

100 Задач по теме "Комбинаторика"

Выполнил студент 113 группы Файтельсон Антон

1. задача Пароль

Источник: ICPC 2022-2023 NERC (NEERC), квалификационный этап Чемпионата Юга и Поволжья России

Монокарп забыл пароль от своего телефона. Пароль состоит ровно из 6 цифр от 0 до 9 (обратите внимание, что пароль может начинаться с цифры 0).

Монокарп помнит, что в его пароле были ровно две различные цифры, причем каждая из этих цифр встречалась в пароле ровно по три раза. Также Монокарп помнит количество цифр (n), которых точно не было в его пароле .

Посчитайте количество последовательностей из 6 цифр, которые могли бы быть паролем Монокарпа (то есть которые подходят под все описанные условия).

Решение:

Так как Монокарп помнит количество цифр, которых точно не было в пароле, тогда количество цифр, которые возможно были в пароле равно

$$(10 - n)$$

Возьмем простейший случай, когда всего два возможных претендента на числа в пароле - 1 и 0.

Найдем, сколькими способами мы можем выбрать 3 позиции из 6 возможных:

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

Вернемся к случаю, когда у нас $10 - n$ возможных чисел. Найдем сколько можно составить пар из этих чисел.

$$C_{10-n}^2 = \frac{(10-n)!}{(8-n)! \times 2!} = \frac{(10-n)! \times (9-n)!}{2}$$

Тогда решением задачи будет формула:

$$C_6^3 \times C_{10-n}^2 = 20 \times \frac{(10-n)! \times (9-n)!}{2} = 10 \times (10-n)! \times (9-n)!$$

Ответ: $10 \times (10-n)! \times (9-n)!$

2. задача

Источник: С.Якунин сайт kompege.ru

Полина составляет 21-буквенные слова из букв слова РЕКОГНОСЦИРОВКА. Каждая гласная в них используется столько раз, сколько в слове РЕКОГНОСЦИРОВКА. Каждая согласная может использоваться сколько угодно раз или не использоваться совсем. Сколько слов может составить Полина, если известно, что сумма порядковых номеров гласных букв, в каждом из них, равна 21? Буквы нумеруются слева направо, начиная с единицы.

Решение:

Подсчёт конфигураций: 21 нам даёт единственный набор, состоящий из 6 неповторяющихся гласных: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$. Гласные, которые могут стоять на этих местах: 3 буквы О, одна буква А, одна буква И и одна буква Е. Так как неповторяющихся букв у нас всего 3, значит нам нужно выбрать только для них позиции, значит всего:

$$\frac{6!}{3!} = 4 \times 5 \times 6 = 120$$

Размещение согласных: Любая согласная может занимать одну из следующих 15 позиций. Имеем 15 перемноженных семёрок (размещения с повторениями) или $7^{15} = 4747561509943$.

Итоговый подсчёт слов: Итак, в каждой из 120 конфигураций есть 4747561509943 вариантов. Значит, всего слов:

$$120 \times 4747561509943 = 569707381193160$$

Ответ: 569707381193160

3. задача

Источник: Дискретная математика. Учебник и задачник для Вузов (Баврин И.И.)

Нужно присудить первую, вторую и третью премии на конкурсе, в котором принимают участие 20 человек . Сколькими способами можно распределить эти премии? Решение:

Ответом на данную задачу будут являться количество размещений по 3 человека из 20:

$$A_{20}^3 = (20) \times (20 - 1) \times (20 - 2) = 20 \times 19 \times 18 = 6840$$

Ответ: 6840

4. задача

Источник: Дагестанский государственный университет народного хозяйства учебное пособие по дисциплине "математика"

В театре 10 актеров и 8 актрис. Сколькими способами можно распределить между ними роли в пьесе, в которой 5 мужских и 3 женские роли?

Решение:

Так как нам важен порядок при распределении ролей, то нам нужны размещения, тогда Ответом на данную задачу будут являться произведение размещения из 10 элементов по 5 и размещения из 8 элементов по 3:

$$A_{10}^5 \times A_8^3 = \frac{10!}{5!} \times \frac{8!}{5!} = 10160640$$

Ответ: 10160640

5. задача

Источник: Дискретная математика. Учебник и задачник для Вузов (Баврин И.И.)

Восемь лабораторных животных нужно проранжировать в соответствии с их способностями выполнять определенные задания. Каково число возможных ранжировок, если допустить, что одинаковых способностей нет?

Решение:

Так как одинаковых способностей нет, то тогда в комбинациях не будет повторений. Ответом на данную задачу будут являться количество перестановок из 8 лабораторных животных:

$$P_8 = 8! = 40320$$

Ответ: 40320

6. задача

Источник: Дискретная математика. Учебник и задачник для Вузов (Баврин И.И.)

Комитет состоит из 12 человек. Минимальный кворум на заседаниях этого комитета должен насчитывать восемь членов. Сколькими способами может достигаться минимальный кворум?

Решение:

Ответом на данную задачу будут являться количество сочетаний по 8 человека из 12:

$$C_{12}^8 = \frac{12!}{8! \times 4!} = 495$$

Ответ: 495

7. задача

Источник: Дискретная математика. Учебник и задачник для Вузов (Баврин И.И.)

В лабораторной клетке содержатся 8 белых и 6 коричневых мышей. Найдите число способов выбора пяти мышей из клетки, если они могут быть любого цвета.

Решение:

Найдем кол-во мышей в общей сложности $8 + 6 = 14$, тогда ответом на данную задачу будут являться количество сочетаний по 5 мышей из 14 возможных:

$$C_{14}^5 = \frac{14!}{9! \times 5!} = 2002$$

Ответ: 2002