第一次检测

基科 32 曾柯又 2013012266

1 可令 $r_n = n$

由中心极限定理 $\sqrt{n}(\hat{\mu_n} - \mu) \xrightarrow{d} n(0, \sigma^2)$

设 $g(x) = \cos(x)$, 有 $g'(0) = 0$ $g''(0) = -1$

由二阶 delta 方法

$$n(\cos(\hat{\mu_n}) - \cos(\mu)) \xrightarrow{d} -\frac{\sigma^2}{2}\chi_1^2$$

即收敛到非退化随机变量

2 (a) 先求出 $X_{(n+1)}, X_{(2n)}$ 的联合概率分布，为简化记号，记 $U = X_{(n+1)}$, $V = X_{(2n)}$, 有:

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{(2n+1)!}{n!(2n-2)!} f_X(u) f_X(v) F_X^n(u) [F_X(v) - F_X(u)]^{n-2} [1 - F_X(v)]$$

$F_X(u) = \frac{1}{\theta}$, $F_X(u) = \frac{u}{\theta}$ $\quad 0 \le u \le v \le \theta$ 可得：

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \frac{(2n+1)!}{n!(2n-2)!} (\frac{1}{\theta})^2 (\frac{u}{\theta})^n (\frac{v-u}{\theta})^{n-2} (1 - \frac{v}{\theta}) \\ &= \frac{(2n+1)!}{n!(2n-2)!\theta^{2n+1}} u^n (v-u)^{n-2} (\theta - v) \qquad 0 \le u \le v \le \theta \end{aligned}$$

设 $S = V + U$, $T = V - U$, 则：

$$\begin{aligned} f_{S,T}(s,t) &= f_{U,V}(\frac{s-t}{2}, \frac{s+t}{2}) \Big| \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \Big| \\ &= \frac{(2n+1)!}{n!(n-2)!\theta^{2n+1}} (\frac{s-t}{2})^n t^{n-2} (\theta - \frac{s+t}{2}) \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

s,t 的取值范围为：$s\in[0,\theta]$ 时，$t\in[0,s]$; $s\in[\theta,2\theta]$ 时，$t\in[0,2\theta-s]$, 因此，当 $s\in[0,\theta]$ 时：

$$
\begin{aligned}
f_S(s) &= \int_0^s f_{S,T}(s,t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^s \frac{(2n+1)!s^{2n-1}}{n!(n-2)!\theta^{2n+2}2^{n+1}}(1-\frac{t}{s})^n(\frac{t}{s})^{n-2}(\frac{2\theta}{s}-1-\frac{t}{s})\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(2n+1)!s^{2n}}{n!(n-2)!\theta^{2n+1}2^{n+2}}(1-t)^n t^{n-2}(\frac{2\theta}{s}-1-t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{(2n+1)}{2^{n+2}\theta}(4n(\frac{s}{\theta})^{2n-1}-(3n-1)(\frac{s}{\theta})^{2n})
\end{aligned}
$$

当 $s\in[\theta,2\theta]$ 时：

$$
\begin{aligned}
f_S(s) &= \int_0^{2\theta-s} f_{S,T}(s,t)\mathrm{d}t \\
&= ...
\end{aligned}
$$

好像没有初等表达式

3 可取 $r_n=\sqrt{n},\ \phi(x)=2\arcsin(\sqrt{x})$

由中心极限定理:

$$\sqrt{n}(\hat{p_n}-p)\xrightarrow{d} n(0,p(1-p))$$

而 $\phi'(p)=\sqrt{\frac{1}{p(1-p)}}$, 且 $p\in(0,1)$, 故 $\phi'(p)\neq 0$ 由 delta 方法：

$$\sqrt{n}(\phi(\hat{p_n})-\phi(p))\xrightarrow{d} n(0,1)$$

4 $P(n(1-X_{(n)})\leq t)=P(X_{(n)}>1-\frac{t}{n})=1-P(X_{(n)}<1-\frac{t}{n})$

而 $P(X_{(n)}<1-\frac{t}{n})=\prod_{i=1}^n P(X_i<1-\frac{t}{n})=(1-\frac{t}{n})^n$

故 $P(n(1-X_{(n)})\leq t)=1-(1-\frac{t}{n})^n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(n(1-X_{(n)})\leq t)=1-e^{-t}$

