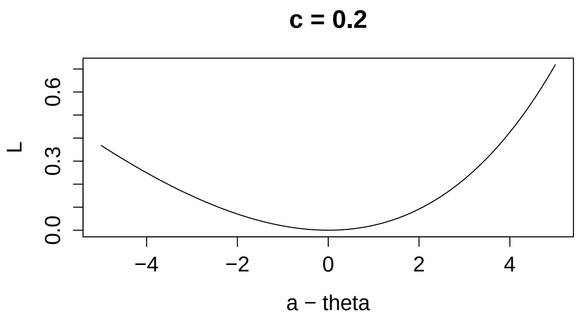
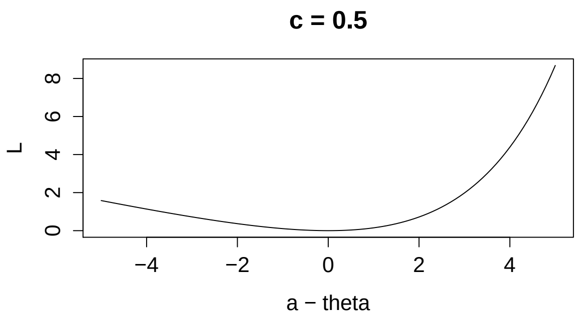
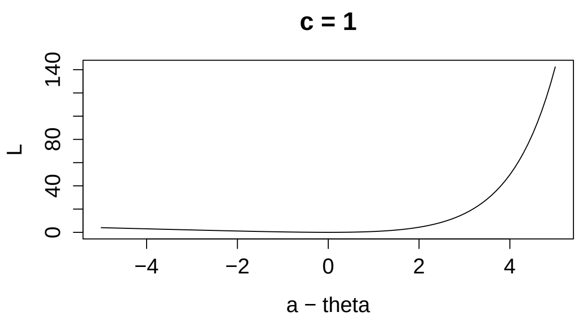
7.65

(a) 画出函数图像如下:







可见随着 c 的增加，函数图像逐渐由对称变得不对称。

(b) $E(L(\theta, a)|x) = \mathrm{e}^{c\delta}E(\mathrm{e}^{-c\theta}|x) - c(\delta - E(\theta|x)) - 1$

求导可得 $c\mathrm{e}^{c\delta}E(\mathrm{e}^{-c\theta}|x) - c = 0 \Rightarrow \delta = -\frac{1}{c}\log E(\mathrm{e}^{-c\theta}|x)$

而 $c\mathrm{e}^{c\delta}E(\mathrm{e}^{-c\theta}|x)-c$ 随 δ 的单调递增，故极值为极小值, 满足要求，即：

$\delta^{\pi}(x)=-\frac{1}{c}\log E(\mathrm{e}^{-c\theta}|x)$

(c) 这里的 $\pi(\theta)$ 代表全实轴的均匀分布函数，可先设 $\pi(\theta)=\frac{1}{D}$ 最后令 $D\to\infty$(其实后面的计算与 D 无关)

$f(x,\theta)=C\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{n(\bar{x}-\theta)^2}{2\sigma^2}}=p(x)\mathrm{e}^{-\frac{n(\bar{x}-\theta)^2}{2\sigma^2}}$

$m(x)=\displaystyle\int f(x|\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta=p(x)\int\mathrm{e}^{-\frac{n(\bar{x}-\theta)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\theta$

$\pi(\theta|x)=\dfrac{f(x,\theta)}{m(x)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{n(\bar{x}-\theta)^2}{2\sigma^2}}}{\int\mathrm{e}^{-\frac{n(\bar{x}-\theta)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\theta}$

即 $\pi(\theta|x)\sim\mathrm{n}(\bar{x},\frac{\sigma^2}{n})$ 可以得到

$E(\theta|x)=\bar{x}$

$E(\mathrm{e}^{-c\theta}|x)=M_{\theta|x}(-c)=\mathrm{e}^{-c\bar{x}+\frac{\sigma^2c^2}{2n}}$

$\Rightarrow E(L(,\delta)|x)=\dfrac{\sigma^2c^2}{2n}$