概率论与数理统计复习

（本故事纯属虚构）

框架：

一、填空题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。

二、选择题：本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分。

三、计算题：本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分。

本大题主要包括：全概率公式和贝叶斯公式、概率的加法等相关公式、二维随机变量的问题（离散、连续型问题的计算）

四、综合题：本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分。

本大题主要包括：离散型随机变量分布与连续型随机变量分布的综合题、相关系数（独立性、相关性）等问题。

五、应用题：8 分

中心极限定理

第一部分 随机事件与概率

考核知识点：

1、 事件的关系；

2、 概率的定义和性质；

3、 古典概型；

4、 条件概率、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式；

5、 事件的独立性

一、排列、组合公式计算

1、排列公式：$P_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$

2、组合公式：$C_m^n = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n!}$

二、加法原理、乘法原理

三、事件的关系

1、事件的关系与运算：

1）$A \subset B$： A发生必有事件B发生

2）$A \cup B$，或者$A+B$： A、B中至少（或）有一个发生的事件：

3）$A-B$，表示A发生而B不发生的事件。

4）A、B同时发生：$A \cap B$，或者AB。

5）$\Omega - A$称为事件 A 的逆事件，或称 A 的对立事件，记为$\overline{A}$。

2、运算规律：

德摩根律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

四、概率的基本公式及模型问题：

加法公式：P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

P(A+B+C)=P(A)+P(B)+ P(C)-P(AB)- P(BC)- P(AC)+ P(ABC)

减法公式：P(A-B)=P(A)-P(AB)　　　　P($\overline{B}$)=1- P(B)

乘法公式：$\boldsymbol{P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)}$

条件概率：$\boldsymbol{P(B|A)}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

球放盒子问题：

- **有 n 个人，设每个人的生日是任一天的概率为 1/365. 求这 n (n ≤365)个人没有两个人的生日相同（n 人生日互不相同）的概率.**
- **有 n 个旅客，乘火车途经 N 个车站，设每个人在每站下车的概率为 $1/N(N \geq n)$ ，求指定的 n 个站各有一人下车的概率.**

抽奖原理：五个阄, 其中两个阄内写着“有”字, 三个阄内不写字 ，三人依次抓取,问各人抓到“有”字阄的概率是否相同?

五、事件独立性及全概率公式：

①两个事件的独立性【充要条件】

设事件A、B满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A、B是相互独立的。

②多个事件的独立性

设 ABC 是三个事件，如果满足两两独立的条件，P(AB)=P(A)P(B)；P(BC)=P(B)P(C)；P(CA)=P(C)P(A)并且同时满足 P(ABC)=P(A)P(B)P(C)，那么 A、B、C 相互独立。

例 1、甲、乙、丙三人独立地向同一目标各射击一次，他们击中目标的概率分别为 0.7， 0.8 和 0.9，求目标被击中的概率。

解：记 $A=\{$目标被击中$\}$，则 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-(1-0.9)(1-0.8)(1-0.7)=0.994$

例 1、 若 P（A）=0.5，P（A+B）=0.8，P（AB）=0.3，求 P（B）

解：因为 P（A+B）=P（A）+P（B）-P（AB）

∴P（B）=P（A+B）+P（AB）-P（A）

=0.8+0.3-0.5=0.6

例 2、若 A 与 B 互不相容，P（A）=0.5，P（B）=0.3，求 $P(\overline{A}\overline{B})$。

解：（1）P（A+B）=P（A）+P（B）=0.8

根据对偶公式 $\overline{A}\overline{B}=\overline{A+B}$ $\overline{A}\overline{B}=\overline{A+B}$

所以 $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=0.2$。

例 3 设事件 A，B 独立，且 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)=\dfrac{1}{4}$，则 $P(A)=$__________.

例 4 袋中有 5 只白球，6 只黑球，从中随意取出 2 个球，求取出两球是一个白球一个黑球的概率____.

例 5 已知 P(A)=0.3, P（B）=0.2， P(B|A)=0.1，则 $P(A\overline{B})=$____. $P(A|\overline{B})=$________.

历年真题

1、盒中有 7 个球，编号为 1 至 7 号，随机取 2 个，取出球的最小号码是 3 的概率为

A. $\dfrac{2}{21}$ B. $\dfrac{3}{21}$ C. $\dfrac{4}{21}$ D. $\dfrac{5}{21}$

2.设 P(A)= $\dfrac{1}{2}$ ，P(B)= $\dfrac{1}{3}$ ，P(A∪B)= $\dfrac{7}{12}$,则 P（ $\overline{A}B$ ） =________.

3.设两个随机事件 A,B，P(A)=0.3, P(B)=0.6.

（1）若 A 与 B 相互独立，求 P(A∪B)；（2）若 A 与 B 不相容，求 P（ $\overline{A}B$ ）.

12．设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.5,\ P(B)=0.6,\ P(B|A)=0.8$，则 $P(A\cup B)=$________.

13．已知 10 件产品中有 2 件次品，从该产品中任意取 2 件，则恰好取到两件次品的概率为________.

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11．设随机事件 A,B 互不相容，且 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.3$，则 $P(AB)=$________.

12．设随机事件 A,B 相互独立，且 $P(A)=0.9$，$P(B)=0.5$，则 $P(A|B)=$________.

13．已知 10 件产品中有 1 件次品，从中任取 2 件，则未取到次品的概率为________.

