



## ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

### Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Η/Υ

#### ΤΗΛ302: ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ

Εργαστήριο: Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος & Εικόνας

Καθηγητής: Μιχάλης Ζερβάκης

#### 4η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

##### Windowing

Η απλούστερη μέθοδος σχεδίασης FIR φίλτρων είναι η σχεδίαση με χρήση παραθύρων.

Έστω ότι έχουμε ένα φίλτρο με κρουστική απόκριση  $h_d(n)$ . Τότε η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n}$$

Ισχύει για την κρουστική απόκριση:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Ένα τέτοιο σύστημα είναι μη αιτιατό (no causal) και επεκτείνεται από το  $+\infty$  ως το  $-\infty$ . Για να κατασκευάσουμε ένα **αιτιατό** σύστημα (causal) πρέπει να "κόψουμε" κάποιο κομμάτι του  $h_d(n)$ . Η πιο απλή μέθοδος είναι η εξής:

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

Για να κατασκευάσουμε το  $h(n)$  είναι σαν να χρησιμοποιήσαμε ένα "παράθυρο"  $w(n)$ :

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

και

$$h(n) = w(n) \cdot h_d(n)$$

Για τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς στο πεδίο της συχνότητας ισχύει:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) w(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

### Φαινόμενο Gibbs

---

Γενικά, η ύπαρξη πλευρικών λοβών στην απόκριση συχνότητας του παράθυρου δημιουργεί διακυμάνσεις (ripples) στην απόκριση συχνότητας του φίλτρου. Μόλις πριν και μόλις μετά τη ζώνη μετάβασης του φίλτρου εμφανίζεται η μέγιστη διακύμανση που το πλάτος της είναι ανεξάρτητο του μεγέθους του παραθύρου.

Αυτό είναι γνωστό σαν φαινόμενο Gibbs και είναι χαρακτηριστικό του rectangular παραθύρου.

### Άλλα παράθυρα

---

Για να αποφύγουμε το φαινόμενο Gibbs χρησιμοποιούμε συχνά άλλα παράθυρα μερικά από τα πιο γνωστά είναι τα εξής:

Ορθογώνιο (Rectangular):

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Hamming:

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Hanning:

$$w(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

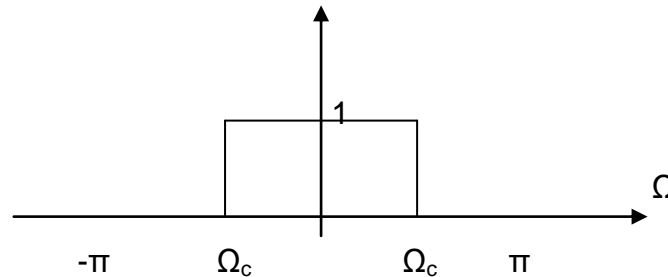
Blackman:

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.8 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Μια μέθοδος για την κατασκευή των FIR φίλτρων είναι από ένα δοσμένο IIR φίλτρο να κατασκευάσουμε το επιθυμητό ψηφιακό FIR φίλτρο. Η μέθοδος αυτή συνίσταται στον περιορισμό της απόκρισης του IIR φίλτρου έτσι ώστε η

απόκριση για  $n > N$  να είναι μηδέν. Ο περιορισμός της απόκρισης θα γίνεται πάντα με την βοήθεια κάποιου παραθύρου.

Έστω το ιδεατό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής  $\Omega_c$  που φαίνεται στην παρακάτω γραφική παράσταση:



Για να κάνουμε το φίλτρο causal εισάγουμε ένα phase shift  $e^{-j\Omega m}$ . Η απόκριση συχνότητας  $H(\Omega)$  του φίλτρου που προκύπτει θα δίδεται από  $H(\Omega) = H_i(\Omega) e^{-j\Omega m}$ . Η  $H(\Omega)$  μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega m} \dots \alpha \nu |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 \dots \dots \alpha \nu |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

