Лабораторная работа №2-5
Представление графов с помощью динамических структур данных

Цель работы

Изучить различные способы представления графа в памяти компьютера.

Методические указания.

При выполнении индивидуального задания придерживаться следующей последовательности действий:

1. изучить словесную постановку задачи;
2. выбрать переборный алгоритм;
3. разработать программу, решающую поставленную задачу;
4. оттестировать и отладить программу;
5. написать и представить к защите отчет по работе.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Словесная постановка задачи.
3. Алгоритм решения задачи в текстуальном виде.
4. Обоснование правильности выбора алгоритма.
5. Листинг программы.

Варианты индивидуальных заданий

1. Напишите процедуру, предназначенную для очистки динамической памяти, занятой списками смежности, моделирующими ориентированный граф.

2. Напишите процедуру, предназначенную для очистки динамической памяти, занятой ортогональными списками смежности, моделирующими ориентированный граф.

3. Напишите процедуру, предназначенную для очистки динамической памяти, занятой модифицированной структурой Вирта, моделирующими ориентированный граф.

4. Напишите функции, преобразующие для данного графа:

(а) списки смежности в матрицу смежностей и обратно;

(б) списки смежности в структуру Вирта и обратно;

(в) списки смежности в ортогональные списки смежности и обратно;

(г) списки смежности в модифицированную структуру Вирта и обратно;

(д) ортогональные списки смежности в структуру Вирта и обратно;

(е) ортогональные списки в модифицированную структуру Вирта и обратно.

5. Используя представление графа с помощью списков смежности, проверьте, является ли заданный граф однородным.

6. Используя представление графа с помощью списков смежности, продемонстрируйте на нескольких примерах утверждение теоремы, утверждающей, что число нечетных вершин любого графа четно.

7. Используя представление графа с помощью списков смежности, определите количество ребер, инцидентных некоторой вершине (степень вершины).

8. Напишите предикат, возвращающий TRUE, если дуга (x,y) в графе, представленном ортогональными списками смежности, существует и возвращает FALSE - в противном случае.

9. Установите, имеет ли граф, заданный с помощью списков смежности, петли, и если да, то указать вершины, обладающие ими.

10. Ориентированный граф задан структурой Вирта. Определите: (a) количество его вершин и ребер; (б) проверьте, содержит ли данный граф вершину, к которой примыкают дуги от остальных вершин и из которой не исходит ни одна дуга.

11. Ориентированный граф задан структурой Вирта. Определите: (a) все вершины, смежные данной вершине, т.е. такие, в которые входит дуга, выходящая из данной, или такие, из которых выходит дуга, вхо-дящая в данную; (b) существуют ли в графе изолированные вершины.

12. [Агафонов, Поттосин, Бежанов, Сабельфельд, 1985] Пусть множество вершин ориентированного графа перенумеровано целыми числами от 1 до n (n - число вершин графа), а сам граф задан структурой Вирта. Найдите: (a) матрицу смежностей A, элемент которой aij равен TRUE, если из вершины с номером i выходит дуга, входящая в вершину с номером j; (б) номера всех изолированных вершин графа (т.е. таких вершин графа, у которых нет ни входящих, ни выходящих дуг).

13. **Объединением графов** $G_1=(V_1,X_1)$ и $G_2=(V_2,X_2)$ называется граф $G=(V,X)$, для которого $V=V_1\vee V_2$ и $X=X_1\vee X_2$. Для заданных двух графов постройте их объединение.

14. **Пересечением** двух графов называется граф, все вершины и все ребра которого принадлежат как одному, так и другому графу. По заданным двум графам определите их пересечение.

15. **Соединением графов** G_1 и G_2 называется граф $G=(V,E)$, для которого $V=V_1\cup V_2$, $E=E_1\cup E_2$И$\{\{v_i,v_j\}: v_i\in V_1\&v_j\in V_2\}$. Соединение графов, обозначаемое G_1+G_2, содержит все вершины и ребра графов G_1 и G_2, а также ребра, соединяющие каждую вершину из V_1 с каждой вершиной из V_2. Для заданных двух графов постройте их соединение.

16. **Дополнение** G~ графа G имеет в качестве множества вершин множество V(G), две вершины в G~ смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в G [Харари,1973,с.29]. Постройте дополнение заданного графа G.

17. Продемонстрируйте на нескольких примерах, что дополнение к дополнению графа G совпадает с графом G.

