственной системе координат (0xyz).

Пример. Найти A×B, если 1) A = {m; n; q} и B = {□; •}; 2) A=[2;3] и B=[1; +∞].

Решение. 1) A×B $\overset{df}{=}$ {(a; в) | a∈A и в∈B} = {(m; □); (m; •); (n; □); (n; •); (q; □); (q; •)}.

2) A×B $\overset{df}{=}$ {(a; в) | 2≤a≤3 и в≥1}. Так как A и B – числовые множества, то декартово произведение A×B можно изобразить на координатной плоскости (0xy) множеством {M(x; y) | x∈A и y∈B}, то есть множеством {M(x; y) | 2≤x≤3 и y≥1}. Сравнивая A×B с множеством B×A = {(a; в) | a≥1 и

$2 \le в \le 3\}$, убеждаемся, что $A \times B \ne B \times A$. Действительно, например, $(2; 4) \in (A \times B)$, но $(2; 4) \notin (B \times A)$.



Как следует из рассмотренного выше примера, декартово произведение двух множеств не обладает свойством коммутативности.

ОТНОШЕНИЯ

Определение 1. Пусть X и Y – некоторые непустые множества, G – непустое подмножество декартова произведение $X \times Y$. Тогда упорядоченная тройка $\varphi = (G, X, Y)$ называется (бинарным) отношением между элементами множеств X и Y.

При этом множества G, X, Y называются соответственно графиком, областью отправления и областью прибытия отношения φ. Множество $D(\varphi)$ $(E(\varphi))$ всех первых (вторых) координат всевозможных упорядоченных пар из G называются областью определения (областью значений) отношения φ.

Если $(а, в) \in G$, то пишут: аφв и говорят, что «объекты а и в находятся в отношении φ» или «при отношении φ объекту а сопоставляется объект в».

Если X, Y – числовые множества, то отношение φ называется числовым.

В случае, когда X=Y=M, отношение $\varphi = (G, M, M)$ называется (бинарным) отношением между элементами множества M.

Итак, по определению $D(\varphi)=\{x \in X \mid \exists y \in Y \ ((x,y) \in G)\}$,

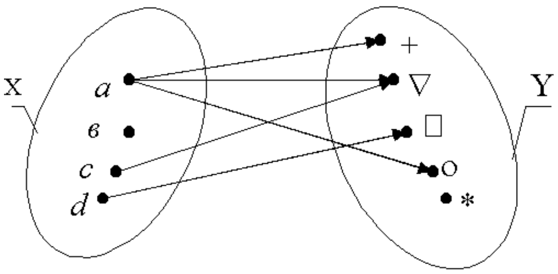
$E(\varphi)=\{y \in Y \mid \exists x \in X \ ((x,y) \in G)\}$.

Говорят, что задан граф отношения $\varphi=(G, X, Y)$, если множества X и Y изображены диаграммами Венна на некоторой плоскости π, а каждая пара (a; в) из G изображена «стрелкой» плоскости π, началом (концом) которой является точка, изображающая объект a (в). Граф отношения φ между элементами множеств X и Y является наглядным способом задания этого отношения для случая, когда X и Y – конечные множества.

В случае, когда φ = (G, X, Y) – числовое отношение, графиком отношения φ наряду с G называют так же и изображение множества G на координатной плоскости (Oxy), то есть множество:

$$\Gamma\varphi \overset{df}{=} \{M\,(x, y)\ |\ (x, y) \in G\}.$$

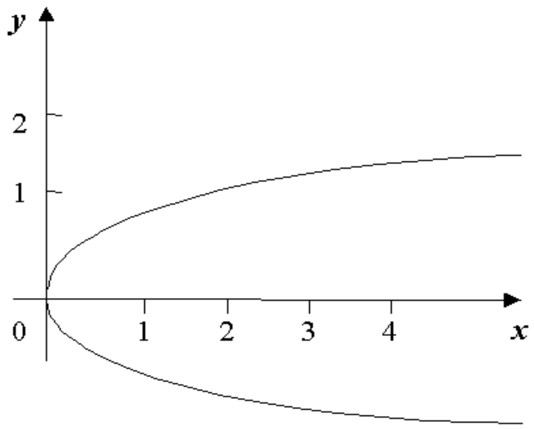
Пример 1. Пусть X={a; в; c; d}, Y={+; ∇; □; o; *}, G ={(a; +), (a; ∇), (a; o), (c; ∇), (d; □)} и φ = (G, X, Y) – отношение между элементами множеств X и Y.



Граф отношения φ

Так как множества X и Y конечные, то отношение φ можно задать его графом. Область определения D(φ)={a; c; d} (область значений E(φ)={+; ∇; □; o}) можно рассматривать как множество всех тех элементов множества X(Y), которые изображаются точками, являющимися началами (концами) стрелок построенного графа. Заметим, что при отношении φ элементу a сопоставляются три элемента +, ∇ и o из Y и элементу в не сопоставляется ни одного элемента из Y.

Пример 2. Пусть X=Y=R, G={(x; y)∈R2 | x=y2}, φ=(G, X, Y)=(G, R, R) – бинарное отношение между элементами множества R. Так как φ – числовое отношение, то можно говорить о графике Гφ на координатной плоскости (Oxy). График Гφ представляет собой параболу, и область определения D(φ) (область значений E(φ)) можно рассматривать как проекцию построенного графика на ось (Ox) ((Oy)). D(φ)= [0; +∞), E(φ) = R.



Пример 3. Пусть $X = \pi$ – некоторая плоскость, Y – семейство всех прямых плоскости π, $G=\{(M, l) \mid M \in l \wedge l \in Y\}$, тогда $\varphi = (G, X, Y)$ – бинарное отношение между элементами множеств X и Y, называемое отношением принадлежности для точек и прямых плоскость π.

Введенное понятие отношения между элементами двух множеств можно обобщить на случай n множеств, где $n \geq 2$.

Определение 2. Пусть X1, X2, … , Xn, где $n \geq 2$, – некоторые непустые множества, G – непустое подмножество декартова произведения $X1 \times X2 \times \ldots \times Xn$. Тогда картеж $\varphi=(G, X1, X2, \ldots, Xn)$ называется n-местным или n-арным отношением между элементами множеств X1, X2, … , Xn (при n=2 и n=3 отношение φ называется соответственно бинарным и тернарным).

Если $X1=X2=\ldots=Xn=X$, то φ называется еще n-арным или n-местным отношением между элементами множества X.

Про элементы a1, a2, …an, для которых $(a1, a2, \ldots an) \in G$ говорят, что они находятся в отношении φ, $\varphi = (G, X1, X2, \ldots, Xn)$.

Пример 4. Пусть X1 и X3 – множества всевозможных окружностей плоскости π, X2 – семейство всевозможных квадратов той же плоскости, $G=\{(x1, x2, x3) \in (X1 \times X2 \times X3) \mid$ окружность x3 вписана в квадрат x2, который в свою очередь вписан в окружность x1$\}$. Тогда $\varphi=(G, X1, X2, X3)$ – тернарное отношение между элементами множеств X1, X2, X3.

В результате сравнения различных отношений между элементами данного множества выделяются ряд разновидностей таких отношений.

Определение 1. Пусть φ бинарное отношение между элементами множества M. Это отношение называют:

1) рефлексивным, если истинно высказывание $\forall x \in M\ (x\ \varphi\ x)$, то есть $x \in M \Rightarrow x\ \varphi\ x$;

2) симметричным, если истинно высказывание $\forall x, y \in M\ (x\ \varphi\ y \to y\ \varphi\ x)$, то есть $x, y \in M \wedge x\ \varphi\ y \Rightarrow y\ \varphi\ x$;

3) транзитивным, если истинно высказывание $\forall x, y, z \in M\ (x\ \varphi\ y \wedge \wedge\ y\ \varphi\ z \to x\ \varphi\ z)$, то есть $x, y, z \in M \wedge x\ \varphi\ y \wedge y\ \varphi\ z \Rightarrow x\ \varphi\ z$;

4) антирефлексивным, если истинно высказывание $\forall\ x \in M\ \rceil(x\ \varphi\ x)$, то есть $x \in M \Rightarrow \rceil(x\ \varphi\ x)$;

5) антисимметричным, если истинно высказывание $\forall$ x, y $\in$ M (x φ y $\wedge$

$\wedge$ y φ x $\to$ x = y), то есть x, y$\in$M $\wedge$ x φ y $\wedge$ y φ x $\Rightarrow$ x = y;

6) связным, если истинно высказывание $\forall$ x, y $\in$ M (x $\neq$ y $\to$ x φ y $\vee$ $\vee$ y φ x), то есть x, y $\in$ M $\wedge$ x $\neq$ y $\Rightarrow$ x φ y $\vee$ y φ x;

7) отношением эквивалентности, если φ является одновременно рефлексивным, симметричным и транзитивным;

8) отношением порядка (частичного порядка), если φ является одновременно рефлексивным, антисимметричным и транзитивным;

9) отношением линейного порядка, если φ является рефлексивным, антисимметричным, транзитивным и связным, то есть является связным отношением порядка.

Если заданно некоторое отношение порядка (линейного порядка) между элементами множества M, то множество M называется упорядоченным (линейно упорядоченным).

Если φ – отношение эквивалентности между элементами множества M, то вместо записи x φ y использую записи x $\underset{\varphi}{\sim}$ y или x $\sim$ y (чтение последней записи «x эквивалентно y»).

Пример 1. Пусть M – семейство всех числовых множеств; φ – отношение между элементами множества M, задаваемое условием: XφY $\Leftrightarrow$ X$\subset$Y.

Это отношение является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, так как:

X$\in$M $\Rightarrow$ X$\subset$X $\Rightarrow$ XφX;

X, Y$\in$M $\wedge$ XφY $\wedge$ YφX $\overset{df}{\Rightarrow}$ X$\subset$Y $\wedge$ Y$\subset$X $\overset{df}{\Rightarrow}$ X=Y;

X, Y, Z$\in$M $\wedge$ XφY $\wedge$ YφZ $\Rightarrow$ X$\subset$Y $\wedge$ Y$\subset$Z $\Rightarrow$ X$\subset$Z $\overset{df}{\Rightarrow}$ XφZ.

Следовательно, отношение φ является отношением порядка, а M – упорядоченным множеством.

Отношение φ не является симметричным. Действительно, для множеств X0 $\overset{df}{=}$ [2, 5] и Y0 $\overset{df}{=}$ (0; +∞) импликация X0$\subset$Y0 $\to$ Y0$\subset$X0 ложна, поэтому высказывание $\forall X, Y \in M$ ($X \subset Y \to Y \subset X$) ложно. Но тогда согласно определению 1 φ не является и отношением эквивалентности.

Так как для числовых множеств $X1 \overset{df}{=} [0; 2]$ и $Y1 \overset{df}{=} [5; 10)$ импликация $X1 \neq Y1 \to X1\varphi Y1 \vee Y1\varphi X1$ ложна, то φ не является связным, а следовательно, и не является отношением линейного порядка.

Пример 2. Пусть М – семейство всех лучей плоскости π; φ – отношение между элементами множества М, задаваемое условием $x\ \varphi\ y \Leftrightarrow x\uparrow\uparrow y$ (где запись $x\uparrow\uparrow y$ обозначает сонаправленность лучей x и y).

Убеждаемся, что φ является отношением эквивалентности, то есть является рефлексивным, симметричным и транзитивным одновременно.

Взяв в качестве x0 и y0 какие-либо сонаправленные различные лучи плоскости π, приходим к ложной импликации: $(x0\uparrow\uparrow y0 \wedge y0\uparrow\uparrow x0) \to x0 \neq y0$. Следовательно, ложно высказывание $\forall x, y \in M$ ($x\ \varphi\ y \wedge y\ \varphi\ x \to x=y$), то есть φ не является антисимметричным. Но тогда φ не является отношением порядка и отношением линейного порядка.

Из существования на плоскости несонапраленных лучей следует несвязность отношения φ.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Понятие отношение позволяет уточнить определение функции.

Определение 1. Отношение f между элементами множества X и Y называется функциональным или функцией (или отображением множества X во множество Y, или функцией, определенной на X со значением в Y), если выполняется требование: $\forall x \in X\ \exists! y \in Y\ (x\ f\ y)$, то есть при отношении f каждому x из X сопоставляется единственное значение y из Y.

Если f – функциональное отношение между элементами множеств X и Y, то:

1) переменная x со значениями из X называется независимой переменной или аргументом функции f;

2) переменная y с множеством всех значений Y называется зависимой переменной функции f;

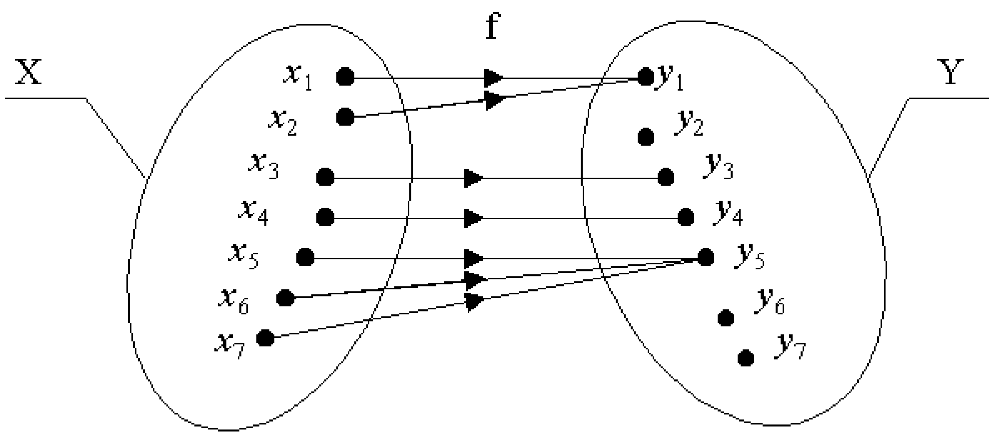
3) если x0 f y0 , то y0 обозначается символом f(x0) и называется значением функции f при x=x0 или образом x0 при отображении f.

4) наряду с обозначением f для функционального отношения между элементами X и Y используются так же следующие символы: $X \xrightarrow{f} Y$, f: X$\to$Y, f: x$\mapsto$f(x) (символ $\mapsto$ – «ограниченная» стрелка).

На случай функционального отношения переносятся понятия области отправления, области прибытия, области определения, области значений, графа и графика отношения f.

Заметим, что для функции f: X$\to$Y имеет место равенство D(f)=X. Отношение, рассмотренное в примере 1 (2) не является функциональным, хотя бы по той причине, что область отправления и область определения этого отношения не совпадают.

Если X и Y – конечные множества, то функцию f: X$\to$Y можно проиллюстрировать с помощью графа отношения:

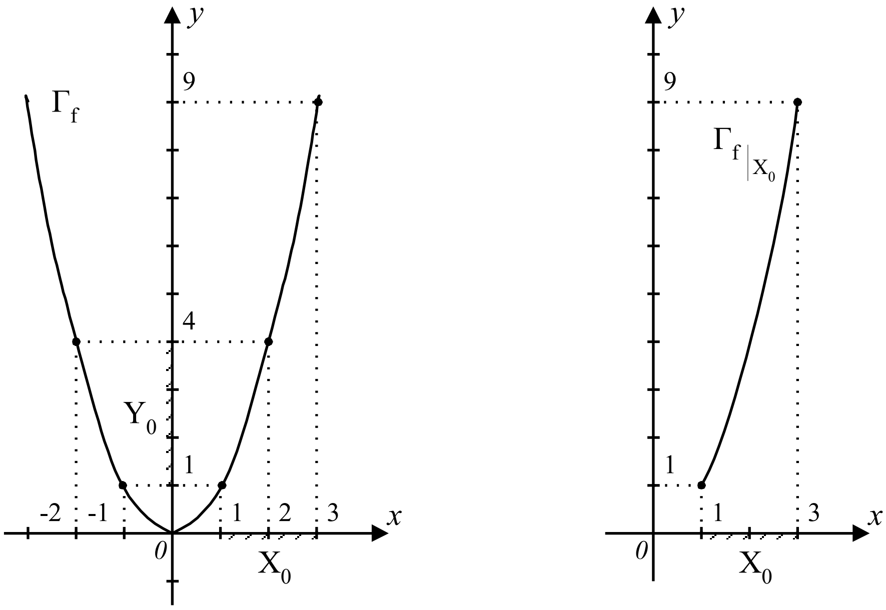


f – функция

Отношение f между элементами множеств X и Y является функциональным тогда и только тогда, когда из каждой точки, изображающей элемент множества X, выходит одна и только одна стрелка графа этого отношения.

Пример 1. Пусть X=R; Y=[0; +∞]; X0=[1; 3]; Y0=[1; 4]; y0=4; G={(x,y)$\in$R2$\mid$y=x2}. Тогда f=(G, X, Y) – функциональное отношение между элементами множеств X и Y, причем f(X0) $\overset{df}{=}$ {f(x) | 1$\le$x$\le$3}=[1; 9], f–1(Y0)={x | 1$\le$f(x)$\le$4}=[–2; –1]$\cup$[1; 2], f –1({4})=[–2; 2]. Функция f$\mid$X0=

$f|[1;\ 3]$ возрастает на своей области определения [1; 3], причем E



$(f|X0)=[1;\ 9]$.

Инъективные, сюрьективные и биективные функциональные отношения.

Определение 3. Пусть $f\colon X\to Y$. Данная функция называется:

1) инъективной, если верно утверждение

$\forall x1 \in X\ \forall x2 \in X\ (x1 \neq x2 \to f(x1) \neq f(x2))$;

2) сюрьективной, если верно утверждение

$\forall y \in Y\ \exists x \in X\ (f(x)=y)$, то есть $E(f)=Y$;

3) биективной (взаимно однозначным отображением X в Y, биекцией, или взаимно однозначным соответствием между элементами множеств X и Y), если f является одновременно инъективной и сюрьективной.

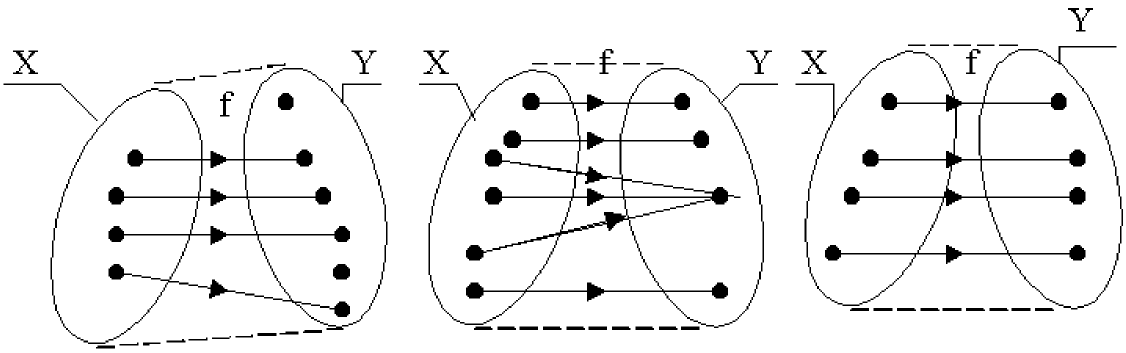
Если $f\colon X\to Y$ – биекция, то множества X и Y называются равномощными или эквивалентными. Множество равномощное множеству N называется счетным.

По правилу контрапозиции функции $f\colon X\to Y$ является инъективной тогда и только тогда, когда $\forall x1 \in X\ \forall x2 \in X\ (f(x1)=f(x2) \to x1=x2)$.

Заметим, что функция f является инъективной, если она является возрастающей или убывающей.

Можно убедиться, что конечные множества X и Y являются равномощными тогда и только тогда, когда $n(X) = n(Y)$; всякое бесконечное множество имеет счетное подмножество; множество [0;1] не является счетным.

Проиллюстрируем введенные понятия для случая функции f: X→Y, когда X и Y – конечные множества:



f – иньектияная функция *f – сюрьективная функция* *f - биекция*

Пример 2. Для функции f из примера 1 имеем f(X)=[0; +∞)=Y, однако f(–2)=f(2). Следовательно, f является сюрьективной, но не инъективной.

Пример 3. Пусть X=R, Y=(0; +∞), G={(x, y) | x∈X ∧ y=2x}. Тогда f =(G, X, Y) – функция. Так как f – возрастающая функция и E(f)=(0; +∞)=Y, то f является инъективной и сюрьективной, биекцией. (Отсюда следует, что R и (0; +∞) – равномощные множества).

