基科 32 曾柯又 2013012266

3.45 (a)

$$
\begin{aligned}
e^{-at}M_X(t) &= e^{-at}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x-a)} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{a}^{\infty} e^{t(x-a)} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{a} e^{t(x-a)} f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因为 $e^{t(x-a)} > 0$ 恒成立，且当 $0 < t < h$, $x \geq a$ 时, $e^{t(x-a)} \geq 1$ 故有：

$$
e^{-at}M_X(t) \geq \int_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = P(X \geq a)
$$

(b) 因为 $e^{t(x-a)} > 0$ 恒成立，且当 $-h < t < 0$, $x \leq a$ 时, $e^{t(x-a)} \geq 1$ 可知：

$$
\begin{aligned}
e^{-at}M_X(t) &= \int_{-\infty} e^{t(x-a)} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} e^{t(x-a)} f(x)\mathrm{d}x \\
&\geq \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x \\
&= P(X \leq a)
\end{aligned}
$$

(c) 在 a 中，实际只用到了 $x \geq a$ 时，$e^{t(x-a)} \geq 1$，以及 $e^{t(x-a)} \geq 0$ 恒成立的条件。因此可以猜想当 $h(t,X)$ 满足: $x \geq$, $t \geq 0$ 时 $h(t,x) \geq 1$ 且 $h(t,x) \geq 0$ 恒成立时，不等式成立。证明：

$$
\begin{aligned}
Eh(t,X) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t,X) f(x)\mathrm{d}x \geq \int_{0}^{\infty} h(t,x) f(x)\mathrm{d}x \geq \int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\
&= P(X \geq 0)
\end{aligned}
$$

3.47 显然当 $t \leq 0$ 时，不等式成立，因此只需考虑 $t > 0$ 的情况

先考虑 $P(0 \leq Z \leq t)$

因为当 $0 \leq z \leq t$ 时 $\frac{tz}{1+t^2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} < 1$ 故：

$$\begin{aligned}
P(0 \leq z \leq t) &= \int_0^t \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}z \\
&\leq \int_0^t \frac{tz}{1+t^2} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{t}{1+t^2} \left. (-e^{\frac{z^2}{2}}) \right|_0^t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{t}{1+t^2} (1 - e^{-\frac{t^2}{2}})
\end{aligned}$$

而 $P(|Z| \geq t) = 1 - P(|Z| \leq t) = 1 - 2P(0 \leq Z \leq t)$

故 $P(|Z| \geq t) \geq 1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \dfrac{t}{1+t^2} (1 - e^{-\frac{t^2}{2}})$

又 $\dfrac{1}{t} + t \geq 2 \geq \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{t}{1+t^2} \geq 1$

可得 $P(|Z| \geq t) \geq \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{t}{1+t^2} e^{-\frac{t^2}{2}}$

补 1 (a) 设 $X_n = o_p(1)$, $Y_n = O_p(1)$, $\forall \epsilon_0 > 0$ ，现估计 $P(|X_n Y_n| \geq \epsilon_0)$

由 $O_p(1)$ 的定义可知 $\forall \epsilon > 0$, $\exists M, N$使得$P(|Y_n| > M) \leq \epsilon$ 对任意 $n > N$

$$\begin{aligned}
P(|X_n Y_n| \geq \epsilon_0) &= P(|X_n Y_n| \geq \epsilon_0, |Y_n| \geq M) + P(|X_n Y_n| \geq \epsilon_0, |Y_n| < M) \\
&= P(|X_n Y_n| \geq \epsilon_0 \Big| |Y_n| \geq M) P(|Y_n| \geq M) + P(|X_n Y_n| \geq \epsilon_0, |Y_n| < M) \\
&\leq \epsilon + P(|X_n Y_n| \geq \epsilon_0, |Y_n| < M) \\
&\leq \epsilon + P(|X_n| > \frac{\epsilon_0}{M})
\end{aligned}$$

故可得 $\lim\limits_{n \to \infty} P(|X_n Y_n| \geq \epsilon_0) \leq \epsilon$

由 ϵ 的任意性，可得 $\lim\limits_{n \to \infty} P(|X_n Y_n| \geq \epsilon_0) = 0$

即 $X_n Y_n = o_p(1) \Rightarrow o_p(1) O_p(1) = o_p(1)$

(b) 仍设 $X_n = o_p(1)$, $Y_n = O_p(1)$ 容易证明 X_n 也满足 $O_p(1)$ 的性质

又 $P(|X_n + Y_n| \geq M) \leq P(|X_n| \geq \dfrac{M}{2}) + P(|Y_n| \geq \dfrac{M}{2})$

