基科 32 曾柯又 2013012266

5.31 $P(|\bar{X}-\mu|\geq\epsilon)\leq\frac{E|\bar{X}-\mu|^2}{\epsilon^2}$

而$E(\bar{X}-\mu)^2=\frac{\sigma^2}{n}$

$P(|\bar{X}-\mu|\leq\epsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}=0.9\ \Rightarrow$

$\epsilon=\frac{3}{\sqrt{10}}\Rightarrow P(|\bar{X}-\mu|\leq 0.9487)\geq 0.9$

另一方面$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$ 近似服从$n(0,1)$因此可以知道$P(|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}|\leq 1.645)\approx 0.9\Rightarrow$

$P(|\bar{X}-\mu|\leq 0.4935)\approx 0.9$

比较由 Chebychev Inequality 和 CLT 得到的结果，CLT 给出的范围小了一倍。虽然 Chebychev Inequality 得出的是很严格的结果，但是不等式其作的近似是很粗糙的。

5.32 (a) 对 Y_i，先不妨设 $\epsilon\leq 2\sqrt{a}$

$$\begin{aligned}
P(|Y_i-\sqrt{a}|\geq\epsilon) &= P(\sqrt{X_i}\geq\epsilon+\sqrt{a})+P(\sqrt{X_i}\leq\sqrt{a}-\epsilon)\\
&= P(X_i\geq\epsilon^2+a+2\epsilon\sqrt{a})+P(X_i\leq\epsilon^2+a-2\sqrt{a}\epsilon)\\
&= P(X_i-a\geq\epsilon(2\sqrt{a}+\epsilon))+P(X_i-a\leq\epsilon(2\sqrt{a}-\epsilon))\\
&\leq P(X_i-a\geq\epsilon(2\sqrt{a}-\epsilon))+P(X_i-a\leq\epsilon(2\sqrt{a}-\epsilon))\\
&= P(|X_i-a|\geq\epsilon(2\sqrt{a}-\epsilon))
\end{aligned}$$

可得 $\lim\limits_{i\to\infty} P(|Y_i-\sqrt{a}|\geq\epsilon)=0$, 即 Y_i 收敛到 $\sqrt{a}$

对 Y_i'，先不妨设 $\epsilon\leq 1$

$$\begin{aligned}P(|Y_i'-1|\geq\epsilon)=P(|\frac{a}{X_i}-1|\geq\epsilon)\\ &=P(a-X_i\geq\epsilon X_i)+P(-a+X_i\geq\epsilon X_i)\\ &=P((1+\epsilon)(X_i-a)\leq-\epsilon a)+P((1-\epsilon)(X_i-a)\geq\epsilon a)\\ &\leq P(X_i\leq\frac{-\epsilon a}{1+\epsilon})+P(X_i-a\geq\frac{\epsilon a}{1+\epsilon})\\ &=P(|X_i-a|\geq\frac{\epsilon a}{1+\epsilon})\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{i\to\infty} P(|Y_i'-1|\geq\epsilon)=0$, 即 Y_i' 收敛到 1

(b) 需要先证明 $S_n^2\xrightarrow{\mathcal{P}}\sigma^2$

而这个需要先证明 $VarS_n^2\to 0$

由前面的习题可以知道 $VarS_n^2=\frac{1}{n}(\theta_4-\frac{n-3}{n-1}\theta_2^2)$, 因此当随即取样样本的的四阶矩存在时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^2=0$, 此时，由书中 Example5.5.3 可知 $S_n^2\xrightarrow{\mathcal{P}}\sigma^2$，由 (a),$S_n=\sqrt{S_n^2}$ 依概率收敛到 σ,$\frac{\sigma}{S_n}$ 依概率收敛到 1。

5.3.3 $\forall c\ \lim\limits_{n\to\infty} P(Y_n\geq c)=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} P(Y_n\leq c)=0$

而 $\lim\limits_{M\to-\infty} P(X\leq M)=0$,因此$\forall\epsilon$, $\exists M_\epsilon$ ，使得$P(X\leq M_\epsilon)<\epsilon$