12.某射手对目标独立的进行射击，每次命中率均为 0.5，则在 3 次射击中至少命中 2 次的概率为

________.

全概率公式及贝叶斯公式：【一般会考大题】

设事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 满足

1、$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两互不相容，$P(B_i) > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$，

2、$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$，

则有 $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n)$；全概率公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}$$，i=1，2，…n；贝叶斯公式

例 1、有两批相同的产品，第一批产品共 **14** 件，其中有两件为次品，装在第一个箱中；第二批有 **10** 件，其中有一件是次品，装在第二个箱中。今在第一箱中任意取出两件混入到第二箱中，然后再从第二箱中任取一件，求从第二箱中取到的是次品的概率。

解：用 $A_i (i = 0,1,2)$ 表示事件"在第一箱中取出两件产品的次品数 i"。

用 B 表示事件"从第二箱中取到的是次品"。

则 $P(A_0) = \frac{C_{12}^2}{C_{14}^2} = \frac{66}{91}, P(A_1) = \frac{C_{12}^1 \times C_2^1}{C_{14}^2} = \frac{24}{91}, P(A_2) = \frac{C_2^2}{C_{14}^2} = \frac{1}{91}$,

$P(B|A_0) = \frac{1}{12}$，$P(B|A_1) = \frac{2}{12}$，$P(B|A_2) = \frac{3}{12}$，

根据全概率公式，有：

$$P(B) = P(A_0)P(B|A_0) + P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{3}{28}$$

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 某厂甲、乙两台机床生产同一型号产品，产量分别占总产量的 40%，60%，并且各自产品中的次品率分别为 1%，2%.

求：（1）从该产品中任取一件是次品的概率；

（2）在取出一件是次品的条件下，它是由乙机床生产的概率.

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 设甲、乙、丙三个工厂生产同一种产品，由于各工厂规模与设备、技术的差异，三个工厂产品数量比例为$1:2:1$，且产品次品率分别为$1\%,2\%,3\%$.

求：（1）从该产品中任取 1 件，其为次品的概率 p_1；

（2）在取出 1 件产品是次品的条件下，其为乙厂生产的概率 p_2 .

第二部分 随机变量及其概率分布

考点：

1、 离散型随机变量及其分布

2、 连续型随机变量及其分布

3、 随机变量函数的分布

要求：

必须掌握的分布：离散型（二项分布、泊松分布）

连续型（均匀分布、指数分布、正态分布）

1、离散型随机变量的分布律

设离散型随机变量 X 的可能取值为 X_k(k=1, 2, …)且取各个值的概率，即事件($X=X_k$)的概率为

$P(X=x_k)=p_k$， $k=1,2,3,\cdots$

则称上式为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律。有时也用分布列的形式给出：

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P_k	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	$\cdots$

显然分布律应满足下列条件：

(1) $p_k \ge 0$， $k=1,2,...$; (2) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

例 1、设离散型随机变量的概率分布为$P\{X=k\}=ae^{-k},k=1,2\cdots$,试确定常数$a$.

解：根据$\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1$，得$\sum_{k=0}^{\infty}ae^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}a(e^{-1})^k=1$，即$\dfrac{ae^{-1}}{1-e^{-1}}=1$。

故 $a=e-1$

2、连续型随机变量的分布密度

设$F(x)$是随机变量X的分布函数，若存在非负函数$f(x)$，对任意实数x，有

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$，则称 X 为连续型随机变量。$f(x)$ 称为 X 的概率密度函数或密度函数，简称概率密度。

密度函数具有下面性质：

1° $f(x)\geq 0$； 2° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$。

3、分布函数

分布函数： $F(x)=P(X\leq x)$

注：$P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$

分布函数性质：$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$， $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

对于离散型随机变量，$F(x)=\sum\limits_{x_k\leq x} p_k$；

对于连续型随机变量，$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$ 。

例 1 已知随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases} a\cos x, & |x|\leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0\quad, & 其它 \end{cases}$ 常数 $a=$________；

例 2 已知随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{1+x^2}, & 0\leq x<+\infty \\ 0\quad, & 其它 \end{cases}$

求：（1）常数 a； （2）$P\{-1<X<\sqrt{3}\}$； （3）X 的分布函数 $F(x)$。

历年真题

13.设随机变量 X 服从区间[0,3]上的均匀分布，X 的概率密度为 f(x)， 则 f(1)=_______.

4、六种常见的分布

（1）二项分布：$X\sim B(n,p)$

在 n 重贝努里试验中，设事件 A 发生的概率为 p。事件 A 发生的次数是随机变量，设为 X，则 X 可能取值为 $0,1,2,\cdots,n$。

$P(X=k)=P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$， 记为 $X\sim B(n,p)$。

例3、某种元件的寿命X(单位：小时) 的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, x\ge 1000\\ 0\,,\quad x<1000\end{cases}$$

求 10 个元件在使用 1500 小时后，恰有 3 个元件失效的概率。

解：一个元件使用 1500 小时失效的概率为

$$P(1000\le X\le 1500)=\int_{1000}^{1500}\frac{1000}{x^2}dx=-\frac{1000}{x}\Big|_{1000}^{1500}=\frac{1}{3}$$

设 10 个元件使用 1500 小时失效的元件数为 Y，则 $Y\sim B(10,\frac{1}{3})$。

所求的概率为 $P(Y=3)=C_{10}^3(\frac{1}{3})^2\times(\frac{2}{3})^3=?$。

例 4 设随机变量 $X\sim B\left(5,\dfrac{1}{4}\right)$，则 $P\{X\ge 2\}=$（　　　）

（2）泊松分布： $X\sim P(\lambda)$

设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$\lambda>0$，$k=0,1,2\cdots$，$X\sim\pi(\lambda)$ 或者 $P(\lambda)$。

注：泊松分布为二项分布的极限分布（np=λ，n→∞）。

例5、某城市在长度为t(单位：小时) 的时间间隔内发生火灾的次数X 服从参数为$0.5t$ 的泊松分布, 且与时间间隔的起点无关, 求下列事件的概率：

(1) 某天中午12 时至下午15 时未发生火灾;

(2) 某天中午12 时至下午16 时至少发生两次火灾.

