

# 用细胞自动机模拟雪花

刘式达 张自国

(北京大学地球物理系)

## 提 要

雪花是自然界的生长现象,它具有复杂的树枝状形态.我们利用细胞自动机模型在计算机上模拟出许多种类的雪花图象,反映出实际雪花生长的一些物理过程.

“奇偶规则”考虑到水汽冻结时要释放大潜热这个物理特点,“限制规则”和“优先规则”考虑到水汽扩散到冰晶表面要选择不同的着陆位置这个物理特点.

所有模拟出的雪花和实际观测到的雪花非常相似,且具有分数维的形式.

看来,细胞自动机是模拟像雪花那样在耗散非线性动力系统中出现的复杂形态的有力工具.

## 一、引 言

多少世纪以来生长的树枝状结构对人类有非常大的吸引力<sup>[1]</sup>.今天生长现象和分形(Fractal)又引起许多科学领域的兴趣<sup>[2]</sup>:从药物学到生物学,从物理学到化学,从流体力学到气象学.其中雪花是自然界中这种瞬时图象形成最美丽的例子.

像雪花这样的复杂现象用传统习惯的数学模型去模拟有很大困难,但是许多非平衡自组织过程可以用简单的模式通过计算机实验和计算机模拟来实现.由于简单的生长模式可以导致实际系统的复杂形态,所以计算机模拟有很大的优点.特别是确定性的细胞自动机(cellular automata)<sup>[3]</sup>模型,它能够显示出在耗散非线性动力系统中所发现的形态,如定常吸引子、周期和拟周期吸引子、浑沌吸引子以及其它复杂形态.

图1是典型的雪花图象<sup>[4]</sup>,它具有平面六角对称的冰晶特点.实际的雪花是从一个冻结核(种子)增长起来的,其周围环境是过饱和的水汽.雪花的六个主要的树枝状分支基本上相同,但稍稍有点差别.它的任何瞬时的增长都是受空间均匀的外部条件如温度、湿度、各种污染物的浓度控制.这些量在小范围内变化是缓慢的,这就决定了沿每一条分支其增长图象基本上是相同的.

雪花的形状千姿百态.这些形态是如何从周围环境中形成的?其生长的机制是什么?为什么它有较好对称的树枝状结构?细胞自动机模型是较好的描述雪花增长的

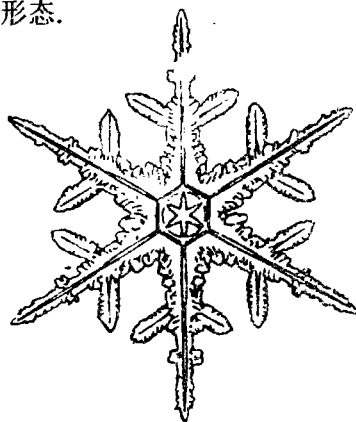


图1 树枝状雪花

1987年9月18日收到, 1987年12月1日收到修改稿.

计算机模型.

## 二、细胞自动机

所谓细胞自动机,它是由许多相同的分量(即细胞)组成的,每个细胞的形态只和周围相邻细胞形态有关,并按照一定极其简单的规则演化,而每个细胞形态同时演化的结果却可以产生任意复杂的形态.

细胞自动机中的“细胞”可以看成是物理系统中的基本单元,它们以均匀的方式排列.在一维情况下它们沿一条线以等距离间隔排列,在二维情况下它们在平面上以方形格子或六角形格子排列,见图 2.

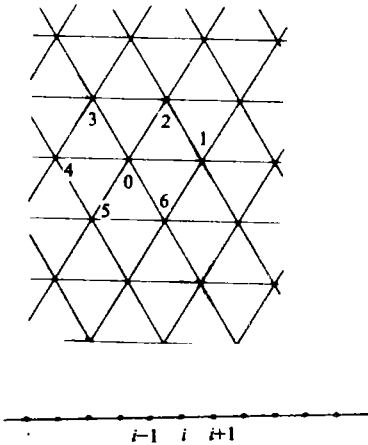


图2 一维和二维(六角形)细胞自动机格点

每一个细胞的状态只有几种可能,如雪花中的细胞不是冰就是汽.这几种状态用离散的函数值来表示,例如用数字 0 和 1 分别代表雪花中的汽相和冰相.