$\forall \epsilon > 0$, 由$O_p(1)$的定义$\exists M$, $P(|X_n| \geq \dfrac{M}{2}) \leq \dfrac{\epsilon}{2}$, $P(|Y_n| \geq \dfrac{M}{2}) \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ 可得：

$P(|X_n + Y_n| \geq M) \leq \epsilon$ 即 $O_p(1) + o_p(1) = O_p(1)$

(c) 首先固定 $\epsilon > 0$, 由 $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n < a) = P(X < a), \forall a$ 成立, 故 $\exists N$, 使得$\forall n > N$ 有$\big|P(|X_n| > a) - P(|X| > a)\big| \leq \frac{\epsilon}{2}$, 再取 M_0 使得 $P(|X| \geq M_0) \leq \frac{\epsilon}{2}$ 可得 $\forall n > N$ 有$P(|X_n| > M_0) \leq \epsilon$ 即 $X_n = O_p(1)$。

(d) 先证第一部分：设 $\alpha > 0$ 为任意常数，对任意 n 定义：

$$U_{n,k} = \begin{cases} X_k & |X_k| < \alpha n \\ 0 & |X_k| \geq \alpha n \end{cases} \qquad V_{n,k} = \begin{cases} 0 & |X_k| < \alpha n \\ X_k & |X_k| \geq \alpha n \end{cases}$$

$k = 1 \ldots n$, 并定义$\bar{X}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_{n,k}, \bar{V}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} V_{n,k}$, 且可知$X_n = U_{n,k} + V_{n,k}$

$Var(\bar{U}_n) = \dfrac{1}{n} Var(U_{n,1}) \leq \dfrac{1}{n} E(U_{n,1}^2) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_{|x|<\alpha n} |x|^2 f(x) \mathrm{d}x \leq \alpha E|X_1|$

又$E(\bar{U}_n) = E(U_{n,1}) \to E(X_1) = \mu \quad$ (当$n \to \infty$)

$E(\bar{U}_n - \mu)^2 = E(\bar{U}_n - EU_{n,1} + EU_{n,1} - \mu)^2$

$= E\Big((\bar{U}_n - EU_{n,1})^2 - 2(\bar{U}_n - EU_{n,1})(EU_{n,1} - \mu) + (EU_{n,1} - \mu)^2\Big)$

$= E(\bar{U}_n - EU_{n,1})^2 - (EU_{n,1} - \mu)^2$

故当$n \to \infty$时$E(\bar{U}_n - \mu)^2 \to \alpha E|X_1|$可知:

$\lim\limits_{n\to\infty} P(|\bar{U}_n - \mu| \leq \epsilon) \leq \dfrac{E(\bar{U}_n - \mu)}{\epsilon^2} = \dfrac{\alpha E|X_1|}{\epsilon^2}$

另一方面:

$P(\bar{V}_n \neq 0) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} P(V_{n,k} \neq 0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \displaystyle\int_{|x|>\alpha n} f(x) \mathrm{d}x \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\alpha n} \displaystyle\int_{|x|>\alpha} |x| f(x) \mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_{|x|>\alpha n} |x| f(x) \mathrm{d}x$

可知当$n \to \infty$时$P(\bar{V}_n \neq 0) \to 0$

$$
\begin{aligned}
\text{而}P(|\bar{X}_n - \mu| \le \epsilon) &= P(|\bar{U}_n + \bar{V}_n - \mu| \le \epsilon) \\
&\le P\big(|\bar{U}_n + \bar{V}_n - \mu| \le \epsilon, \bar{V}_n = 0\big) + P(\bar{V}_n \neq 0) \\
&\le P(|\bar{U}_n - \mu| \le \epsilon) + P(\bar{V}_n \neq 0)
\end{aligned}
$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \le \epsilon) \le \dfrac{\alpha E|X_1|}{\epsilon^2}$

由于 α 是任意待定的，故有 $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \le \epsilon) = 0$