解：(1) $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，由题意，$\lambda=0.5\times 3=1.5, k=0$，所求事件的概率为 $e^{-1.5}$.

(2) $P(X\ge 2)=1-\dfrac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}-\dfrac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}=1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}$，由题意，$\lambda=0.5\times 4=1.5$，所求事件的概率为 $1-3e^{-2}$.

（3）均匀分布： $X\sim U(a,b)$

设随机变量 X 的值只落在[a，b]内，其密度函数 $f(x)$ 在[a，b]上为常数 $\dfrac{1}{b-a}$，即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ 记为 $X\sim U(a,b)$。

分布函数为 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

当$a \le x_1 < x_2 \le b$时，X落在区间(x_1, x_2)内的概率为$P(x_1 < X < x_2) = \dfrac{x_2 - x_1}{b - a}$。

例 6、设随机变量$K \sim U(-2,4)$,求方程$x^2 + 2Kx + 2K + 3 = 0$有实根的概率.

解：方程$x^2 + 2Kx + 2K + 3 = 0$有实根，亦即$\Delta = 4K^2 - 8K - 12 = 4(K-3)(K+1) \ge 0$，显然，当$K \ge 3 \cup K \le -1$时，方程$x^2 + 2Kx + 2K + 3 = 0$有实根；又由于$K \sim U(-2,4)$,所求概率为：$\dfrac{-1-(-2)+4-3}{4-(-2)} = \dfrac{1}{3}$。

（4）指数分布： $X \sim E(\lambda)$

密度函数：$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ 　分布函数：$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

例7、某型号的飞机雷达发射管的寿命X(单位：小时) 服从参数为0.005 的指数分布, 求下列事件的概率：

(1) 发射管寿命不超过100 小时;

(2) 发射管的寿命超过300 小时;

(3) 一只发射管的寿命不超过100 小时, 另一只发射管的寿命在100 至300 小时之间.

解：(1) 发射管寿命不超过100 小时的概率：

$$P(X < 100) = \int_0^{100} 0.005 e^{-0.005x} dx = -e^{-0.005x}\Big|_0^{100} = 1 - e^{-0.5} = 0.39$$

(2) 发射管的寿命超过 300 小时的概率：

$$P(X > 300) = 1 - P(x < 300) = 1 - (1 - e^{-1.5}) = e^{-1.5} = 0.223$$

(3) 一只发射管的寿命不超过100 小时, 另一只发射管的寿命在100 至300 小时之间.

$(1 - e^{-0.5})(e^{-0.5} - e^{-1.5}) = 0.15$。

（5）正态分布：

参数为μ和σ^2的密度函数为：$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

若$\mu = 0$、$\sigma = 1$，则称此时X为标准正态分布，即$X \sim N(0,1)$

标准正态分布的分布函数记为：$\Phi(x) = P(X \le x)$。

标准化方法： $X \sim N(EX, DX)$，**则** $\dfrac{X - EX}{\sqrt{DX}} \sim N(0,1)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，**则** $\dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

常用公式：$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

上α分位数：$P(X \ge z_\alpha)=\alpha$，已知α，通过查表求z_α。

例8、某高校女生的收缩压X(单位：毫米汞柱) 服$N(110,12^2)$，求该校某名女生：

(1) 收缩压不超过105 的概率;

(2) 收缩压在100 至120 之间的概率.

解：(1) $P(X \le 105)=\Phi(\frac{105-110}{12})=\Phi(-0.42)=1-\Phi(0.42)$

$=1-0.6628=0.3372$

(2) $P(100 \le X \le 120)=\Phi(\frac{120-110}{12})-\Phi(\frac{100-110}{12})$

$=\Phi(0.83)-\Phi(-0.83)=2\Phi(0.83)-1=2\times0.7967-1=0.5934$。

例9、公共汽车门的高度是按成年男性与车门碰头的机会不超过0.01 设计的，设成年男性的身高X(单位：厘米) 服从正态分布$N(170，6^2)$，问车门的最低高度应为多少?

解：设车门高度分别为x。则：

$$P(X \le x)=1-0.01=0.99=\Phi(\frac{x-170}{6})$$

查表得，$\Phi(2.33)=0.99$，因此$\frac{x-170}{6}=2.33$，由此求得车门的最低高度应为 184 厘米。

5、随机变量函数的分布

（1）离散型：

已知X的分布列为：

X	x_1,	x_2,	$\cdots$,	x_n,	$\cdots$
$P(X=x_i)$	p_1,	p_2,	$\cdots$,	p_n,	$\cdots$

$Y=g(X)$的分布列（$y_i=g(x_i)$互不相等）如下：

Y	$g(x_1)$,	$g(x_2)$,	$\cdots$,	$g(x_n)$,	$\cdots$
$P(Y=y_i)$	p_1,	p_2,	$\cdots$,	p_n,	$\cdots$

若有某些$g(x_i)$相等，则应将对应的p_i相加作为$g(x_i)$的概率。

（2）连续型：

先利用 X 的概率密度 $f_X(x)$写出 Y 的分布函数 $F_Y(y)=P(g(X)\leqslant y)$，再利用变上下限积分的求导公式求出 $f_Y(y)$。