可得$\forall c$, $\forall\epsilon$

$P(X_n+Y_n<c)\leq P(X_n<M_\epsilon)+P(Y_n<c-M_\epsilon)$

$\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n+Y_n<c)<\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n<M_\epsilon)\leq\epsilon$

由 ϵ 的任意性，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n+Y_n<c)=0$

5.3.6 (a)$EY=E(E(Y|N))$

$E(Y|N)=\int_0^\infty xf_{Y|N}(y,n)\mathrm{d}x=2n$,

$EY=E2N=2\theta$

$VarY = E(Var(Y|N)) + Var(E(Y|N))$

$Var(E(Y|N)) = Var(2N) = 4Var(N) = 4\theta$

$Var(Y|N) = 4n,\ E(Var(Y|N)) = 4EN = 4\theta \Rightarrow$

$VarY = 8\theta$

(b) 在 $N = n$, 的条件下，$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, 其中 $X_1, \dots X_i$ 为服从 χ_2^2 的 iid，

而 $F_Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{Y_n}(y) P(N = n)$, 当$\theta \to \infty$时

$F_Y(y) = \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y)$

而由中心极限定理 $n \to \infty$ 时，$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} = \dfrac{Y_n - EY_n}{\sqrt{VarY_n}}$ 服从标准正态分布，从而可知 $\theta \to \infty$ 时，$\dfrac{Y - EY}{\sqrt{VarY}}$，依分布收敛于标准正态分布。

5.39 (a) $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta$, 使得：$|h(x_n) - h(x)| < \epsilon$, 当$|x_n - x| < \delta$ 时

即$P(|h(X_n) - h(X)| < \epsilon \,\big|\, |X_n - X| < \delta) = 0$

$P(|h(X_n) - h(x)| < \epsilon)$

$= P(|h(X_n) - h(x)| < \epsilon, |X_n - X| < \delta) + P(|h(X_n) - h(x)| < \epsilon, |X_n - X| \ge \delta)$

$\le P(|h(X_n) - h(x)| < \epsilon \big| |X_n - X| < \delta) + P(|X_n - X| \ge \delta)$

$< P(|X_n - X| \ge \delta)$

由此可得：$\lim_{n\to\infty} P(|h(X_n) - h(x)| < \epsilon) = 0$

(b) 记 $n_k = \frac{k(k+1)}{2} + 1$, 则 $X_{n_k} = s + I_{[0, \frac{1}{k+1}]}(s)$, 当 $k \to \infty$ 时,$X_{n_k} \to s$ a.s

5.40 (a)

$P(X \le t - \epsilon) = P(X \le t - \epsilon, |X_n - X| < \epsilon) + P(X \le t - \epsilon, |X_n - X| \ge \epsilon)$

而 $X \le t - \epsilon, |X_n - X| < \epsilon \Rightarrow X \le t - \epsilon, X_n - X \le \epsilon \Rightarrow X_n \le t$

故 $P(X \le t - \epsilon, |X_n - X| < \epsilon) \le P(X_n \le t)$

可得 $P(X \le t - \epsilon) \le P(X_n \le t) + P(|X_n - X| \ge \epsilon)$

(b) 由于在推导上面不等式时并未对 X_n, X 作任何要求，因此在上式

中，交换 X_n, X 的位置，并作代换 $t \to t+\epsilon$ 不等式依然成立，即有：

$P(X_n \leq t) \leq P(X \leq t+\epsilon) + P(|X_n - X| \geq \epsilon)$

(c) 由前两问可得

$P(X \leq t-\epsilon) - P(|X_n - X| \geq \epsilon) \leq P(X_n \leq t) \leq P(X \leq t+\epsilon) + P(|X_n - X| \geq \epsilon)$

取极限可得:

$P(X \leq t-\epsilon) \leq \lim\limits_{n\to\infty} P(X_n \leq t) \leq P(X \leq t+\epsilon)$

而由 ϵ 的任意性可得 $P(X \leq t) \leq \lim\limits_{n\to\infty} P(X_n \leq t) \leq P(X \leq t)$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n \leq t) = P(X \leq t) \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$