每个细胞的状态如何演化?它只和相邻的几个细胞状态有关,而且演化的规则非常简单.例如图 1 的一维细胞自动机中,在时刻  $t$  时细胞  $i$  位置上的值(即状态)由前一时刻( $t-1$ )时的左右两个邻居的数值和(取模 2)决定:

$$a_i^t = (a_{i-1}^{t-1} + a_{i+1}^{t-1}) \mod 2. \quad (1)$$

又如二维六角形细胞自动机中  $t$  时刻位置 0 的状态值由其周围六点  $1 \rightarrow 6$  的数值和来决定:

$$a_0^t = (a_1^{t-1} + a_2^{t-1} + a_3^{t-1} + a_4^{t-1} + a_5^{t-1} + a_6^{t-1}). \quad (2)$$

这些规则既简单又是非线性的,例如  $0+0$  可以为 0,  $1+1$  也可以为 0.

$t-1$  时刻细胞自动机中的每一个细胞都按上述规则演化,整体上可以显示出复杂的发展过程.

细胞自动机的特点是:不仅空间和时间是离散化的,而且函数值(即状态)也是离散的.函数值的离散化这一点和用差分法解微分方程有很大差别.有时状态的演化并不表现在变量的精确数值上,而是变量的总的范围,例如雪花中的每个细胞点上,我们只关心该点是冰(用 1 表示)还是汽(用 0 表示).而且函数值的离散化就利用了数字计算机的特点.

细胞自动机何以能描述多样化形态的原因很大程度上在于,根据一个细胞邻域的当前状态来确定该细胞未来状态的可能规则的数目是非常多的.若每个细胞有  $r$  种状态,它的邻居有  $n$  个,那么该细胞演化的可能规则就有  $k^n$  种.例如对于正方形网格的二维细胞自动机,若  $k=2$ ,  $n=4$ ,则可能的规则多达 65536 条.

## 三、对雪花形成的模拟

细胞自动机可以作为广泛类型物理过程(包括雪花生长)的模型.就模拟雪花而言,我

们将平面分成若干如图 2 的正六边形网格，并假设细胞的状态只有两种：冰和汽，冰用数字 1 表示，水汽用数字 0 表示。又假定雪花增长的初始阶段只有一个冰核（数值为 1）处在网格中央，其它细胞均为水汽（数值为 0）。并且规定，一旦一个细胞冻结，它就不再融化<sup>[7]</sup>。

细胞演化的规则，要结物理的过程来制订。在雪花生长过程中，暴露在生长图形边缘的细胞，除非它有许多冻结的冰邻居使其消耗足够多的潜热来冻结，否则在足够低的温度下就一定会冻结。

为此我们按照（2）式由六个邻居的数值和来决定细胞演化的规则。因为  $\sum_{i=1}^6 a_i^{t-1}$  的数值可能有七种（0, 1, 2, 3, 4, 5, 6），那么  $a_i^t$  的状态种类就非常多，为了方便我们用 0 和 1 组成的七个数字来表示一种规则，例如  $a_0^t$  的状态为：

$$\sum_{i=1}^6 a_i^{t-1} = \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_0^t & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}, \tag{3}$$

则该规则就记为 0101010。

我们采用了许多不同的规则在计算机上模拟几百张雪花图象以及雪花增长的各个阶段。模拟出的雪花与真实的雪花照片<sup>1)</sup>比较，形状非常相似，下面我们列出几种依照雪花形成因素而制订的规则及其雪花形成过程及图象。

奇偶规则

这条规则规定,在每一步雪花边界上任何细胞的下一时刻的数值(状态)由围绕它的六个邻居细胞的数值和来决定,这里取二进制.如果总和值是一个奇数(例如总和是 1,则相当于邻居中只有一个冰),则该细胞就变成冰并且取数值为 1,否则(例如总数是 2,则相当于邻居中有较多的冰细胞),该细胞就保持水汽,即保持数值为零.按(3)式,这种规则的记号为 0101010.按这种规则生长出的雪花图象如图 3(a).这是一种典型的树枝状雪花.

我们也可以将此规则稍加变化，例如用规则 0100010,即总和为 3 时不变成冰而保持水汽，这时长出的雪花和图 3（a）基本相同，但稍有差别，见图 3（b）。

“奇偶规则”抓住了雪花生长过程中，冰汽交界面要有足够大的面积以使冻结的潜热能够释放这一物理特点，因而在雪花的六角形的六个顶点方向上冰汽交界面向处凸出，根

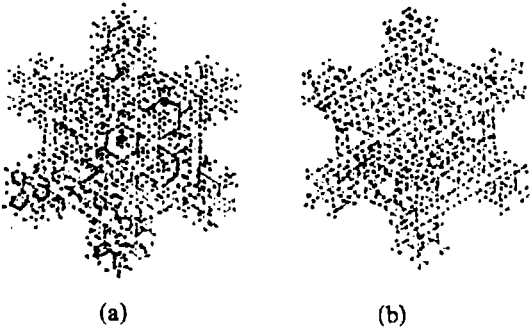


图 3 “奇偶规则”生长出的雪花瞬时图象

3(a) 规则为 0101010  
3(b) 规则为 0100010

1) 雪花照片是由北京大学贾国强老师在南极拍摄的。

据理论分析<sup>[4]</sup>,在一定共同增长条件下,冰汽交界面的形状不是平面、球面和柱面这些简单的形状,因为它们不稳定,只有长出六角形树枝状的交界面;才是一种稳定的结构。

