Metrična dimenzija sosednosti

Alja Dostal in Zala Gregorc

Januar 2025

1 Uvod

Najin projekt z naslovom *Adjacency metric dimension*, prevedeno *Metrična dimenzija sosednosti*, se navezuje na projekt predhodne skupine z istim naslovom. Cilj projekta je bil raziskati metrično dimenzijo sosednosti na različnih grafih in njihovih produktih ter v kakšni zvezi sta metrična dimenzija sosednosti in metrična dimenzija.

Projekt sva delali v programu CoCalc (v programskem okolju SageMath). Za osnovno kodo sva vzeli kodo skupine A in jo prilagodili svojim potrebam. Analizo sva opravili na majhnih grafih.

Algorithm 1 Izračun metrične dimenzije sosednosti `dim_A(G)`

Require: Graf G z vozlišči V
Ensure: Metrična dimenzija sosednosti in množica S
function DIM_A(G)
  $V \leftarrow G$.vertices() ▷ Pridobimo seznam vozlišč
  $p \leftarrow$ MixedIntegerLinearProgram(maximization = False)
  $x \leftarrow p$.new_variable(binary = True) ▷ Binarne spremenljivke za vozlišča
  $\mathrm{M} \leftarrow G$.adjacency_matrix() ▷ Matrika sosednosti
  $\min\left(\sum_{v\in V} x[v]\right)$ ▷ Minimiziramo vsoto $x[v]$ za $v \in V$
  for $v \in V$ **do**
    for $w \in V$ **do**
      if $v \neq w$ **then**
        Dodaj pogoj: $\sum_{u\in V} \Big|\mathrm{M}[u][v] - \mathrm{M}[u][w]\Big| \cdot x[u] + x[v] + x[w] \geq 1$
      end if
    end for
  end for
  Reši CLP ▷ Rešimo linearni program
  $S \leftarrow \{v \in V \mid p.\text{get\_values}(x[v]) = 1\}$ ▷ Množica rešitev
  return moč množice S in S ▷ Metrična dimenzija sosednosti in S
end function

Algorithm 2 Izračun metrične dimenzije `dim(G)`

Require: Graf G z vozlišči V

Ensure: Metrična dimenzija in množica S

function DIM(G)
    $V \leftarrow G$.vertices() ▷ Pridobimo seznam vozlišč
    if $V = \emptyset$ **then** ▷ Če graf nima vozlišč
        return $(0, \emptyset)$
    end if
    razdalje $\leftarrow G$.distance_all_pairs() ▷ Izračun razdalj med vsemi pari vozlišč
    $p \leftarrow$ MixedIntegerLinearProgram(maximization = False)
    $x \leftarrow p$.new_variable(binary = True) ▷ Binarne spremenljivke za vozlišča
    $\min\Big(\sum_{v \in V} x[v]\Big)$ ▷ Minimiziramo vsoto $x[v]$ za $v \in V$
    for $v \in V$ **do**
        for $w \in V$ **do**
            if $v \neq w$ **then**
                Dodaj pogoj: $\Big(\sum_{u \in V} \Big|\text{razdalje.get}(u, \{\}).\text{get}(v, 0) - \text{razdalje.get}(u, \{\}).\text{get}(w, 0)\Big| \cdot x[u] \geq 1\Big)$
            end if
        end for
    end for
    Reši CLP ▷ Rešimo linearni program
    $S \leftarrow \{v \in V \mid p.\text{get\_values}(x[v]) = 1\}$ ▷ Množica rešitev
    return moč množice S in S ▷ Metrična dimenzija in množica S
end function

2 Grafi $dim(G) = dim_A(G)$

Prva stvar, ki naju je zanimala, je bila, za katere grafe velja $dim(G) = dim_A(G)$. Zgenerirali sva vse povezane grafe od 3 do 7 vozlišč z naslednjim algoritmom.

