基科 32 曾柯又 2013012266

5.61

(a) $f_Y(y)=\dfrac{1}{B(a,b)}y^{a-1}(1-y)^{b-1}\quad 0\le y\le 1$

$f_V(y)=\dfrac{1}{B([a],[b])}y^{[a]-1}(1-y)^{[b]-1}$

$\dfrac{f_Y(y)}{f_V(y)}=\dfrac{B(a,b)}{B([a],[b])}y^{a-[a]}(1-y)^{b-[b]}\quad 0\le y\le 1$

$\because a-[a]\in[0,1),\quad b-[b]\in[0,1)$

$\therefore y^{a-[a]},\ (1-y)^{b-[b]}\in[0,1]$

即 $M=sup\dfrac{f_Y(y)}{f_V(y)}$ 有界。

(b) 这小问题目有问题，仅当 V 的参数 b' 大于 b，或者 a' 等于 a 时，M 才为有限值。如果将 V 的参数改为 ([a],b + 1) 则

$f_Y(y)=\dfrac{1}{\Gamma(a)b^a}y^{a-1}e^{-\frac{y}{b}}$

$f_V(y)=\dfrac{1}{\Gamma([a])b^{[a]}}y^{[a]-1}e^{-\frac{y}{b+1}}$

$\dfrac{f_Y(y)}{f_V(y)}=\dfrac{\Gamma([a])(b+1)^{[a]}}{\Gamma(a)b^a}y^{a-[a]}e^{-y(\frac{1}{b}-\frac{1}{b+1})}$

(c) 若将 V 的参数换成 $[a]+1$，(a)，(b) 中 y 对应的指数 $a-[a]-1$ 变为负，于是当 $y\to 0$ 时，$\frac{f_Y(y)}{f_V(y)}\to\infty$，即 M 会变为无穷大。

(d) 如果仅仅是为了使 EN 最小，显然当 V,Y 的分布一样时，M 最小为 1。但是考虑到问题的实际背景，即为了通过简单的容易产生的随机数来产生复杂的随机数。而由前面的例题可以知道，可以用均匀分布随机变量较容易的产生出两个参数都为整数的 Beta 分布以及 α 参数为整数的 Gamma

分布。因此在寻求使 EN 最小的参数时，应当将范围限制在上述允许的条件内。

对 Beta 分布，设 V 的参数为 (a', b')，则

$\frac{f_Y(y)}{f_V(y)} = \frac{B(a,b)}{B(a',b')} y^{a-a'}(1-y)^{b-b'}$

记 $\alpha = a - a'$, $\beta = b - b'$，可知当 $y = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ 时，有最大值

$M = \frac{B(a,b)}{B(a',b')}(\frac{\alpha}{\alpha+\beta})^{\alpha}(\frac{\beta}{\alpha+\beta})^{\beta}$

通过计算可以知道，α, β 越小时，M 越小。而为使 a', b' 都为整数，因此应当取 $a' = [a]$, $b' = [b]$

对 Gamma 分布，设 V 的参数为 (a', b'), 则

$\dfrac{f_Y(y)}{f_V(y)} = \dfrac{\Gamma(a')(b')^{a'}}{\Gamma(a)b^a} y^{a-a'} e^{-y(\frac{1}{b}-\frac{1}{b'})}$ 记 $\alpha = a - a'$, $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b'}$，则可以知道当 $y = \alpha\beta$ 时，取得最大值 $M = \frac{\Gamma(a')(b')^{a'}}{\Gamma(a)b^a}(\alpha\beta)^{\alpha}e^{-\alpha}$, 为求得该式的最小值。对 a' 来说，a' 越小，对应的极小值越小，因此应当取 $a' = [a]$, 但是对于 b', 无法解析的给出取最小对应的值，只有具体情况数值求解。