### 限制规则

“奇偶规则”所描述的雪花基本上解释了雪花的树枝状对称结构,但实际的雪花中冰汽交界面向外伸的部份有的是比较光滑的,形成舌状雪花<sup>[8]</sup>。将低粘性流体(例如水)在压力下注入高粘性流体(例如油)中,由于非常大的粘性差别以及边界上的表面张力也会形成树枝状结构,但交界面向外伸长的部份却是光滑的。实际上水汽到达冰晶表面时,要经过长距离迁移运动,一旦向外凸出的冰汽交界面形成后,那些向内凹的部份对水汽质点冻结是不利的。

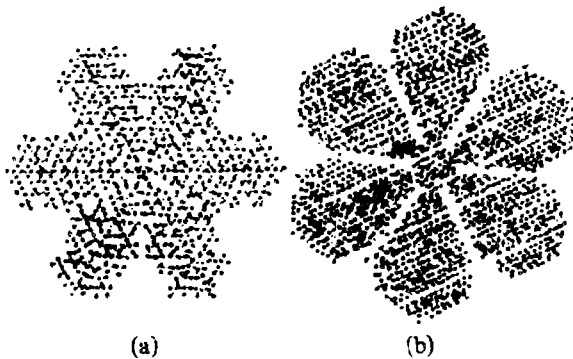


图4 “奇偶规则”加上“限制规则”生长出的舌状雪花  
4(a)规则为0100000 4(b)规则为0110100

为此,我们采用“奇偶规则”的同时,在六边界的各个边的中间位置上的某个区域内,在若干模拟的时间段内限制水汽结成冰。结果模拟出舌状雪花,见图4(a)和4(b)。

图4(a)的规则为0100000,最初的16时间步在图中六边形的夹缝(白色区域)内不让水汽冻结。图4(b)的规则为0110100,从模拟的第5到第22时间段内在六边形的夹缝(白色区域)内不让水汽冻结。

在这里我们限制水汽在某些位置上不能冻结的思想,和Nittmann<sup>[8]</sup>考虑水汽微粒的冻结位置(着陆地点)的非各向同性性的想法是一致的。

### 优先规则

实际雪花中有一种在六个角的方向上特别占优的“指状分裂”式的雪花。Langer<sup>[4]</sup>已经从理论上研究了新的物质通过环境物质扩散的树枝尖状雪花的生长问题。他发现,水汽扩散到冰表面的增长率是由表面的形状所决定的、冰表面凸出部份是扩散物质喜欢的登陆点。

因此我们就在六角形六个角上,在某个时间段内优先长出冰晶,然后再按照演化规则继续增长。图5(a)的规则为0101010,从第4步到第5步在六个晶角上优先二步。图5(b)规则为0101010,在第4步优先。图5(c)的规则为0110000,在第7步和第8步优先。

应该说明如上给出的雪花图象实际上只是瞬时图象,主要是较长模拟时段后的图象。因为耗散系统中的形态主要是讨论长时间演化后的形态。即使长时间后,每一时刻的雪花形状也是不同的。图6给出较长时间段后第19,23,27时段按“奇偶”规则演化的图象。从图上看,它们形状分别接近于板状,枝状和舌状。这也反应实际雪花的多样性。

