

Feynman 12 月 4 日整理

整理人：曾柯又

1 两粒子态

1.1 数学表示

最简单的两粒子态可以写为直积（张量积）的形式：

$$|a\rangle_1 |b\rangle_2 = |a\rangle |b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$$

解释为：粒子 1 处于态 $|a\rangle$ 上且粒子 2 处于态 $|b\rangle$ 上的态。

两粒子可以构成的基础态： $|+\rangle|+\rangle, |+\rangle|-\rangle, |-\rangle|+\rangle, |-\rangle|-\rangle$ 。由线性叠加原理，这些基础态的任意线性组合都是物理上允许的态。例如 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|+\rangle + |-\rangle|-\rangle)$ 但是注意此时不能再称粒子一处于某态，粒子二处于某态。

1.2 内积定义

记 $|\phi_a\rangle = |a_1\rangle|a_2\rangle, |\phi_b\rangle = |b_1\rangle|b_2\rangle$ ，则 $\langle\phi_a|\phi_b\rangle = \langle a_1|b_1\rangle\langle a_2|b_2\rangle$ 。这个内积依然解释为，对于 $|\phi_b\rangle$ 的两粒子态，测得 $|\phi_a\rangle$ 的概率幅。

2 纠缠态

2.1 纠缠态的定义

在仅限与纯态的情况，当两粒子的态能够写成下列形式： $|\psi\rangle = |a\rangle|b\rangle$ ，则为非纠缠的，若不能则为纠缠态。

2.2 最大纠缠态

数学表示

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle \pm |--\rangle)$$
$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle \pm |-+\rangle)$$

由前面定义的内积，这四个态是正交归一的，因此可以作基础态和测量基。

2.3 纠缠态与通信

纠缠态的特有属性：关联。以态 $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)$ 为例：A,B 两个粒子可相隔很远。若一端（A 端）得 $|+\rangle$ ，则另一端也为 $|+\rangle$ ，若 A 端 $|-\rangle$ ，B 则端也是 $|-\rangle$

注意：纠缠态并不能实现超光速通信。

解释：首先回答什么是通信，如果你给别人打电话，不管你说什么，别人始终在放我的滑板鞋，这显然不是通信。。。囧 Orz。而对纠缠态系统 $|\phi^+\rangle$ 来说，1 粒子没有测量时，对于粒子 2 而言，其密度矩阵为 $I/2$ 。而对粒子一，无论做何种测量，只要没有把测量结果传到粒子 2 端，则粒子 2 的密度矩阵仍然为 $I/2$ 。

也就是说在没有经典通信的情况下，1 粒子端的任何测量都不会对 2 粒子端的测量产生影响。也就相当于洗脑循环我的滑板鞋了，这当然就不会有任何信息的传递。更多的关于纠缠态的讨论见 ppt7。

3 Bell 测量

Bell 测量就是以 Bell 态为测量基的测量，它是非局域测量或者叫集体测量，不能分解成单个子测量的组合。

3.1 CNOT 门

可以利用 CNOT 门 (control not gate) 来实现 bell 测量。CNOT 门的定义为：，对两粒子体系 $|a\rangle|b\rangle$ ：

$$\text{CNOT}|a\rangle|b\rangle = |a\rangle|a \oplus b\rangle$$

\oplus 为逻辑异或操作。可以利用 CNOT 门来实现 bell 态的测量。CNOT 门对 bell 态的作 (用 + 表示 1, -表示 0) 用：

$$\begin{aligned}\text{CNOT}|\phi^+\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)\right)|-\rangle \\ \text{CNOT}|\phi^-\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle - |--\rangle)\right)|-\rangle \\ \text{CNOT}|\psi^+\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)\right)|+\rangle \\ \text{CNOT}|\psi^-\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle - |--\rangle)\right)|+\rangle\end{aligned}\tag{1}$$

通过 CNOT 门之后，将纠缠态转变为了非纠缠态，将 Bell 基的测量变成了对水平方向和 45° 度以及 135° 的测量。

4 纠察态的应用

4.1 Quantum Teleportation

可以将一个未知态传输到远方而不传输粒子本身。

4.1.1 数学基础

对于两粒子态 $|\chi\rangle = |\psi\rangle|a\rangle + |\psi^\perp\rangle|b\rangle$ 如果 $|\psi\rangle, |\psi^\perp\rangle$ 相互正交，则粒子 1 的测量结果决定粒子 2 的态。

注：由 Schmidt decomposition，可以把上述结论加强，即使 $|a\rangle, |b\rangle$ 也正交，但这个问题中不需要用到这个结论， $|\psi\rangle, |\psi^\perp\rangle$ 正交足矣。关于 Schmidt decomposition 的更多内容可以见 wiki 百科 http://en.wikipedia.org/wiki/Schmidt_decomposition

进一步对一个 3 粒子态，若能写成：

$$|\chi\rangle_{123} = c_1 |\psi_1\rangle_{12} |a\rangle_3 + c_2 |\psi_2\rangle_{12} |b\rangle_3 + c_3 |\psi_3\rangle_{12} |c\rangle_3 + c_4 |\psi_4\rangle_{12} |d\rangle_3$$

且 $|\psi_i\rangle$ 正交归一，则以测量基 $|\psi_i\rangle$ 观测 12，那么测量结果决定了粒子 3 的状态。

Quantum Teleportation 的具体数学推导见 ppt7

注意 Quantum Teleportation 仍然不能用来做超光速通信。

4.2 量子密集编码

可用 1 个粒子来传递 2 个 bit 的信息。数学推导见 ppt7

鲍亦澄同学的提问：实际上 B 粒子也要送过去，仍然是用 2 个粒子传递 2bit 的信息。

老师的解释：的确实际上是用 2 粒子传递 2bit 信息，但是 B 粒子可以提前传送，可以利用信道闲置的时间提前发送粒子 B，这样就可以在通信繁忙的时候利用 1 个粒子加载 2bit 的信息。

5 个人补充

颜公望同学在这节课上曾问过一个问题，即用贝叶斯观点来解释量子力学中的概率。

首先解释下贝叶斯观点，概率论里面对概率的解释有两种观点：一种是大家熟知的频率解释，不再讨论。另一种则是贝叶斯学派的主观解释，这种观点认为概率是人的某种主观置信度，即人对某件事情发生的把握程度作为概率。关于贝叶斯概率可以看 wiki 百科<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B4%9D%E5%8F%B6%E6%96%AF%E6%A6%82%E7%8E%87>

而有人就将贝叶斯概率应用于量子力学的概率诠释上，就有了 Quantum Bayesianism，具体可见 wikihttp://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Bayesianism，不过这个问题涉及的更多是哲学问题，对大家现在的学习完全没有帮助，大家有空当科普可以看看。