Аффинные координаты

Аффинная система координат на прямой, на плоскости, в пространстве

Пусть в пространстве фиксирована точка O. Совокупность точки O и базиса называется **аффинной (декартовой) системой координат**:

– аффинная система координат на прямой (рис.2.1,а) - это точка O и ненулевой вектор $\vec{e}$ на прямой (базис на прямой);

– аффинная система координат на плоскости (рис.2.1,6) - это точка O и два неколпинеарных вектора $\vec{e}_1,\vec{e}_2$, взятые в определенном порядке (базис на плоскости);

– аффинная система координат в пространстве (рис.2.1,в) - это точка O и три некомпланарных вектора $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, взятые в определенном порядке (базис в пространстве).

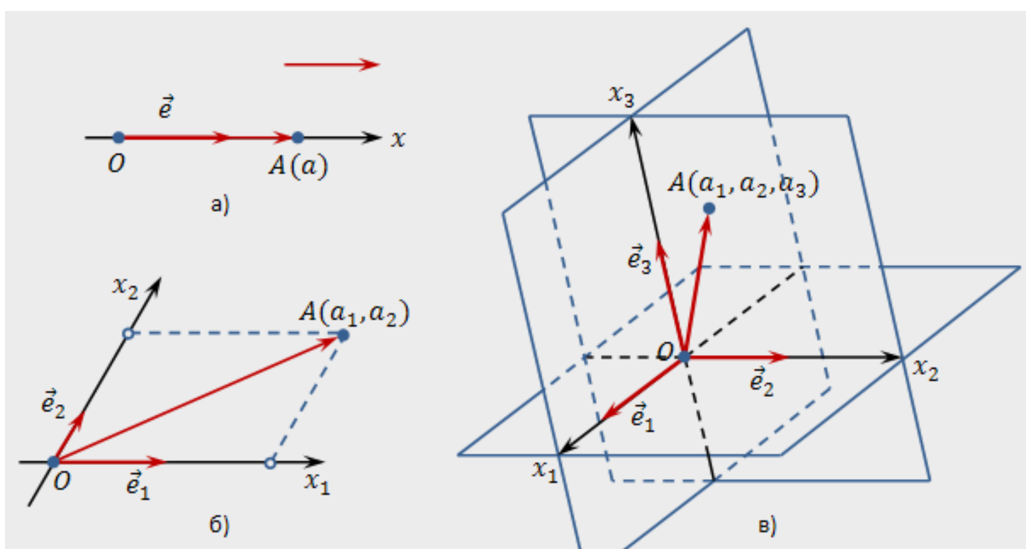

Рис. 2.1

Точка O называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются **координатными осями: Ox_1 — ось абсцисс, Ox_2 — ось ординат, Ox_3 — ось аппликат**. Плоскости, проходящие через две координатные оси, называются **координатными плоскостями**.

Аффинная система координат в пространстве (или на плоскости) называется правой, если

мерных векторов
Преобразования систем координат
Геометрия на плоскости
Линии 2-го порядка
Инварианты линий
Геометрия в пространстве
Поверхности 2-го порядка
Инварианты поверхностей
Линейная алгебра
Комплексный анализ
Дифференциальные уравнения
Численные методы

ее базис является правым, и левой, если её базис — левый.

Координаты векторов и точек в аффинной системе координат

Координатами вектора в заданной системе координат называются, как и ранее, коэффициенты в разложении вектора по базису (см. разд.1.3.1; 1.3.2; 1.3.3).

Для любой точки A в заданной аффинной системе координат можно рассмотреть вектор $\overrightarrow{OA}$ начало которого совпадает с началом координат, а конец - с точкой A (рис.2.1,а,б,в). Этот вектор называется радиус-вектором точки A.

Координатами точки A в заданной системе координат называются координаты радиус-вектора этой точки относительно заданного базиса. В пространстве это координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, т.е. коэффициенты a_1, a_2, a_3 в разложении $\overrightarrow{OA} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$ (рис.2.1,в). Координаты точки записывают в виде $A(a_1, a_2, a_3)$. Первая координата называется **абсциссой**, вторая – **ординатой**, третья – **аппликатой**. На плоскости и на прямой координаты записывают в виде $A(a_1, a_2)$ и $A(a)$ согласно разложениям $\overrightarrow{OA} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2$ (рис.2.1,б), $\overrightarrow{OA} = a \cdot \vec{e}$ (рис.2.1,а).

