基科 32 曾柯又 2013012266

7.46

(a) 用矩估计 $EX = \dfrac{3}{2}\theta \ \Rightarrow\ \tilde{\theta} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i = \dfrac{2}{9}\sum_{i=1}^{3} X_i$

(b)

$$L(\theta|\mathbf{x}) = (\frac{1}{\theta})^(3)\prod_{i=1}^{3} I(\theta \le x_i \le 2\theta)$$

$$= (\frac{1}{\theta})^3 I(X_{(1)} \ge \theta) I(X_{(3)} \le 2\theta)$$

容易判断，当 $\hat{\theta} = \frac{1}{2}X_{(3)}$ 时，$L(\theta|\mathbf{x})$ 取得最大值。

而 $X_{(3)}$ 的 pdf 为:

$$f_{X_{(3)}}(x) = \frac{3!}{2!}\frac{1}{\theta}(\frac{x-\theta}{\theta})^2 I(\theta \le x \le 2\theta)$$

$$E\hat{\theta} = \frac{1}{2}EX_{(3)} = \frac{3}{2}\int_{\theta}^{2\theta}\frac{x(x-\theta)^2}{\theta^3}\mathrm{d}x = \frac{7}{8}\theta$$

故取 $k = \frac{8}{7}$, 有 $E(k\hat{\theta}) = \theta$

(c) $f(\mathbf{x}) = L(\theta|\mathbf{x}) = (\frac{1}{\theta})^3 I(x_{(1)} \ge \theta) I(x_{(3)} \le 2\theta)$ 由因子分解可以知道:

$T(X) = (X_{(1)}, X_{(3)})$ 为一个充分统计量

用 Rao-Blackwell 定理, 可得到一个比 $\tilde{\theta} = \frac{2}{9}\sum_{i=1}^{3} X_i$ 更好的估计量

即 $\phi_{\tilde{\theta}} = E(\tilde{\theta}|T)$，方差更小

而对 MLE 的估计量 $\hat{\theta}$, $\phi_{\hat{\theta}} = E(\hat{\theta}|T) = \hat{\theta}$, 不能用 Rao-Blackwell 定理使其变得更好。

(d) $\tilde{\theta} = \frac{2}{9}\sum_{i=1}^{3} X_i = \frac{58}{75} = 0.7733$

$\hat{\theta} = \frac{1}{2}X_{(3)} = \frac{1}{2}1.33 = 0.665$

7.47 设圆的半径为 r。

n 次样本为 $X_i = r + Z_i,\ Z_i \overset{iid}{\sim} n(0,\sigma)$

即 $X_i \overset{iid}{\sim} n(r,\sigma^2)$

对于 r, 容易证明一个完全充分统计量为 $T(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

而 $T \sim n(r, \dfrac{\sigma^2}{n})$

故$E(T-r)^2 = E(T-r)(T-r) = \dfrac{\sigma^2}{n} \Rightarrow E(T^2 - \dfrac{\sigma^2}{n}) = r^2$

因此$A = \pi(T^2 - \dfrac{\sigma^2}{n}) = \pi((\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 - \dfrac{\sigma^2}{n})$为一个$\pi r^2$的无偏估计，而 T 是完全充分统计量，故统计量 A 是面积 πr^2 的最佳无偏估计

7.49

(a) $Y = X_{(1)},\ f_X(x) = \dfrac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda},\ F_X(x) = 1 - e^{-x/\lambda}$

易知 Y 的 pdf 为：$f_Y(y) = \dfrac{n}{\lambda}e^{-\frac{nx}{\lambda}}$ 即 $Y \sim exp(\frac{\lambda}{n})$

故 $E(nY) = nEY = \lambda$,nY 为一个 λ 的无偏估计量

(b) 因为 X 属于指数分布族，可知 $T(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是 λ 的一个完全充分统计量，且 $ET = \lambda$, 因此 T 为 λ 的最佳无偏估计。下面通过计算再验证下

$Var(nY) = n^2 Var(Y) = \lambda^2$

$VarT = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{\lambda^2}{n} < Var(nY)$