例 9、设随机变量$X \sim N(0,1)$，求下列随机变量$Y=2X-1$;概率密度函数。

解：设$F_Y(y)$和$f_Y(y)$分别为随机变量Y的分布函数和概率密度函数。

已知 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

因为$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X-1\le y)=P(X\le \frac{y+1}{2})=F_X(\frac{y+1}{2})$

求导得 $f_Y(y)=f_X(\frac{y+1}{2})(\frac{y+1}{2})'=\frac{1}{2}f_X(\frac{y+1}{2})$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\frac{y+1}{2})^2}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+1)^2}{8}}$$

所以 Y 参数分别为$-1, 2^2$ 服从正态分布。

历年真题

1.设随机变量 X~N（-2,3²），则 P{X=3}=

A. 0　　B. 0.25　　C. 0.5　　D.1

2.设随机变量义的分布律为

X	−1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

,F(x)是 X^2 的分布函数，则 F(0)=________.

3.设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.3, & 0\le x<2,\\ 1, & x\ge 2,\end{cases}$ ，则 $P\{X<2\}$=_________.

四、综合题：本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分。

1.设随机变量 X~N（0,1），令 Y=2X+l.

求：（1）X 的概率密度 $f_x(x)$；（2）Y 的概率密度 $f_y(y)$；（3）P{Y＞1}.

2. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$ 则 $P\{0.2<X<0.3\}=$

A. 0.01　　B. 0.05　　C. 0.1　　D. 0.4

14. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	1	2
P	$0.2c$	$0.4c$	c

，则常数 $c=$________.

15. 设随机变量 X 服从$[0,\theta]$上的均匀分布$(\theta>0)$，则 X 在$[0,\theta]$的概率密度为________.

16. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且满足 $P\{X=2\}=P\{X=3\}$，则

$P\{X=4\}=$________.

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} cx, & 0<x<2, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ 令 $Y=X+1$,

求：（1）常数 c；（2）$P\{0<X<1\}$；（3）Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

历年真题

14．设随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3	4
P	a	0.1	$2a$	0.3

，则常数 a=_______.

15．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x\le 1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ 则当 $0\le x\le 1$ 时，X 的分布函数

$F(x)=$_______.

28．已知某型号电子元件的寿命 X（单位：小时）具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{6000}{x^2}, & x\ge 6000, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

一台仪器装有 2 个此型号的电子元件，其中任意一个损坏时仪器便不能正常工作．假设 2 个电子元件损坏与否相互独立．

求：（1）X 的分布函数；

（2）一个此型号电子元件工作超过 8000 小时的概率；

（3）一台仪器能正常工作 8000 小时以上的概率．

29．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 2c, & -1\le x\le 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

求：（1）常数 c；（2）$P\{-0.5\le X\le 0.5\}$；（3）$E(X^3)$.

第三部分 多维随机变量及其概率分布

1、联合分布

（1）离散型：

设 ξ =（X，Y）的所有可能取值为 $(x_i, y_j)(i, j=1,2,\cdots)$，且事件 $\{\xi=(x_i, y_j)\}$ 的概率为 $p_{i,j}$，称

$P\{(X,Y)=(x_i, y_j)\}=p_{ij}(i, j=1,2,\cdots)$

为 ξ =（X，Y）的分布律或称为 X 和 Y 的联合分布律。联合分布有时也用下面的概率分布表来表示：

性质：$\sum_i \sum_j p_{ij}=1$.

（2）连续型：

对于二维随机向量$\xi=(X,Y)$，如果存在非负函数$f(x,y)(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$，使对任意一个其邻边分别平行于坐标轴的矩形区域 D，即 D={(X,Y)|a<x<b,c<y<d}有

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy,$$

分布密度 f(x,y)性质：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1.$

2、联合分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

F(x,y)具有以下的基本性质：

（1）$0\le F(x,y)\le 1;$

（2）$F(-\infty,-\infty)=F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0,F(+\infty,+\infty)=1.$

3、边缘分布

（1）离散型：

X 的边缘分布为：$P_{i\bullet}=P(X=x_i)=\sum_j p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$；

Y 的边缘分布为：$P_{\bullet j}=P(Y=y_j)=\sum_i p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$。

（2）连续型：

X 的边缘分布密度为：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$； Y 的边缘分布密度为：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx.$

例 1、设二维随机向量(X,Y)的概率分布如下表所示，求 X 和 Y 的边缘概率分布.

$X\backslash Y$	0	2	5
1	0.15	0.25	0.35
3	0.05	0.18	0.02

解：因为 $P(X=1)=0.15+0.25+0.35=0.75$

$$P(X=3)=0.05+0.18+0.02=0.25$$

所以，X 的边缘分布为

X	1	3
P	0.75	0.25

因为 $P(Y=0)=0.15+0.05=0.20$

$$P(Y=2)=0.25+0.18=0.43$$

$$P(Y=5)=0.35+0.02=0.37$$

所以，Y 的边缘分布为

Y	0	2	5
P	0.20	0.43	0.37

例 2、设二维随机向量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}xy^2, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

解：因为，当 $0\le x\le 2$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1\frac{3}{2}xy^2dy=\frac{1}{2}xy^3\Big|_0^1=\frac{x}{2}$；其他情形，显然 $f_X(x)=0$.

所以，X 的边缘分布密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}x/2 & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

又因为，当 $0\le y\le 1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^2\frac{3}{2}xy^2dx=\frac{3}{4}x^2y^2\Big|_0^2=3y^2$

其他情形，显然 $f_Y(y)=0$. 所以，Y 的边缘分布密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}3y^2 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

4、独立性

一般型：$F(X,Y)=F_X(x)F_Y(y)$

离散型：$p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}$　　　连续型：$f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$

直接判断，充要条件：①可分离变量　②正概率密度区间为矩形

例 3、设二维随机向量 (X,Y) 的概率分布如下表所示，求 X 和 Y 的边缘概率分布.