Координаты точки A, или, что то же самое, координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ представляют в виде координатного столбца (матрицы-столбца):

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ в пространстве, } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ на плоскости.}$$

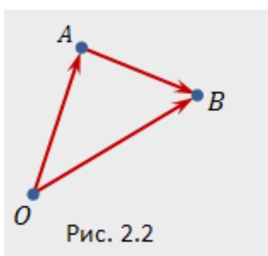

Рис. 2.2

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(a_1, a_2, a_3)$ и концом в точке $B(b_1, b_2, b_3)$. Рассмотрим треугольник OAB (рис.2.2). Радиус-векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ представляются в виде $\overrightarrow{OA} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{a}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$, $\overrightarrow{OB} = b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{a}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3$. По правилу треугольника (см. разд. 1.1.2) вычитания векторов получаем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1)\vec{e}_1 + (b_2 - a_2)\vec{e}_2 + (b_3 - a_3)\vec{e}_3$, т.е. вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3$. Этим доказано следующее правило: ***чтобы найти координаты вектора,нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты его начала***. Это же правило справедливо для аффинных систем координат на плоскости и на прямой.

Замечания 2.1.

1. В заданной системе координат каждой точке можно поставить в соответствие её координаты, причем это соответствие взаимно однозначное:

(точка) $\leftrightarrow$ (её координаты).

В частности, разным точкам соответствуют разные наборы координат.

2. Если вектор $\vec{v}$ с координатами v_1, v_2, v_3 отложить от точки $A(a_1, a_2, a_3)$, то конец

вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ будет иметь координаты $B(a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3)$.

3. Координаты точки M, которая делит отрезок AB в отношении $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{\beta}{\alpha}$, находятся по координатам его концов $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$:

$$M\left(\frac{\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha \cdot a_3 + \beta \cdot b_3}{\alpha + \beta}\right).$$

В частности, координаты середины M отрезка AB равны среднему арифметическому соответствующих координат концов отрезка $(\alpha + \beta)$:

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right).$$

Координаты точки M которая "делит" площадь треугольника ABC в отношении $S_{MBC} : S_{MCA} : S_{MAB} = \alpha : \beta : \gamma\, \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0$, находятся по координатам его вершин $A(a_1, a_2, a_3),\ B(b_1, b_2, b_3),\ C(c_1, c_2, c_3)$:

$$M\left(\frac{\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha \cdot a_3 + \beta \cdot b_3 + \gamma \cdot c_3}{\alpha + \beta + \gamma}\right).$$

В частности, координаты точки M пересечения медиан треугольника ABC равны среднему арифметическому соответствующих координат вершин треугольника $(\alpha = \beta = \gamma)$:

$$M\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}, \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}\right).$$

Эти формулы следуют из свойств 2,4 аффинных и выпуклых комбинаций (см. разд. 1.6.1). Они остаются справедливыми и на координатной плоскости, если аппликаты всех точек положить равными нулю. Например, координаты середины M отрезка AB: $M\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}, \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$, или координаты точки M пересечения медиан треугольника ABC: $M\left(\dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \dfrac{a_2 + b_2 + c_3}{3}\right)$

Пример 2.1. В некоторой аффинной системе координат известны координаты вершин треугольной пирамиды $ABCD$ (см. рис.2.3): $A(1; 1; 3),\ B(3; 5; 4),\ C(-1; 3; 2),\ D(5; 3; -1)$. Найти координаты (в той же системе координат):

а) точки M пересечения медиан треугольника ABC;

б) точки Z, которая делит отрезок DN в отношении $DZ : ZM = 3 : 1\ (\beta = 3;\ \alpha = 1)$.

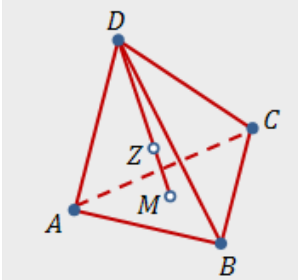

Рис. 2.3

Решение. Учитывая пункт 3 замечаний 2.1, получаем:

а) $M\left(\dfrac{1 + 3 + (-1)}{3}, \dfrac{1 + 5 + 3}{3}, \dfrac{3 + 4 + 2}{3}\right)$, то есть $M(1, 3, 3)$;

б) $Z\left(\frac{1\cdot 5+3\cdot 1}{1+3}, \frac{1\cdot 3+3\cdot 3}{1+3}, \frac{1\cdot(-1)+3\cdot 3}{1+3}\right)$, то есть $Z(2,3,2)$.

Математический форум (помощь с решением задач, обсуждение вопросов по математике).

Поделиться...

Если заметили ошибку, опечатку или есть предложения, напишите в комментариях.

2 comments

Your comment...

Send

Alexey Alypov
в той же строчке слово кол(п)линеарных
16 Jan 2020 Comment

Alexey Alypov
аффинная система координат на плоскости (рис.2.1,б) - это точка... должно быть (б), а стоит цифра 6
16 Jan 2020 Comment