CHAPITRE 8 : LA FONCTION EXPONENTIELLE.

1 Découverte et définition de la fonction exponentielle.

Activité n°1 page 166 du livre : "Une sous-tangente constante".

1.1 Etude d'une équation différentielle : $f' = f$.

Lemme : Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors $f(x).f(-x) = 1$ et f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :
Soit une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on a : $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
Considérons la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$.

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$\varphi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times [-f'(-x)].$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\varphi'(x) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x)}.$$
Or, **on sait que :** $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f'(x) = f(x)}$ et donc $f'(-x) = f(-x)$, et on en déduit :
$$\varphi'(x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0.$$
Pour tout réel x, $\varphi'(x) = 0$ donc cela signifie que **φ est une fonction constante** et qu'**il existe un réel k tel que, pour tout réel x, $\varphi(x) = k$.**
Or, **on sait aussi que : $f(0) = 1$**. Donc $\varphi(0) = f(0) \times f(-0) = 1 \times 1 = 1$ ce qui implique $\boldsymbol{k = 1}$.
On en déduit que, dans ces conditions, pour tout réel x, $\boldsymbol{\varphi(x) = 1}$.
C'est-à-dire : $f(x) \times f(-x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Cela démontre que, pour tout réel x, $f(x) \neq 0$: la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. (*cqfd*)

Propriété-définition : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée la fonction exponentielle et on peut la noter exp.
On a donc, pour tout réel x : $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

Démonstration :
- Existence : **On admet l'existence** d'une telle fonction (*introduite en activité*)
- Unicité : **Raisonnement par l'absurde**.
  On suppose qu'il existe deux fonctions f et g vérifiant les hypothèses :
  $$f'(x) = f(x) \text{ et } f(0) = 1 \quad \text{et} \quad g'(x) = g(x) \text{ et } g(0) = 1.$$
  Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ (car on sait que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) par :
  $$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}.$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\boldsymbol{h'(x) = \dfrac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{f^2(x)}}$.
Or **on fait l'hypothèse que : $f'(x) = f(x)$ et $g'(x) = g(x)$ donc** :
$h'(x) = \dfrac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{f^2(x)} = 0$. On a $\boldsymbol{h'(x) = 0}$ pour tout réel x, ce qui signifie que **h est une fonction constante** et qu'**il existe un réel k tel que, pour tout réel x, $h(x) = k$.**
Or, **on sait aussi que $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$**, donc $h(0) = 1$ ce qui implique $\boldsymbol{k = 1}$.
On en déduit que, dans ces conditions, pour tout réel x, **$h(x) = 1$, c'est-à-dire : $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et donc**
$f(x) = g(x)$ pour tout réel x. Il est donc absurde de considérer deux fonctions f et g vérifiant les hypothèses : $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$ et $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$.
Cela démontre qu'il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, non nulle, telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. (*cqfd*)

1.2 La relation fonctionnelle.

Propriété : Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

On dit que la fonction exponentielle "transforme les sommes en produits".

Démonstration :

a. Fixons la valeur d'un réel y donné (c'est-à-dire, considérons y constante et x variable) et considérons la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} .$$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $u'(x) = \dfrac{1 \times \exp'(x+y) \times \exp(x) - \exp(x+y) \times \exp(x)}{\exp(x)}$

car on sait que $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout réel x.

On en déduit aussi que : $\exp'(x+y) = \exp(x+y)$ et :

$u'(x) = \dfrac{\exp(x+y) \times \exp(x) - \exp(x+y) \times \exp(x)}{\exp(x)} = 0$. On a $u'(x) = 0$ pour tout réel x, ce qui signifie que **u est une fonction constante** et qu'**il existe un réel k tel que, pour tout réel x, $u(x) = k$.**

Or, on sait aussi que $\exp(0) = 1$, donc on en déduit : $u(0) = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \exp(y)$ ce qui implique $k = \exp(y)$ et on déduit que, pour tout réel x, $u(x) = \exp(y)$.

