广东工业大学试卷参考答案及评分标准（ A ）

课程名称: 高等数学（1）

考试时间: 2018 年 1 月 19 日 （第 20 周 星期 五 ）

一、填空题:（每小题 4 分, 共 20 分）

1. 第二类 2. $2e^{2x}$; 3. $(x_1, f(x_1))$、$(0, f(0))$、$(x_2, f(x_2))$

4. $e^{x^2}+c$;（本题无 C 扣 2 分） 5. $y''-3y'+2y=0$;

二、选择题:（每小题 4 分, 共 20 分）

1	2	3	4	5
B	A	D	C	D

三、计算题:（每题 7 分，共 28 分）

1、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+4x^3)}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{12x^2}$ ....5 分

$=-\dfrac{1}{12}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x^2}$

$=-\dfrac{1}{12}$ ....7 分

2、**解**：对方程两边 x 求导得：$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$，（1） ....2 分

对（1）两边的 x 再次求导得：$6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0$，..................4 分

当 $x=1$ 时，代入原方程得 $y=1$；将（1，1）代入（1），得 $y'(1)=0$ ....6 分

将 $y'(1)=0$ 代入（2）可得 $6x+(3y^2+3)y''=0$

当 $x=1$ 时，$y=1$ 时，代入可得 $y''(1)=-1$，...7 分

3、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, 当 x\le 0\\ \ln x, 当 x>0\end{cases}$，**求** $\int_{-1}^{1}xf(x)dx$.

解：$\int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{0} x \cdot \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{1} x \cdot \ln xdx$ ………………………………3 分

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \ln xdx^2$

$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}[x^2 \ln x\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} xdx]$ ………………………………6 分

$= \frac{1}{2}(0-\ln 2) + \frac{1}{2}(0-\frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{1}) = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}$ ………………………………7 分

注：本题中，$\int_{0}^{1} x \cdot \ln xdx$ 为瑕积分，不说明也算对，酌情评阅。

4、设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x=1$ 处有极值-2，试求系数 a,b，并求出 $y = f(x)$ 的所有极值。

解：由题意 $f(1) = -2$，即 $1+a+b=-2$ （1）……………………2 分

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 不存在不可导点，在 $x=1$ 处有极值-2，

即 $f'(1) = 0$， $3+2a+b=0$ （2）

由（1）（2）得到： $a=0, b=-3$ ………………………………**4 分**

$f(x) = x^3 - 3x$， $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0, x_1 = 1, x_2 = -1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	(-1,1)	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

所以极大值 $f(-1) = 2$，**极小值** $f(1) = -2$ ……………………………**7 分**

四、(9 分) 设 $f(x)$ 为连续函数，且满足方程 $f(x) = e^x + x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$，求 $f(x)$.

解：对方程 $f(x) = e^x + x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$ 两边 x 求导：

$f'(x) = e^x + \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)$ （1） ……………………2 分

再对（1）的两边 x 求导:

$f''(x) = e^x + f(x)$ 即 $y'' - y = e^x$ (2)..........................4 分

（2）的特征方程: $r^2 - 1 = 0$，得到 $r_1 = 1$，$r_2 = -1$

所以对应齐次微分方程的通解: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ ....6 分

设非齐次特解形式为 $y^* = kxe^x$，代入（2）,得到 $k = \frac{1}{2}$；

所以 $f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$ **..8 分**

根据题意：当 $x = 0, f(0) = 1$；**得** $c_1 + c_2 = 1$；

由（1）式， $x = 0, f'(0) = 1$；**得** $c_1 - c_2 = \frac{1}{2}$；

解之 $c_1 = \frac{3}{4}$; $c_2 = \frac{1}{4}$

所以 $f(x) = \frac{3}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$ **..9 分**

五、(9 分) 证明:当 $x > 0$ 时，$2x - [\ln(1+x)]^2 > 2\ln(1+x)$ 并由此说明 $(\ln 2)^2 + \ln 4 < 2$.

证明：函数 $f(x) = 2x - [\ln(1+x)]^2 - 2\ln(1+x)$，由于

$$f'(x) = \frac{2[x - \ln(1+x)]}{1+x}$$ ....4 分

根据 $x > 0, \ln(1+x) < x$，可知 $f'(x) > 0$，

从而 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内严格单调增加。..6 分

即 $x > 0$时，$f(x) > f(0) = 0$，$f(x) = 2x - [\ln(1+x)]^2 - 2\ln(1+x) > 0$

即 $2x - [\ln(1+x)]^2 > 2\ln(1+x)$ 成立..8 分

因此 $f(1) > f(0) = 0$，而 $f(1) = 2 - (\ln 2)^2 - \ln 4$，

所以 $(\ln 2)^2 + \ln 4 < 2$ 成立..9 分

六、(7 分) 如下图，在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内求一点 t，使阴影部分面积最小，并求出最小值。

解：根据图示得到： $S(t)=\int_0^t(\cos x-\cos t)dx+\int_t^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-\cos x)dx$ ………3 分

即 $S(t)=2\sin t-2t\cos t+\frac{\pi}{2}\cos t-1$ ……………………4 分

对上式两边 t 求导： $S'(t)=(2t-\frac{\pi}{2})\sin t$

令 $S'(t)=0$，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内 得： $t=\frac{\pi}{4}$， …………………………………5 分

$S''(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}>0$ 该点为极小值点，也为最小值点。

所以最小值 $S(\frac{\pi}{4})=2\sin\frac{\pi}{4}-2\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}-1=\sqrt{2}-1$ ………………7 分

七、(7 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$，

试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证明：令 $F(x)=xf(x)$，由积分中值定理可知，存在 $\eta\in(0,\frac{1}{2})$，使

$\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}F(x)dx=\frac{1}{2}F(\eta)$ ……………………………………………3 分

又由已知条件，有 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=2\cdot\frac{1}{2}F(\eta)$

从而 $F(1)=f(1)=F(\eta),\eta\in(0,\frac{1}{2})$ ……………………………………………5 分

且 $F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 上可导，故由罗尔定理，

存在 $\xi\in(\eta,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$ ………………………7 分