$X\backslash Y$	0	2	5
1	0.15	0.25	0.35
3	0.05	0.18	0.02

问 a,b 取何值时，X 与 Y 相互独立?

解：因为　$P(X=1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{3}$，　$P(Y=2)=\frac{1}{9}+a$

要 X 和 Y 相互独立，则　$P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2)$

即　$\frac{1}{9}=\frac{1}{3}(\frac{1}{9}+a)$，得 $a=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$

由　$P(X=1)+P(X=2)=1$，得　$P(X=2)=1-P(X=1)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

即 $\frac{1}{3}+a+b=\frac{2}{3}$，得 $b=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-a=\frac{1}{9}$

5、二维均匀分布

设随机向量（X，Y）的分布密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D} & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 S_D 为区域 D 的面积，则称（X，Y）服从 D 上的均匀分布，记为（X，Y）～U（D）。

6、二维正态分布

设随机向量（X，Y）的分布密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]},$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$ 是 5 个参数，则称（X，Y）服从二维正态分布，

记为（X，Y）～N（$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$).

由边缘密度的计算公式，可以推出二维正态分布的两个边缘分布仍为正态分布，

即 X～N（μ_1,σ_1^2), $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

但是若 X～N（μ_1,σ_1^2), $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，(X，Y)未必是二维正态分布。

7、X，Y 的函数的分布

Z=X+Y： 根据定义计算：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

对于连续型，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

注：两个独立的正态分布的和仍为正态分布（$\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2$）。

n 个相互独立的正态分布的线性组合，仍服从正态分布。

$\mu=\sum_i C_i\mu_i$， $\sigma^2=\sum_i C_i^2\sigma_i^2$

例4、设二维随机向量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}(2-x-y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数.

解: Z 的概率密度函数可以写为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$$

当 $0\le z<1$ 时, 若 $0<x<z$，

则 $f_Z(z)=\int_0^z(2-x-y)dx=\int_0^z(2-x-(z-x))dx=(2-z)x\big|_0^z=(2-z)z$，

若 $x<0$ 或 $x\ge z$，被积函数为 0，此时显然有 $f_Z(z)=0$；

当 $1\le z<2$ 时，若 $z-1<x<1$,

则 $f_Z(z)=\int_{z-1}^1(2-x-y)dx=\int_{z-1}^1(2-x-(z-x))dx=(2-z)x\big|_{z-1}^1=(2-z)^2$，

若 $x<z-1$ 或 $x\ge1$，被积函数为 0，此时显然有 $f_Z(z)=0$；

z 的其他情形, 显然有 $f_Z(z)=0$. 综合起来，有 $f_Z(z)=\begin{cases}z(2-z), & 0\le z<1,\\ (2-z)^2, & 1\le z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

练习：设 X 与 Y 两个相互独立的随机变量，其概率密度分别

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le1;\\ 0, & 其它\end{cases}\quad f_Y(x)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0;\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求:随机变量 X+Y 的概率密度函数.

解：因为随机变量 X 与 Y 相互独立，所以联合密度函数

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x\le1, y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

所以 $F_{X+Y}(z)=P(X+Y\le z)=\iint_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$

当 z<0 时，$F_{X+Y}(z)=0$.

当 $0\le z<1$ 时，$F_{X+Y}(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=z+e^{-z}-1$.

当 $z>1$ 时，$F_{X+Y}(z)=\int_0^1 dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=1+e^{-z}-e^{1-z}$

所以 $f_{X+Y}(z)=F'_{X+Y}(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-e^{-z}, & 0\le z<1\\ e^{-z}(e-1) & z\ge1\end{cases}$

历年真题

1.设随机变量 X 的分布律为

X	0	1
P	0.3	0.7

，Y~B(3,0.5)，且 X，Y 相互独立，则 P{X=0，Y=0}=

A. 0.0375　　B. 0.3　　C. 0.5　　D. 0.7

2.设二维随机变量(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	1
0	0.2	0.3
1	0.4	0.1

，则 P{XY=0}=________.

3.设二维随机变量(X ,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$ 则 $P\left\{X\leqslant \frac{1}{2},\ Y\leqslant \frac{1}{2}\right\}$=________.

4.设二维随机变量（X,Y）的分布律为

X \ Y	1	2	3
1	0.1	0.1	0.3
2	0.2	0.1	0.2

，

求：（1）(X,Y)关于 X 的边缘分布律；

（2）(X,Y)关于 X 的边缘分布函数 $F_X(x)$.

3．设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}c, & 0\le x\le 0.5,0\le y\le 0.5,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

则常数$c=$

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4．设随机变量X与Y相互独立，且二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x\le 1,0\le y\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

则当$0\le x\le 1$时，$f_X(x)=$

A．$\frac{1}{2}x$　　B．x　　C．$2x$　　D．$4x$

17．设相互独立的随机变量X,Y分别服从参数$\lambda_1=2$和$\lambda_2=3$的指数分布，则当$x>0,y>0$时，(X,Y)的概率密度$f(x,y)=$________.

18．设二维随机变量(X,Y)的分布律为

X \ Y	−1	0	2
−1	0.2	0.15	0.1
2	0.15	0.1	0.3

则$P\{X+Y=1\}=$________.

27．设随机变量X服从区间$[1,2]$上的均匀分布，随机变量Y服从参数为3的指数分布，且X,Y相互独立.