Donc **pour tout réel x** : $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$ qui équivaut à $\boldsymbol{\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}$.

b. En fixant la valeur d'un réel x donné (c'est-à-dire, en considérant x constante et y variable), **on démontre de manière analogue** avec la fonction v définie par :

$$v(y) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} ,$$

que **pour tout réel y** : $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$ qui équivaut à $\boldsymbol{\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}$.

c. Conclusion : Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$. (*cqfd*)

Exemples : x désigne une variable réelle.

- **a.** Simplifier : $\exp(3x+1) \times \exp(-2x-8)$.
- **b.** Démontrer que, pour tout réel x, on a : $\exp(x^2 - 3x) \times \exp(3x-2) \times \exp(-x^2+2) = 1$.

---

2 Propriétés de la fonction exponentielle.

2.1 Signe de la fonction exponentielle.

Propriété : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Pour tout nombre réel x, $\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right)$ d'après la relation fonctionnelle.

On a donc : $\boldsymbol{\exp(x) = \left[\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}$ et comme on sait que **la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$**, on a $\left[\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$ c'est-à-dire que, **pour tout réel x**, on a $\boldsymbol{\exp(x) > 0}$ (*cqfd*).

2.2 Propriété, conséquence immédiate du lemme et de la définition de la fonction exponentielle.

Propriété 1 : Pour tout nombre réel a, $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$.

Démonstration : **D'après le lemme et la définition de la fonction exponentielle, si f** est une **fonction dérivable sur** $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ **et** $f(0) = 1$ **alors** $f(x).f(-x) = 1$ et cette fonction f **est unique et c'est la fonction exponentielle**. On peut donc écrire, pour tout réel a :

$$\exp(a).\exp(-a) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \quad \text{(cqfd).}$$

Exemple : Pour tout réel x, démontrer que :

$$\frac{\exp(-x)}{1-\exp(-x)} = \frac{1}{\exp(x)-1}.$$

2.3 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

Propriété 2 : Pour tous nombres réels a et b, $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

Propriété 3 : Pour tout nombre réel a et tout nombre entier relatif n, $\exp(na) = [\exp(a)]^n$.

Démonstrations :

Propriété 2 : Pour tous nombres réels a et b, on peut écrire $\exp(a-b) = \exp(a+(-b))$ et d'après la relation fonctionnelle, on a : $\exp\big(a+(-b)\big) = \exp(a) \times \exp(-b)$ et :

$$\exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} \text{ donc } \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \quad (cqfd).$$

Propriété 3 : **a.** On considère un **entier naturel** n.

Pour tout nombre réel a et tout entier naturel n, on a:

$na = a + a + a + \cdots + a$ **somme de n termes égaux au réel a.**

donc $\exp(na) = \exp(a + a + a + \cdots + a) = \exp(a) \times \exp(a) \times \exp(a) \times \ldots \times \exp(a)$

produit de n facteurs égaux à **$\exp(a)$**.

On a donc : $\exp(a) \times \exp(a) \times \exp(a) \times \ldots \times \exp(a) = [\exp(a)]^n$ et par conséquent :

$\exp(na) = [\exp(a)]^n$ pour tout réel a et **pour tout entier naturel n**.

b. On considère un **entier relatif strictement négatif** n.

Si $n < 0$ alors $-n > 0$, c'est-à-dire **$-n$ est un entier naturel**. Dans ce cas, on vient de démontrer que : $\exp(-na) = [\exp(a)]^{-n}$.

Or : $\exp(-na) = \dfrac{1}{\exp(na)}$ et $[\exp(a)]^{-n} = \dfrac{1}{[\exp(a)]^n}$ donc

$\dfrac{1}{\exp(na)} = \dfrac{1}{[\exp(a)]^n}$ donc **$\exp(na) = [\exp(a)]^n$ avec n entier** strictement négatif.

c. Conclusion : **Pour tout réel a et tout entier relatif n : $\exp(na) = [\exp(a)]^n$** *(cqfd)*.