即为指数分布 $n(1-X_{(n)})\xrightarrow{d} X,\quad f_X(x)=e^{-x}$

5 由中心极限定理

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)\xrightarrow{d} n(0,\sigma^2)$$

记 $g(x)=x^2,\ g'(\mu)=2\mu,\ g''(\mu)=2$

若 $\mu\neq 0$, 由 delta 方法:

$$\sqrt{n}((\bar{X_n})^2-\mu^2)\xrightarrow{d} n(0,4\sigma^2\mu^2)$$

即可取 $c_n=\sqrt{n},\ A=\mu^2$

若 $\mu=0$, 由二阶 delta 方法:

$$n((\bar{X_n})^2-\mu^2)\xrightarrow{d}\sigma^2\chi_1^2$$

即取 $c_n=n,\ A=\mu^2$

6 (a) 第一部分 $\sqrt{n}(\bar{X_n}-\mu)-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)=0$

而

$$\begin{aligned}&\sqrt{n}(S_n^2-\sigma^2)-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)^2-\sigma^2]\\&=\sqrt{n}(S_n^2-\sigma^2)-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{X_n}+\bar{X_n}-\mu)^2-\sigma^2]\\&=-\sqrt{n}(\bar{X_n}-\mu)^2\end{aligned}$$

而 $\sqrt{n}(\bar{X_n}-\mu)\xrightarrow{p} n(0,1)$，由连续映射定理:

$$n(\bar{X_n}-\mu)^2\xrightarrow{p}\chi_1^2$$

故：

$$\sqrt{n}(\bar{X_n}-\mu)^2\xrightarrow{p}0$$

因此

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\bar{X_n}-\mu\\ S_n^2-\sigma^2\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}X_i-\mu\\ (X_i-\mu)^2-\sigma^2\end{pmatrix}\xrightarrow{p}0$$

即

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\bar{X_n}-\mu\\ S_n^2-\sigma^2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}X_i-\mu\\ (X_i-\mu)^2-\sigma^2\end{pmatrix}+o_p(1)$$

(b) 记 $\mathcal{X}_i = \begin{pmatrix} X_i - \mu \\ (X_i-\mu)^2 - \sigma^2 \end{pmatrix}$, 有 $E\mathcal{X}_i = 0,\ \mathrm{cov}(\mathcal{X}_i) = \mathbf{\Sigma}$, 经过计算可得协方差矩阵 $\mathbf{\Sigma}$

$$\begin{pmatrix} E(X_i-\mu)^2 & E(X_i-\mu)((X_i-\mu)^2-\sigma^2) \\ E(X_i-\mu)((X_i-\mu)^2-\sigma^2) & E((X_i-\mu)^2-\sigma^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^3\gamma_1 \\ \sigma^3\gamma_1 & \sigma^4(\gamma_2+2) \end{pmatrix}$$

因此

$$\sqrt{n}(\bar{\mathcal{X}_n}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_2(0, \mathbf{\Sigma})$$

由 slusky 定理

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \bar{X}_n - \mu \\ S_n^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_2(0, \mathbf{\Sigma})$$

(c) 记 $\boldsymbol{Y_n} = \begin{pmatrix} \bar{X}_n \\ S_n^2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$, 则

$$\sqrt{n}(\boldsymbol{Y_n} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_2(0, \mathbf{\Sigma})$$

设函数 $g(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_2}}$, $\quad g'(\mu, \sigma^2) = (\dfrac{1}{\sigma}, -\dfrac{\mu}{2\sigma^3})$, $\quad = g'^T\mathbf{\Sigma}g' = 1 - \dfrac{\mu\gamma_1}{\sigma} + (\dfrac{\mu}{2\sigma})^2(\gamma_2+2)$, 则由多元函数的 delta 方法可得

$$\sqrt{n}(g(\boldsymbol{Y_n}) - g(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{d} n(0, \tau^2)$$

即

$$\sqrt{n}(\frac{\bar{X}_n}{S_n} - \frac{\mu}{\sigma}) \xrightarrow{d} n(0, \tau^2)$$

其中 $\tau^2 = 1 - \frac{\mu\gamma_1}{\sigma} + (\frac{\mu}{2\sigma})^2(\gamma_2+2)$