Если f = (G, X, Y) – биекция, то отношение

({(y, x) | (x, y)∈G}, Y, X) (1)

является функцией, причем инъективной и сюрьективной, то есть биекцией.

КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика – это наука о расположении элементов в определенном порядке и о подсчете числа способов такого расположения.

Комбинаторный принцип умножения: если одну часть действия можно выполнить k способами, а другую - p способами, то все действие можно выполнить kp числом способов.

Пример. Пусть требуется составить набор из ручки, карандаша и линейки. Имеется:

5 различных ручек,

7 различных карандашей,

10 различных линеек.

Сколькими способами можно составить требуемый набор?

Решение. Действием в данном случае является составление набора из ручки, карандаша и линейки; действие распадается на три этапа (части): выбрать ручку, выбрать линейку и выбрать карандаш. Первую часть действия – выбрать ручку – можно выполнить пятью способами, вторую часть действия – выбрать карандаш – можно выполнить семью способами, третью часть действия – выбрать линейку – можно выполнить десятью способами. Тогда все действие можно выполнить

$$5 \cdot 7 \cdot 10 = 350$$

Число способов. Т.е. возможно 350 вариантов такого набора.

Пример. Сколько существует наборов длины n из нулей и единиц?

Решение. Действием в данном случае является составление набора длины из нулей и единиц.

$$\underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \ldots\ \cdot\ \cdot}_{n}$$

Набор будет составлен, если все n позиций (мест) будут заполнены нулями и единицами. Действие распадается на n частей: заполнить первую позицию, вторую и т.д., заполнить n-ю позицию. Первую часть действия – написать первую компоненту - можно двумя способами: можно написать 0, а можно написать 1, написать вторую компоненту тоже можно двумя способами, и так все n мест в наборе: на каждом месте можно написать либо 0 либо 1:

$$\underbrace{\overset{2}{\cdot}\ \overset{:}{\cdot}\ \overset{2}{\cdot}\ \ldots\ \overset{2}{\cdot}\ \overset{2}{\cdot}}_{n}$$

Тогда все действие согласно комбинаторному принципу умножения можно выполнить 2^n числом способов:

$$\underbrace{\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2}}_{n} = \mathbf{2^n}$$

Комбинаторный принцип сложения. Если два действия взаимно исключают друг друга, и одно из них можно выполнить k способами, а другое - p способами, то оба действия можно выполнить $k+p$ числом способов.

Пример.

Выборкой объема k из множества $M=\{a_1;a_2;...;a_n\}$ называется всякая последовательность из k элементов множества M.

Если элементы в выборке не повторяются, то выборка называется бесповторной, иначе – выборкой с повторениями

При бесповторной выборке все равно, каким образом осуществляется выбор: берутся все элементы сразу, или же поочередно (по одному).

Расположение элементов выборки в определенном порядке называется упорядочением , при этом выборка называется упорядоченной, в противном случае –неупорядоченной.

Рассмотрим бесповторную выборку

Расположение n различных элементов в определенном порядке называется перестановкой без повторений из n элементов.

Например, на множестве из трех элементов $\{a;b;c\}$ возможны следующие перестановки: $abc; acb; bac; bca; cab; cba$.

Число различных перестановок без повторений из n элементов обозначается P_n и равно $n!$, т.е.

$$P_n = n!$$

Сочетанием без повторений из n элементов по k называется неупорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества. Число сочетаний без повторений из n элементов по k равно C_n^k:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Например, требуется подсчитать, сколькими способами можно составить бригаду из трех человек для дежурства в группе из 30 человек. Поскольку порядок расположения людей в бригаде не фиксируется и люди не повторяются, то мы имеем случай сочетаний из 30 элементов по 3 без повторений:

$$C_{30}^{3}=\frac{30!}{3!(30-3)!}=\frac{30!}{3!\,27!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28}{2\cdot 3}=10\cdot 29\cdot 14=4060.$$

Таким образом, бригаду дежурных из трех человек в группе из 30 человек можно выбрать 4060 различными способами.

Размещением без повторений из n элементов по k называется упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества.

Теорема.

Число размещений без повторений из n элементов по k равно:

$$A_{n}^{k}=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Доказательство. Чтобы получить упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества, нужно выполнить два этапа: выбрать k элементов из n (это можно выполнить C_{n}^{k} числом способов) и затем упорядочить выбранные элементы (это можно сделать $k!$ числом способов). Согласно комбинаторному принципу умножения, все действие - получить упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества – можно $C_{n}^{k}\cdot k!=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}k!=\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ числом способов.

Свойства сочетаний без повторений:

1) $C_{n}^{k}=C_{n}^{n-k}$ $k\le n$

Доказательство. Поскольку $C_{n}^{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ и $C_{n}^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!\,(n-n+k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$, то утверждаемое очевидно.

2) $C_{n}^{0}+C_{n}^{1}+\ldots+C_{n}^{n}=2^{n}$ (без доказательства).

Значения C_{n}^{k} могут быть найдены не расчетом по формуле количества сочетаний, а с помощью так называемого треугольника Паскаля. (Блез Паскаль (1623 – 1662) – французский математик).

Этот треугольник имеет вид:

1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Закономерность его построения такова: складывая две рядом стоящие числа, получаем число, стоящее ниже между ними. Первая строчка – значения числа сочетаний из 1 ($C_1^0 = C_1^1$), вторая – из 2 ($C_2^0; C_2^1; C_2^2$ - слева направо), и т.д.

Рассмотрим выборку с повторениями

Пусть имеется выборка из n элементов, причем k элементов из них - одинаковые.

1. Число различных перестановок на элементах такой выборки равно:

$P_n(k) = \frac{n!}{k!}$ - число перестановок с k повторениями на множестве из n элементов

2. Сочетание с повторениями из n элементов по k - неупорядоченная выборка k элементов с возвращением из множества, содержащего n элементов:

$\overline{C_n^k} = C_{n+m-1}^k$ - число различных сочетаний с повторениями из n элементов по k

3. Размещения с повторениями из n элементов по k - расположение n различных шаров по k различным ячейкам

$\overline{A_n^k} = n^k$ - число различных размещений с повторениями

Пример. Сколько различных 4-буквенных слов можно составить из символов $0;0;a;b$?

Решение. Другими словами, требуется найти число перестановок с повторениями на 4 элементах выборки, в которой два элемента одинаковы:

$$P_4(2) = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

$0ab0$ $a00b$ $b00a$

$0a0b$ $a0b0$ $b0a0$

$00ba$ $ab00$ $ba00$

$00ab$

$0ba0$

$ob0a$

Пример. Сколько различных перестановок можно составить из букв слова АБАКАН?

Решение. Требуется найти число перестановок на множестве из 6 элементов, среди которых три элемента одинаковы:

$$P_6(3) = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 120.$$

Верно обобщение рассматриваемой формулы: число различных перестановок на множестве из n элементов, среди которых имеется

k_1 элементов первого вида,

k_2 элементов второго вида,

…

k_m элементов m-го вида

равно:

$$P_n(k_1;k_2;\dots;k_m)=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\dots k_m!}$$

Пример. Сколько перестановок можно получить из букв слова КОЛОКОЛА?

Решение. Требуется найти число перестановок с повторениями на множестве из 8 букв, среди которых:

буква К повторяется 2 раза;

буква О повторяется 3 раза;

буква Л повторяется 2 раза

буква А повторяется 1 раз.

Таким образом, $P_8(2;3;2;1)=\frac{8!}{2!\cdot 3!2!1!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 2}=1680$.

Пример. Сколькими способами можно составить набор из 5 шоколадок, если имеются шоколадки трех сортов в количестве по 10 штук каждого вида?

Решение. Поскольку при составлении шоколадного набора порядок расположения шоколадок не важен, то используем для подсчета формулу сочетаний с повторениями:

$$\overline{C_{30+5-1}^{5}}=C_{34}^{5}\frac{34!}{5!\cdot(34-5)!}=\frac{34!}{5!\cdot 29!}=\frac{34\cdot 33\cdot 32\cdot 31\cdot 30}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=34\cdot 33\cdot 8\cdot 31$$

Пример. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам?

Решение. Поскольку по условию задачи в один вагон могут сесть несколько человек, и поскольку рассадка зависит от того кто в каком вагоне находится, то используем формулу размещения с повторениями:

$$\overline{A_9^7}=9^7$$

Эту же задачу можно решить, применяя комбинаторный принцип умножения: действие – рассадить 7 человек распадается на 7 этапов: разместить первого пассажира, разместить второго пассажира, …, разместить седьмого пассажира. Первый этап – размещение первого пассажира можно выполнить 9 способами, второго пассажира тоже можно разместить 9 способами, и т.д. :

$$\underbrace{\mathbf{9\cdot 9\cdot 9 \ldots 9}}_{7} = \mathbf{9^7} = \mathbf{4782969}$$

Пример. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам по одному в вагон?

Решение. Поскольку по условию задачи в один вагон могут сесть только один человек, и поскольку рассадка зависит от того кто в каком вагоне находится, то используем формулу размещений без повторений:

$$A_9^7 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 181440$$

Эту же задачу можно решить, применяя комбинаторный принцип умножения: действие – рассадить 7 человек распадается на 7 этапов: разместить первого пассажира, разместить второго пассажира, …, разместить седьмого пассажира. Первый этап – размещение первого пассажира можно выполнить 9 способами, второго пассажира тоже можно разместить 9 способами, и т.д. :

$$\underbrace{\mathbf{9\cdot 9\cdot 9 \ldots 9}}_{7} = \mathbf{9^7}$$

Пример. Сколько различных сигналов можно составить из четырех флажков различных цветов, если каждый сигнал должен состоять не менее чем из двух флажков?

Решение. Составить сигнал можно из двух флажков, из трех или из четырех. Перечисленные ситуации взаимно исключают друг друга (два флажка – это не три и не четыре), поэтому вычислим, сколькими способами можно составить сигнал в каждой из перечисленных ситуаций, и сложим полученные результаты.

Действие – составить сигнал – означает выбрать флажки из четырех и расположить их в определенном порядке. Таким образом, в каждом случае нужно выполнить два этапа: первый - выбрать флажки, второй – расположить выбранные флажки в определенном порядке.

Составляем сигналы из двух флажков: выбрать два флажка из четырех можно $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4\cdot 3}{2!} = 6$ различными способами, и расположить выбранные два флажка в определенном порядке можно $2!$ числом способов. Таким образом, согласно комбинаторному принципу умножения, можно составить $6 \cdot 2 = 12$ различных сигналов из двух флажков.

Составляем сигналы из трех флажков: выбрать три флажка из четырех можно $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$ различными способами, и расположить выбранные три флажка в определенном порядке можно $3! = 2 \cdot 3 = 6$ числом способов. Таким образом, согласно комбинаторному принципу умножения, можно составить $4 \cdot 6 = 24$ различных сигналов из трех флажков.

Составляем сигналы из четырех флажков: выбрать четыре флажка из четырех можно $C_4^4 = \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{1}{0!} = 1$ - одним способом, а расположить выбранные четыре флажка в определенном порядке можно $4! = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ способами. Значит, можно составить $1 \cdot 24 = 24$ различных сигнала из четырех флажков.

Применим теперь комбинаторный принцип сложения: всего существует $12 + 12 + 24 = 48$ сигналов из не менее, чем двух флажков.

Пример. Номер автомобиля состоит из трех букв и трех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 10 цифр и алфавит в 30 букв.

Очевидно, что количество всех возможных комбинаций из 10 цифр по 4 равно 10.000.

Число всех возможных комбинаций из 30 букв по две равно $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$.

Если учесть возможность того, что буквы могут повторяться, то число повторяющихся комбинаций равно 30 (одна возможность повтора для каждой буквы). Итого, полное количество комбинаций по две буквы равно 900.

Если к номеру добавляется еще одна буква из алфавита в 30 букв, то количество комбинаций увеличивается в 30 раз, т.е. достигает 27.000 комбинаций.

Окончательно, т.к. каждой буквенной комбинации можно поставить в соответствие числовую комбинацию, то полное количество автомобильных номеров равно 270.000.000.

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рекуррентные соотношения (р.с) (от лат. слова recurrere - «возвращаться») играют большую роль в дискретной математике. Они позволяют сводить данную задачу к задаче от меньшего значения параметра. Последовательно уменьшая значение параметра можно дойти до задачи, имеющей простейшее решение. Однако во многих случаях бывает необходимо получить из рекуррентного соотношения явную формулу или как говорят решить рекуррентное соотношение.

Понятие р.с. проиллюстрируем на классической задаче, называемой задачей Фибоначчи.

Задача: Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько пар кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов, и в течение года кролики не умирают, а их воспроизводство не заканчивается?

Решение: Из условия задачи имеем, что сначала была 1 пара, а через:

1 месяц - станет 2 пары кроликов (старая и 1 новая)

2 месяца - 3 пары кроликов (старая и 2 новых пары).

3 месяца - 5 пар кроликов (старая, давшая уже 3 новых пары и первая молодая даст приплод из двух крольчат)

Пусть через $(n+1)$ месяцев будет $f\,(n+1)$ пар кроликов, тогда через $(n+2)$ месяцев будет $f(n+1)+f(n)$ пар кроликов, т.е. (столько пар, сколько по истечении $(n+1)$ месяцев $f(n+1)$ и еще столько, сколько было новорожденных пар кроликов по истечении n месяцев, т.е. $f(n)$).

Тогда получим соотношение:

$$f(n+2)=f(n+1)+f(n) \quad (1.1)$$

Последовательность чисел, удовлетворяющая соотношению (1.1) называется последовательностью Фибоначчи.

$(1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\ 34;\ \ldots)$

Т.к. по условию : $f(0)=1, f(1)=2, f(2)=3$, то имеем:

$$f(3) = f(2) + f(1) = 5$$
$$f(4) = f(3) + f(2) = 5 + 3 = 8$$
$$f(5) = f(4) + f(3) = 8 + 5 = 13$$
$$f(6) = f(5) + f(4) = 13 + 8 = 21$$
$$f(7) = f(6) + f(5) = 21 + 13 = 34$$
$$f(8) = f(7) + f(6) = 34 + 21 = 55$$
$$f(9) = f(8) + f(7) = 55 + 34 = 89$$
$$f(10) = f(9) + f(8) = 89 + 55 = 144$$
$$f(11) = f(10) + f(9) = 144 + 89 = 233$$
$$f(12) = f(11) + f(10) = 233 + 144 = 377$$

Ответ: 377 пар кроликов.

При вычислении членов последовательности Фибоначчи мы на каждом этапе обращались к членам последовательности, вычисленным на предыдущих шагах.

Подобную процедуру называют - рекуррентной, а соотношения типа (1.1) - рекуррентными.

В общем случае р.с. может быть записано в виде:

$$\underline{f(n + k) = F(n, f(n + k - 1), \ldots, f(n))} \quad (1.2)$$

где F - некоторая функция от $(k + 1)$ переменных, а число k - порядок рекуррентного соотношения .

Для рассмотренного р.с. (1.1) - порядок $k = 2$.

Решением р.с. называется последовательность a(n), для которой выполняется равенство $a(n + k) = F(n, a(n + k - 1), \ldots, a(n))$, при любом $n = 0, 1, \ldots$

Произвольное р.с. имеет бесконечно много решений. Например, для р.с. $f(n + 2) = f(n)$ решением является последовательность $c_1 + c_2(-1)^n$, где c_1 и c_2 - некоторые числа.

Чтобы однозначно определить решение р.с. (1.2) необходимо задать начальные условия значения (например: $f(0) = \alpha_0, \ldots, f(k - 1) = \alpha_{k-1}$, где $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ некоторые числа.)

Общим решением р.с. называется последовательность $\Phi(c_1, \ldots, c_k, n)$, зависящая от k неизвестных параметров $c_1, c_2, \ldots, c_k$, если :

1) При любом выборе параметров $c_1, c_2, \dots, c_k$, последовательность $\Phi(c_1, \dots, c_k, n)$ является решением соотношения (1.2)

2) Для любого решения a(n) р.с. (1.2) можно так выбрать параметры $c_1`, \dots, c_k`$, что равенство $a(n) = \Phi(c_1`, \dots, c_k`, n)$ выполняется при любом $n = 0, 1, \dots$

Решение, полученное из общего решения при искомом задании параметров, называют частным решением р.с.

$$f\,(n+2) - 2f\,(n+1) + f\,(n) = 0$$

$$y_{\text{общ. л.о.р.с}} = 1^n\,(c_n + c_{12}n)$$

$$y_{\text{част.л.о.р.с}} = n$$

$a(n) = 1,2,3,4,5,\dots$

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Общего метода решений р.с. не существует. Исключением является класс линейных р.с. с постоянными коэффициентами.

Определение: Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами - это рекуррентные соотношения вида

$$f(n+k) = \alpha_1 f(n+k-1) + \dots + \alpha_k f(n) + \nu(n)$$

$$f(n+k) = \alpha_1 f(n+k-1) + \dots + \alpha_k\, f(n)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ - некоторые числа, $\nu(n)$-некоторая функция от n, не равная нулю. Называются соответственно линейными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами и линейными однородными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами соответственно.

Последовательности, являющиеся решениями л.о.р.с. называются возвратными.

Примеры возвратных последовательностей:

1) Геометрическая прогрессия

$a(0) = a,\ \ a(1) = a * q,\ \ a(2) = a * q^2, \dots$ - является решением рекуррентного соотношения $f(n+1) = q * f(n)$ (л. о. р. с).

2) Арифметическая прогрессия

$a(0) = a,\ \ a1 = a + d,\ \ a2 = a + 2d, \dots$ - является решением р. с. $f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)$.

3) Последовательность Фибоначчи

Также является возвратной.

Теорема

Общее решение л. о. р. с с постоянными коэффициентами имеет вид

$$F(n+k) = \alpha_1 f(n+k-1) + \alpha_2 f(n+k-2) + \dots + \alpha_т f(n)$$

$$a(n) = \sum_{i=1}^{s}(c_{i1} + c_{i2} * n + c_{i3} * n^2 + \dots + c_{ir_i} * n^{r_{i-1}})\lambda_i$$

где:

$c_{i,j}$ ($\overline{i = 1, s}$; $\overline{j = 1, r_i}$) - произвольные константы.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ - различные корни уравнения.

$\underline{x^k - \alpha_1 x^{k-1} - \alpha_2 x^{k-2} - \dots - \alpha_k = 0}$, соответствующей кратности $r_1, r_2, \dots, r_n$ (r_i).

Замечания:

1) Уравнение $\underline{x^k - \alpha_1 x^{k-1} - \alpha_2 x^{k-2} - \dots - \alpha_k = 0}$ (1.6) называется характеристическим для р.с.

2) Задание начальных значений:

$f(0) = a_0, f(1) = a_1, \dots, f(r-1) = a_{r-1}$

приводит к системе r линейных уравнений:

$$\begin{cases} f(0) = a_\circ, \\ f(r-1) = a_{r-1}. \end{cases}$$

Решая эту систему, однозначно находим коэффициент $c_{i\,j}$

Следствия:

1) Общее решение л.о.р.с 2 порядка:

$f(n+2) = \alpha_1 f(n+1) + \alpha_2 f(n)$ с х.у. $x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 = 0$, имеет вид:

а) в случае если λ_1, λ_2 - различные корни кратности 1, х.у.

$a(n) = \underline{c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n}$

б) если λ_i - корень кратности два (D = 0)

$a(n) = \underline{(c_{11} + c_{12} n)\lambda^n}$

2) Общее решение л.о.р.с 3 порядка : имеет вид

$f(n+3) = \alpha_1 f(n+2) + \alpha_2 f(n+1) + \alpha_3 f(n)$ с х.у.

$$x^3 - \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x - \alpha_3 = 0.$$

а) если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - различные корни кратности 1 х.у., то:

$a(n) = \underline{c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + c_3 \lambda_3^n}$

б) если один из корней имеет кратность 2, а другой кратность

1, например λ_1 - корень кратности 2, λ_2 - корень кратности1, то: $a(n) = (c_{11} + c_{12}n)\,\lambda_1^n + c_2\,\lambda_2^n$

в) если λ - корень кратности 3, то:

$a(n) = (c_{11} + c_{12}\,n + c_{13}\,n^2)\,\lambda^{\mathrm{n}}$

Пример:

Найти общее решение рекуррентного соотношения:

$$f(n + 2) - 4f(n + 1) + 3f(n) = 0$$

с начальными условиями $f(1) = 10, f(2) = 16.$

Решение:

1) Найдем общее решение л.о.р.с.