Exemple : x désigne une variable réelle.

Simplifier : $\dfrac{\exp(3x-2) \times \exp(x-3)}{[\exp(2x-3)]^2}$.

2.4 Vers une nouvelle notation : e^x .

D'après la propriété 3 démontrée précédemment, on sait que pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif n, on a : $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$.
On en déduit en particulier que, si $x = 1$ alors pour tout entier naturel n, on a : $\exp(n) = [\exp(1)]^n$.
Si on note **e** le nombre $\mathbf{exp(1)}$, alors **pour tout entier naturel** $\boldsymbol{n}$, on a : $\mathbf{exp(}\boldsymbol{n}\mathbf{) = e}^{\boldsymbol{n}}$.

Définition : On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp x = \mathrm{e}^x$ où $\mathrm{e} = \exp 1$ et la fonction exponentielle est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Pour calculer une valeur approchée de $\exp(x)$ à la calculatrice, on utilise la touche $\boxed{\mathrm{e}^x}$.

Remarque : Le nombre $\mathrm{e} = \exp(1)$ a pour valeur approchée 2,718 à 10^{-3} près.

Nouvelles écriture des propriétés algébriques :
Pour tous réels x et y, pour tout entier relatif n, on a :

$$\mathrm{e}^0 = 1 \qquad \mathrm{e}^x > 0 \qquad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y \qquad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \qquad \mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} \qquad \mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n \qquad \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^x}$$

Exemples : Utilisation des propriétés et de la notation exponentielle.
Simplifier les écritures suivantes

a. $(\mathrm{e}^{2x})^2 \times (\mathrm{e}^{-x})^2 =$; $\dfrac{\mathrm{e}^{2-3x}}{\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{x+1}} =$; $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}\times\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{2x-1}} =$; $\dfrac{(\mathrm{e}^t)^3\times(\mathrm{e}^{-t})^2}{\mathrm{e}^{-3t}} =$.

b. Montrer que pour tout réel x non nul : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1} - \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$.

---

3 Etude de la fonction exponentielle.

3.1 Sens de variation de la fonction exponentielle.

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : **La fonction exponentielle a pour dérivée elle-même**, par définition.
Si on pose, pour tout réel x : $f(x) = \mathrm{e}^x$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et alors $f'(x) = \mathrm{e}^x$.
On sait aussi que **la fonction exponentielle est strictement positive** (propriété, *cf* paragraphe **2.1** du cours).
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ ce qui permet de déduire **$f'(x) > 0$ pour tout réel x, donc la fonction f, c'est-à-dire la fonction exponentielle est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

Conséquences : Pour tous réels a et b, on en déduit :

$$\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$$
$$\mathrm{e}^a \leq \mathrm{e}^b \iff a \leq b \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^a \geq \mathrm{e}^b \iff a \geq b$$

(ces équivalences sont valables aussi avec des inégalités strictes $<$ ou $>$).

Point méthode : Cela permet la résolution d'équation ou d'inéquations avec la fonction exponentielle.

Exemples de résolution dans $\mathbb{R}$ d'équations ou d'inéquations avec la fonction exponentielle.