18. **Кольцевой суммой** двух графов G_1 и G_2 называется граф G_1+G_2, порожденный на множестве ребер $(V_1\cup V_2)\backslash(V_1\cap V_2)$, т.е. на множестве ребер,

присутствующих либо в G_1, либо в G_2, но не принадлежащих их пересечению $G_1 \cap G_2$. Для заданных графов G_1 и G_2 постройте их кольцевую сумму.

19. Для заданного положительного n постройте **полный** n-вершинный граф. Сколько ребер имеет полный n-вершинный граф? Может ли полный граф иметь 7,8,10 ребер?

20*. Постройте копию заданного ориентированного графа.

21. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] **Степень вершины** графа равна числу ребер, инцидентных ей. Для данного целого n>0 постройте граф, в котором степень каждой вершины равна двум.

22. [Касьянов, Сабельфельд,1986] **Степень вершины графа** равна числу ребер, инцидентных ей. Пусть d(u) - степень вершины u в графе G. **Степенью ребра** <u,v> назовем неупорядоченную пару <d(u),d(v)>. Определите, совпадают ли степени всех ребер заданного графа, и если нет, то можно ли удалить из него одну вершину (вместе с инцидентными ребрами) так, чтобы полученный граф обладал этим свойством.

23. [Гаврилов, Сапоженко, 1977] **Операция надразбиения** заключается в замене двух смежных ребер (u,v) и (v,w), общая вершина v которых имеет степень 2, одним ребром (u,w). Применяя шаг за шагом операцию надразбиения, можно получить из произвольного графа G, содержащего вершины степени 2, граф, не содержащий вершин степени 2. Этот граф будем называть **полным надразбиением графа G**. По заданному графу постройте его полное надразбиение.

24. **Ориентированным графом Бержа** называется ориентированный граф, в котором из любой вершины в любую другую идет не более одной дуги, а при каждой вершине может быть не более одной петли. Определите, является ли заданный граф графом Бержа?

25. Ориентированный граф Бержа, у которого из каждой вершины выходит хотя бы одна дуга, называется **G-графом**. Определите, является ли заданный граф G-графом?

26. Пусть G=(V,E) - граф. **Элементарное стягивание графа G** образуется путем удаления ребра $[v_i,v_j]$ из E, замены каждого v_i и v_j в E новым символом w, удаления v_i и v_j из V и добавления w к V [Уилсон,1977,с.78; Кук, Бейз,1990,с.232]. Графически элементарное стягивание G получают путем слияния двух смежных вершин после удаления ребра между ними и обозначения "составной" вершины через w. Граф G называется **стягиваемым к графу G'**, если G' можно получить из G с помощью последовательности элементарных стягиваний.

Реализуйте операцию элементарного стягивания для графа, представленного с помощью связанного представления.

Замечание.

Важность операции стягивания показывает классическая **теорема Куратовского-Понтрягина** [Уилсон,1977,с.78]: граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к K_5 (граф Петерсена) или к $K_{3,3}$ (граф Томсена). Из теоремы Куратовского-Понтрягина заключаем, что K_5 и $K_{3,3}$ являются существенно единственными не планарными графами. Алгоритмы, основанные на этой теореме, были придуманы для того, чтобы определить, является ли данный граф планарным или нет.

27. **Реберный граф G_l графа G** имеет столько же вершин, сколько ребер у графа G. Ребро между двумя вершинами графа G_l существует тогда и только тогда, когда ребра графа G, соответствующие этим двум вершинам, смежны (инцидентны одной и той же вершине графа G) [Кристофидес,1978,с.237]. Для заданного графа постройте его реберный граф.

28. [Касьянов, Сабельфельд,1986] По ориентированному графу G постройте ориентированный граф G', который получается из G последовательным применением (пока это возможно) следующей операции: если v - вершина из G с единственным предшественником u ($u \neq v$) и единственным преемником w ($w \neq v$), то она удаляется из G вместе с дугами (u,v) и (v,w) и добавляется новая дуга (u,w); если v - вершина без предшественников и преемников, то она просто удаляется из G.

29*. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] **Треугольником графа** назовем всякую тройку различных и попарно смежных вершин этого графа. **Склеиванием треугольника** называется следующая операция: три вершины, составляющие треугольник, удаляются из графа вместе со всеми инцидентными им ребрами; добавляется новая вершина v, а ребро {w,v} добавляется тогда и только тогда, когда вершина w была смежна хотя бы с одной вершиной удаленного треугольника. Последовательным применением операции склеивания треугольника преобразуйте исходный граф в такой, в котором нет треугольников.

30. Пусть есть некоторый связный граф G, множество вершин которого разбито на два непустых непересекающихся подмножества $P=P_1 \cup P_2$. Тогда множество всех ребер G, имеющих одну концевую вершину в P_1, а другую - в P_2, называется **разрезом графа G**. Найдите все разрезы заданного графа.