Η impulse response  $h[n]$  αυτού του φίλτρου μπορεί να υπολογιστεί παίρνοντας τον αντίστροφο DTFT της σχέσης αυτής ο οποίος είναι :

$$h[n] = \frac{\sin(\Omega_c(n-m))}{\pi(n-m)} = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{\Omega_c(n-m)}{\pi}\right]$$

Το FIR φίλτρο πραγματοποιείται περιορίζοντας την απόκριση  $h[n]$  για  $n < 0$  και για  $n > N-1=2m$  το οποίο δίνει:

$$h_d[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{\Omega_c(n-m)}{\pi}\right] & \text{για } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

### ΑΣΚΗΣΗ 1

Σχεδιάστε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο με  $\Omega_c = 0.4\pi$ ,  $F_s = 0.1\text{KHz}$  και μήκος  $N=21$  (τι είναι το μήκος του παραθύρου και με ποιο τρόπο επηρεάζει το φίλτρο?), με χρήση **rectangular** και **hamming** παραθύρων για τον περιορισμό του  $h[n]$ . Παρουσιάστε το πλάτος της **απόκρισης συχνότητας** των δύο επιμέρους φίλτρων στο ίδιο γράφημα. Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση του Matlab **firl**.

Τι παρατηρείτε; Τι διαφορές έχουν τα δύο παράθυρα μεταξύ τους και πώς αυτές εξηγούνται βάση της αντίστοιχης θεωρίας;

## ΑΣΚΗΣΗ 2

- Σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία να σχεδιάσετε ένα FIR φίλτρο με  $\Omega_c=0.5\pi$ ,  $F_s = 0.1\text{KHz}$  και με χαρακτηριστικά παραθύρου:
  - α)  $N=21$  και παράθυρο Hamming (Γράφημα 1 – αριστερό τμήμα)
  - β)  $N=41$  και παράθυρο Hamming (Γράφημα 1 – δεξί τμήμα)
  - γ)  $N=21$  και παράθυρο Hanning (Γράφημα 2 – αριστερό τμήμα)
  - δ)  $N=41$  και παράθυρο Hanning (Γράφημα 2 – δεξί τμήμα)Να δείξετε το πλάτος της **απόκρισης συχνότητας** των παραπάνω φίλτρων. Τι παρατηρείτε; Τι διαφορές έχουν τα δύο παράθυρα μεταξύ τους και πως αυτές εξηγούνται βάση της αντίστοιχης θεωρίας;
- Βρείτε την έξοδο ενός συστήματος όταν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα  $x = \sin(15t) + 0.25\sin(200t)$  με  $F_s=100\text{Hz}$ , εφαρμόζοντας τα 4 παραπάνω φίλτρα (ένα κάθε φορά). Δηλαδή, φιλτράρετε το σήμα  $x(t)$  με το κάθε ένα από τα παραπάνω φίλτρα. Για την έξοδο του συστήματος δείξτε ΜΟΝΟ το **φάσμα του σήματος** πριν και μετά την εφαρμογή του κάθε φίλτρου. Εξηγείστε το σήμα εξόδου κάθε φίλτρου. Επηρεάζει το διαφορετικό παράθυρο την έξοδο του συστήματος και, αν ναι, πώς και γιατί;
- Επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία φιλτραρίσματος με τα 4 φίλτρα του σήματος που δίνετε παραπάνω με τη διαφορά ότι η συχνότητα δειγματοληψίας φίλτρων και σήματος να είναι  $F_s=50\text{Hz}$ . Τι αλλάζει στο αποτέλεσμα του κάθε φιλτραρίσματος και γιατί;

---

Κατά την εξέταση της παρούσας εργαστηριακής άσκησης παραδίδεται και αναφορά, η οποία να περιέχει:

- Σύντομη περιγραφή της υλοποίησης σε κάθε ερώτημα, αναλυτικά συμπεράσματα ή παρατηρήσεις όπου προκύπτουν.
- Οι γραφικές που προέκυψαν σε κάθε ερώτημα.
- Να ΜΗΝ περιέχει κώδικες.
- Η αναφορά μπορεί να παραδοθεί σε ηλεκτρονική μορφή.