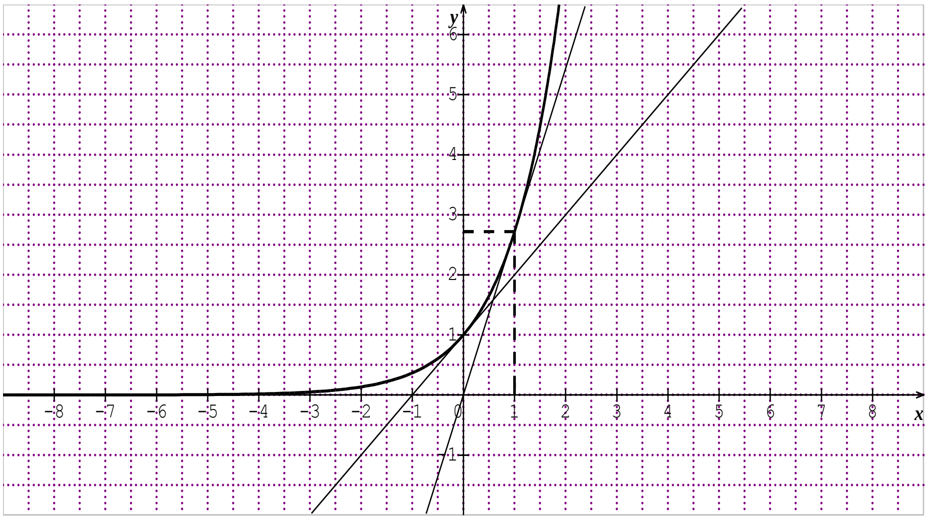
1. Résoudre les équations suivantes :
a. $\mathrm{e}^{-x+7} = \mathrm{e}^{x+3}$; **b.** $\mathrm{e}^{2-x} = 1$; **c.** $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3 = 0$; **d.** $\mathrm{e}^{3x-5} - \mathrm{e}^{-x} = 0$.

2. Résoudre les inéquations suivantes :
a. $\mathrm{e}^{-2x} < -1$; **b.** $\mathrm{e}^{4x} \geq \mathrm{e}$; **c.** $(\mathrm{e}^x + 2)(\mathrm{e}^{-x} - 1) \leq 0$. ; **d.** $\mathrm{e}^{-2x+9} - \mathrm{e}^x > 0$.

3.2 Représentation graphique à l'aide de la calculatrice.

Détermination d'une équation de la tangente T_0 à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 :
...

Détermination d'une équation de la tangente T_1 à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1 :
...



Exemple : Etudier une fonction contenant la fonction exponentielle.
On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x$.

a. Déterminer $f'(x)$.
b. En déduire le tableau de variation de f.

---

4 Applications de la fonction exponentielle.

Activité n°3 page 167 du livre : "Du discret au continu".

4.1 Etudes de fonctions du type $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ (a et b constantes réelles).

Soit u une fonction affine. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc l'ensemble de définition de e^u est $\mathbb{R}$ et cette fonction est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$. Si on pose $f = \mathrm{e}^u$, on peut écrire, a et b étant des constantes réelles :

$u(x) = ax + b$ et $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b} = g(ax + b)$ où g est la fonction exponentielle.

La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

$f'(x) = a\, g'(ax + b)$ comme étudié au dernier paragraphe du chapitre 3 ...

Sachant que g est la fonction exponentielle ici, on a : $g'(x) = \mathrm{e}^x$ et on peut écrire aussi :

$f'(x) = a\, g'(ax + b) = a\mathrm{e}^{ax+b}$ pour tout réel x.

Propriété : Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ avec a et b constantes réelles, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = a\mathrm{e}^{ax+b}$.

Conséquences : Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ (a et b constantes réelles), sa dérivée est $f'(x) = a\mathrm{e}^{ax+b}$ pour tout réel x.

Or, **pour tout réel x : $\mathrm{e}^{ax+b} > 0$** donc **le signe de $f'(x)$ sera le signe du réel a**.
Par conséquent : **Si $a < 0$** alors $f'(x) < 0$ et la fonction **f sera strictement décroissante sur $\mathbb{R}$**.
Si $a > 0$ alors $f'(x) > 0$ et la fonction **f sera strictement croissante sur $\mathbb{R}$**.

**Exemples : Savoir dériver et étudier le sens de variation des fonctions : $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}$.
(a et b constantes réelles).**

Pour chacun des exemples ci-dessous, calculer la dérivée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et en déduire les variations sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$.
2. $g(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$.
3. $h(x) = x\mathrm{e}^{2x}$.
4. $\varphi(x) = (x^2 + 1)\mathrm{e}^{-x}$.