31. Связный граф, степени всех вершин которого четны, обладает **эйлеровой линией** [Оре, 1965, с.35]. Пользуясь этой теоремой, установите, обладает ли заданный граф эйлеровой линией?

32. Определите, чему равно количество вершин и степени каждой вершины для **графов платоновых тел** (правильных многогранников): тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра [Лекции, 1990, с.12]?

33*. [Лэнгсам, Огенстейн, Тененбаум, 1989, с.420] Опишите реализацию ориентированного графа с использованием списка списков смежности. Граф из n вершин состоит из n заголовочных узлов, каждый из которых содержит целое число от 1 до n и указатель на список "списковых" узлов. Каждый списковый узел содержит номер вершины, смежной с вершиной графа, представленной заголовочным узлом. Как с помощью данной структуры данных представить неориентированный граф?

34*. Опишите реализацию списков смежности, обеспечивающую быструю работу функций удаления и добавления ребер в неориентированном графе (следует помнить, что при удалении ребра {u, v} необходимо удалить соответствующие элементы из списков, соответствующих вершинам u и v).

35*. [Лэнгсам, Огенстейн, Тененбаум, 1989, с.420] Опишите АТД-реализацию ориентированного графа с кольцевыми списками заголовочных и дуговых узлов.

36*. [Лэнгсам, Огенстейн, Тененбаум, 1989, с.420] Опишите реализацию ориентированного графа с помощью связанных списков, в которой каждый заголовочный узел является головой двух списков. Первый список содержит дуги, выходящие из узла графа, а второй - дуги, оканчивающиеся в узле.

37. **Гамаком** называется подграф заданного графа с таким непустым множеством вершин A, что существует не более одной вершины в A, к которой ведут ребра от вершин вне A, и не более одной вершины вне A, к которой ведут ребра от вершин множества A. Найдите хотя бы один гамак графа.

38. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] Найдите количество различных гамаков заданного графа.

39*. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] Будем говорить, что **вершина графа накрывает ребро**, если она инцидентна этому ребру. **Вершинным покрытием** графа назовем множество вершин, накрывающих все его ребра. Постройте минимальное по числу вершин вершинное покрытие заданного графа.

40*. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] **Ребро графа накрывает его вершину**, если оно инцидентно этой вершине. Найдите минимальное (по количеству ребер) подмножество ребер, накрывающих все вершины заданного графа.

41*. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] Подмножество вершин графа назовем **доминирующим**, если каждая вершина вне подмножества смежна хотя бы с одной вершиной этого подмножества. Найдите минимальное по числу вершин доминирующее подмножество вершин заданного графа.

42*. Пусть H - подграф графа G. Его вершина называется **соединяющей вершиной (для H)** в графе G, если она инцидентна некоторому ребру графа G, не принадлежащему H [Татт, 1988, с.28]. Подграф H графа G будем называть **обособленным в G**, если в нем нет вершин, являющихся соединяющими для него в графе G [там же, с.32]. Найдите в графе любой обособленный подграф.

43*. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] По графу G постройте последовательность графов $G_1, G_2, ..., G_n$ с тем же множеством вершин, что и у G (здесь n - максимум расстояний для пар вершин в G, между которыми имеется соединяющий их путь). Ребро между вершинами в G_i проводится тогда и только тогда, когда расстояние между соответствующими вершинами в G не превышает i.

44*. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] **Часть графа G=(V, E)** - это такой граф G'=(V', E'), что $V' \subset V$ и $E' \subset E$. **Подграфом графа G** называется такая его часть G', которая вместе со всякой парой вершин u, v содержит и ребро {u, v}, если только оно есть в G. **Обод** - это граф, вершины которого $v_1, v_2, ..., v_n$ ($n \geq 2$) можно занумеровать так, что для всех i ($1 \leq i \leq n-1$) вершина v_i соединена ребрами с вершинами v_{i-1} и v_{i+1}, вершина v_o соединена с вершиной vn, а других ребер нет. В заданном графе найдите все его подграфы, которые являются ободами.

45*. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] Найдите минимальное подмножество вершин заданного ориентированного графа, от каждой вершины которого достижимы все остальные его вершины.

46*. [Касьянов, Сабельфельд, 1986] **V-интервалом** ориентированного графа назовем максимальный среди его подграфов G, обладающих следующими свойствами: (a) G содержит вершину v; (b) если все предшественники вершины u содержатся в G, то u также содержится в G. Постройте v-интервалы для всех вершин v заданного ориентированного графа.