Составим соответствующее характеристическое уравнение:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Решая его, найдем корни λ_{i}.

Имеем, по теореме Виета

$\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$ - корни кратности 1, поэтому

общее решение будет иметь вид:

$a(n) = c_1\,1^{\mathrm{n}} + c_2\,3^{\mathrm{n}} \Leftrightarrow a(n) = c_1 + c_2\,3^{\mathrm{n}}$

2) Т.к. известны начальные условия, то найдем коэффициенты c_1 и c_2 из следующей системы:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 * 3^1 = 10 \\ C_1 + C_2 * 3^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{C}_1 = 10 - 3 * \mathrm{C}_2 \\ 10 - 3 * \mathrm{C}_2 + 9 * \mathrm{C}_2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{C}_1 = 7 \\ \mathrm{C}_2 = 1 \end{cases}$$

Следовательно, решением исходного рекуррентного соотношения является последовательность: $a(n) = 7 + 3^{\mathrm{n}}$

Рассмотрим неоднородное линейное рекуррентное соотношение (1):

$f(n + k) + \alpha_1 * f(n + k - 1) + \alpha_2 * f(n + k - 2) + \cdots + \alpha_k * f(n) = \nu(n)$, $n = 0,1,2\ldots$, где $\nu(n) \neq 0$ - некоторая функция от переменной n.

Решение данного р.с. основывается на следующих двух теоремах:

Теорема 1

Общее решение неоднородного л.р.с. (1) представляется в виде суммы соответствующего однородного л.р.с. и некоторого частного решения л.р.с.

Т.к. решение л.о.р.с. находится по основной теореме о линейных однородных рекуррентных соотношениях, то рассмотрим некоторые способы нахождения частного решения.

Теорема 2

Если $f(n + k) + \alpha_1 * f(n + k - 1) + \cdots + \alpha_k * f(n) = R_m(n) * \lambda^{\mathrm{n}}$, где

$R_m(n)$ - многочлен от n, степени m, $\lambda \neq 0$, то частное решение будет иметь вид:

1) $y_{\text{част}} = Q_m(n)\,\lambda^n$, где $Q_m(n)$- многочлен от n, степени m, если λ не является корнем характеристического уравнения

$$\mathrm{x}^k - \alpha_1 \mathrm{x}^{k-1} - \ldots \alpha_k = 0$$

2) $y_{\text{част}} = n^r\, Q_m(n)\,\lambda^n$, если λ - корень характеристического уравнения кратности $r \geq 1$

Возможные варианты многочленов $Q_m(n)$ в общем виде:

1) $Q_0(n) = c * n^0 = c$ (где c - const)
2) $Q_1(n) = an^1 + bn^0 = an + b$ (a,b-некоторые действительный числа)
3) $Q_2(n) = an^2 + bn^1 + cn^0$

$$Q_3(n) = an^3 + bn^2 + cn^1 + d$$

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. МНОГОЧЛЕНЫ ЖЕГАЛКИНА.

Простой конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольки х переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного ра за (либо сама, либо ее отрицание).

Например, $xy\bar{z}$ является простой конъюнкцией,

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция простых конъюнкций.

Например, выражение $xy \vee \bar{y}z$. является ДНФ.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называет ся такая дизъюнктивная нормальная форма, у которой в каждую конъюнкц ию входят все переменныеданного списка (либо сами, либо их отрицания), причем в одном и том же порядке.

Например, выражение $x \vee y\bar{z}$ является ДНФ, но не СДНФ. Выражение $x\,y\,z \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z$ является СДНФ.

Аналогичные определения (с заменой конъюнкции на дизъюнкцию и наоборот) верны для КНФ и СКНФ. Приведем точные формулировки.

Простой дизъюнкцией называется дизъюнкция одной или нескольки х переменных, при этом каждая переменная входит не более одного раза (л ибо сама, либо ееотрицание).Например, выражение $x \vee \bar{y} \vee z$ – простая дизъюнкция,

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция простых дизъюнкций (например выражение $(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee z)(y \vee \bar{z})$ – КНФ).

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется такая КНФ, у которой в каждую простую дизъюнкцию входят все переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания), причем в одинаковом порядке.

Например, выражение $(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee z)(y \vee \bar{z})$ является СКНФ.

Приведем алгоритмы переходов от одной формы к другой. Естественно, что в конкретных случаях (при определенном творческом подходе) применение алгоритмов бывает более трудоемким, чем простые преобразования, использующие конкретный вид данной формы:

а) переход от ДНФ к КНФ

Алгоритм этого перехода следующий: ставим над ДНФ два отрицания и с помощью правил де Моргана (не трогая верхнее отрицание) приводим отрицание ДНФ снова к ДНФ. При этом приходится раскрывать скобки с использованием правила поглощения (или правила Блейка).

Отрицание (верхнее) полученной ДНФ (снова по правилу де Моргана) сразу дает нам КНФ:

$$xy \vee y\bar{z} = \overline{\overline{xy \vee y\bar{z}}} = \overline{\overline{xy} \cdot \overline{y\bar{z}}} = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{y} \vee z)} = \overline{\bar{y} \vee \bar{x}z} = y \cdot (\overline{\bar{x}z}) = y \cdot (x \vee \bar{z}).$$

Заметим, что КНФ можно получить и из первоначального выражения, если вынести y за скобки;

б) переход от КНФ к ДНФ

Этот переход осуществляется простым раскрытием скобок (при этом опять-таки используется правило поглощения)

$$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z}) = (\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = \bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}.$$

Таким образом, получили ДНФ.

Обратный переход (от СДНФ к ДНФ) связан с проблемой минимизации ДНФ. Подробнее об этом будет рассказано в разд. 5, здесь же мы покажем, как упростить ДНФ (или СДНФ) по правилу Блейка. Такая ДНФ называется сокращенной ДНФ;

в) сокращение ДНФ (или СДНФ) по правилу Блейка

Применение этого правила состоит из двух частей:

- если среди дизъюнктных слагаемых в ДНФ имеются слагаемые $xK_1 \vee \bar{x}K_2$, , то ко всей дизъюнкции добавляем слагаемое К1К2. Проделываем эту операцию несколько раз (можно последовательно, можно одновременно) для всех возможных пар слагаемых, а затем, применяем обычное поглощение;

- если добавляемое слагаемое уже содержалось в ДНФ, то его можно отбросить совсем, например, $xy \vee \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{z} = xy \vee \bar{x}\bar{z}$

или

$$x\bar{y}z \vee xyz \vee y\bar{z} \vee x\bar{y} = x\bar{y}z \vee xyz \vee y\bar{z} \vee x\bar{y} \vee xz = y\bar{z} \vee x\bar{y} \vee xz =$$
$$= y\bar{z} \vee x\bar{y} \vee xz \vee x\bar{z} \vee x = x \vee y\bar{z}.$$

Разумеется, сокращенная ДНФ не определяется единственным образом, но все они содержат одинаковое число букв (например, имеется ДНФ $A = xy \vee y\bar{z} \vee \bar{y}z$, , после применения к ней правила Блейка можно прийти к ДНФ, равносильной данной):

$$A = xy \vee \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee xz = \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee xz.$$

в) переход от ДНФ к СДНФ

Если в какой-то простой конъюнкции недостает переменной, например, z, вставляем в нее выражение $z \vee \bar{z} = 1$,после чего раскрываем скобки (при этом повторяющиеся дизъюнктные слагаемые не пишем). Например:

$$x \vee \bar{y}\bar{z} = x(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x})\bar{y}\bar{z} = xyz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} =$$
$= xyz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ **(в последнем равенстве из двух одинаковых слагаемых оставлено одно), т. е. из ДНФ получили СДНФ.**

г) переход от КНФ к СКНФ

Этот переход осуществляется способом, аналогичным предыдущему: если в простой дизъюнкции не хватает какой-то переменной (например, z, то добавляем в нее выражение $z \cdot \bar{z} = 0$ (это не меняет самой дизъюнкции), после чего раскрываем скобки с использованием распределительного закона):

$$(x \vee y)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = (x \vee y \vee z\bar{z})(x \vee y \vee \bar{z}) = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Таким образом, из КНФ получена СКНФ.

Заметим, что минимальную или сокращенную КНФ обычно получают из соответствующей ДНФ.

Всякая булева функция может быть представлена в виде полинома Жегалкина:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus ... \oplus a_n x_n \oplus$$
$$\oplus a_{n+1} x_1 x_2 \oplus ... \oplus a_{2^n - 1} x_1 x_2 ... x_n,$$

где $a_0, a_1, ..., a_n, ..., a_{2^n - 1} \in \{0,1\}$, где знак $\oplus$ обозначает сумму по модулю 2.

Алгоритм построения полинома Жегалкина.

Построить таблицу истинности данной булевой функции.

Каждому единичному значению булевой функции будет соответствовать конъюнкция $x_1^{\sigma 1} x_2^{\sigma 2} ... x_n^{\sigma n}$, где $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ - соответствующий набор значений переменных. Конъюнкции соединяются знаком $\oplus$.

Заменить выражения $\bar{x}_i$ по формуле: $\bar{x}_i = x_i \oplus 1$. Раскрыть скобки и привести подобные слагаемые по правилу: $x \oplus x = 0$.

Пример. Построить СДНФ, СКНФ и полином Жегалкина для функции (11110011).

Таблица истинности данной булевой функции приведена на стр. 5.

СДНФ имеет вид:

$$f(x, y, z) = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz.$$

СКНФ имеет вид:

$$f(x, y, z) = (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$$

Построим полином Жегалкина:

$$f(x, y, z) = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \oplus \bar{x}\,\bar{y}z \oplus \bar{x}y\bar{z} \oplus \bar{x}yz \oplus xy\bar{z} \oplus xyz =$$
$$= (x \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus$$
$$\oplus (x \oplus 1)yz \oplus xy(z \oplus 1) \oplus xyz =$$
$$= xyz \oplus yz \oplus xz \oplus z \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus xyz \oplus xz \oplus$$
$$\oplus yz \oplus z \oplus xyz \oplus xy \oplus yz \oplus y \oplus xyz \oplus yz \oplus$$
$$\oplus xyz \oplus xy \oplus xyz = xy \oplus x \oplus 1.$$

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Впервые теория графов как математическая дисциплина была упомянута Эйлером в его знаменитом рассуждении о Кёнигсбергских мостах. Однако эта статья Эйлера 1736 года была единственной в течение почти ста лет. Интерес к проблемам теории графов возродился около середины XIX века и был сосредоточен главным образом в Англии. Имелось много причин для такого оживления изучения графов. Естественные науки оказали свое влияние на это благодаря исследованиям электрических сетей, моделей кристаллов и структур молекул. Развитие формальной логики привело к изучению бинарных отношений в форме графов. Большое число популярных головоломок поддавалось формулировкам непосредственно в терминах графов. Наиболее знаменитая среди этих задач – проблема четырех красок, впервые поставленная перед математиками Де Морганом около 1850 года. Никакая другая проблема не вызывала столь многочисленных и остроумных работ в области теории графов. Она до сих пор остается мощным стимулом исследований различных свойств графов.

Прошлое столетие было свидетелем неуклонного развития теории графов. В этом процессе явно заметно влияние запросов новых областей приложений: теории игр и программирования, теории передачи сообщений, электрических сетей и контактных цепей, а также проблем биологии и психологии. Вследствие этого развития предмет теории графов является уже столь обширным, что все его основные направления невозможно изложить в одном томе.

Определение графа. Основные понятия.

Пара (V(G), E(G)) называется простым графом, если V(G) — непустое конечное множество элементов, называемых вершинами (или узлами, или точками), а E(G) — конечное множество неупорядоченных пар различных элементов из V(G), называемых ребрами (или линиями). Иногда V(G) называют множеством вершин, а E(G) — множеством ребер графа G.

Например, на рис.1 изображен простой граф G, у которого множеством вершин V(G) является множество {u, v, ω, z}, а множество ребер E(G) состоит из пар {u, v}, {v, ω}, {u, ω } и { ω, z}. Говорят, что

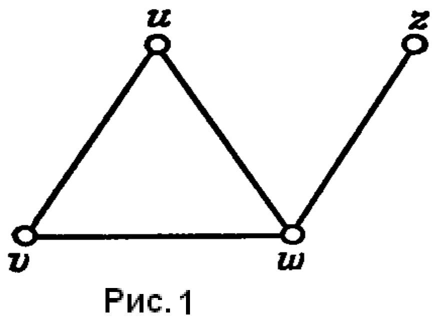


Рис.1

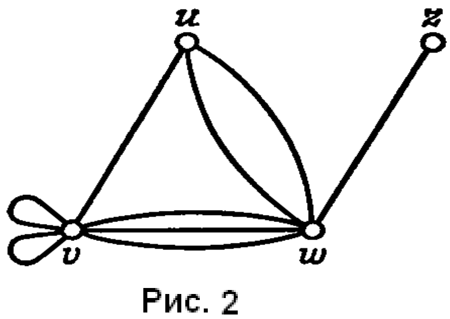


Рис. 2

ребро {u, ω} соединяет вершины u и ω. Отметим, что, так как E(G) является множеством, а не семейством, то в простом графе данную пару вершин может соединять не более чем одно ребро.

Оказывается, многие результаты, полученные для простых графов, без труда можно перенести на более общие объекты, в которых две вершины могут быть соединены более чем одним ребром. Кроме того, часто бывает удобно снять ограничение, состоящее в том, что ребро должно соединять две различные вершины, и допустить существование петель, т. е. ребер, соединяющих вершину с ней самой. Получающийся при этом объект, в котором могут быть петли и кратные ребра, называется общим графом, или просто графом (рис. 2). Подчеркнем тот факт, что каждый простой граф является графом, но не каждый граф является простым графом.

Более точно, графом G называется пара (V(G), E(G)), где V(G) — непустое конечное множество элементов, называемых вершинами, а E(G) — конечное семейство неупорядоченных пар элементов из V(G) (не обязательно различных), называемых ребрами. Заметим, что употребление слова «семейство» говорит о том, что допускаются кратные ребра. Будем называть V(G) множеством вершин, а E(G) — семейством ребер графа G; на рис. 2 V(G) — это множество {u, v, ω, z}, а E(G) — это семейство, состоящее из ребер {u, v}, {v, v}, {v, v}, {v, ω }, {v, ω }, {v, ω), {u, ω), {u, ω) и { ω, z}. О каждом ребре вида {v, ω } говорят, что оно соединяет вершины v и ω; значит, каждая петля {v, v} соединяет вершину v саму с собой.

Предметом изучения в теории графов являются также ориентированные графы называемые иногда орграфами или сетями.

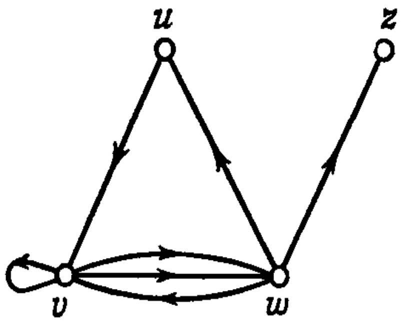


Рис. 3

Орграфом D называется пара (V(D), A(D)), где V(D) — непустое конечное множество элементов, называемых вершинами, а A(D) — конечное семейство упорядоченных пар элементов из V(D), называемых дугами (или ориентированными ребрами). Дуга, у которой вершина v является первым элементом, а вершина ω — вторым, называется дугой из v в ω и обозначается (v, ω). Заметим, что дуги (v, ω) и (ω, v) различны.

На рис. 3 изображен орграф, дугами которого являются (u, v), (v, v), (v, ω), (v, ω), (ω, v), (ω, и) и (ω, z); порядок вершин на дуге указан стрелкой.

Две вершины v и ω графа G называются смежными, если существует соединяющее их ребро (т. е. ребро вида {u, ω}); при этом вершины v и ω называются инцидентными этому ребру (а ребро — инцидентным этим вершинам). Аналогично, два различных ребра графа G называются смежными, если они имеют по крайней мере одну общую вершину. Простой граф, в котором любые две вершины смежны, называется полным графом.

Степенью (или валентностью) вершины v графа G называется число ребер, инцидентных v; степень вершины v обозначается через p(v). При вычислении степени вершины v договоримся учитывать петлю в v два раза, а не один (если только явно не сказано иное). Вершина степени 0 называется изолированной вершиной, вершина степени 1 называется висячей (или концевой) вершиной. Так, граф, изображенный на рис. 2, имеет одну висячую вершину, одну вершину степени 3, одну — степени 6 и одну — степени 8.

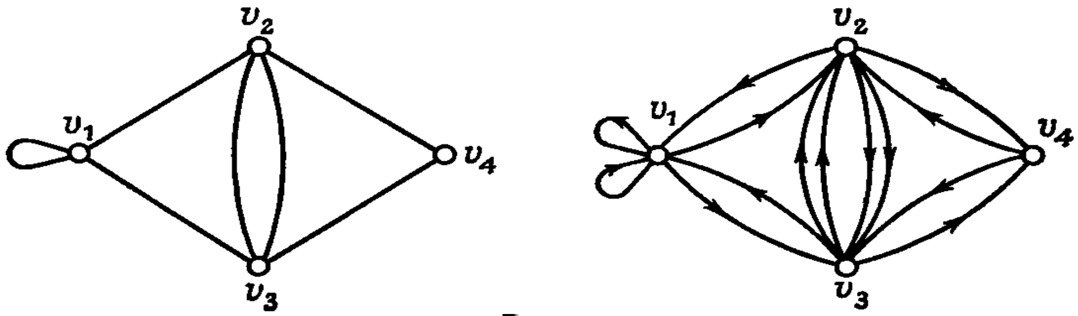


Рис. 4

Подграфом графа G называется граф, все вершины которого принадлежат V(G), а все ребра принадлежат E(G). Так, граф на рис. 1 является подграфом графа, изображенного на рис. 4, но не является подграфом ни одного из графов, приведенных на рис. 6 (так как последние не содержат «треугольников»). Подграф называется собственным, если он отличен от самого графа.

Маршрутом в данном графе G называется конечная последовательность ребер вида {v0, v1}, {v1, v2}, {vm-1, vm} (обозначаемая также через v0→v1→v2→…→vm).

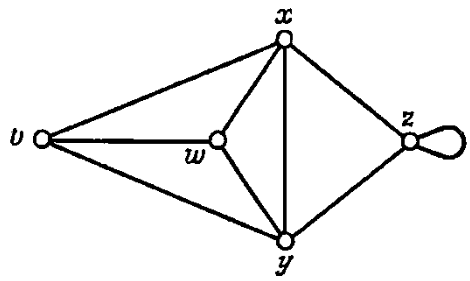


Рис. 5

Каждому маршруту соответствует последовательность вершин v0, v1, ... , vm; v0 называется начальной вершиной, а vm — конечной вершиной маршрута. Таким образом, мы будем говорить о маршруте из v0 в vm.

Длиной маршрута называется число ребер в нем.

Маршрут называется цепью, если все его ребра различны, и простой цепью, если все вершины v0, v1, ..., vm различны (кроме, может быть, v0 = vm). Цепь или простая цепь замкнуты, если v0 = vm. Замкнутая простая цепь, содержащая по крайней мере одно ребро, называется циклом.

Например, на рис. 5 v→ω→x→y→z→z→x — цепь, v→ω→x→y→z — простая цепь, v →ω→x→y→z→x→v — замкнутая цепь и v →ω→x→y→v — цикл.

Цикл длины три (например, v →ω→x→v) называется треугольником.

Граф называется связным, если для любых двух вершин v и ω существует маршрут, соединяющий v и ω (а компонентой связности графа G называется его связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа графа G).

Изоморфные и гомеоморфные графы и их свойства.

Два графа G1 и G2 называются изоморфными, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами их вершин, обладающее тем свойством, что число ребер, соединяющих любые две вершины в G1, равно числу ребер, соединяющих соответствующие вершины в G2. Иными словами, графы G1=(V1, E1), G2=(V2, E2) называются изоморфными, если существует биективное (взаимно однозначное) отображение φ:V1→V2, сохраняющее смежность, т.е. $\{v, \omega\} \in E1 \Leftrightarrow \{ \varphi(v), \varphi(\omega) \} \in E2$

Замечание: из определения следует, что изоморфные графы отличаются только обозначением вершин.

