基科 32 曾柯又 2013012266

7.41

(a) 若 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$

则 $E\sum_{i=1}^n a_i X_i = \sum_{i=1}^n a_i EX_i = \mu(\sum_{i=1}^n a_i) = \mu$

因此 $a_i X_i$ 为无偏估计量

(b) $Var\sum_{i=1}^n a_i X_i = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var X_i = \sigma^2(\sum_{i=1}^n a_i^2)$

由均值不等式:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n} \geq (\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n})^2 = \frac{1}{n}$$

当且仅当 $a_i = \frac{1}{n}$ 时等号成立, 因此

当 $a_i = \frac{1}{n}$ 时，$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i$ 的方差最小，为 $\frac{\sigma^2}{n}$

7.42 $\because Cov(W_i, W_j) = 0$，$W_1, \cdots W_n$ 互相独立

记 $W = a_i W_i$

$E_\theta W = E_\theta(\sum_{i=1}^n a_i W_i) = \theta \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i = 1$

而 $VarW = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var W_i = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$

由柯西不等式:

$$(\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}) \geq (\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sigma_i}\sigma_i)^2 = (\sum_{i=1}^n a_i)^2 = 1$$

即 $\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2 \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$

当且仅当所有 $\frac{a_i}{\sigma_i}/\sigma_i = \frac{a_i}{\sigma_i^2}$ 相同时，等号成立。

即 $a_i = \frac{\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$ 时，$VarW^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$ 取得最小，

且此时 $W^* = \sum_{i=1}^{n} a_i W_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 W_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}$