求：（1）(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$；（2）(X,Y)的概率密度$f(x,y)$.

29. 已知随机变量(X,Y)的分布律

$X \backslash Y$	0	1	2
1	0.1	0.2	0.1
2	0.2	0.1	0.3

求：(1) (X,Y)的边缘分布律；(2) $P\{X=2\}$, $P\{X-Y=1\}$, $P\{XY=0\}$；(3) $E(X+Y)$.

历年真题

3. 设二维随机变量(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.2	0.2
1	a	b

且X与Y相互独立，则下列结论正确的是

A. $a=0.2$，$b=0.2$　　B. $a=0.3$，$b=0.3$

C. $a=0.4$，$b=0.2$　　D. $a=0.2$，$b=0.4$

4. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{16}, & 0<x<4,\ 0<y<4, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

则$P\{0<X<2, 0<Y<2\}=$

A. $\frac{1}{16}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{9}{16}$　　D. 1

5. 设随机变量X,Y独立同分布，且X的分布函数为$F(x)$，则$Z=\max(X,Y)$的分布函数为（　　）

A. $F^2(x)$　B. $F(x)F(y)$　C. $1-[1-F(x)]^2$　D. $[1-F(x)][1-F(y)]$

6. 设随机变量$\xi \sim N(1,4)$, 则$P(0<\xi<2)=$（　　）

A. $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-1$　B. $\Phi(2)-\Phi(0)$　C. $2\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-1$　D. $1-2\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$

第四部分 随机变量的数字特征

要求：熟练掌握常用分布的期望和方差结论。

		离散型	连续型

一维	期望 期望就是平均值	设 X 是离散型随机变量，其分布律为 P（ $X=x_k$ ）＝ p_k， k=1,2,…,n， $E(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$	设 X 是连续型随机变量，其概率密度为 f(x)， $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
	函数的期望	Y=g(X) $E(Y)=\sum_{k=1}^{n} g(x_k)p_k$	Y=g(X) $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$
	方差 $D(X)=E[X-E(X)]^2$ $=EX^2-(EX)^2$ 标准差 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$，	$D(X)=\sum_{k}[x_k-E(X)]^2 p_k$	$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$
	切比雪夫不等式	设随机变量 X 具有数学期望 E（X）=μ，方差 D（X）=σ²，则对于任意正数ε，有下列切比雪夫不等式 $P(\lvert X-\mu\rvert\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 或 $P(\lvert X-\mu\rvert<\varepsilon)>1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$	
期望的性质	（1） E(C)=C　　E(CX)=CE(X) （2） E(X+Y)=E(X)+E(Y)，$E(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i)=\sum_{i=1}^{n} C_i E(X_i)$ （3） E(XY)=E(X) E(Y)，充分条件：X 和 Y 独立； 充要条件：X 和 Y 不相关。		
方差的性质	（1） D(C)=0；E(C)=C （2） $D(aX)=a^2D(X)$；　E(aX)=aE(X) （3） $D(aX+b)=a^2D(X)$；　E(aX+b)=aE(X)+b （4） $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$ （5） $D(aX\pm bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)\pm 2ab\,COV(X,Y)$		
常见分布的期望和		期望	方差
	二项分布 $B(n,p)$	np	$np(1-p)$
	泊松分布 $P(\lambda)$	λ	λ
	均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$

方差	指数分布 $e(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
	正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
二维随机变量的数字特征	期望	$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_{i\bullet}$ $E(Y)=\sum_{j=1}^{n} y_j p_{\bullet j}$	$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$ $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy$
	函数的期望	$E[G(X,Y)]=$ $\sum_i \sum_j G(x_i,y_j)p_{ij}$	$E[G(X,Y)]=$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y)f(x,y)dxdy$
	协方差	$\text{cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=EXY-EXEY.$	
	相关系数	计算公式：$\rho_{XY}=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{EXY-EXEY}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ $\mid\rho\mid\leqslant 1$，当$\mid\rho\mid=1$时，称 X 与 Y 完全相关：$P(X=aY+b)=1$ 完全相关$\begin{cases}\text{正相关，当}\rho=1\text{时}(a>0),\\ \text{负相关，当}\rho=-1\text{时}(a<0),\end{cases}$ 而当$\rho=0$时，称 X 与 Y 不相关。 以下五个命题是等价的： ④ $\rho_{XY}=0$； ②cov(X,Y)=0；③E(XY)=E(X)E(Y)； ④D(X+Y)=D(X)+D(Y)； ⑤D(X-Y)=D(X)+D(Y).	
性质	cov (X, Y)=cov (Y, X)； cov(aX,bY)=ab cov(X,Y)； cov(X_1+X_2, Y)=cov(X_1,Y)+cov(X_2,Y)； cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).		
独立和不相关	(i) 若随机变量 X 与 Y 相互独立，则$\rho_{XY}=0$，即不相关；反之不真。 (ii) 若（X，Y）～N（$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$）， 则 X 与 Y 相互独立的充要条件是 X 和 Y 不相关。		

例1、设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 求$E(X)$.

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+(x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_1^2=1.$

例2、设随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases},$$

分别计算$Y=2X$的期望和$Y=e^{-2X}$的期望

解：因为 $X\sim E(\lambda)$，其中 $\lambda=1$，所以 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=1$

故 $E(Y)=E(2X)=2E(X)=2\times 1=2$

$$E(e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}e^{-x}dx=\int_{0}^{+\infty}e^{-3x}dx=\frac{1}{3}$$

例 3、设二维随机向量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 12y^2, & 0\le y\le x\le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases},$$

求$E(X),E(Y),E(XY),E(X^2+Y^2)$.

