Функциональный анализ

Лектор: Сергей Петрович Коновалов

Осень 2020 – весна 2021

Содержание

1 Метрические и топологические пространства

Лекция от 16.09.2020

Введём начальную терминологию, которой мы будем пользоваться на протяжении всего курса. Несмотря на то, что третьекурсники уже сталкивались с частью ниже изложенных понятий, необходимо унифицировать используемый язык.

Начнём с метрического случая.

Опр. *Метрическое пространство – пара (X, ρ), где X – векторное пространство над полем скаляров $\mathbb{K}$, а ρ – метрика на нём.*

Опр. *Метрика – функция $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая трём условиям для любых $x, y, z \in X$:*

1. $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).s$

$\mathbb{K}$ будет обозначать либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$. На выбор конкретного поля скаляров будет обращено особое внимание в тех местах, где этот будет существенен.

Опр. *Топологическое пространство – пара (X, τ). X – некоторое множество, а $\tau \subset 2^X$ – топология на X, то есть система множеств, удовлетворяющая условиям:*

1. $X, \varnothing \in \tau$
2. $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$, *если* $\forall \alpha \in A : G_\alpha \in \tau$
3. $\bigcap\limits_{k=1}^{N} G_k \in \tau$, *если все* $G_k \in \tau$.

В последующем и топологические, и метрические пространства будут часто обозначаться только первым символом множества из пары, если для неё из контекста повествования очевидна топология или метрика. Далее по тексту МП – метрическое пространство, ТП – топологическое пространство.

До введения следующих необходимых определений приведём сводную таблицу понятий-аналогов из метрического и топологического случаев.

МП	**ТП**
Подпространство	+
Ограниченное множество	-
Расстояние м/у множествами	-
Замыкание множества	+
Замкнутые множество	+
Внутренная точка	+
Открытое ядро	+
Открытое множество	+
Сходящаяся последовательснота	+, но не всегда

Опр. *Подпространство метрического пространства Y – пара (X, ρ), где $X \subset Y$, а ρ – метрика на Y.*

Метрику из подпространства называют индуцированной метрическим пространством Y.

Опр. *Индуцированная топологическим пространством (Y, τ_Y) топология для $X \subset Y$ – $\tau_X = \{G \cap X : G \in \tau_Y\}$. Пара (Y, τ_Y) называется подпространством (X, τ_X).*

Опр. *Диаметром множества X в МП называют $d = \sup\limits_{x,y \in X} \rho(a, y)$.*

Опр. *Множество X в МП называют ограниченным, если его диаметр меньше бесконечности.*

Опр. *Расстоянием между множествами A и B в МП называют* $\rho(A, B) = \inf\limits_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \rho(a, b)$.

Опр. *Множество* $B(x, r) = \{y \mid \rho(y, x) < r\}$ *в метрическом пространстве при* $r > 0$ *называется открытым шаром.*

Также для шаров могут встречаться обозначения $B_r(x)$ и $B(x)$.

Опр. *Множество* $\overline{B}(x, r) = \{y \mid \rho(y, x) < r\}$ *в метрическом пространстве при* $r > 0$ *называется замкнутым шаром.*

Опр. *Элемент x из МП X для множества $M \subset X$ называется точкой прикосновения, если* $\rho(x, M) = 0$.

Опр. *Элемент x из ТП X для множества $M \subset X$ называется точкой прикосновения, если* $\forall B(x) \cap M \neq \varnothing$.

Все точки прикосновения x множества M можно разделить на два вида:

1. Предельные точки, т.е. $\forall B(x) \exists m \in M\, m \in B(x), m \neq x$;
2. Изолированные точки множества M.

Опр. *Замыканием множества называют его объединение с множеством точек прикосновения.*

Опр. *Множество M называют замкнутым, если* $M = \overline{M}$.

В старых работах можно встретить обозначение замыкания множества через квадратные скобки: $[M]$. В этом курсе так будет обозначаться линейная оболочка.

Опр. *Точка $m \in X$ называют внутренней для множества X, если* $\exists B(x, r) : B(x, r) \subset X$.

Опр. *Открытым ядром множества X называют множество его открытыъ точек. Обозначения:* $\operatorname{Int} M$, $\mathring{M}$.

Опр. *Множество M называется открытым, если* $\operatorname{Int} M = M$.

Опр. *Множество A называют плотным в B, если* $B \subset \overline{A}$.

Опр. *Множество A называют всюду плотным в B, если* $B = \overline{A}$.

Опр. *Множество A называют нигде не плотным в B, если A не плотно ни в одном шаре из B (или же $\overline{A}$ не содержит ни одного шара).*

Опр. *Последовательность элементов $\{x_n\}$ из МП M называется сходящейся к элементу $x_0 \in M$, если* $\rho(x_n, x_0) \to 0$.

Опр. *Пространство называется сепарабельным, если в нём существует счётное всюду плотное множество.*

Упражнение. *Докажите эквивалентность утверждений:*

- *x – точка прикосновения M*
- $\exists \{m_k\} \subset M : m_k \to x$

Упражнение. *Докажите, что* $C[a,b]$ *сепарабельно. Метрика:* $\rho(f,g) = \max\limits_x (f(x) - g(x))$. *Указание: рассмотрите множество полиномов с рациональными коэффициентами.*

Сформулируем первые три теоремы.