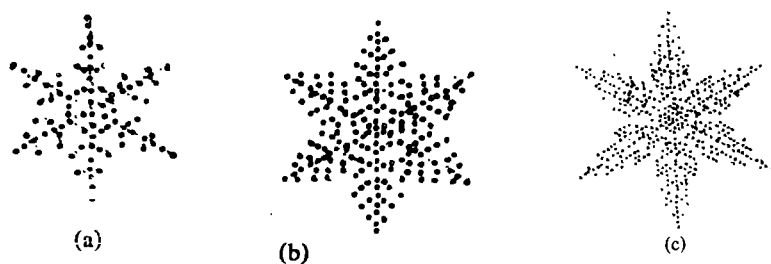


图5 “奇偶规则”加上“优先规则”长出的雪花

S(a) 规则为 0101010

S(b) 规则为 0101010

S(c) 规则为 0110000

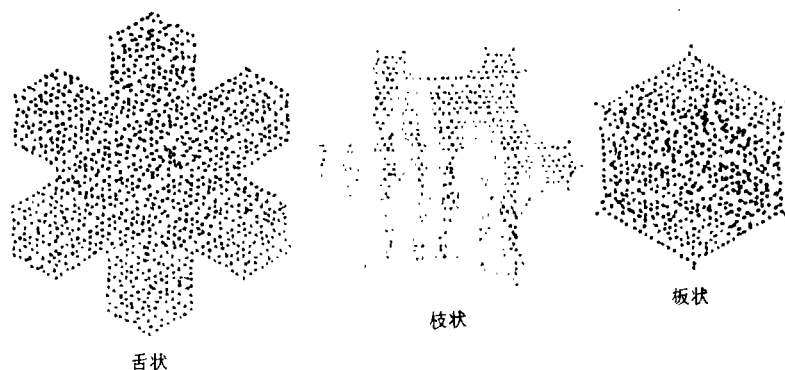


图6 按“奇偶规则”雪花演变过程的三个时段图象

#### 四、雪花图象的分数维

前面用细胞自动机模拟雪花的几种规则, 仅仅考虑到雪花形成的两个物理背景, 水汽冻结时要释放大潜热, 水汽冻结时要选择合适的着陆位置.

这样生长出来的雪花图象必然具有自相似的自组织结构, 相似性正表现在演化过程中采用的是同一个规则. 按照分形 (Fractal)<sup>[9]</sup> 概念, 它们的维数应该是分数. 即冰细胞占据网格点的数目  $M$  (或叫质量) 不是和它的尺寸  $l$  (从冻结核开始量度) 的平方成正比, 而是

$$M(l) \sim l^D, \quad (4)$$

其中  $D$  是分数, 叫分数维, 具有分数维结构的形态叫分形.

雪花形成的过程是一种聚合过程<sup>[10]</sup>, 首先有一个核心 (冻结核), 然后冰细胞是一次一次加入聚合体, 当每个汽细胞与生长着的雪花相接触时, 它就冻结附着于其上不再融化, 且不再尝试另一个位点.

当聚合的雪花较小时, 某些撞到它上面的水汽细胞可能纯粹出于偶然因素冻结并附着

到冰汽表面的某一位点上. 但由于要释放大量冻结潜热, 冰汽表面要有足够大的面积, 表面就形成微小的凸起和凹洞. 一旦表面有了凸起和凹洞, 凸起部份的生长速度就比凹洞部位快得多. 其结果是一个开始时稍有变形的冰汽表面, 其变形程度就越来越大, 这一效应叫生长的不稳定性. 伸出尖端的生长及分裂最终导致雪花图形不能填满平面, 出现好多间隙, 且具有自相似的结构, 其维数处在 1 和 2 之间, 即

$$1 < D < 2 \quad (5)$$

越来越多的证据表明, 象雪花那种非平衡的复杂形态(例如湍流), 其维数都是分数.

雪花形成之谜是个复杂问题, 用细胞自动机去模拟雪花只是个开端, 但它的研究属于非线性增长现象的一部份.

### 参 考 文 献

- [1] Hobbs, P. V. 1974, *Ice Physics*, Oxford Press, P. 271.
- [2] Meakin P., 1986, A New model for biological pattern formation, *J. Theor. Biol.*, **118**, 101 — 113.
- [3] Wolfram S., 1983, Statical mechanics of cellular automata, *Rev. Mod. Phys.*, **55**, 601.
- [4] Langer J. S., 1980, Instabilities and pattern formation in crystal growth, *Rev. Mod. Phys.*, **52**, 1.
- [5] Wolfram S., 1984, Cellular automata as models of Complexity, *Nature*, **311**, 419.
- [6] Wolfram S., 1984, Universality and Complexity in cellular automata, *Physica 10D*, 1.
- [7] Wolfram S., 1985, 科学和数学中的计算机软件, 科学, 第 1 期, 科学技术文献出版社重庆分社, P. 36.
- [8] Nittmann J. 1986, Tip splitting without interfacial tension and dendritic growth patterns arising from molecular anisotropy, *Nature*, **321**, 12.
- [9] Mandelbrot B. B., 1982, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Fransisco, P. 98.
- [10] Nauenberg M. 1984, The formation of Fractal objects, *Physics Reports*, **103**, 173 — 176.