解：因为，当$0\le x\le 1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 12y^2dy=4x^3$

当$0\le y\le 1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 12y^2dx=12y^2(1-y)$

所以，$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot 4x^3dx=\dfrac{4}{5}$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1 y\cdot 12y^2(1-y)dy=\frac{3}{5}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x xy12y^2dy$$

$$=\int_0^1 x\cdot 3y^4\Big|_0^x dx=\int_0^1 3x^5dx=\frac{1}{2}$$

又 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 4x^3dx=\dfrac{2}{3}$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y(y)dy=\int_0^1 y^2\cdot 12y^2(1-y)dy=\frac{2}{5}$$

故 $E(X^2+Y^2)=E(X^2)+E(Y^2)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{16}{15}$

例4、设二维随机向量(X,Y)的概率分布如下表:

$X\backslash Y$	-1	0	1
0	0.1	0.1	0.1
1	0.3	0.1	0.3

求$Cov(X,Y)$.

解 容易求得X的概率分布为：$P\{X=0\}=0.3,\ P\{X=1\}=0.7,$

Y 的概率分布为：$P\{Y=-1\}=0.4, P\{Y=0\}=0.2,\ P\{Y=1\}=0.4,$

XY 的概率分布为：$P\{XY=-1\}=P\{X=1,Y=-1\}=0.3, P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=0.3,$，

$P\{XY=0\}=P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=0.4.$ 于是有

$E(X)=0\times0.3+1\times0.7=0.7,$

$E(Y)=(-1)\times0.4+0\times0.2+1\times0.4=0$，

$E(XY)=(-1)\times0.3+0\times0.4+1\times0.3=0.$

$C\mathrm{ov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.$

例 5、设二维随机向量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{8}, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$ ，求 ρ_{XY}.

解：因为，当 $0\le x\le 2$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^2\frac{x+y}{8}dy=\frac{x+1}{4}$

所以 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{x+1}{4}dx=\frac{1}{4}(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3})\Big|_0^2=\frac{7}{6}$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^2 x^2\cdot\frac{x+1}{4}dx=\frac{1}{4}(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4})\Big|_0^2=\frac{5}{3}$

于是 $\mathrm{D}X=E(X^2)-(EX)^2=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36}$

由对称性得 $E(Y)=\frac{7}{6}$，$\mathrm{D}Y=\frac{11}{36}$

又因为 $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^2dx\int_0^2xy\frac{x+y}{8}dy$

$$=\int_0^2\frac{1}{8}(x^2\cdot\frac{y^2}{2}+x\cdot\frac{y^3}{3})\Big|_0^2dx=\int_0^1(\frac{x^4}{4}+\frac{x}{3})dx$$

$$=(\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{6})\Big|_0^2=\frac{4}{3}$$

所以 $COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36}$

故 $\rho_{XY}=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{-1/36}{\sqrt{(11/36)\times(11/36)}}=-\frac{1}{11}$、

例 6：已知随机变量 X 的数学期望和方差分别为 μ 和 σ^2，其中 $\sigma\neq0$，但不知道 X 的分布，试用切比

雪夫不等式估计概率$P(|X-\mu|)<2\sigma$的值（　　）

A. $\geq \frac{3}{4}$　　B. $\leq \frac{3}{4}$　　C. $\geq \frac{1}{4}$　　D. $\leq \frac{1}{4}$

例 7. 已知（X,Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求（1）A 的值；

（2）EX, DX, Cov(X, Y) 以及相关系数 r；

解： 根据$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$，所以$\int_0^1 dx\int_0^x Axydy=1$，即 A=8。

（1） $EX=\int_0^1 dx\int_0^x x.8xydy=4/5$

（2） $EX^2=\int_0^1 dx\int_0^x x^2.8xydy=2/3$

（3） $DX=EX^2-(EX)^2=2/75$

（4） $EY=\int_0^1 dx\int_0^x y.8xydy=\frac{8}{15}$，$EY^2=\int_0^1 dx\int_0^x y^2.8xydy=\frac{1}{3}$，$DY=\frac{11}{225}$

$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{4}{225}$，　$r=2\sqrt{66}/33\approx 0.492$

历年真题

1.设随机变量 X 服从参数为 5 的指数分布，则 E(-3X+2)=

A. -15　　B. -13　　C. $-\frac{3}{5}$　　D. $\frac{7}{5}$

2.设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X~N(0,1)，Y~N(1,2)，X-Y~___________。

2X-Y ~________.

3.设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则 $E(X-E(X))^2$=________.

4.设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X~B(16,0,5)，Y 服从参数为 9 的泊松分布，则 D(X-2Y+1)=________.

5.在 1000 次投硬币的实验中，X 表示正面朝上的次数，假设正面朝上和反面朝上的概率相同，则由切比雪夫不等式估计概率 P{400<X<600}>________.

6.设二维随机变量（X,Y）的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0	0.2	0
0	0.2	0.2	0.2
1	0	0.2	0

（1）求 X 与 F 的相关系数 ρ_{XY}；

（2）问 X 与 Y 是否不相关？是否不独立？

历年真题

5．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 则 $E(X)=$

A．0　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．1

6．设随机变量 $X\sim N(0,4)$，则 $D(X-1)=$

A．1　　B．2　　C．3　　D. 4

7．设 (X,Y) 为二维随机变量，且 $\mathrm{Cov}(X,Y)=-0.5$, $E(XY)=-0.3$, $E(X)=1$，则 $E(Y)=$

A．-1　　B．0　　C．0.2　　D．0.4

19．设随机变量 $X\sim B(20,0.1)$，随机变量 Y 服从参数为 2 的泊松分布，且 X 与 Y 相互独立，则 $E(X+Y)=$________.