Теорема 1.1 (X,ρ) *– МП .* $F \subset X$ *– замкнутое множество* $\Longleftrightarrow X \setminus F$ *– открытое множество.*

Доказательство.
Выберем любую точку $x \in X \setminus F$. *Если удастся окружить её открытой окрестностью, не имеющей пересечений с* F, *то теорема будет доказана. Раз* $x \notin F$, *то* x *– не точка прикосновения* F. *Значит,* $\exists B(x) \cap F = \varnothing$ *и* $B(x) \subset X \setminus F$. ■

Со времён «Теории множеств» Хаусдорфа (немецкий математик, основатель топологии, 1868-1942) за открытыми множествами закрепилось обозначение G, за замкнутыми – F.

Открытое ядро M – это наибольшее открытое множество в M, и потому оно может быть записано в виде $\bigcup\limits_{G \subset M} G$.

Замыкание M – наименьшее замкнутое множество, содержащее M, и потому оно может быть записано в виде $\bigcap\limits_{M \subset F} F$.

Теорема 1.2 (X,ρ) *– МП .* $\{G_\alpha\}$ *– семейство открытых множеств,* $\{F_\alpha\}$ *– семейство замкнутых множеств,* $\alpha \in A$. *Тогда*

$\bigcup G_\alpha$ *– открытое*	$\bigcap F_\alpha$ *– замкнутое*
$\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ *– открытое*	$\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ *– замкнутое*

Доказательство.
Докажем верхнюю строчку таблица, нижняя оставляется в качестве упражнения. Нам пригодятся две формулы де Моргана (шотландский математик, 1806-1871): $C \bigcup B_\alpha = \bigcap CB_\alpha$ *и* $C \bigcap B_\alpha = \bigcup CB_\alpha$, *где* C *обозначает операцию дополнения.*

1. *Для любой точки* $x \in \bigcup G_\alpha$ *можно выбрать* $\exists \alpha_0 : x \in G_{\alpha_0}$. *Так как* G_{α_0} *открыто, то* $\exists B(x) \subset G_{\alpha_0}$. *Значит,* $B(x) \subset \bigcup G_\alpha$.

2. *Обозначим* $G_\alpha \overset{\text{def}}{=} CF_\alpha$. *Тогда воспользуемся формулой де Моргана:* $\bigcap F_\alpha = \bigcap CG_\alpha = C \bigcup G_\alpha$. *Так как* $\bigcap G_\alpha$ *открыто, то по Т.1.1* $C \bigcup G_\alpha$ *замкнуто.*

■

Теорема 1.3 X *– МП . Тогда верны следующие утверждения:*

1. $B(x,r)$ *– открытое множество*
2. $\operatorname{Int} M$ *– открытое множество*
3. $\overline{M}$ *– замкнутое множество*
4. $\overline{B}(x,r)$ *– замкнутое множество*

Доказательство.

1. *Для любой точки* $y \in B(x,r)$ *имеем оценку расстояния от центра шара до неё:* $\rho(x,y) = r - \varepsilon$. *Выберем окрестность точки* y: $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$. *Теперь рассмотрим точки из этой окрестности. Для любой* $z \in B(y, \frac{\varepsilon}{2})$: $\rho(z,x) \le \rho(z,y) + \rho(y,x) = r - \frac{\varepsilon}{2} < r$. *Значит, вся выбранная окрестность точки* y *лежит в* $B(x,r)$, *то есть* $B(x,r)$ *открыт.*

2. *Простое замечание:* $M_1 \subset M_2 \Rightarrow \operatorname{Int} M_1 \subset \operatorname{Int} M_2$. *Перейдём к доказательству пункта.* $\forall x \in \operatorname{Int} M \Rightarrow \exists B(x) \subset M \Rightarrow \operatorname{Int} B(x) \subset \operatorname{Int} M$. *А раз* $B(x)$ *открыто, то и* $\operatorname{Int} M$ *открыто.*

Доказательство оставшихся пунктов теоремы остаётся в качестве упражнения. ■

Интересно сравнить два объекта: $\overline{B}(x,r)$ и $\overline{B(x,r)}$. Всегда ли они равны? Оказывается, в данном случае опыт просто устроенных пространств не соответствует общему случаю, эти два объекта не обязаны быть равными. Контрпримером служит пространство (X,ρ), где $|X| > 2$ и $\rho(x,y) = \mathbb{I}[x = y]$.

Докажем полезный в дальнейшем факт о локальной топологии точки прикосновения.

Утверждение *x – точка прикосновения множества $M \iff \forall G(x) : G(x) \cap M \neq \varnothing$, где $G(x)$ – открытая окрестность точки x.*

Доказательство.
$\Rightarrow$) *Рассмотрим произвольную открытую окрестность точки x. Тогда $\exists B(x,r) \subset G$. По изначальному предположению: $B(x,r) \cap M \neq \varnothing$. Значит, $G \cap M \neq \varnothing$.*
$\Leftarrow$) *Очевидно.* ■