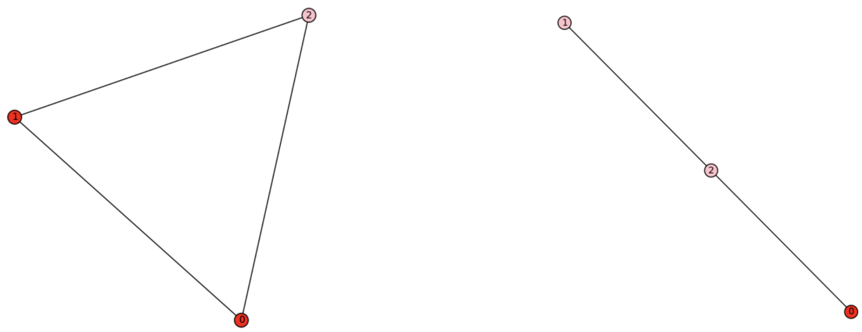
Algorithm 3 Generiranje in prikaz povezanega grafa z n vozlišči

Require: /

Ensure: Prikaži vse grafe z n vozlišči

$seznam\_grafov \leftarrow$ seznam grafov generiranih z `graphs.nauty_geng` s parametrom "n -c"
for vsak graf G v $seznam\_grafov$ **do**
    prikaži G
end for

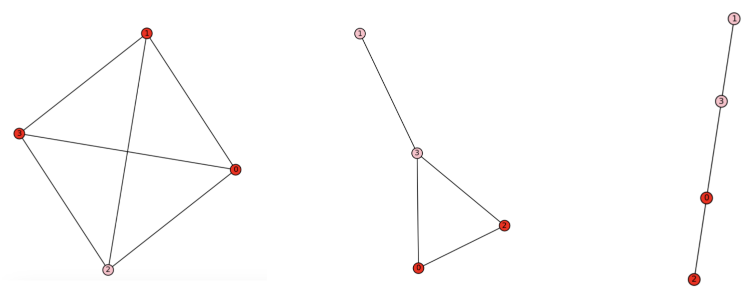
Metrična dimenzija in metrična dimenzija sosednosti sta enaki za oba povezana grafa na treh vozliščih.



Premer 1 Premer 2

Figure 1: Grafi na 3 vozliščih

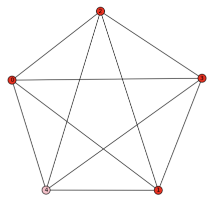
Opazili sva, da sta dimenziji enaki za vse povezane grafe na štirih vozliščih, razen za tistega s premerom 3 (pot). Pri ostalih je premer največ 2.



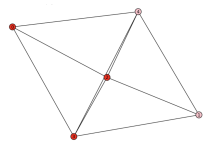
Premer 1 Premer 2 Premer 3

Figure 2: Grafi na 4 vozliščih

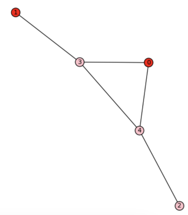
Za povezane grafe na petih vozliščih velja, da sta dimenziji enaki za vse grafe s premerom največ 3, nista pa enaki za pot, ki ima v tem primeru premer 4.



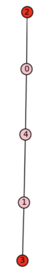
Premer 1



Premer 2



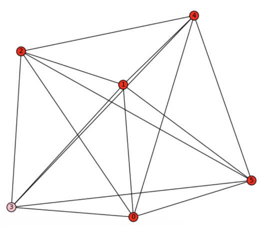
Premer 3



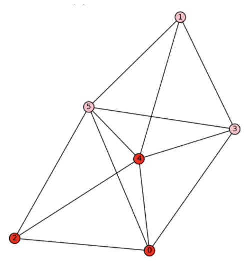
Premer 4

Figure 3: Grafi na 5 vozliščih

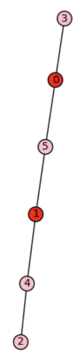
Pri povezanih grafih na šestih vozliščih lahko z gotovostjo rečemo, da enakost dimenzij velja za grafe s premerom največ 2 in ne velja za graf s premerom 5 - pot. Za grafe s premerom 3 ali 4 se odgovori razlikujejo.