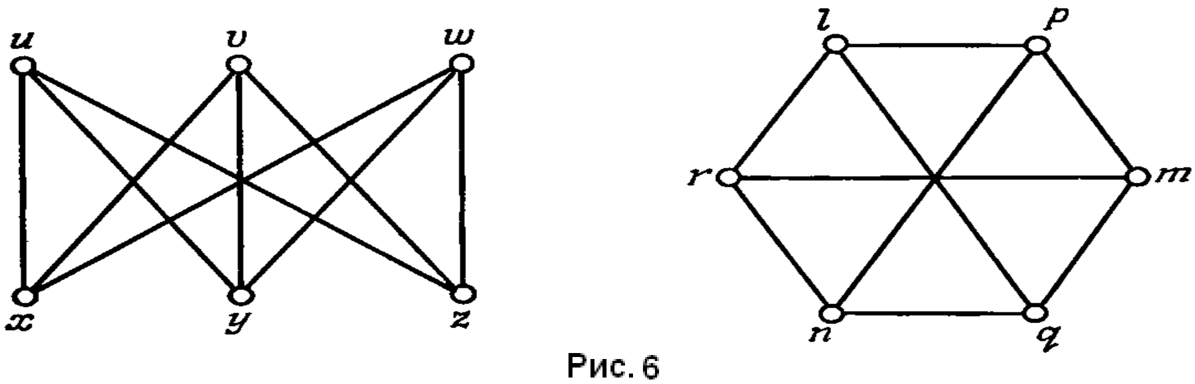


Рис. 6

Так, два графа, изображенные на рис. 6, изоморфны при соответствии u↔l, v ↔ m, ω ↔ n, x ↔ p, y↔ q, z ↔ г. Заметим, что эти графы имеют по шесть вершин — другие точки пересечения ребер вершинами не являются.

Свойства.

Если графы G1=(V1, E1), G2=(V2, E2) изоморфны и φ:V1→V2 – биективное отображение, сохраняющее смежность, то:

а) $\forall v \in V1\ \delta(v)=\delta(\varphi(v))$;

б) m(G1) = m(G2), n(G1) = n(G2).

Графы а) и б), изображенные на рис. 7, изоморфные, но они не изоморфны графу в), так как в графах а) и б) каждая вершина смежна с тремя оставшимися, а в графе в) есть две вершины, которые смежны с двумя другими и не смежны с третьей. Т. е. число ребер, соединяющих соответствующие вершины не одинаково.

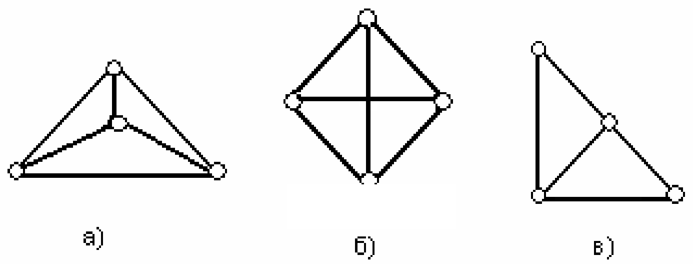


Рис. 7

Отметим, что изоморфизм графов является отношением эквивалентности на множестве графов.

Можно дать несколько определений гомеоморфных графов.

Функция f из графа G(V,E) в граф G'(V',E') называется гомоморфизмом из G в G' и обозначается f:G→G', если обладает следующими свойствами:

Если $e \in E$, то $f(e) \in E'$.

Если $v \in V$, то $f(v) \in V'$.

Если вершины u и v инцидентны ребру e графа G, то вершины f(u) и f(v) инцидентны ребру f(e) графа G'.

Если f:G→G'– гомоморфизм, то графы G и G' гомеоморфные.

Граф G1 называется подразбиением графа G2, если граф G1 можно получить из G2 путем последовательного применения операции подразбиения дуг.

Операция подразбиения дуги (u, v) в графе G=(V, E) состоит в удалении из E дуги (u,v), добавлении к V новой вершины ω и добавлении к E\{(u, v)} двух дуг (u, ω), (ω, v).

Графы G1, G2 называются гомеоморфными, если существуют их подразбиения, являющиеся изоморфными.

Если граф G(V, E) содержит ребро e = {v1, v2} и граф G'(V', E') получен из графа G(V,E) добавлением новой вершины v в множество V и заменой ребра {v1, v2} ребрами {v1, v} и {v, v2}, то граф G'(V', E') называется расширением графа G(V, E). Если графы G1, G2, … ,Gn таковы, что Gi+1 является расширением графа Gi, то граф Gn назовем производным от графа G1.

Графы G и G' называются гомеоморфными, если существует граф G'' такой, что оба графа, G и G', являются производными от графа G''.

Примеры.

Граф, изображенный на рис. 8, является расширением графа, изображенного на рис. 8’.

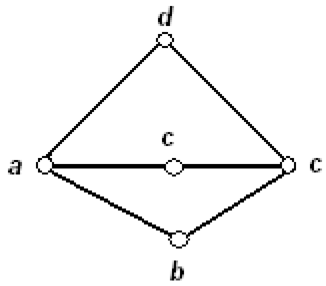


Рис. 8

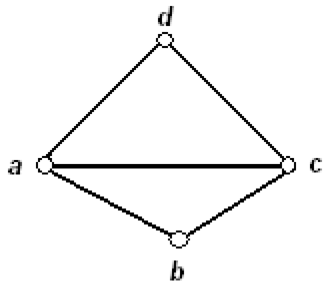


Рис. 8'

Граф, изображенный на рис. 9 является производным от графа, изображенного на рис. 9’.

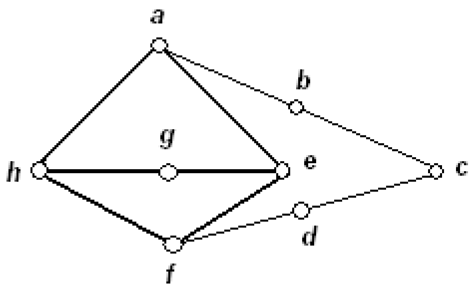


Рис. 9

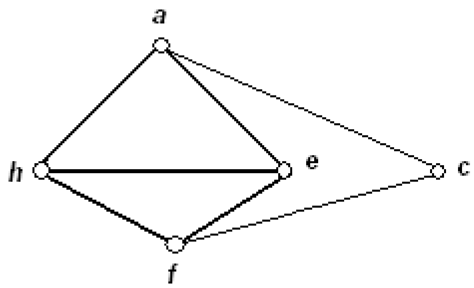


Рис. 9'

Граф, изображенный на рис. 10, является гомеоморфным графу, изображенному на рис. 10’.

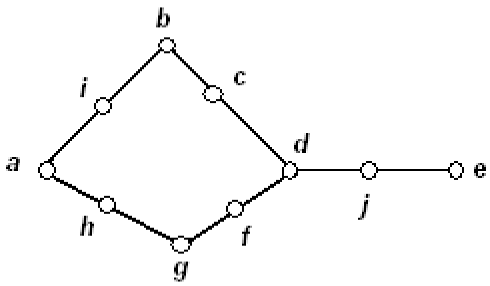


Рис.10

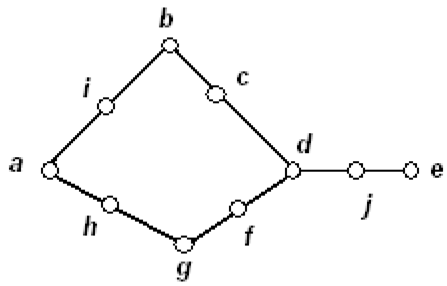


Рис.10'

Если граф G'(V',E') – расширение графа G(V,E), то новая добавленная вершина имеет степень 2. Степени других вершин не изменились. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Если графы G' и G – гомеоморфны, то у них одинаковое число вершин нечетной степени.

Доказательство. Действительно, так как графы G' и G – гомеоморфны, то по определению существует граф G" такой, что оба графа, G и G', являются производными от графа G". Отсюда следует, что G и G' являются расширениями графа G". А это означает, что G получен из графа G" добавлением n новых вершин и G' получен из G" добавлением m новых вершин, которые имеют четные степени, а именно 2. Степени остальных вершин не меняются. Значит число вершин с нечетной степенью у графа G' такое же, как в графе G", и число вершин с нечетной степенью в графе G такое же, как и в графе G". Таким образом, число вершин с нечетной степенью в графах G и G' одинаково. Что и требовалось доказать.

Операции над графами.

Дадим определение следующим операциям над графами: объединение, пересечение и дополнение.

Пусть G = G(V,E) – граф и G1, G2, …, Gn – подграфы графа G. Подграф G' графа G называется объединением графов G1, G2, …, Gn и обозначается $\bigcup_{i=i}^{n} Gi$, если

Вершина v∈ G' тогда и только тогда, когда v∈ Gi для некоторого 1 ≤ i ≤ n.

Ребро e ∈ G' тогда и только тогда, когда e ∈ Gi для некоторого 1 ≤ i ≤ n.

Иными словами, объединением графов G1=(V1, E1), G2=(V2, E2), называется граф G1UG2 = (V1UV2, E1UE2).

Пусть G = G(V,E) – граф и G1, G2, …, Gn – подграфы графа G. Подграф G' графа G называется пересечением графов G1, G2, …, Gn и обозначается $\bigcap_{i=1}^{n} Gi$, если

Вершина v ∈ G' тогда и только тогда, когда v ∈ Gi для некоторого 1≤i≤n.

Ребро $e \in G'$ тогда и только тогда, когда $e \in Gi$ для некоторого $1 \le i \le n$.

Иными словами, пересечением графов G1=(V1, E1), G2=(V2, E2), где $V1 \cap V2 \neq \varnothing$, называется граф $G1 \cap G2 = (V1 \cap V2, E1 \cap E2)$.

Пусть G = G(V,E) – граф и G1, G2, …, Gn – подграфы графа G. Подграфы G1, G2, …, Gn являются попарно непересекающимися, если $Gi \cap Gj = \varnothing$ для всех $1 \le i < j \le n$.

Теорема 2. Если G1 и G2 – различные компоненты графа G, то G1 и G2 – попарно непересекающиеся.

Теорема 3. Граф G является объединением попарно непересекающихся компонент.

Пусть G = G(V, E) – граф. Дополнением графа G, обозначаемым Gc (V, E’), называется граф такой, что для всех вершин $u, v \in V$ ребро между u и v в графе Gc существует тогда и только тогда, когда в графе G отсутствует ребро, соединяющее u и v.

Остовные графы и остовные деревья.

Подграф G’(V’, E’) является остовным графом для графа G(V, E), если V’=V

Для графа, изображенного на рис. 11, граф, изображенный на рис. 12, является остовным, а граф на рис. 13 не является таковым.

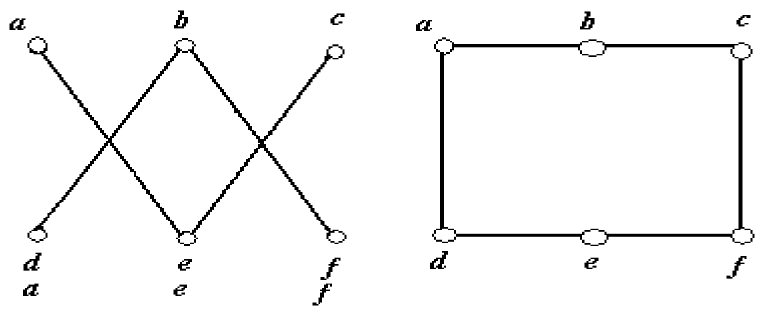


Рис 11.

Граф G называется деревом, если он является связным и не имеет циклов.

Остовным деревом связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Утверждение 1. Пусть G’ – граф, являющийся деревом, G – граф, полученный в результате добавления к G’ новой вершины v и ребра $\{v,\omega\}$, где ω - некоторая вершина графа G’. Тогда G – дерево.

Утверждение 2. Пусть G = (V, E) – связный граф с m ребрами и n вершинами, и пусть также выполняется равенство m = n-1. Тогда G – дерево.

Пусть каждому ребру $e \in E$ связного графа G = (V, E) с непустым множеством ребер E поставлена в соответствие величина l(e) – длина ребра e, т.е. граф G является нагруженным. Приведем алгоритм, позволяющий найти остовное дерева графа G с минимальной суммой длин содержащихся в нем ребер (по сравнению со всеми другими остовными деревьями графа G).

Остовное дерево связного нагруженного графа G с минимальной суммой длин содержащихся в нем ребер будем называть минимальным остовным деревом (МОД) графа G.

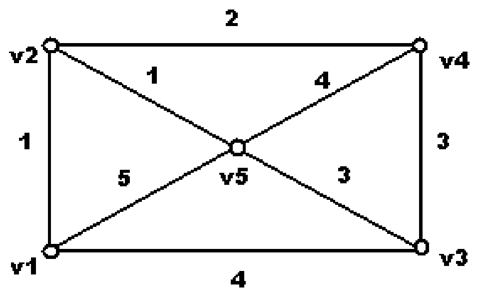
Алгоритм выделения МОД нагруженного связного графа G:

Шаг 1. Выберем в графе G ребро минимальной длины. Вместе с инцидентными ему вершинами оно образует подграф G2 графа G. Положим i=2.

Шаг 2. Если I = n, где n = n(G), то задача решена, и Gi – искомое МОД графа G. В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. Строим граф Gi+1, добавляя к графу Gi новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G, каждое из которых инцидентно какой-нибудь вершине графа Gi и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G, не содержащейся в Gi. Вместе с этим ребром включаем в Gi+1 и инцидентную ему вершину, не содержащуюся в Gi. Присваиваем i:=i+1 и переходим к шагу 2.

Пример. Определим МОД нагруженного графа G, изображенного на рис. 14, используя алгоритм. На рис. 15 приведена последовательность графов Gi, i=2, 3, 4, 5 получаемых в результате выполнения алгоритма. При этом в силу того, что n(G)=5, G5 – МОД графа G.



Обоснование алгоритма. Для любого дерева T подграфа T1 графа T, в свою очередь являющегося деревом, будем называть поддеревом дерева T. Покажем, что в результате применения к G алгоритма получим МОД графа G. Предварительно докажем, что справедлива лемма 1.

Рис. 14.

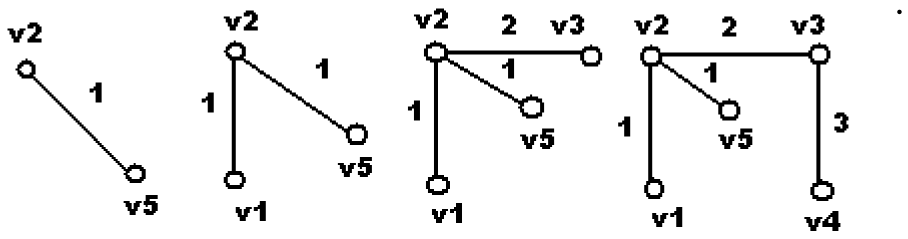


Рис. 15.

Лемма 1. Пусть T – некоторое дерево, являющееся поддеревом некоторого МОД G' связного нагруженного графа G = (V, E). Пусть далее e – ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G, каждое из которых инцидентно какой-нибудь вершине графа G, не содержащейся в T. Тогда, добавляя к T ребро e вместе с инцидентной ему вершиной, не содержащейся в T, получаем граф T', снова являющийся поддеревом некоторого МОД графа G.

Предварительно заметим, что T – дерево в силу утверждения 1.

Пусть T = (V1, E1), G' = (V, E'). Если e $\in$ E, то T' – поддерево дерева G', являющегося МОД графа G, т. е. в этом случае доказываемое утверждение справедливо.

Пусть теперь e $\overline{\in}$ E'. Рассмотрим граф G'', получаемый из G' в результате дополнения к G' ребра e. Тогда G'' найдется простой цикл μ, проходящий через ребро e. Пусть e = {v1,v2}, μ = (v1,v2, …, vk), где k$\geq$4, v1$\in$V1, v2$\overline{\in}$V1, vk=v1$\in$V1. Пусть также k1 – произвольный номер из {2,…,k-1} такой, что vk1$\overline{\in}$V1, vk1+1$\in$V1 (k1 найдется, поскольку v2$\overline{\in}$V1, vk$\in$V1). Так как μ – цикл, ребро e'={vk1,vk1+1} отлично от e, а следовательно, является ребром графа G. По условиям выбора e выполняется неравенство $l(e')\geq l(e)$, а поэтому, исключив из дерева G' ребро e' и включив вместо него ребро e, получим новое дерево G''' (граф G''' связный, так как получается в результате удаления из связного графа G'' ребра e', содержащегося в цикле μ этого графа, и, кроме того, количество ребер графа G''' ровно на 1 меньше числа его вершин, следовательно, согласно утверждению 2, G''' – дерево), общая сумма длин ребер которого не увеличится, а значит, G''' снова будет МОД графа G, и при этом T' является поддеревом графа G''', т. е. лемма доказана.

Для окончательного обоснования алгоритма заметим, что любая вершина графа G является поддеревом любого МОД графа G, а следовательно в силу леммы 1 граф G2 является поддеревом некоторого МОД графа G. Но тогда, снова используя лемму 1, последовательно находим, что каждый из графов G2, G3,…,Gn, полученных в результате применения к G алгоритма, является поддеревом некоторого МОД графа G, а так как Gn содержит все вершины графа G, заключаем, что Gn – искомое МОД графа G.

Примеры решения задач.

1. Какой из приведенных ниже графов является производным от графа, изображенного на рис. 16.?

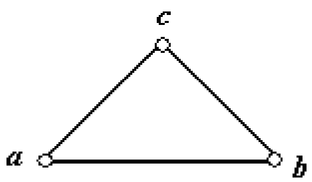
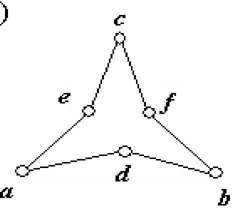
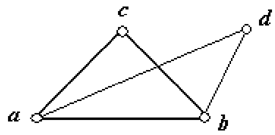


Рис. 16

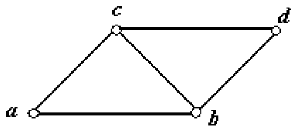
а)



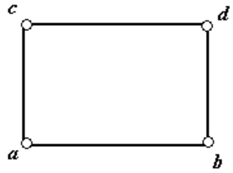
б)



в)



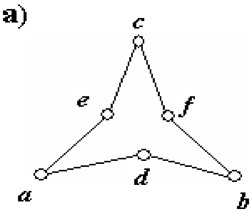
г)



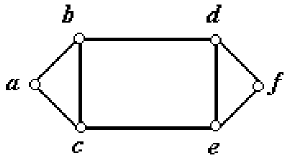
Производным от графа на рис. 16 является граф а), т. к. он получен из данного графа следующим образом. Обозначим данный граф как G(V, E), а производный от него – G'(V', E'). Тогда G(V, E)→ G1(V1, E1)→ G2(V2, E2)→ →G'(V', E'), где множество V1 получено добавлением к множеству V вершины d, V2 – добавлением к V1 вершины e, V' – добавлением к V2 вершины f. Соответственно множество E1 получено заменой в множестве E ребра {a, b} на ребра {a, d} и {d, b}, множество E2 – заменой в E1 ребра {a, c} на ребра {a, e} и {e, c}, множество E' – заменой в E2 ребра {c, b} на ребра {c, f} и {f. b}. Т. е. G1(V1, E1) является расширением G(V, E), G2(V2, E2) – расширением G1(V1, E1), G'(V', E') – расширением G2(V2, E2). Откуда по определению следует, что G'(V', E') является производным от G(V, E).