(c) 用给出的样本计算可得 $nY = 12 \times 50.1 = 601.2,\ T = 124.825$

7.50

(a) $\because E\bar{X} = \theta,\ EcS = \theta\ \therefore E(a\bar{X} + (1-a)cS) = \theta$

(b) 之前已经证明过，对正态分布 $\bar{X}, S^2$ 相互独立，因此 $\bar{X}, S$ 相互独立。

$Var(a\bar{X} + (1-a)cS) = a^2Var(\bar{X}) + (1-a)^2Var(cS)$

而$Var(\bar{X}) = \dfrac{\theta^2}{n}$

$Var(cS) = E(cS)^2 - (EcS)^2 = c^2ES^2 - \theta^2 = (c^2-1)\theta^2$

对 a 求导$2aVar(\bar{X}) - 2(1-a)Var(cS) = 0 \Rightarrow a = \dfrac{n(c^2-1)}{1+n(c^2-1)}$

由于是个二次函数，且二次项系数为正，故该极值为极小值。

(c) 书中的例题已经证明了对正态分布 $n(\mu, \sigma^2)$, $\bar{X}, S^2$ 是参数 μ, σ^2 的充分统计量，另 $\mu = \theta$, $\sigma^{=}a\theta^2$，即 $\bar{X}, S^2$ 是 θ 的充分统计量。

另一方面 $E(\bar{X} - cS) = 0\ \forall\theta$ 成立, 但 $P(\bar{X} - cS = 0) \neq 1$, 故 $\bar{X}, S^2$ 不是 θ 的完全统计量。

7.51

(a)

$$
\begin{aligned}
E(\theta - T)^2 &= E(a_1(\theta - \bar{X}) + a_2(\theta - cS) + \theta(1 - a_1 - a_2))^2 \\
&= a_1^2E(\bar{X} - \theta)^+a_2^2E(cS - \theta)^2 + \theta^2(1 - a_1 - a_2)^2 \\
&= a_1^2Var(\bar{X}) + a_2^2Var(cS)^2 + \theta^2(1 - a_1 - a_2)^2 \\
&= a_1^2\frac{\theta^2}{n} + a_2^2(c^2-1)\theta^2 + \theta^2(1 - a_1 - a_2)^2
\end{aligned}
$$

由柯西不等式:

$1 = \left[\sqrt{n}\frac{a_1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{c^2-1}}\sqrt{c^2-1}a_2 + (1 - a_1 - a_2)\right]^2$

$\leq (n + \frac{1}{c^2-1} + 1)(\frac{a_1^2}{n} + (c^2-1)a_2 + (1 - a_1 - a_2)^2)$

等号当且仅当 $\dfrac{a_1}{\sqrt{n}}/\sqrt{n} = \sqrt{n^2-1}a_2/\dfrac{1}{\sqrt{c^2-1}} = 1 - a_1 - a_2$ 时成立

此时 $a_1 = \dfrac{n(c^2-1)}{1+(n+1(c^2-1))}$

$a_2 = \dfrac{1}{1+(n+1)(c^2-1)}$
$T^* = \dfrac{n(c^2-1)}{1+(n+1)(c^2-1))}\bar{X} + \dfrac{1}{1+(n+1)(c^2-1)}cS$

(b) 由前面的不等式 $MSE(T^*) = \dfrac{\theta^2}{n+\frac{1}{c^2-1}+1}$

(c) $\because \theta > 0$

$\therefore T^* < 0$ 时$(T^{*+} - \theta)^2 < (T^* - \theta)^2$

$T^* > 0$ 时$(T^{*+} - \theta)^2 = (T^* - \theta)^2$

因此 $MSET^{*+} < MSET^*$

(d) θ 既不是位置参也不是刻度参数。因为找不到这样一个函数 $f(x)$ 使得 X 的 pdf $f(x|\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\exp(-\dfrac{(x-\theta)^2}{2\theta^2})$ 等于 $f(x-\theta)$ 或 $\dfrac{1}{\theta}f(\dfrac{x}{\theta})$