Premer 1

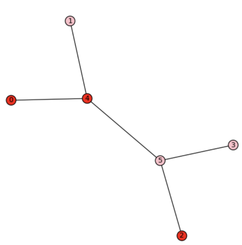


Premer 2

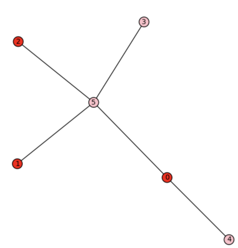


Premer 5

Figure 4: Grafi na 6 vozliščih

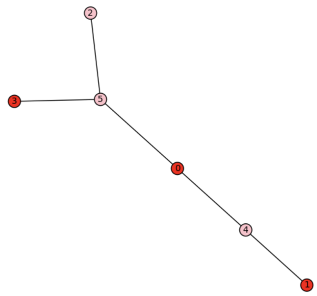


$dim(G) \neq dim_A(G)$

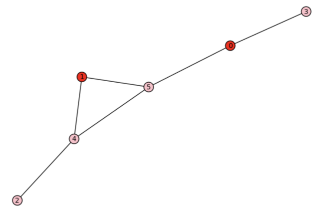


$dim(G) = dim_A(G)$

Figure 5: Grafi na 6 vozliščih s premerom 3



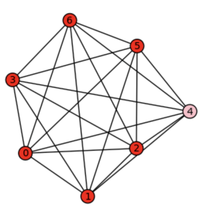
$dim(G) \neq dim_A(G)$



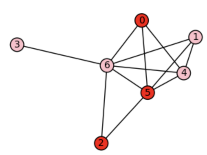
$dim(G) = dim_A(G)$

Figure 6: Grafi na 6 vozliščih s premerom 4

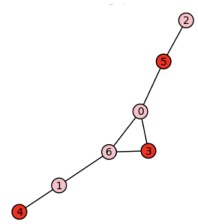
Ponovno lahko, za povezane grafe na sedmih vozliščih, rečemo da enakost med dimenzijama velja za grafe s premerom 2 in zagotovo ne velja za grafe s premerom 6 (pot). Opazimo tudi da ne velja za grafe s premerom 5. Za grafe s premerom 3 oziroma 4 pa se odgovori ponovno razlikujejo. Značilnosti, kdaj velja oziroma ne velja, za grafe s premerom 3 in 4 nisva opazili.



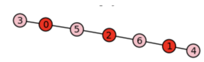
Premer 1



Premer 2

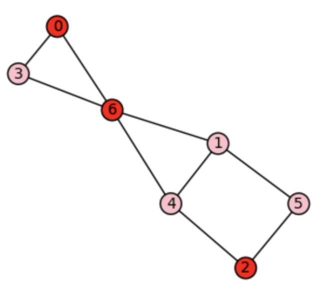


Premer 5

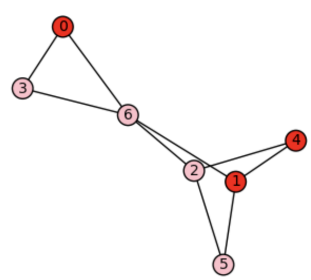


Premer 6

Figure 7: Grafi na 7 vozliščih

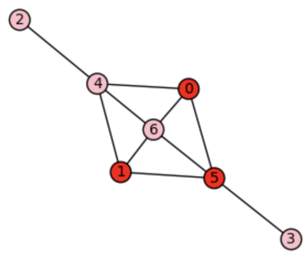


$dim(G) \neq dim_A(G)$

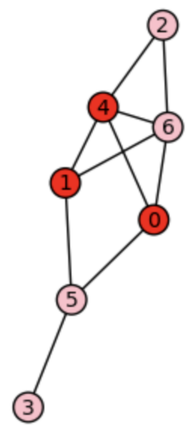


$dim(G) = dim_A(G)$

Figure 8: Grafi na 7 vozliščih s premerom 3



$dim(G) \neq dim_A(G)$



$dim(G) = dim_A(G)$

Figure 9: Grafi na 7 vozliščih s premerom 4

V splošnem zdaj že lahko rečemo, da sta metrična dimenzija in metrična dimenzija sosednosti za graf z n vozlišči zagotovo enaki za grafe s premerom največ 2, nista pa enaki za poti, to pomeni za graf s premerom $n-1$ (za $n > 3$).

Za tem sva se lotili iskanja naključnih povezanih grafov s spodnjim algoritmom. Iskali sva grafe z določenim številom vozlišč (8 do 12) za različne verjetnosti. Opazovali sva premere.