2. Найти дополнения приведенных ниже графов:

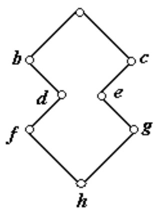
а)



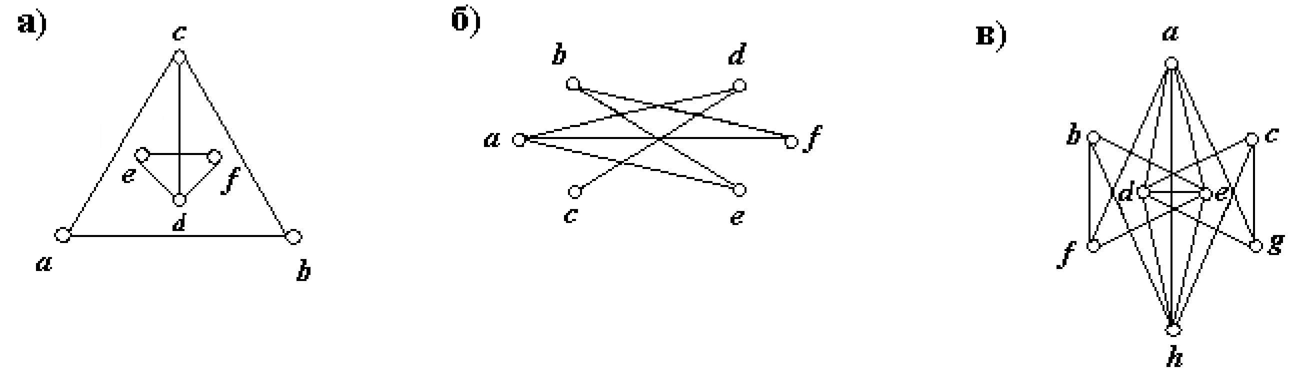
б)



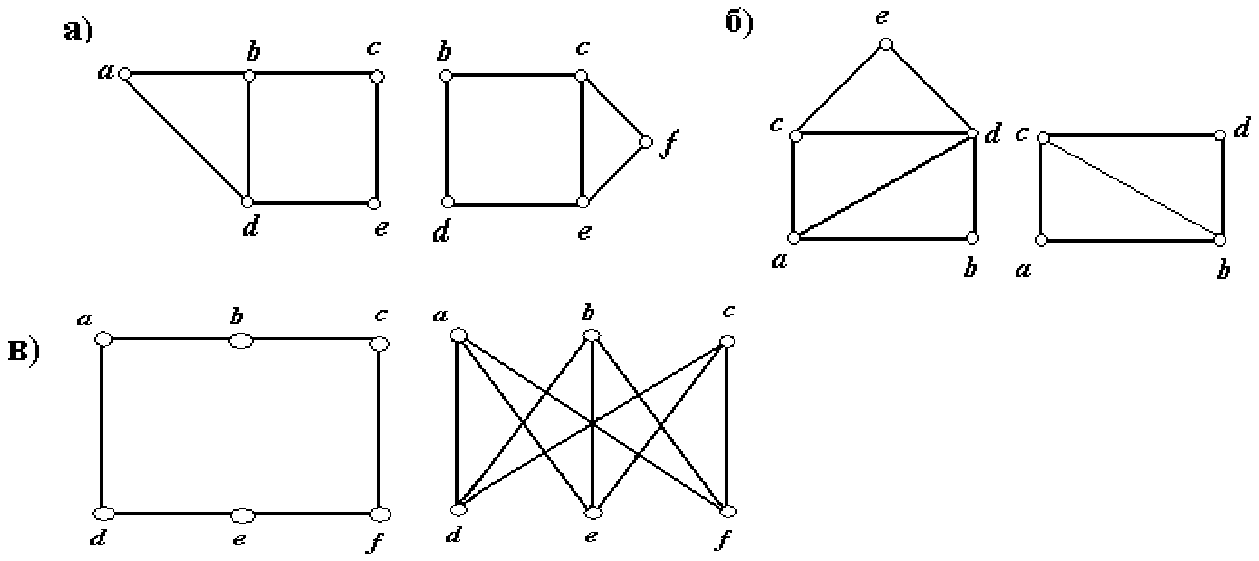
в)



Из определения дополнения следует, что если граф G содержит n вершин, то граф G можно построить, удалив из графа Kn все ребра, принадлежащие G (здесь G считается подграфом Kn , Kn – полный граф с n вершинами). Изобразим дополнения данных графов:



3. Найдите объединение и пересечение приведенных ниже множеств графов:



4. Покажите, что если графы G и G’ изоморфны, то они имеют одинаковое количество ребер и вершин.

5. Докажите, что пересечение графа G = (V, E) и его дополнения представляет собой граф, состоящий только из вершин графа G и не содержащий ребер.

Связность. Компоненты связности

Маршрутом в графе G(V,E) (путём в орграфе D(V,E)) называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер

v0, e1 ,v1 ,e2,…,vt-1 ,et ,vt,

в которой ei = vi-1v i $(1 \leq i \leq t)$.

Говорят, что вершина vi орграфа D (графа G) достижима из вершины vj, если либо vi =vj , либо существует путь из vi в vj (маршрут, соединяющий vi ,vj).

Граф (орграф) называется связным (сильно связным), если для любых двух его различных вершин vi ,vj Є V существует маршрут (путь) из vi в vj .

Орграф назвается односторонне связным, если для любых двух его вершин по крайней мере одна достижима из другой.

Орграф называется слабо связным, если связным является ассоциированный с ним псевдограф.

Если граф (орграф) не является связным (слабо связным), то он называется несвязным.

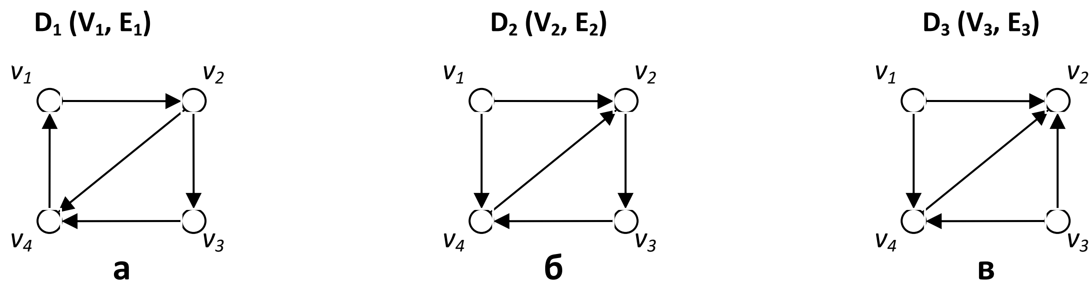


Рис.

D1 (см. рис.3, а) – сильно связанный орграф;

D2 (см. рис.3, б) – односторонне связанный орграф;

D3 (см. рис.3, в) – слабо связанный орграф.

Компонентами связности (сильной связности) графа G (орграфа D) называется его связный (сильно связный) подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного (сильно связного) подграфа графа G (орграфа D). Количество компонент связности (сильной связности) графа G (орграфа D) обозначается p(G) (p(D)).

Пример 3

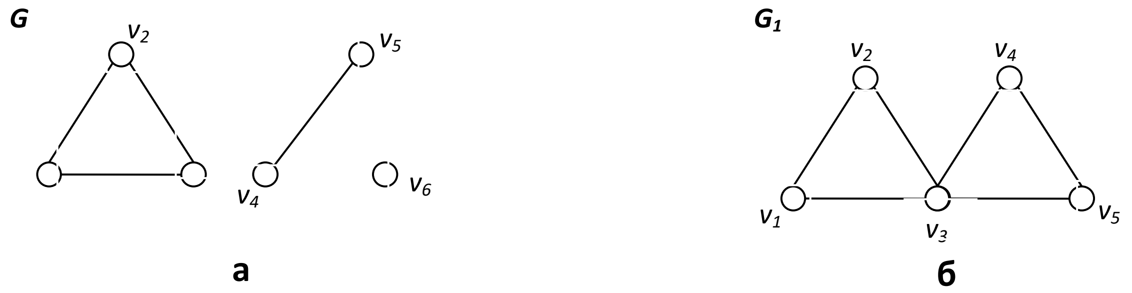


Рис.3

G (см. рис.2, а) – несвязный граф, так как содержит 3 компоненты связности;

G1 (см. рис.2, б) – связный граф.

Пример 4

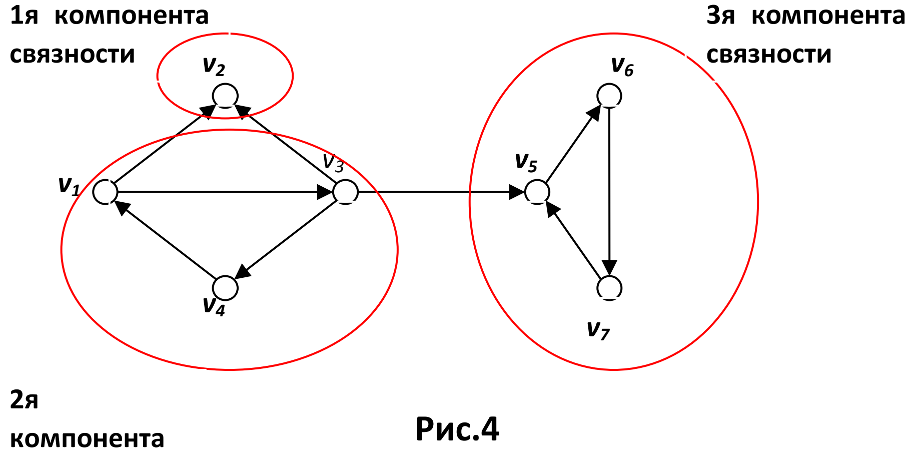


Рис.4

Из определения компоненты связности (сильной связности) следует

Лемма 1

Пусть G1(V1,E1) – компонента связности графа G. Тогда G1 – подграф графа G, порождённый множеством V1.

Пусть D1(V1,E1) – компонента сильной связности орграфа D. Тогда D1 – подграф орграфа D, порождённый множеством V1.

Замечание 1

Утверждение 1 остаётся в силе и для произвольных псевдографов (ориентированных и неориентированных).

Лемма 2

Пусть G(V,E) – псевдограф с p компонентами связности:G1(V1,E1), …, Gp(Vp,Ep). Тогда $V= V1\cup\ldots\cup Vp$, $E= E1\cup\ldots\cup Ep$, т.е. $G= G1\cup\ldots\cup Gp$;

$Vi\cap Vj =\varnothing$, $Ei\cap Ej =\varnothing$ при $i\neq j$;

$n(G1)+ \ldots + n(Gp) = n(G)$, $m(G1)+ \ldots + m(Gp) = m(G)$.

Лемма 3

Пусть D(V,E) – ориентированный псевдограф с компонентами сильной связности: D1(V1,E1), …, Dp(Vp,Ep).Тогда

1)$V= V1\cup\ldots\cup Vp$, $E \supset E1\cup\ldots\cup Ep$;

2)$Vi\cap Vj =\varnothing$, $Ei\cap Ej =\varnothing$ при $i\neq j$;

3)$n(D1)+ \ldots + n(Dp) = n(D)$, $m(D1)+ \ldots + m(Dp) = m(D)$.

Вершинная и рёберная связность

Вершина графа называется точкой сочленения, если её удаление увеличивает число компонент связности.

Мостом называется ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности.

Блоком называется граф, неимеющий точек сочленения.

Пример 5

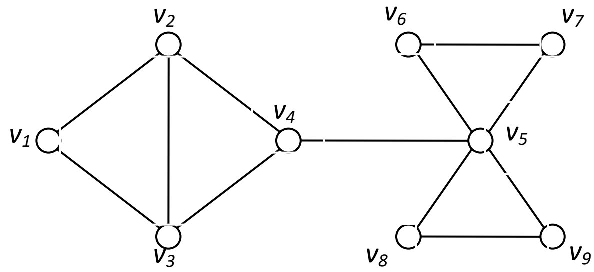


Рис.5

1. v4 , v5 – точки сочленения;

2. {v4 , v5}– мост;

3. блоки: {v1 , v2 , v3}, {v2 , v4 , v3},{v5 , v6 , v7}, {v5 , v8 , v9}, {v1 , v2 , v3,v4}.

Вершинной связностью графа G обозначается $\chi(G)$ называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу.

Рёберной связностью графа G обозначается $\lambda(G)$ называется наименьшее число рёбер, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу.

Матричное представление графов

Матрица смежности. Матрица инцидентности. Матрица Кирхгофа

Матрицей смежности графа G(V,E) называется квадратная матрица A(G)=[ai, j] порядка p (p – число вершин графа G), у которой:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ если существует ребро } \{v_i, v_j\}, \\ 0, \text{ если вершины } v_i, v_j \text{ не связаны с ребром } \{v_i, v_j\}. \end{cases}$$

Пример

Составим матрицу смежности для орграфа G(V,E)

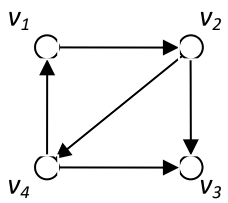


Рис.6

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0100 \\ 0011 \\ 0000 \\ 1010 \end{pmatrix}$$

Матрицей инцидентности графа G(V,E) называется прямоугольная матрица p×q. Обозначается R(G)=[bij].

$$rij = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } vi \text{ инцидентна ребру } ej\ , \\ 0, \text{ если вершина } vi \text{ не инцидентна ребру } ej\ . \end{cases}$$

Матрицей инцидентности ориентированного графа D(V,E) называется прямоугольная матрица p×q. Обозначается R(D)=[rij].

$$rij = \begin{cases} 1, \text{ если ребро } ej \text{ выходит из вершины } vi\ , \\ -1, \text{ если ребро } ej \text{ входит в вершину } vi, \\ 0, \text{ если вершина } vi \text{ не инцидентна ребру } ej. \end{cases}$$

Лемма 4

Если D' – орграф, полученный в результате удаления нескольких вершин из орграфа D, то A(D') (матрица смежности) получается из A(D) в результате удаления строк и столбцов, соответствующим вершинам.

Матрицы связности

Пусть A(G) – матрица смежности вершин графа G(V,E), а B=E+P+P2+…+Pn. Введём матрицу C= [ci, j],i,j=1,…,n по правилу

$$cij = \begin{cases} 1, \text{ если } bij \neq 0, \\ 0, \text{ если } bij = 0. \end{cases}$$

Матрица C называется матрицей связности, если G – граф, и матрицей достижимости, если G – орграф.

Матрица контрдостижимости

L= [li, j] порядка n, у которой:

$$lij = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } vi \text{ достижима из } vj \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицей сильной связности орграфа D называется квадратная матрица S(D)= [si, j] порядка n, у которой:

$$sij = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } vi \text{ достижима из } vj \text{ и одновременно достижима из } vi, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Выделение компонент связности

Алгоритм № 1

Опишем алгоритм нахождения числа компонент сильной связности орграфа, а также выделения этих компонент.

Воспользуемся следующими утверждениями.

Лемма

Пусть D – орграф с p≥2 компонентами сильной связности: D1, …, Dp. Тогда в результате удаления из D вершин, содержащихся в D1, получаем орграф с p-1 компонентами сильной связности: D2, …, Dp.

Воспользуемся очевидным фактом, что если D' – компонента сильной связности орграфа D, то D' является компонентой сильной связности и любого подграфа орграфа D, содержащего все вершины и дуги орграфа D'. Используя утверждение 1.3, заключаем, что после удаления из D вершин, содержащихся в D1, имеем орграф D, подграфами которого являются D2, …, Dp , а следовательно, D2, …, Dp являются компонентами сильной связности орграфа D. Кроме того, в силу утверждения 1.3 получаем, что объединение множеств вершин орграфов D2, …, Dp даёт множество вершин орграфа D, а значит D2, …, Dp – все компоненты сильной связности орграфа D.

Лемма

Пусть D' – компонента сильной связности орграфа D. Пусть также p(D) ≥2 и D'' – орграф, полученный в результате удаления из D вершин, содержащихся в D'. Тогда матрицами A(D''), S(D'') являются подматрицы матриц A(D'), S(D'), получаемые в результате удаления из них строк и столбцов, соответствующих вершинам орграфа D'.

Лемма

Единицы i-ой строки или i-го столбца матрицы сильной связности орграфа D(V,E), где V= {v1,… ,vn}, соответствуют вершинам компоненты сильной связности орграфа D, содержащей вершину vi .

Алгоритм:

Шаг 1. Полагаем p=1, S1=S(D).

Шаг 2. Включаем во множество вершин Vp очередной компоненты сильной связности Dp орграфа D вершины, соответствующие единицам первой строки матрицы Sp. В качестве A(Dp) берём подматрицу матрицы A(D), находящуюся на пересечении строк и столбцов, соответствующих вершинам из Vp.

Шаг 3. Вычёркиваем из Sp строки и столбцы, соответствующие вершинам из Vp. Если в результате такого вычёркивания не остаётся ни одной строки (и соответственно ни одного столбца), то p – количество компонент сильной связности и A(D1),…, A(Dp) – матрицы смежности компонент сильной связности D1, …, Dp орграфа D. В противном случае обозначаем оставшуюся после вычёркивания из Sp соответствующих строк и столбцов матрицу через Sp+1, присваиваем p:=p+1 и переходим к шагу 2.

Пример

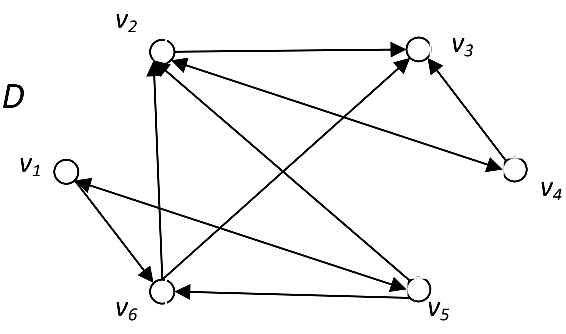
Орграф задан матрицей смежности. Построить его изображение. Определить матрицу сильной связности. Найти число КСС. Определить матрицы смежности этих КСС и построить их изображение.

$$A=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Решение

Построим изображение орграфа

Орграф *D*



1. Определим матрицу сильной связности

$$S(D)=\begin{pmatrix} 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \end{pmatrix}$$

2. а) В I КСС входят единицы 1 строки $S_1(D)$, т.е. множество вершин I КСС $V_1=\{ v_1,v_5 \}$. Пусть $S_1(D) = S(D)$. Соответствующая им матрица смежности

$$A_1=\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}$$

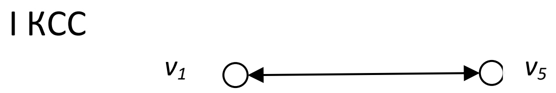


Рис.9

б) Выделим $S_2(D)$ – это подматрица, оставшаяся после вычёркивания строк и столбцов, соответствующих вершинам v_1,v_5.

$$S_2(D)=\begin{pmatrix} 1\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix}$$

Множество вершин II КСС: $V_2 =\{ v_2,v_4\}$.

Матрица смежности $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

II КСС

Рис.10

в) Выделим $S_3(D)$

$$S_3(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Множество вершин III КСС: $V_3 = \{ v_3 \}$.

Матрица смежности $A_3 = (0)$.

III КСС

Рис.11

г) Выделим $S_4(D)$

$S_3(D) = (1)$

Множество вершин IV КСС: $V_4 = \{ v_6 \}$.

IV КСС

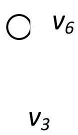


Рис.12

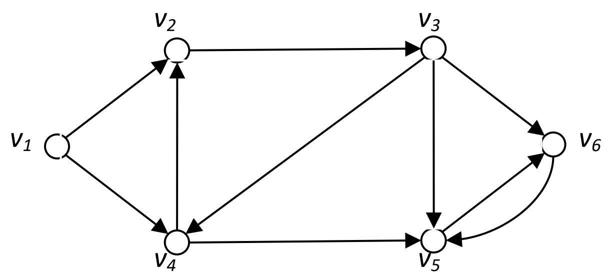
Алгоритм № 2

Матрицы C и L используются для нахождения сильных компонент графа. Пусть F=C*L, где операция * означает поэлементное произведение матриц C и L: fij=cij*lij. Элемент fij матрицы F равен единице тогда и только тогда, когда вершины vi и vj взаимно достижимы, т.е. если вершина vi достижима из vj , а вершина vj достижима из vi .Таким образом, сильная компонента орграфа, содержащая вершину vi состоит из элементов vj, для которых fij=1.

Пример

1. Определить матрицу достижимости C, контрдостижимости L, ориентированного мультиграфа G.

2. Выделить компоненты сильной связности. Определить количество КСС.



B=E+A+ A2 + A3 +A4 +A5 +A6

$$B=\begin{pmatrix} 1\ 3\ 3\ 2\ 7\ 6 \\ 0\ 3\ 2\ 2\ 10\ 9 \\ 0\ 2\ 3\ 2\ 13\ 12 \\ 0\ 2\ 2\ 3\ 10\ 9 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 4\ 3 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 4 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица достижимости будет иметь вид:

$$C(G)=\begin{pmatrix} 111111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 011111 \\ 000011 \\ 000011 \end{pmatrix}$$

Чтобы получить матрицу контрдостижимости L(G), в C(G) меняем строки на столбцы:

$$L(G)=Ct=\begin{pmatrix} 100000 \\ 111100 \\ 111100 \\ 111100 \\ 111111 \\ 11111 \end{pmatrix}$$

$$F= C*L=\begin{pmatrix} 100000 \\ 011100 \\ 011100 \\ 011100 \\ 000011 \\ 000011 \end{pmatrix}$$

Единичные элементы показывают компоненты сильной связности.