4.2 Etude d'une famille de fonctions $f_k : x \longmapsto \mathrm{e}^{kx}$ (avec k constante réelle).

Activité n°4 page 167 du livre : "Une famille de fonctions".

Pour démontrer les conjectures établies dans l'activité n°4, on utilise la propriété précédente.
En effet, toute fonction f_k est de la forme e^u avec $u(x) = kx$, donc on applique la propriété précédente avec $a = k$ et $b = 0$. Donc, pour tout réel x, on a : $f_k'(x) = k\mathrm{e}^{kx}$ et le signe de $f_k'(x)$ sera celui de k.
Pour tout réel x : Si $k < 0$ alors $f_k'(x) < 0$ et la fonction **f_k sera strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$.
Si $k > 0$ alors $f_k'(x) > 0$ et la fonction **f_k sera strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.
De plus, **toutes les courbes des fonctions f_k passent par le point de coordonnées $(0 ; 1)$, car** :
$f_k(0) = \mathrm{e}^{k\times 0} = \mathrm{e}^0 = 1$ donc **$f_k(0) = 1$ quelle que soit la valeur de la constante réelle k.**

Remarque : Si on considère une **famille de fonctions $f_k : x \longmapsto \mathrm{e}^{-kx}$ avec k réel strictement positif ...**
On utilise un des résultats précédents : **Si $k > 0$ alors $-k < 0$ donc $f_k'(x) < 0$** et la fonction **f_k sera strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$.
Et on aura aussi **toutes les courbes des fonctions f_k qui passeront par le point de coordonnées $(0 ; 1)$, car** $f_k(0) = \mathrm{e}^{-k\times 0} = \mathrm{e}^0 = 1$ donc **$f_k(0) = 1$ pour toute valeur du réel strictement positif k.**

4.3 Suites numériques de terme général e^{na} (avec a constante réelle et n entier naturel).

Propriété : Pour toute constante réelle a et tout entier naturel n, la suite (u_n) définie par son terme général $u_n = \mathrm{e}^{na}$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \mathrm{e}^a$.

Démonstration : On considère une suite numérique (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \mathrm{e}^{na}$ où a désigne une constante réelle.
On en déduit, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)a} \Rightarrow u_{n+1} = \mathrm{e}^{na+a} \Rightarrow u_{n+1} = \mathrm{e}^{na} \times \mathrm{e}^a$.
On a donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^a \times u_n$ donc (u_n) est une **suite géométrique de raison $q = \mathrm{e}^a$** et le **premier terme** est : $u_0 = \mathrm{e}^{0\times a} = \mathrm{e}^0$ donc **$u_0 = 1$**. (*cqfd*).

Remarque importante : L'étude de la fonction exponentielle nous apporte les informations suivantes :
La fonction exponentielle est **strictement croissante, strictement positive sur** $\mathbb{R}$ **et $\mathrm{e}^0 = 1$**.

Par conséquent : **Si $a < 0$ alors $0 < \mathrm{e}^a < 1$ donc la suite géométrique (u_n) de raison e^a est décroissante et converge vers 0.**
On parle de "décroissance exponentielle".
Si $a > 0$ alors $\mathrm{e}^a > 1$ donc la suite géométrique (u_n) de raison e^a est croissante et diverge vers $+\infty$.
On parle de "croissance exponentielle".

Exemple 1 :
On considère une suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $u_n = 3\mathrm{e}^{-n+2}$.

1. Démontrer que cette suite est géométrique de raison $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

2. a. Quel est le sens de variation de cette suite (u_n) ?
b. Cette suite (u_n) est-elle convergente ?

Exemple 2 :
On considère une suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = 1 + \mathrm{e}^{2n}$.

1. Démontrer que cette suite est croissante.

2. Cette suite (v_n) est-elle convergente ? Justifier.