20．设随机变量 $X\sim N(2,4)$，且 $Y=3-2X$，则 $D(Y)=$________.

21．已知 $D(X)=25$, $D(Y)=36$，X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0.4$，则 $D(X+Y)=$________.

29．已知随机变量 (X,Y) 的分布律

$X \backslash Y$	0	1	2
1	0.1	0.2	0.1
2	0.2	0.1	0.3

（3）$E(X+Y)$.

16．设随机变量 $X\sim N(0,1)$，其分布函数为 $\Phi(x)$，则 $\Phi(0)=$________.

18．设随机变量 X 的期望 $E(X)=2$，随机变量 Y 的期望 $E(Y)=4$，又 $E(XY)=0$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$________.

19．设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $E(X^2)=$________.

20．设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,4)$，则 $D(X+2Y)=$________.

5．设随机变量 X 服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布，则 $D(X)=$

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．2　　D．4

6．设随机变量 X 服从二项分布 $B(10,0.6)$，Y 服从均匀分布 $U(0,2)$，则 $E(X-2Y)=$

A．4　　B．5　　C．8　　D．10

7．设 (X,Y) 为二维随机变量，且 $D(X)>0$，$D(Y)>0$，ρ_{XY} 为 X 与 Y 的相关系数，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$

A．$\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$　　B．$\rho_{XY}\cdot D(X)\cdot D(Y)$

C．$E(X)\cdot E(Y)$　　D．$D(X)\cdot D(Y)$

第五部分 大数定律及中心极限定理

本章考试：主要出填空和选择题。

大数定律 $\overline{X}\to\mu$	切比雪夫大数定律	设随机变量 X_1，X_2，…相互独立，均具有有限方差，且被同一常数 C 所界：$D(X_i)<C\ (i=1,2,\cdots)$，则对于任意的正数 ε，有 $$\lim_{n\to\infty}P\left(\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right\|<\varepsilon\right)=1.$$ 若 X_1，X_2，…具有相同的数学期望 E（X_I）＝μ，则上式成为 $$\lim_{n\to\infty}P\left(\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right\|<\varepsilon\right)=1.$$
	伯努利大数定律	设 μ 是 n 次独立试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对于任意的正数 ε，有 $$\lim_{n\to\infty}P\left(\left\|\frac{\mu}{n}-p\right\|<\varepsilon\right)=1.$$ 或 $$\lim_{n\to\infty}P\left(\left\|\frac{\mu}{n}-p\right\|\geq\varepsilon\right)=0.$$
	辛钦大数定律	设 X_1，X_2，…，X_n，…是相互独立同分布的随机变量序列，且 E（X_n）＝μ，则对于任意的正数 ε 有 $$\lim_{n\to\infty}P\left(\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right\|<\varepsilon\right)=1.$$

中心极限定理 $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$	列维一林德伯格定理	设随机变量 X_1，X_2，…相互独立，服从同一分布，$E(X_k)=\mu, D(X_k)=\sigma^2 \neq 0(k=1,2,\cdots)$，则 $$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$ 此定理也称为**独立同分布**的中心极限定理。
	棣莫弗一拉普拉斯定理	设随机变量 X_n 为具有参数 n，p(0<p<1)的二项分布，则对于任意实数 x，有 $$=\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

例1、已知正常男性成人每毫升的血液中含白细胞平均数是7300，标准差是700．使用切比雪夫不等式估计正常男性成人每毫升血液中含白细胞数在5200到9400之间的概率．

解：设每毫升血液中含白细胞数为，依题意得，$\mu = E(X) = 7300$，$\sigma = \sqrt{Var(X)} = 700$

由切比雪夫不等式，得

$$P(5200 < X < 9400) = P(|X - 7300| < 2100)$$

$$\ge 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{700^2}{2100^2} = \frac{8}{9}.$$

例2、设由机器包装的每包大米的重量是一个随机变量，期望是10千克，方差是0.1千克^2．求100袋这种大米的总重量在990至1010千克之间的概率．

解：设第 i 袋大米的重量为 X_i，(i =1,2,…,100)，则 100 袋大米的总重量为 $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$ 。

因为 $E(X_i) = 10$，$Var(X_i) = 0.1$，

所以 $E(X) = 100 \times 10 = 1000$，$Var(X) = 100 \times 0.1 = 10$

由中心极限定理知，$\frac{X - 1000}{\sqrt{10}}$ 近似服从 $N(0,1)$

故 $$P(990 < X < 1010) = P(|X - 1000| < 10)$$

$$= P(|\frac{X - 1000}{\sqrt{10}}| < \sqrt{10}) \approx 2\Phi(\sqrt{10}) - 1$$

$$= 2\Phi(3.16) - 1 = 2 \times 0.999 - 1 = 0.998$$

历年真题

1.设 x_1，x_2…，x_{50} 相互独立，且 $X_i=\begin{cases}0，事件A不发生,\\1，事件A发生,\end{cases}$ (i=1,2,…,50)，P(A)=0.8，令 Y= $\sum_{i=1}^{50} X_i$，则由中心极限定理知 Y 近似服从的正态分布是

A. N(4,0.8)　B. N(4,0.64)　C. N(40,8)　D. N(40,64)

21．设随机变量 $X \sim B(100,0.8)$，应用中心极限定理可算得 $P\{76<X<84\} \approx$ ________.

（附：$\Phi(1)=0.8413$）

其他见课件