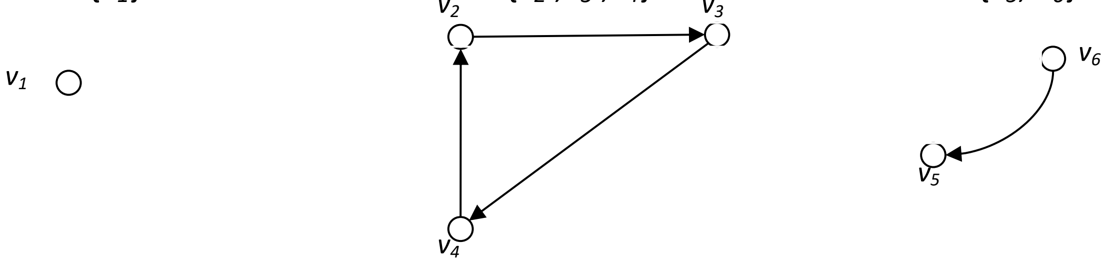
1. КСС {v1}

2. КСС {v2 ,v3 ,v4}

3. КСС {v5, v6}

Для построения изображения КСС воспользуемся матрицей смежности исходного графа.

КСС $\{v_1\}$ КСС $\{v_2, v_3, v_4\}$ КСС $\{v_5, v_6\}$



Алгоритмы нахождения путей в графах

Кратчайший путь между двумя заданными вершинами s и t.

Алгоритм Дейкстры.

Пусть дан граф G = (X, Г), дугам которого приписаны веса (стоимости), задаваемые матрицей C = [cij]. Задача о кратчайшем пути состоит в нахождении кратчайшего пути от заданной начальной вершины s до заданной конечной вершины t, при условии, что такой путь существует. Элементы cij матрицы весов C могут быть положительными, отрицательными или нулями. Единственное ограничение состоит в том, чтобы в G не было циклов с суммарным отрицательным весом. Если такой цикл Ф все же существует и xi — некоторая его вершина, то, двигаясь от s к xi, обходя затем Ф достаточно большое число раз и попадая наконец в t, мы получим путь со сколь угодно малым (--> - ∞) весом. Таким образом, в этом случае кратчайшего пути не существует.

Наиболее эффективный алгоритм решения задачи о кратчайшем (s-t)-пути первоначально дал Э.Дейкстра. В общем случае этот метод основан на приписывании вершинам временных пометок, причем пометка вершины дает верхнюю границу длины пути от s к этой вершине. Эти пометки (их величины) постепенно уменьшаются с помощью некоторой итерационной процедуры, и на каждом шаге итерации точно одна из временных пометок становится постоянной. Последнее указывает на то, что пометка уже не является верхней границей, а дает точную длину кратчайшего пути от s к рассматриваемой вершине. Более подробно этот метод описывается так:

Алгоритм Дейкстры (cij >= 0) Пусть l(xi) — пометка вершины xi.

Присвоение начальных значений.

Шаг 1. Положить l(s) = 0 и считать эту пометку постоянной. Положить l(xi) = ∞ для всех xi ≠s считать эти пометки временными. Положить p = s.

Обновление пометок

Шаг 2. Для всех xi € Г (p), пометки которых временные, изменить пометки в соответствии со следующим выражением:

l(xi) <- min [l (xi), l(p) + c (p, xi)].

Превращение пометки в постоянную

Шаг 3. Среди всех вершин с временными пометками найти такую, для которой l(xi*) = min [l(xi)].

Шаг 4. Считать пометку вершины xi* постоянной и положить p = xi*.

Шаг 5. (i) (Если надо найти лишь путь от s к t) Если p = t, то l(p) является длиной кратчайшего пути.

Остановка.

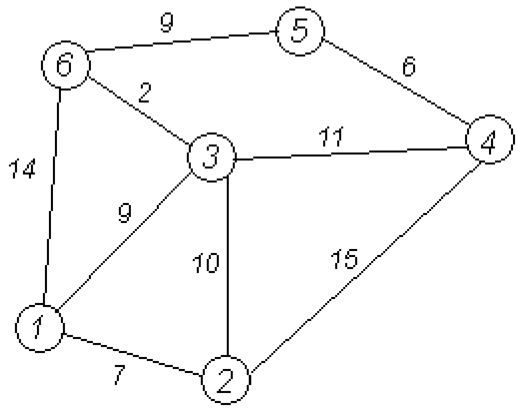
Если p ≠ t, перейти к шагу 2.

(ii) (Если требуется найти пути от s ко всем остальным вершинам.)

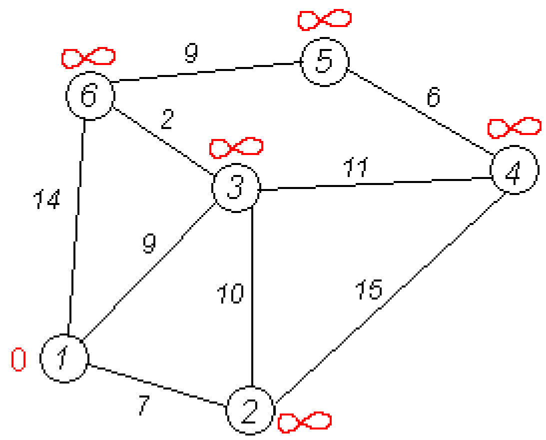
Если все вершины отмечены как постоянные, то эти пометки дают длины кратчайших путей. Остановка.

Если некоторые пометки являются временными, перейти к шагу 2.

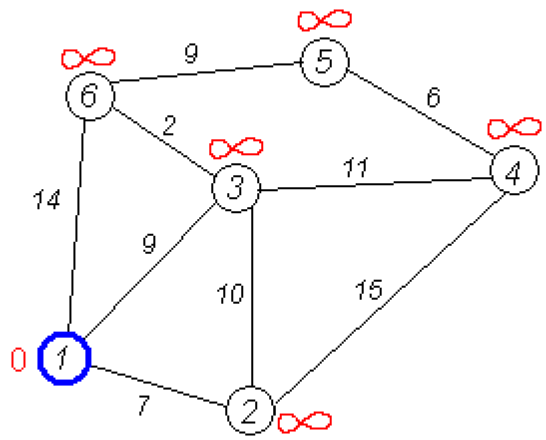
Рассмотрим выполнение алгоритма на примере графа, показанного на рисунке. Пусть требуется найти расстояния от 1-й вершины до всех остальных.



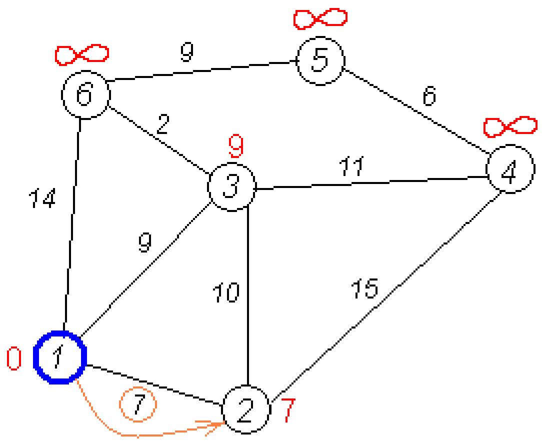
Кружками обозначены вершины, линиями — пути между ними (ребра графа). В кружках обозначены номера вершин, над ребрами обозначена их «цена» — длина пути. Рядом с каждой вершиной красным обозначена метка — длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины 1.



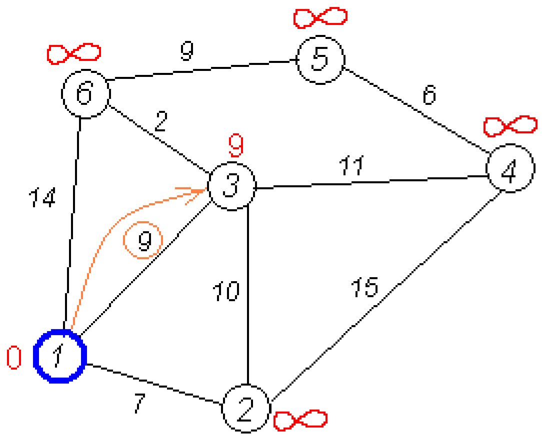
Первый шаг. Рассмотрим шаг алгоритма Дейкстры для нашего примера. Минимальную метку имеет вершина 1. Ее соседями являются вершины 2, 3 и 6.

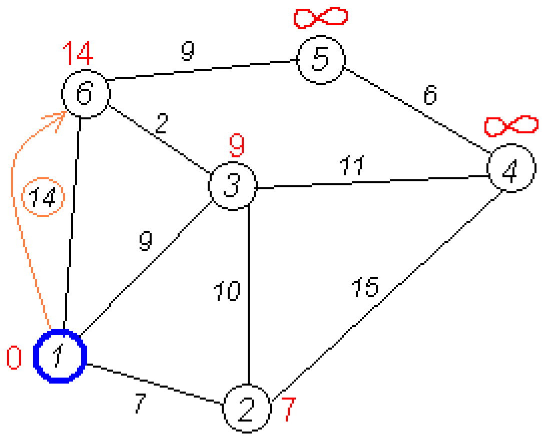


Первый по очереди сосед вершины 1 — вершина 2, потому что длина пути до нее минимальна. Длина пути в нее через вершину 1 равна кратчайшему расстоянию до вершины 1 + длина ребра, идущего из 1 в 2, то есть 0 + 7 = 7. Это меньше текущей метки вершины 2, поэтому новая метка 2-й вершины равна 7.

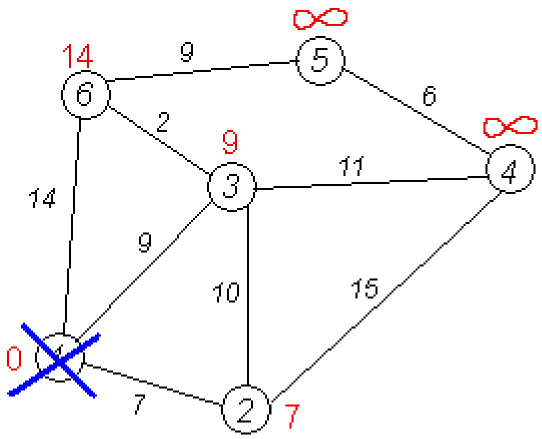


Аналогичную операцию проделываем с двумя другими соседями 1-й вершины — 3-й и 6-й.

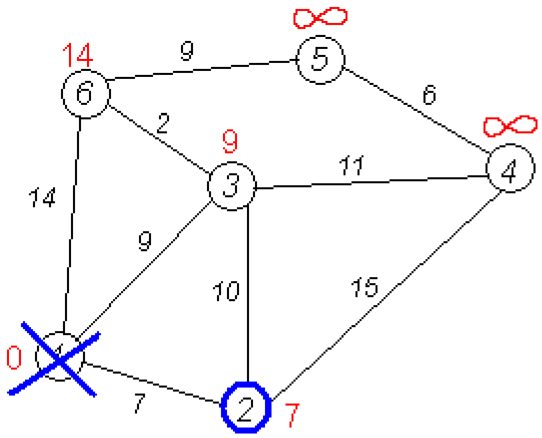




Все соседи вершины 1 проверены. Текущее минимальное расстояние до вершины 1 считается окончательным и обсуждению не подлежит (то, что это действительно так, впервые доказал Дейкстра). Вычеркнем её из графа, чтобы отметить, что эта вершина посещена.



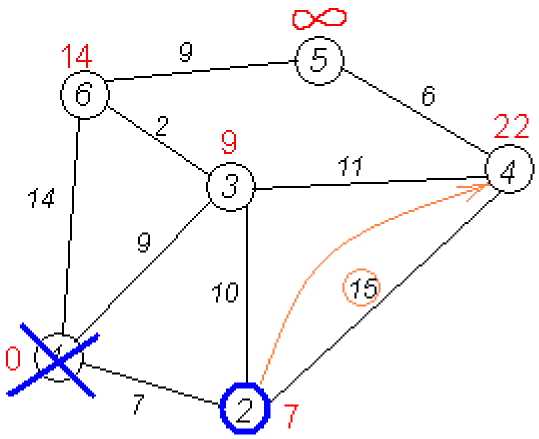
Второй шаг'. Шаг алгоритма повторяется. Снова находим «ближайшую» из непосещенных вершин. Это вершина 2 с меткой 7.



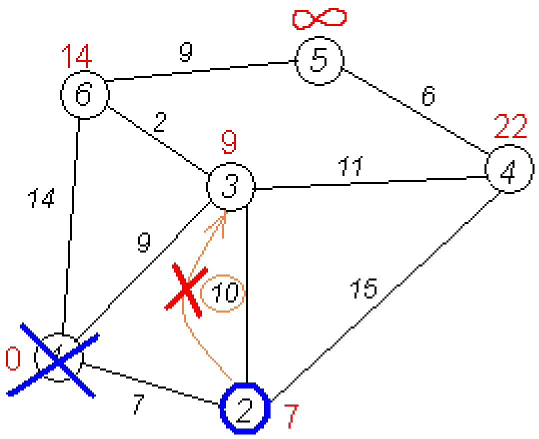
Снова пытаемся уменьшить метки соседей выбранной вершины, пытаясь пройти в них через 2-ю. Соседями вершины 2 являются 1, 3, 4.

Первый (по порядку) сосед вершины 2 — вершина 1. Но она уже посещена, поэтому с 1-й вершиной ничего не делаем.

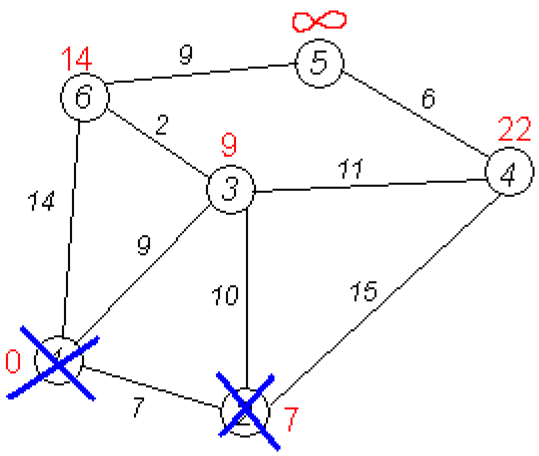
Следующий сосед вершины 2 — вершина 4. Если идти в неё через 2-ю, то длина такого пути будет = кратчайшее расстояние до 2 + расстояние между вершинами 2 и 4 = 7 + 15 = 22. Поскольку 22<∞, устанавливаем метку вершины 4 равной 22.



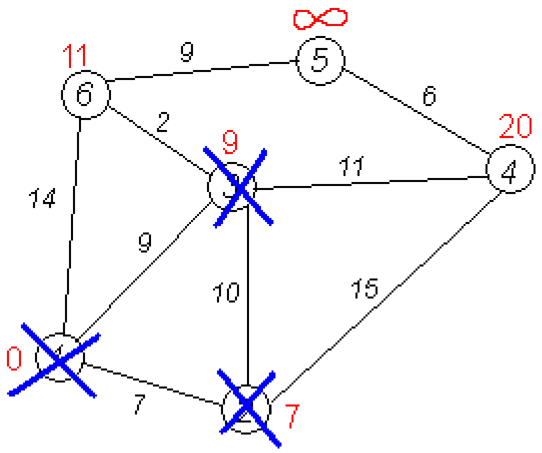
Ещё один сосед вершины 2 — вершина 3. Если идти в неё через 2, то длина такого пути будет = 7 + 10 = 17. Но текущая метка третьей вершины равна 9<17, поэтому метка не меняется.



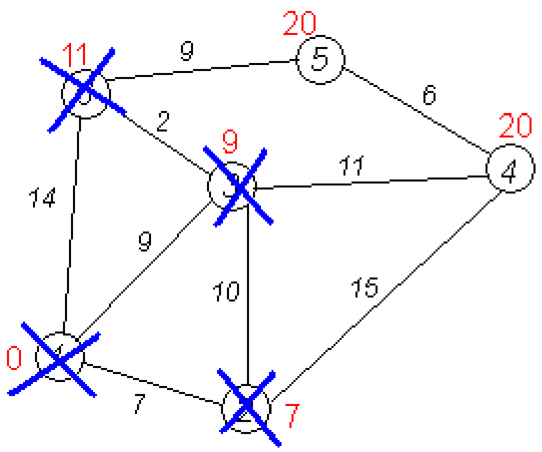
Все соседи вершины 2 просмотрены, замораживаем расстояние до неё и помечаем ее как посещенную.

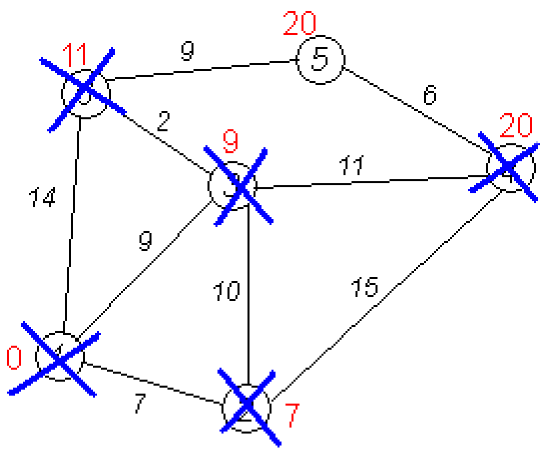


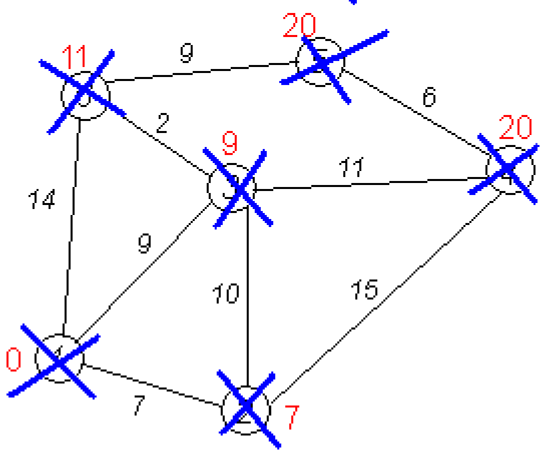
Третий шаг. Повторяем шаг алгоритма, выбрав вершину 3. После ее «обработки» получим такие результаты:



Дальнейшие шаги. Повторяем шаг алгоритма для оставшихся вершин (Это будут по порядку 6, 4 и 5).







Завершение выполнения алгоритма. Алгоритм заканчивает работу, когда вычеркнуты все вершины. Результат его работы виден на последнем рисунке: кратчайший путь от вершины 1 до 2-й составляет 7, до 3-й — 9, до 4-й — 20, до 5-й — 20, до 6-й — 11.

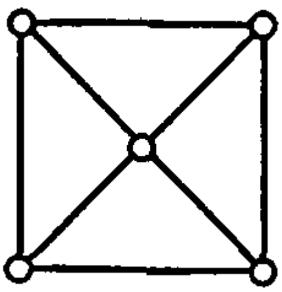
ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

Определение 1: Связный граф G называется эйлеровым, если существует замкнутая цепь, проходящая через каждое его ребро; такая цепь называется эйлеровой цепью или эйлеровым циклом. Отметим, что в этом определении требуется, чтобы каждое ребро проходилось только один раз.

Определение 2:. Пусть G — ориентированный граф. Ориентированным циклом называется ориентированная цепь ненулевой длины из вершины в ту же вершину без повторения ребер.

Если снять ограничение на замкнутость цепи, то граф называется полуэйлеровым; при этом каждый эйлеров граф будет полуэйлеровым.

На рис. 15.1, 15.2 и 15.3 изображены соответственно неэйлеров, полуэйлеров и эйлеров графы. Заметим, что предположение о связности графа G введено только ради удобства, так как оно позволяет не рассматривать тривиальный случай графа, содержащего несколько изолированных вершин.