即 $\bar{X}_n - \mu \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$ 即 $\bar{X}_n - \mu = o_p(1)$

再证第二部分：记 $VarX_i = \sigma^2$ 则 $Var\bar{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}$

有 $P(\sqrt{n}|X_n - \mu| \ge M) \le \dfrac{nE|X_n - \mu|^2}{M^2} = \dfrac{nVar\bar{X}_n}{M^2} = \dfrac{\sigma^2}{M^2}$

故 $\forall\epsilon$ $\exists M$ 使得$P(\sqrt{n}|X_n - \mu| \ge M) \le \epsilon \Rightarrow \sqrt{n}(X_n - \mu) = O_p(1)$

即 $X_n - \mu = O_p(n^{-\frac{1}{2}})$

补 2 (a) 记 $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, 首先有 $E\bar{X}_n = EX_1 = p$

由 Hoeffding 不等式：

$P(|\bar{X}_n - p| \ge t) \le 2\exp(-\frac{2n^2t^2}{\sum_{i=1}^n(b_i - a_i)})$ 对于二项分布 $(b_i - a_i) = 1$ 即有:

$P(|\bar{X}_n - p| \ge t) \le 2\exp(-2nt^2)$ ，对 n 求和，可得：

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\bar{X}_n - p| \ge t) \le \sum_{n=1}^{\infty} 2\exp(-2nt^2) = 2\frac{e^{-2t^2}}{1 - e^{-2t^2}} < \infty$$

由 Borel–Cantelli lemma 可知：$\lim\limits_{n\to\infty} \bar{X}_n \overset{a.s}{=} p$

(b)$P(|\sqrt{\dfrac{n}{\log n}}(\bar{X}_n - p)| \ge t) = P(|\bar{X}_n - p| \ge \sqrt{\dfrac{\log n}{n}}t)$

$\le 2\exp(-2\log nt^2) = 2(\dfrac{1}{n})^{2t^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} P(|\sqrt{\dfrac{n}{\log n}}(\bar{X}_n - p)| \ge t) = 0 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{n}{\log n}}(\bar{X}_n - p) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$

即：$X_n - p$ 依概率趋于 0 的速度至少是 $o(\sqrt{\frac{\log n}{n}})$

(3) 速度任意快的意义应该是 $\forall A_n$都有$\dfrac{Z_n}{A_n} = o_p(1)$, 速度的临界值的意义应

该是 $\exists A_n\ s.t\ \dfrac{Z_n}{A_n} = O_p(1)$

假设有一个速度临界值 A_n，即有 $\dfrac{Z_n}{A_n} = O_p(1)$, 则应满足:

$\forall \epsilon, \exists M, N\ s.t\ \forall n > N$, $P(|\dfrac{Z_n}{A_n}| > M) \leq \epsilon$

将 $Z_n = \bar{X}_n - p$ 带入，可得 $P(|\bar{X}_n - p|^2 > (A_n M)^2) < \epsilon$

又由 $P(|\bar{X}_n - p|^2 > (A_n M)^2) < \dfrac{E|\bar{X}_n - p|^2}{(A_n M)^2}$

并可以知道 $n\bar{X}_n$ 的分布满足 $B(n,p)$，于是 $E|\bar{X}_n - p|^2 = Var\bar{X}_n = \dfrac{p(1-p)}{n}$

因此 $P(|\bar{X}_n - p|^2 > (A_n M)^2) < \dfrac{np(1-p)}{(A_n M)^2}$

故可以取 $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$，并取 $M = \sqrt{\frac{p(1-p)}{\epsilon}}$

有 $P(|\sqrt{n} Z_n| > M) \leq \epsilon$。即 $\bar{X}_n$ 收敛到 p 的速度临界值为 $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

补 3 虽然我知道条件是：

1. $\mathbf{\Theta}$ 是紧集。

2. $U(X, \theta)$ 在所有 $\theta \in \mathbf{\Theta}$ 处，对几乎处处的 x 连续, 并且对所有 $\theta \in \mathbf{\Theta}$ 是关于 x 的可测函数。

3. 存在一个函数 $d(x)$ 满足 $Ed(X) < \infty$ 并且：

   $|f(x.\theta)| \leq d(x) \forall \theta \in \mathbf{\Theta}$

但是证不出来。。。