

# Feynman 11 月 4 日整理

整理人：曾柯又

## 1 两粒子态

### 1.1 数学表示

最简单的两粒子态可以写为直积（张量积）的形式：

$$|a\rangle_1 |b\rangle_2 = |a\rangle |b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$$

解释为：粒子 1 处于态  $|a\rangle$  上且粒子 2 处于态  $|b\rangle$  上的态。

两粒子可以构成的基础态： $|+\rangle |+\rangle, |+\rangle |-\rangle, |-\rangle |+\rangle, |-\rangle |-\rangle$ 。由线性叠加原理，这些基础态的任意线性组合都是物理上允许的态。例如  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle |+\rangle + |-\rangle |-\rangle)$  但是注意此时不能再称粒子一处于某态，粒子二处于某态。

### 1.2 内积定义

记  $|\phi_a\rangle = |a_1\rangle |a_2\rangle, |\phi_b\rangle = |b_1\rangle |b_2\rangle$ ，则  $\langle \phi_a | \phi_b \rangle = \langle a_1 | b_1 \rangle \langle a_2 | b_2 \rangle$ 。这个内积依然解释为，对于  $|\phi_b\rangle$  的两粒子态，测得  $|\phi_a\rangle$  的概率幅。

## 2 纠缠态

### 2.1 纠缠态的定义

在仅限与纯态的情况，当两粒子的态能够写成下列形式： $|\psi\rangle = |a\rangle |b\rangle$ ，则为非纠缠的，若不能则为纠缠态。

### 2.2 最大纠缠态

数学表示

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle \pm |--\rangle)$$
$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle \pm |-+\rangle)$$

由前面定义的内积，这四个态是正交归一的，因此可以作基础态和测量基。

### 2.3 纠缠态与通信

纠缠态的特有属性：关联。以态  $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)$  为例：A,B 两个粒子可相隔很远。若一端（A 端）得  $|+\rangle$ ，则另一端也为  $|+\rangle$ ，若 A 端  $|-\rangle$ ，B 则端也是  $|-\rangle$

注意：纠缠态并不能实现超光速通信。

解释：首先回答什么是通信，如果你给别人打电话，不管你说什么，别人始终在放我的滑板鞋，这显然不是通信。。。囧 Orz。而对纠缠态系统  $|\phi^+\rangle$  来说，1 粒子没有测量时，对于粒子 2 而言，其密度矩阵为  $I/2$ 。而对粒子一，无论做何种测量，只要没有把测量结果传到粒子 2 端，则粒子 2 的密度矩阵仍然为  $I/2$ 。

也就是说在没有经典通信的情况下，1 粒子端的任何测量都不会对 2 粒子端的测量产生影响。也就相当于洗脑循环我的滑板鞋了，这当然就不会有任何信息的传递。更多的关于纠缠态的讨论见 ppt7。

## 3 Bell 测量

Bell 测量就是以 Bell 态为测量基的测量，它是非局域测量或者叫集体测量，不能分解成单个子测量的组合。

### 3.1 CNOT 门

可以利用 CNOT 门 (control not gate) 来实现 bell 测量。CNOT 门的定义为：，对两粒子体系  $|a\rangle|b\rangle$ ：

$$\text{CNOT}|a\rangle|b\rangle = |a\rangle|a \oplus b\rangle$$

$\oplus$  为逻辑异或操作。可以利用 CNOT 门来实现 bell 态的测量。CNOT 门对 bell 态的作 (用 + 表示 1, -表示 0) 用：

$$\begin{aligned}\text{CNOT}|\phi^+\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)\right)|-\rangle \\ \text{CNOT}|\phi^-\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle - |--\rangle)\right)|-\rangle \\ \text{CNOT}|\psi^+\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)\right)|+\rangle \\ \text{CNOT}|\psi^-\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle - |--\rangle)\right)|+\rangle\end{aligned}\tag{1}$$

通过 CNOT 门之后，将纠缠态转变为了非纠缠态，将 Bell 基的测量变成了对水平方向和  $45^\circ$  度以及  $135^\circ$  的测量。

## 4 纠察态的应用

### 4.1 Quantum Teleportation

可以将一个未知态传输到远方而不传输粒子本身。

一个 3 粒子态，若能写成：

$$|\chi\rangle_{123} = c_1 |\psi_1\rangle_{12} |a\rangle_3 + c_2 |\psi_2\rangle_{12} |b\rangle_3 + c_3 |\psi_3\rangle_{12} |c\rangle_3 + c_4 |\psi_4\rangle_{12} |d\rangle_3$$

且  $|\psi_i\rangle$  正交归一，则以测量基  $|\psi_i\rangle$  观测 12，那么测量结果决定了粒子 3 的状态。

该结论要用到 Schmidt decomposition，可以见 wiki 百科 [http://en.wikipedia.org/wiki/Schmidt\\_decomposition](http://en.wikipedia.org/wiki/Schmidt_decomposition)

Quantum Teleportation 的具体数学推导见 ppt7

注意 Quantum Teleportation 仍然不能用来做超光速通信。

### 4.2 量子密集编码

可用 1 个粒子来传递 2 个 bit 的信息。数学推导见 ppt7

鲍亦澄同学的提问：实际上 B 粒子也要送过去，仍然是用 2 个粒子传递 2bit 的信息。

老师的解释：的确实际上是用 2 粒子传递 2bit 信息，但是 B 粒子可以提前传送，可以利用信道闲置的时间提前发送粒子 B，这样就可以在通信繁忙的时候利用 1 个粒子加载 2bit 的信息。