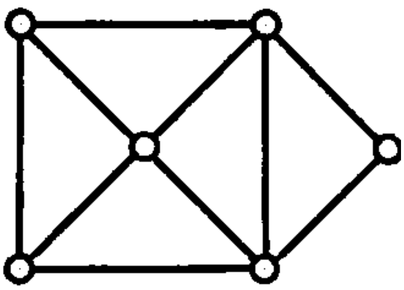
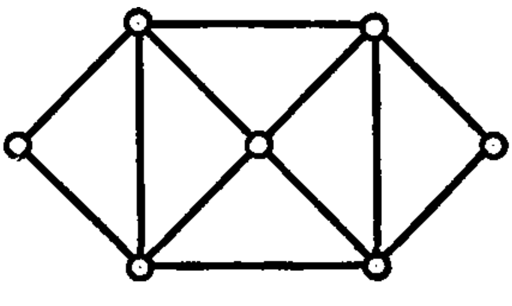


Рис.15.1 Рис.15.2



Риис.15.3

Задачи с эйлеровыми графами часто встречаются в книгах по занимательной математике — типичной является такая постановка: можно ли нарисовать какую-нибудь данную диаграмму, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя никакую линию дважды. Название «эйлеров» возникло в связи с тем, что Эйлер первым решил знаменитую задачу о кёнигсбергских мостах, в которой нужно было узнать, имеет ли граф, изображенный на рис. 16, эйлерову цепь (не имеет).

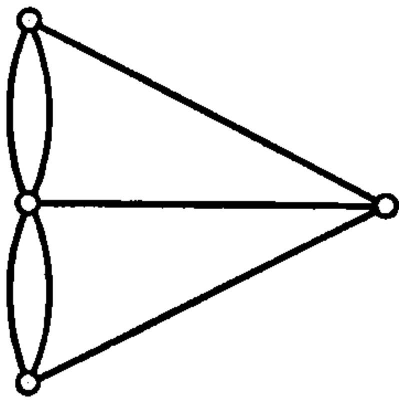


Рис.16

Сразу же возникает вопрос: можно ли найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы граф был эйлеровым? Прежде чем дать полный ответ на этот вопрос в теореме, докажем простую лемму.

Лемма: Если степень каждой вершины графа G не меньше двух, то G содержит цикл.

Доказательство. Если в графе G имеются петли или кратные ребра, то утверждение очевидно; поэтому предположим, что G является простым графом. Пусть v — произвольная вершина графа G; построим по индукции маршрут $v \to v1 \to v2 \to v3 \to \ldots$, выбирая вершину v1 смежной вершине v, а для $i \geq 1$ — выбирая vi+1 смежной vi и отличной от vi-1 (существование такой вершины vi+1 гарантировано условием леммы). Так как G имеет конечное число вершин, то в конце концов мы придем к вершине, которая уже была выбрана раньше. Предположим, что vk —

первая такая вершина; тогда часть маршрута, лежащая между двумя вхождениями vk, и является требуемым циклом.

Теорема 1: связный граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждая вершина в G имеет четную степень.

Доказательство: $\Rightarrow$. Предположим, что P является эйлеровой цепью в графе G. Тогда при всяком прохождении цепи P через любую из вершин графа степень этой вершины увеличивается на два. А так как каждое ребро встречается в P ровно один раз, то каждая вершина должна иметь четную степень.

$\Leftarrow$. Проведем доказательство индукцией по числу ребер в G. В силу связности G, степень каждой вершины не меньше двух, а отсюда, по предыдущей лемме, заключаем, что граф G содержит цикл C. Если C проходит через каждое ребро графа G, то доказательство завершено; если нет, то, удаляя из G ребра, принадлежащие циклу C, получим новый (быть может, и несвязный) граф H. Число ребер в H меньше, чем в G, и любая вершина в H по-прежнему имеет четную степень. Согласно индуктивному предположению, в каждой компоненте графа H существует эйлерова цепь. В силу связности графа G, каждая компонента в H имеет по крайней мере одну общую вершину с циклом C, поэтому искомую эйлерову цепь графа G можно получить так: идем по ребрам цикла C до тех пор, пока не встретим неизолированную вершину графа H, затем следуем по эйлеровой цепи той компоненты в H, которая содержит указанную вершину; далее продолжаем путь по ребрам цикла C, пока не встретим вершину, принадлежащую другой компоненте графа H, и т. д.; заканчивается процесс тогда, когда мы попадаем обратно в начальную вершину (см. рис. 17).

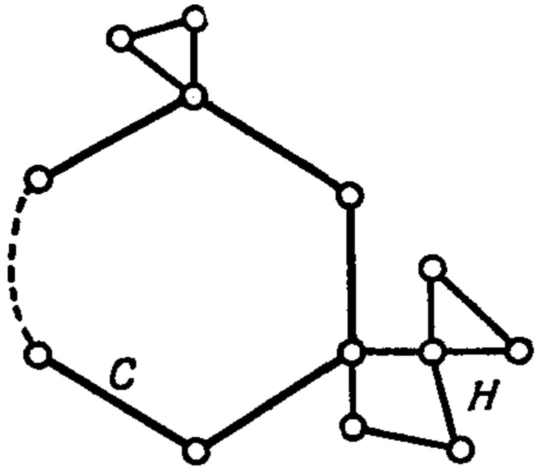


Рис.17

Модифицируя данное доказательство, легко получить следующие два результата.

Следствие 1: связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда семейство его ребер можно разбить на непересекающиеся циклы.

Следствие 2: связный граф является полуэйлеровым тогда и только тогда, когда в нем не более двух вершин имеют нечетные степени.

Заметим, что если полуэйлеров граф содержит ровно две вершины с нечетными степенями, то в любой полуэйлеровой цепи (смысл этого понятия очевиден) одна из этих вершин обязательно будет начальной, а другая — конечной.

Теорема 2: ориентированный граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связный и степень входа каждой вершины равна ее степени выхода.

Завершая рассмотрение эйлеровых графов, дадим алгоритм построения эйлеровой цепи в данном эйлеровом графе. Этот метод известен под названием алгоритма Флёри.

Теорема 3: Пусть G — эйлеров граф; тогда следующая процедура всегда возможна и приводит к эйлеровой цепи графа G. Выходя из произвольной вершины и, идем по ребрам графа произвольным образом, соблюдая лишь следующие правила:

(1) стираем ребра по мере их прохождения и стираем также изолированные вершины, которые при этом образуются; (2) на каждом этапе идем по мосту только тогда, когда нет других возможностей.

Доказательство. Покажем сначала, что указанная процедура может быть выполнена на каждом этапе. Предположим, что мы достигли некоторой вершины v; тогда если $v \neq и$, то оставшийся подграф H связен и содержит ровно две вершины нечетной степени, а именно и и v. Согласно следствию, граф H содержит полуэйлерову цепь P из v в и. Поскольку удаление первого ребра цепи P не нарушает связности графа H, отсюда следует, что описанное в теореме построение возможно на каждом этапе. Если же $v = и$, то доказательство остается тем же самым до тех пор, пока есть еще ребра, инцидентные вершине u.

Осталось только показать, что данная процедура всегда приводит к полной эйлеровой цепи. Но это очевидно, так как в G не может быть ребер, оставшихся непройденными после использования последнего ребра, инцидентного и (в противном случае удаление некоторого ребра, смежного одному из оставшихся, привело бы к несвязному графу, что противоречит (2)).

Задачи и упражнения

1. Город Кенигсберг (ныне Калининград) расположен на берегах реки Прегель (Пре-голи) и двух островах. Различные части города были соединены семью мостами. По воскресеньям горожане совершали прогулки по городу. Вопрос заключается в том, можно ли совершить прогулку таким образом, чтобы, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя в точности один раз по каждому мосту? (Рис. 19).

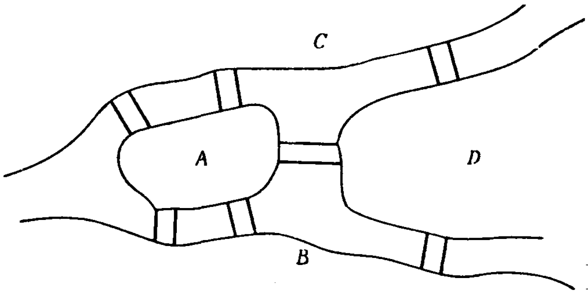


Рис. 19

Решение. Изобразим карту мостов схематично в виде графа (рис.20).

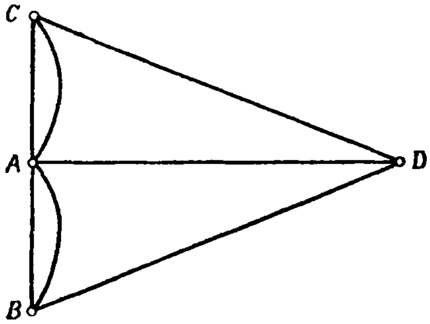


Рис. 20

Так как нас интересуют только переходы по мостам, мы можем считать A, B, C, D вершинами некоторого графа, ребра которого отвечают соответствующим мостам. Локальная степень вершин C, B, D равна 3, а локальная степень вершины A равна пяти. То есть этот граф не является эйлеровым, следовательно обход, который указан в условии задачи невозможен (§ II. Т.1, Опр.1).

2. На рисунке 21 изображен план подземелья, в одной из комнат которого находятся богатства рыцаря. После смерти рыцаря его наследники нашли завещание, в котором было сказано, что для отыскания сокровищ необходимо войти в одну из крайних комнат подземелья, пройти через все двери, причем в точности по одному разу через каждую; сокровища скрыты за той дверью, которая будет пройдена последней. В какой комнате были скрыты сокровища?

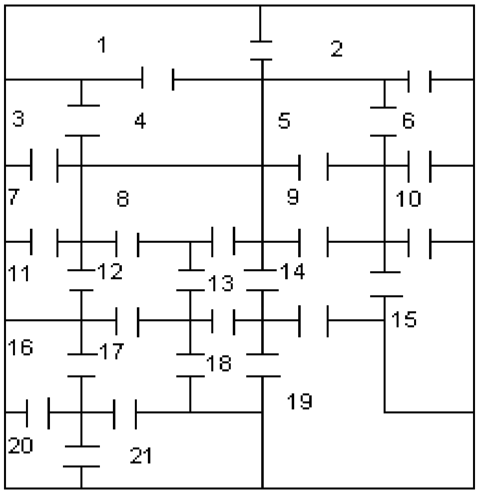


Рис.21

Решение. В графе, соответствующем подземелью вершины – комнаты, а ребра соединяют те вершины, которые соответствуют комнатам, связанным дверью. Таким образом решение задачи сводится к отысканию эйлеровой цепи в этом графе. В нем только две вершины имеют нечетные степени: 6 (крайняя) и 18 (некрайняя). По следствию 2 из § II. Существует эйлерова цепь из 6 в 18. Следовательно сокровища в комнате 18.

3. Можно ли сложить веревку так, как показано на рисунке 22, не разрезая ее и не сдваивая.

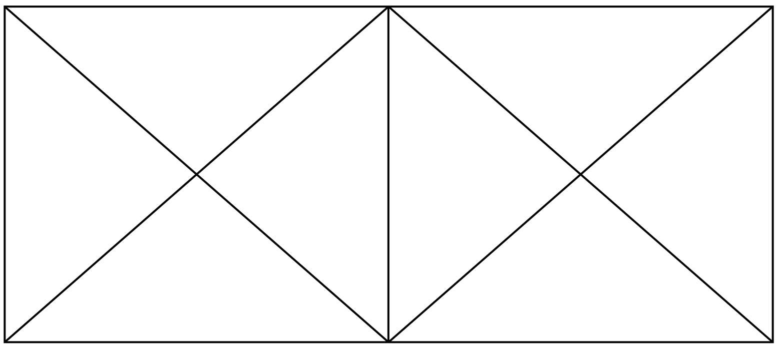


Рис. 22

Решение. Для того, чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо выяснить, существует ли в графе на рисунке 22 эйлеров цикл. Так как все вершины в графе имеют нечетные степени, то данный граф не является эйлеровым и не содержит эйлерова цикла. То есть веревку нельзя сложить данным образом.

4. Можно ли нарисовать фигуру, называемую саблями Магомеда, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя по отрезкам линий дважды (за исключением помеченных точек) (рис. 23).

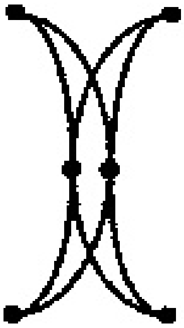
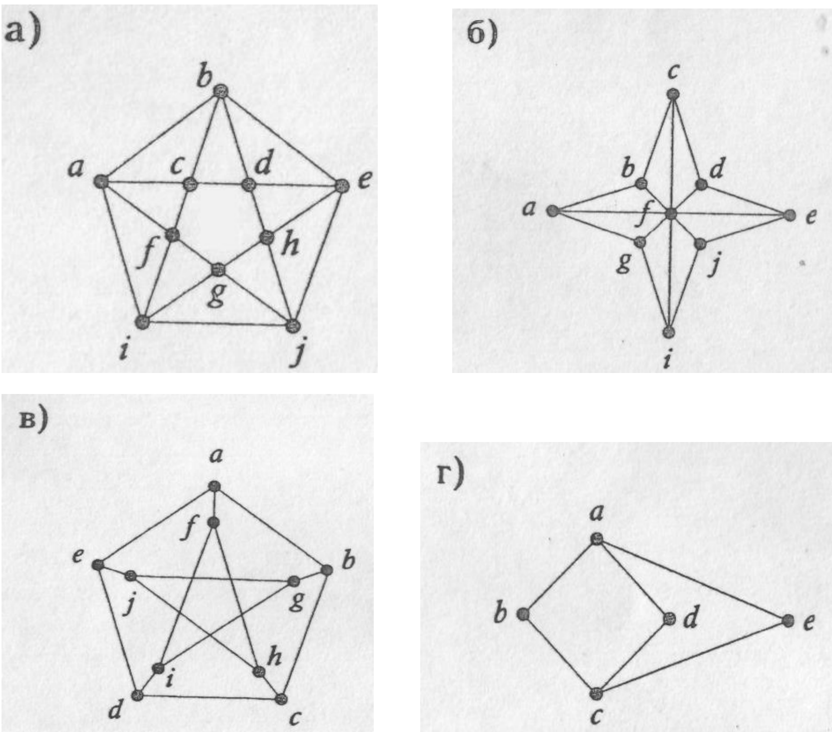


Рис. 23

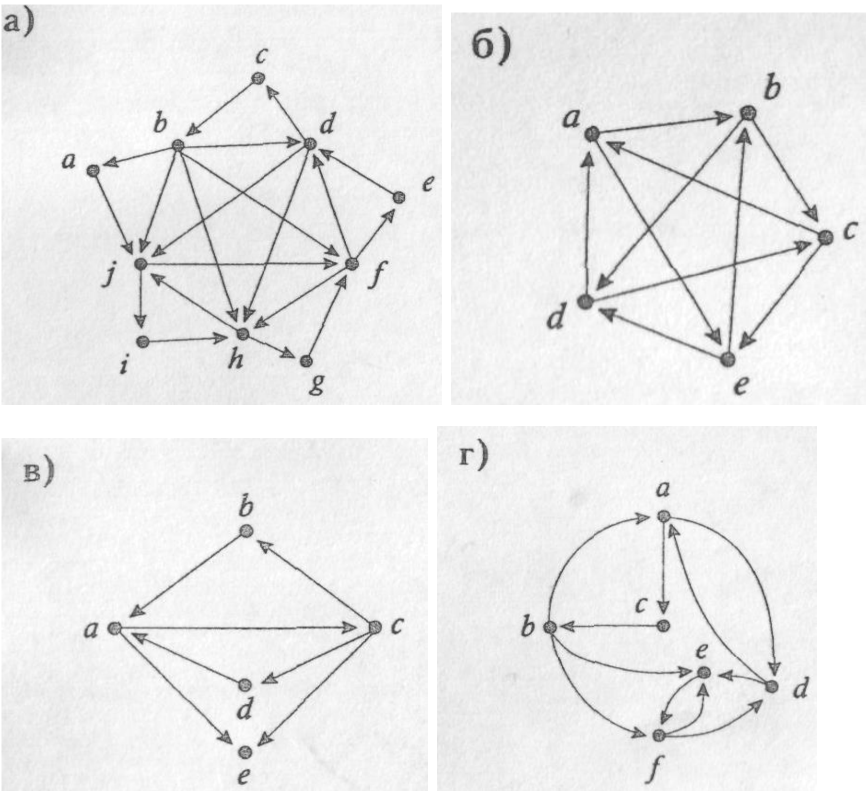
Решение. Так как локальная степень каждой из вершин является четной, то данный граф является эйлеровым. То есть в данном графе существует эйлеров цикл. Следовательно, эту фигуру можно нарисовать заданным в условии способом.

5. Среди приведенных ниже графов найдите те, которые имеют эйлеров цикл.



Решение. Эйлеров цикл имеет граф, изображенный на рисунке (а), так как он единственный, у которого все вершины имеют четную степень (теорема 1, § II.)

6. Какие из следующих ориентированных графов имеют эйлеровы циклы?



Решение. Только ориентированный граф, изображенный на рисунке (б) имеет эйлеров цикл, так как у каждой его вершины степень выхода равна степени входа. В графе (а) степень выхода вершины b равна 5, а степень входа 1; в графе (в) степень выхода вершины с равна 3, а входа – 1; в графе (г) степень выхода вершины b равна 3, а входа – 1. По теореме 2 из § II. Граф (б) имеет эйлеров цикл, а графы на рисунках (а, в, г) – не имеют.

РАСКРАСКИ ГРАФОВ

Рассмотрим основные теоремы теории графов.

Теорема 1. Удвоенная сумма степеней вершин любого графа равна числу его ребер.

Доказательство. Пусть A1, A2, A3, ..., An — вершины данного графа, а p(A1), p(A2), ..., p(An) – степени этих вершин. Подсчитаем число ребер, сходящихся в каждой вершине, и просуммируем эти числа. Это равно нахождению суммы степеней всех вершин. При таком подсчете каждое ребро будет учтено дважды (оно ведь всегда соединяет две вершины). Отсюда следует: p(A1)+p(A2)+ ... +p(An)=0,5N, или 2(p(A1)+p(A2)+... +p(An))=N , где N — число ребер.

Теорема 2. Число нечетных вершин любого графа четно.

Доказательство. Пусть a_1, a_2, a3,..,ak — это степени четных вершин графа, а b1, b2, b3,...,bm — степени нечетных вершин графа. Сумма a1+a2+a3+…+ak+b1+b2+b3+…+bm ровно в два раза превышает число ребер графа. Сумма a1+a2+a3+…+ak четная (как сумма четных чисел), тогда сумма b1+b2+b3+…+bm должна быть четной. Это возможно лишь в том случае, если m — четное, то есть четным является и число нечетных вершин графа. Что и требовалось доказать.

Теорема 3. Во всяком графе с n вершинами, где n больше или равно 2, всегда найдутся две или более вершины с одинаковые степенями.

Доказательство. Если граф имеет n вершин, то каждая из них может иметь степень 0, 1, 2, ..., (n-1). Предположим, что в некотором графе все его вершины имеют различную степень, и покажем, что этого быть не может. Действительно, если p(A)=0, то это значит, что A — изолированная вершина, и поэтому в графе не найдется вершины X со степенью p(X)=n-1. В самом деле, эта вершина должна быть соединена с (n-1) вершиной, в том числе и с A, но ведь A оказалась изолированной. Следовательно, в графе, имеющем n вершин, не может быть одновременно вершины степени 0 и (n-1). Это значит, что из n вершин найдутся две, имеющие одинаковые степени.

Теорема 4. Если в графе с n вершинами (n больше или равно 2) только одна пара имеет одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется либо единственная изолированная вершина, либо единственная вершина, соединенная со всеми другими.

Теорема 5. Если у графа все простые циклы четной длины, то он не

содержит ни одного цикла четной длины.

Суть теоремы в том, что на этом графе невозможно найти цикл (как простой, так и непростой) нечетной длины, то есть содержащий нечетное число ребер.

Теорема 6. Для того, чтобы граф был эйлеров, необходимо и достаточно, чтобы он был связным и все его вершины имели четную степень.

Теорема 7. Для того чтобы на связном графе можно было бы проложить цепь АВ, содержащую все его ребра в точности по одному разу, необходимо и достаточно, чтобы А и В были единственными нечетными вершинами этого графа.

Для доказательства к исходному графу присоединим ребро (А,В); после этого все вершины графа станут четными. Этот новый граф удовлетворяет всем условиям теоремы 6, и поэтому в нем можно проложить эйлеров цикл Ψ. И если теперь в этом цикле удалить ребро (А, В), то останется искомая цепь АВ.

Теорема 8. Если данный граф является связным и имеет 2k вершин нечетной степени, то в нем можно провести k различных цепей, содержащих все его ребра в совокупности ровно по одному разу.

Теорема 9. Полный граф с пятью верши не является плоским.