5.64 (a) 记 $A = suppf = suppg$, 则

$$
\begin{aligned}
E\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{f(Y_i)}{g(Y_i)}h(Y_i)\Big) &= E\frac{f(Y_i)}{g(Y_i)}h(Y_i) \\
&= \int_A \frac{f(y)}{g(y)}h(y)g(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_A f(y)h(y)\mathrm{d}y \\
&= Eh(X)
\end{aligned}
$$

(b) 记 $T_i = \dfrac{f(Y_i)}{g(Y_i)}h(Y_i)$

$E|T_i| = \displaystyle\int_A |\frac{f(y)}{g(y)}|h(y)g(y)\mathrm{d}y = E|h(X)|$ 由大数定律:

$\displaystyle\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} T_i \xrightarrow{p} ET_i = Eh(X)$

(c) 记 $A_i=\dfrac{f(Y_i)}{g(Y_i)}, B_i=\dfrac{f(Y_i)}{g(Y_i)}h(Y_i)$

$EA_i=1,\ E|A_i|=1$ 由大数定律$\bar{A}_m\xrightarrow{p}1$

$EB_i=h(X),\ E|B_i|<\infty$ 由大数定律$\bar{B}_m\xrightarrow{p}Eh(X)$

因此 $\dfrac{\bar{B}_m}{\bar{A}_m}\xrightarrow{p}\dfrac{Eh(X)}{1}=Eh(X)$，即 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{f(Y_i)/g(Y_i)}{\sum_{j=1}^{m}f(Y_j)/g(Y_j)}h(Y_i)\xrightarrow{p}Eh(X)$

(c) 当 h 是常数时，$Eh(X)=h$,(c) 给出的估计就为 $h=Eh(X)$, 而 (b) 给出的估计量为 $Eh(X)\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{f(Y_i)}{g(Y_i)}$，因此在这个特殊情况下，(c) 给出的估计量比 (b) 中公式更好。

模拟作业

[1] 由 $\displaystyle\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$ 故令 $K=\frac{2}{3}$，此时 $f(x)=Kg(x)$ 为密度函数

[2] $0<x<0.5$ 时

$$F(x)=\int_0^x\frac{2}{3}2x\mathrm{d}x=\frac{2x^2}{3}$$

$0.5<x<1$ 时

$$F(x)=\frac{1}{6}+\int_{0.5}^x\frac{2}{3}(2-2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}(x-1)^2$$

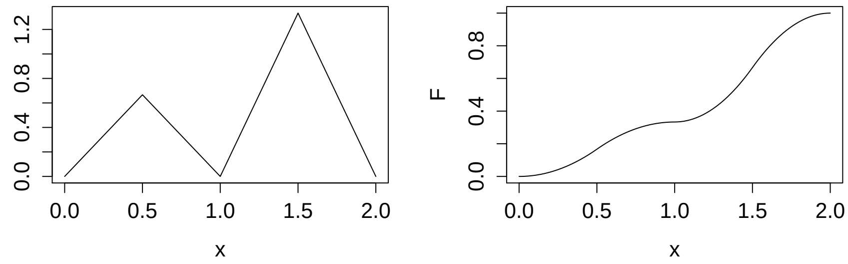
$1<x<1.5$ 时

$$F(x)=\frac{1}{3}+\int_0^{x-1}\frac{2}{3}4x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}(x-1)^2$$

$1.5<x<2$ 时

$$F(x)=\frac{2}{3}+\int_{1.5}^x\frac{2}{3}(8-4x)\mathrm{d}x=1-\frac{4}{3}(x-2)^2$$

做出 $f(x), F(x)$ 的图形如下:



计算 $\mu = EX = \dfrac{7}{6}$, $\sigma^2 = VarX = \dfrac{19}{72}$

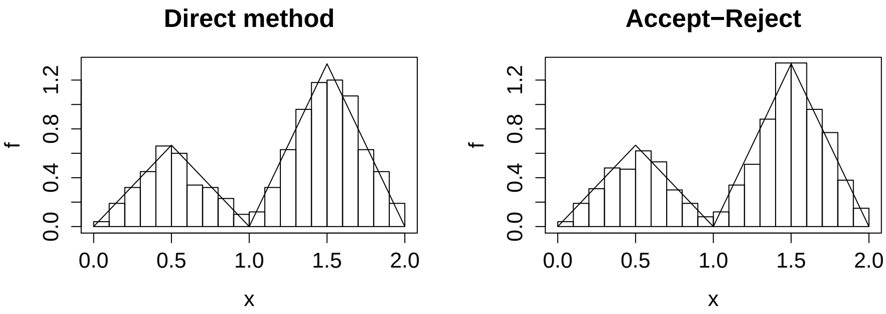
[3] 利用直接方法产生随机数：

用分段函数表示 $F^{-1}(x)$, 作用于产生的 1000 个 (0,1) 均匀分布随即变量，得到的 1000 个数即满足 $f(x)$ 的分布，计算所得的 $\hat{\mu}_1 = 1.179$

[4] 利用接收 -拒绝法产生随机数：

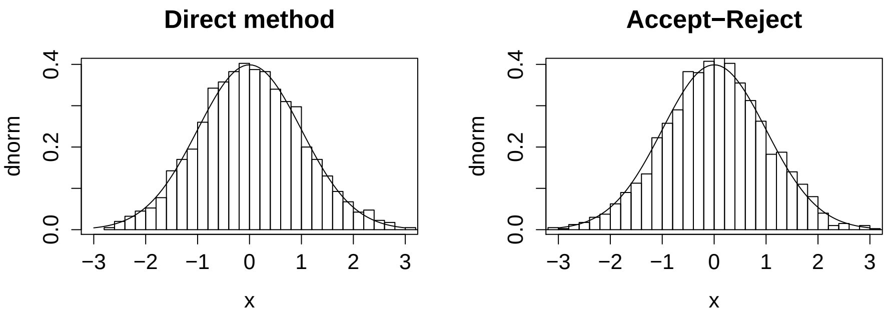
这里我为了避免使用循环语句，而尽可能向量化，采取了先生成两列足够多的均匀分布随机数列，用向量操作筛选出满足 $y < f(x)$ 数据的方法，但是由于向量长度是固定的，还要提前取定足够的数据使得筛选后至少有 1000 个数。这可以按书中的方法估计得到 $EN = \frac{8}{3}$, 要得到 1000 个数据，为了保证不会出现问题，我先生成了 2800 组随即数。这样做虽然会额外生成一些数，但是与直接作循环相比更能节省时间。

两种方法获得直方图与概率密度函数叠加所得图如下



[**5**] 两种方法各重复 2000 次：由于每次重复的步骤都是一样的，我没有写成循环，而是直接产生 1000×2000 组数据，再分成 2000 组，分组求平均，这样与循环 2000 次是一样的，速度也要快一点。由大数定律，这 2000 个值近似服从正态分布，即 $\dfrac{\sqrt{1000}(\hat{\mu}-\mu)}{\sigma} \sim n(0,1)$, 可以做图来验证这一点，即这两千个数的直方图应当和正态分布密度函数相合。

两种方法得到的图像如下



两种方法得到的样本均值与方差为：

Direct method : $\bar{\hat{\mu}}_1 = 1.16631,\ S_1^2 = 2.57 \times 10^{-4}$

Accept Reject : $\bar{\hat{\mu}}_2 = 1.16673,\ S_2^2 = 2.56 \times 10^{-4}$

[**6**] 记时两种算法运行时间：都产生 2000 组平均值，直接方法用时 30.401s，接受拒绝法用时 75.579s，因此直接方法明显节约了很多时间。但这和问题的特殊性有关，因为 cdf 的反函数可以显示表达，在大多数情况下，cdf 并不能直接表达，而获取反函数需要解方程，而且这个方程一般会涉及积分，因此方程的求解会异常耗时。所以在反函数不能直接表达的时候，接受拒绝法要可行。