Доказательство. Воспользуемся формулой Эйлера: В-Р+Г=2, где В — число вершин плоского графа, Р — число его ребер, Г — число граней. Формула Эйлера справедлива для плоских связных графов, в которых ни один из многоугольников не лежит внутри другого.

Теорема 10. (Теорема Понтрягина-Куратовского). Граф является плоским тогда и только тогда, когда он не имеет в качестве подграфа полного графа с пятью вершинами.

Теорема 11. (Об оптимальной раскраске)

Если граф G является r-хроматическим, то он может быть раскрашен с использованием r (или меньшего числа) красок с помощью следующей процедуры: сначала в один цвет окрашивается некоторое максимальное независимое множество S(G), затем окрашивается в следующий цвет множество S(X\S(G)) и так далее до тех пор, пока не будут раскрашены все вершины.

Доказательство. Тот факт, что такая раскраска, использующая только r цветов, всегда существует, может быть установлен следующим образом. Пусть существует раскраска в r цветов, такая, что одно или больше множеств, окрашенных в один и тот же цвет, не являются максимальными независимыми множествами в смысле, упомянутом выше. Перенумеруем цвета произвольным способом. Очевидно, что мы можем всегда покрасить в цвет 1 те вершины (пусть это множество Vi'), которые не были окрашены в этот цвет и которые образуют максимальное независимое множество вместе с множеством Vi всех вершин графа, уже окрашенных в цвет 1. Эта новая раскраска возможна потому, что никакая вершина из множества Vi' не является смежной ни с какой вершиной из Vi' и, следовательно, всякая вершина, которая смежна хотя бы с одной вершиной из Vi', окрашена в цвет, отличный от цвета 1, и поэтому не затрагивается процедурой перемены цвета вершин из Vi'. Рассматривая теперь подграф $(X - Vi')$ и проводя с ним аналогичные манипуляции, мы окрасим в цвет 2 какое-то (новое) максимальное независимое множество и т. д.

Теорема 12. Если наибольшая из степеней вершин графа G равна p, то этот граф (p+1)-раскрашиваем.

Доказательство. Проведем индукцию по числу вершин в графе G. Пусть G— граф с n вершинами; если из него удалить произвольную вершину i вместе с инцидентными ей ребрами, то в оставшемся графе будет n-1 вершин, причем степени вершин по-прежнему не превосходят p. По предположению индукции этот граф (p+1) -раскрашиваем, отсюда получится (p+1)- раскраска для G, если окрасить вершину i цветом, отличным от тех, которыми окрашены смежные с ней вершины, а их не более чем p.

Теорема 13. (Кениг). В графе все циклы четные тогда и только тогда, когда граф является двудольным.

Доказательство: Достаточность. Рассмотрим двудольный граф. Начнем цикл в верхней доли. Нужно пройти по четному числу ребер, чтобы подняться снова в верхнюю долю. Следовательно, при замыкании цикла число ребер будет четным.

Необходимость. Если граф несвязный, то проведем доказательство отдельно для каждой компоненты. Пусть граф связный и все циклы в нем четные. Выделим произвольную вершину v0 и найдем произвольные цепи между v0 и всеми остальными вершинами. Если одна цепь (v0, vi) нечетной длины, то и любая цепь (v0, vi) нечетная, иначе бы эти цепи образовали нечетный цикл. Аналогично, если (v0, vi) — четная, то и любая (v0, vi) — четная. Разобьем вершины на две доли: в одну войдет вершина v0 и все, находящиеся от v0 на четном расстоянии; в другую долю поместим все вершины, находящиеся от v0 на нечетном расстоянии. Если вершины u1 и u2 принадлежат одной доле, то между ними не может быть ребра, иначе это ребро вместе с цепями (v0, u1) и (v0, u2) образовали бы нечетный цикл. Ч. т. д.

Решение задачи о пяти красках.

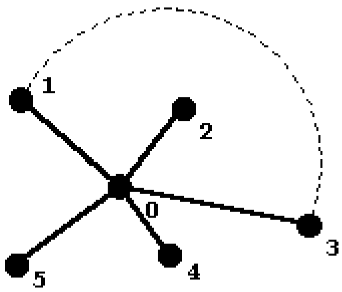
Каждый планарный граф без петель и кратных ребер является не более чем 5-хроматическим.

Доказательство: (индукцией по числу вершин). При p=1 утверждение теоремы верно. Допустим, что утверждение верно для всех $p<p_0$. Докажем, что тогда оно верно и для p_0.

Рассмотрим планарный граф G без петель и кратных ребер с p_0 вершинами; по лемме (В любом планарном графе без петель и кратных ребер существует вершина степени не более пяти) в нем есть вершина v_0 степени не более 5. По предположению индукции граф G', получаемый удалением из G вершины v_0 (очевидно, также планарный), может быть раскрашен не более, чем в 5 цветов. Пусть v_1, ..., v_k, $k=deg(v_0)$ - все вершины-соседи вершины v_0, расположенные по часовой стрелке относительно v_0. Если в раскраске вершин v_1, ..., v_k используется не более 4-х цветов, то "покрасим" вершину v_0 в оставшийся 5-й цвет и получим правильную раскраску.

Осталось рассмотреть случай, когда в раскраске вершин v_1, ..., v_k в графе G' используется 5 цветов (k=5). Пусть c_i - цвет вершины v_i (i=1..5). Рассмотрим множество A, состоящее из вершины v1 и всех вершин графа G, исключая v_0, в которые можно дойти из v1 только по вершинам цветов c1 и c3. Возможны два случая.

В первом случае поменяем цвета вершин множества A (c_1<c_3); окраска при этом останется правильной. Действительно, множество A состоит по определению из всех вершин цветов c_1 и c_3, в которые можно дойти из v_1, поэтому среди вершин, смежных вершинам, принадлежащим A, нет вершин цветов c_1 или c_3. После замены цветов вершин множества A вершина v_1 получит цвет c_3, следовательно, можно использовать цвет c_1 для "окраски" вершины v_0 и получить таким образом правильную раскраску графа G.

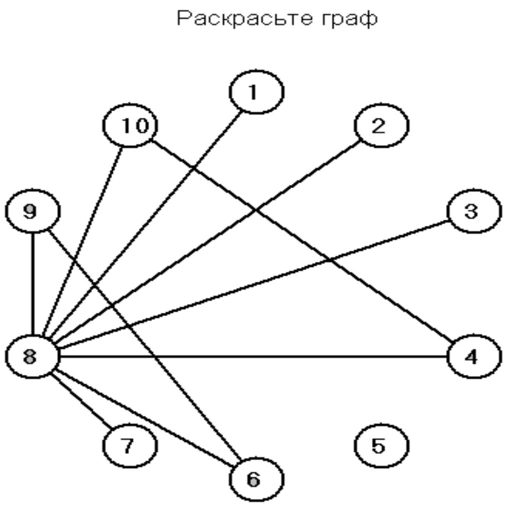


Остается второй случай. Из принадлежности вершины v_3 множеству A следует, что существует путь из v_1 в v_3 (v_1->v_3), проходящий только по вершинам цветов c_1 и c_3 (см.рис.1). Рассмотрим цикл $L=v_1$->$v_3(v_3,v_0)v_0(v_0,v_1)v_1$ и замкнутую кривую, которая соответствует этому циклу в геометрической реализации графа. Вершина v_2 находится внутри этой замкнутой кривой, а v_4 - снаружи. Определим множество B, состоящее из вершины v_2 и всех вершин графа G, исключая v_0, в которые можно дойти из v_2 только по вершинам цветов c_2 и c_4. Вершина v_4 не принадлежит B, поскольку любой путь из v_2 в v_4 должен проходить, по крайней мере, через одну вершину, принадлежащую циклу L - т.е. либо через вершину v_0, либо через вершину, окрашенную в цвета c_1 или c_3. Следовательно, как и в первом случае, можно поменять цвета вершин множества B (c_2<c_4) и "покрасить" v_0 в c_2.

Пример.

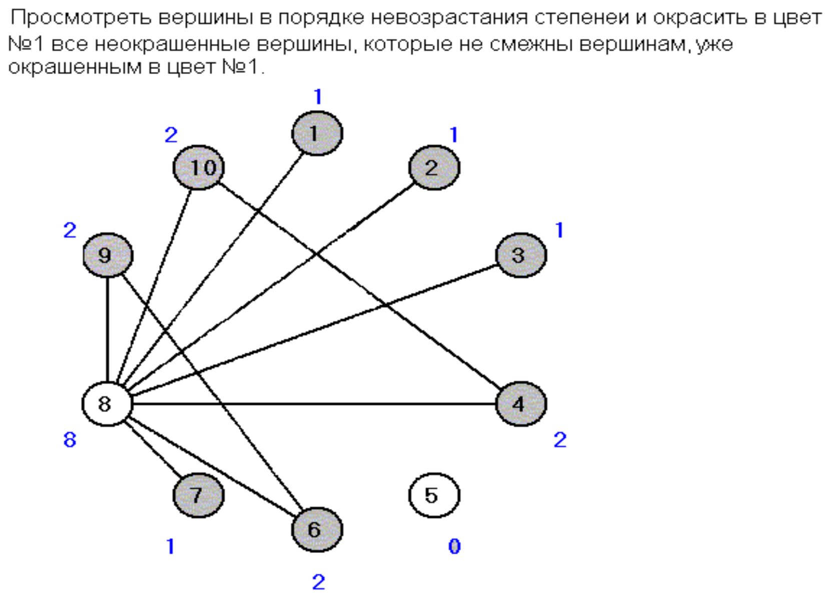
Дано: G=(V,X) - связный граф. Требуется найти вершинную раскраску графа и приближенное значение хроматического числа K.

Задание

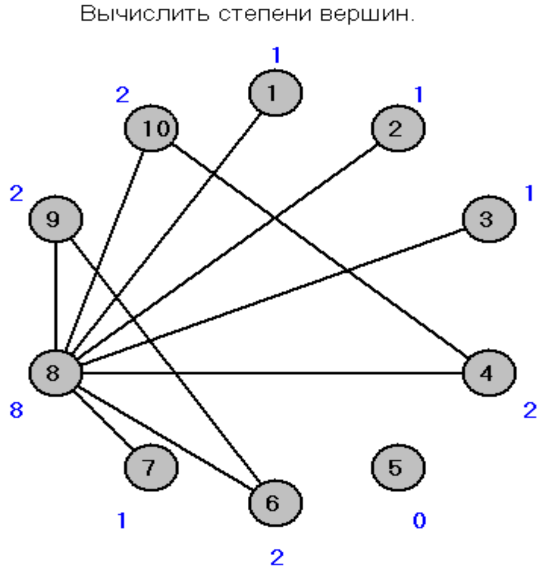


Алгоритм решения

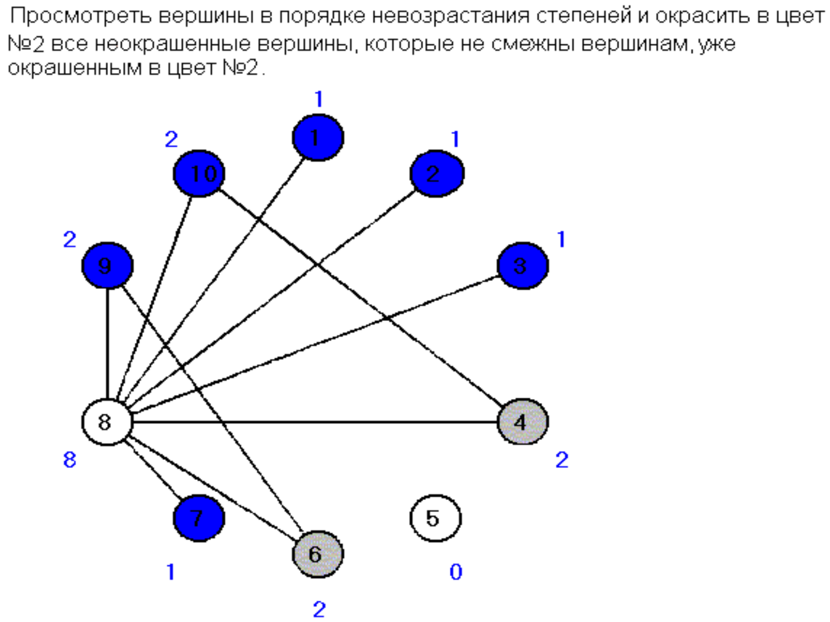
п.1.Просмотреть вершины в порядке невозрастания степеней и окрасить первую неокрашенную вершину в цвет № К.



п.2.Просмотреть вершины в порядке невозрастания степеней и окрасить в цвет №К все вершины, которые не смежны вершинам, уже окрашенным в цвет К.

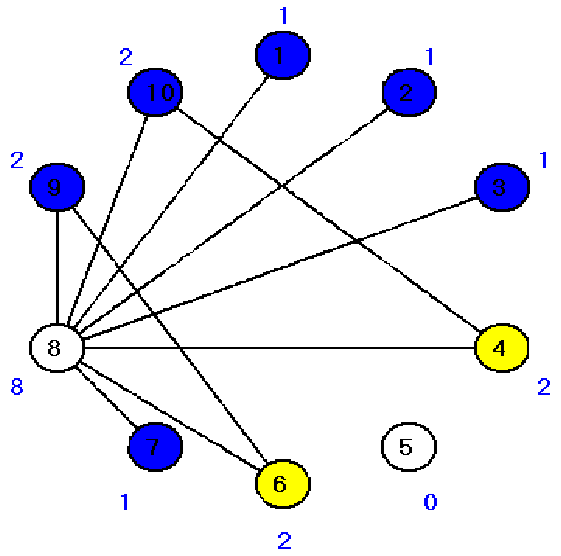


п.3.Если все вершины окрашены, то К-искомое хроматическое число.



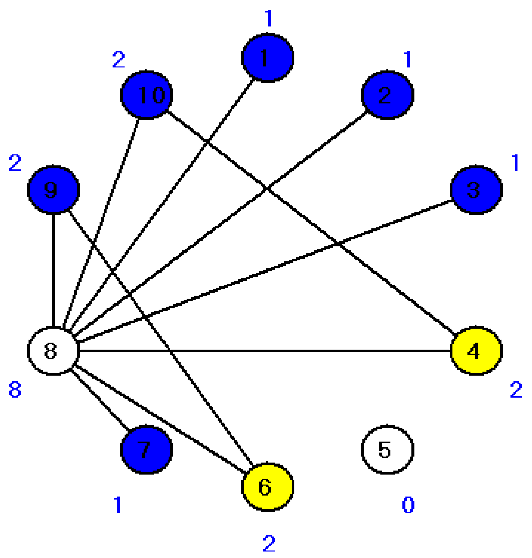
п.4.Иначе К=К+1 и переход к п. 2.

Просмотреть вершины в порядке невозрастания степеней и окрасить в цвет №3 все неокрашенные вершины, которые не смежны вершинам, уже окрашенным в цвет №3.



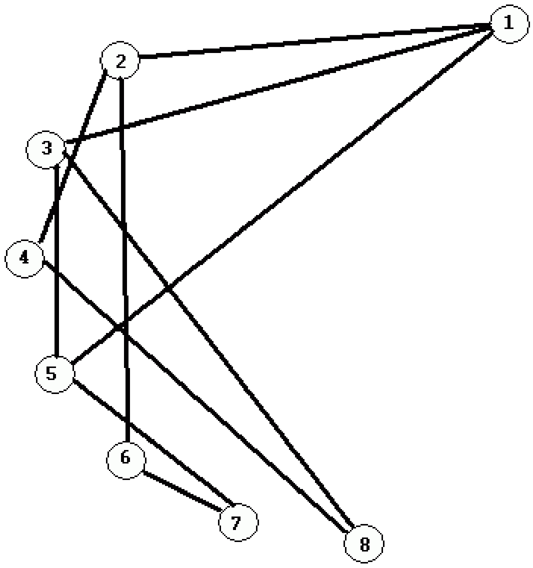
Решение

Раскраска графа окончена. Хроматическое число графа равно трем.

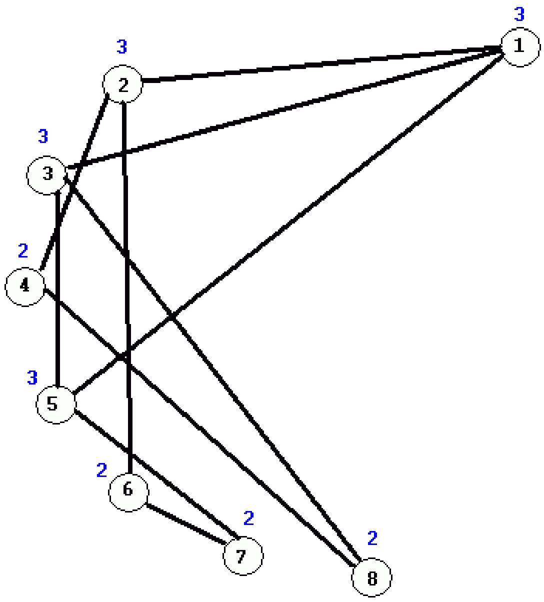


Пример.

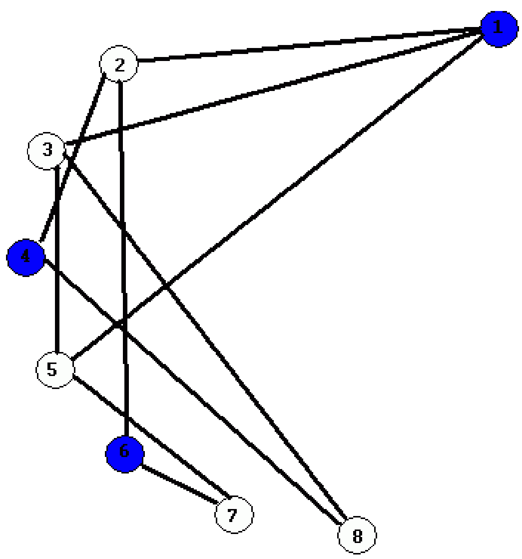
Дан граф



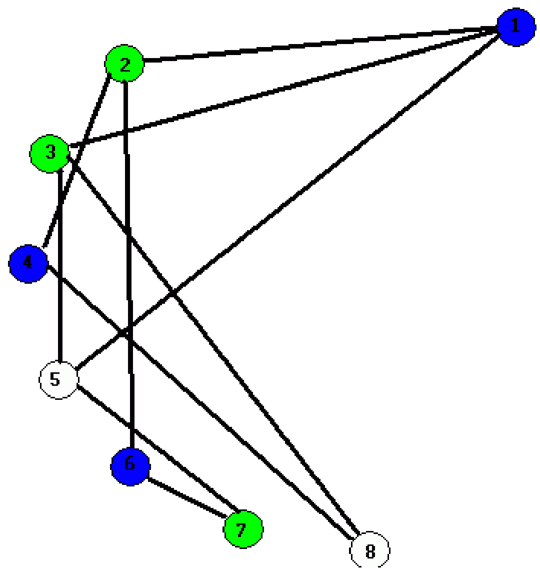
Вычислим степени



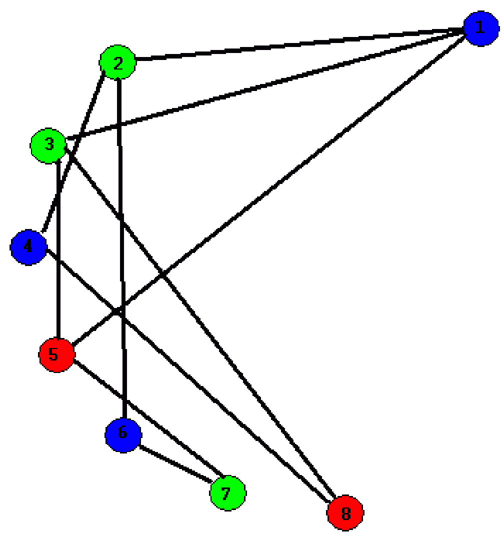
Рассматриваем вершины в порядке не возрастания числа связей. Те которые не связаны с вершинами раскрашенными в цвет №1 раскрашиваем в цвет №1



Рассматриваем вершины в порядке не возрастания числа связей. Те которые не связаны с вершинами раскрашенными в цвет №2 раскрашиваем в цвет №2



Рассматриваем вершины в порядке не возрастания числа связей. Те которые не связаны с вершинами раскрашенными в цвет №3 раскрашиваем в цвет №3



Все вершины графа раскрашены, число цветов 3 ==> хроматическое число равно трем.