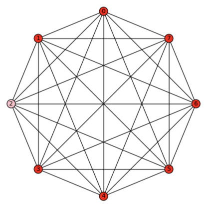
Algorithm 4 Generiranje naključnega povezanega grafa

Require: št_vozlišč, verjetnost
Ensure: Povezan graf G

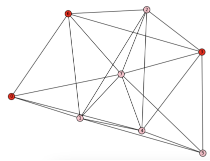
function NAKLJUCNI_GRAF(G)
    while True **do**
        $G \leftarrow$ naključni graf s št_vozlišč in verjetnostjo povezave p (`RandomGNP`)
        if G je povezan **then return** G
        end if
    end while
end function

Naključne grafe, ki sva jih uporabili najdemo v mapi "NAKLJUČNI GRAFI".

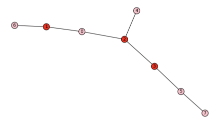
Za grafe na 8 vozliščih s premerom 6 nisva našli grafa, za katerega bi enakost veljala. Sicer pa velja zgornja ugotovitev, da enakost velja za grafe s premerom največ 2 in ne velja za grafe s premerom 7. Za grafe s premerom 3, 4 ali 5 lahko najdemo grafe, za katere enakost velja in grafe, za katere ne velja.



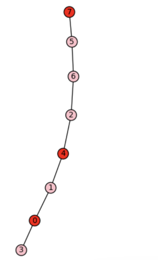
Premer 1



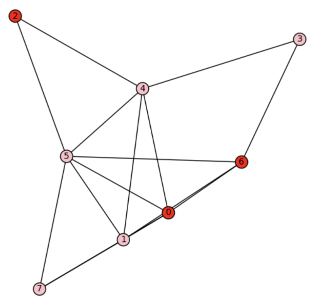
Premer 2



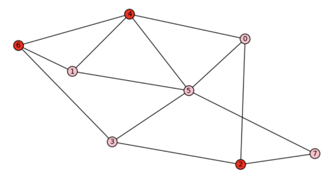
Premer 6



Premer 7

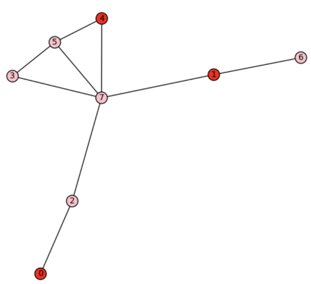


$dim(G) = dim_A(G)$

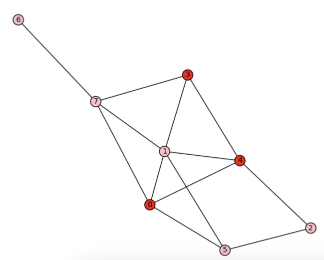


$dim(G) \neq dim_A(G)$

Figure 10: Grafi na 8 vozliščih s premerom 3

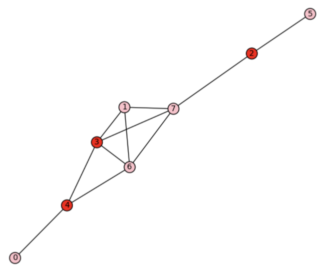


$dim(G) = dim_A(G)$

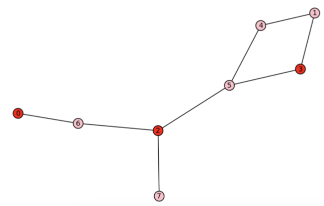


$dim(G) \neq dim_A(G)$

Figure 11: Grafi na 8 vozliščih s premerom 4



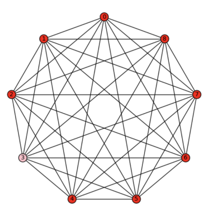
$dim(G) = dim_A(G)$



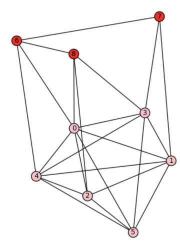
$dim(G) \neq dim_A(G)$

Figure 12: Grafi na 8 vozliščih s premerom 5

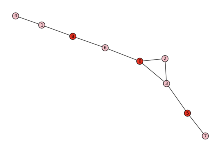
Za grafe na 9 vozliščih s premerom 7 nisva našli grafa, za katerega bi enakost veljala. Sicer pa velja zgornja ugotovitev, da enakost velja za grafe s premerom največ 2 in ne velja za grafe s premerom 8. Za grafe s premerom 3, 4, 5 ali 6 lahko najdemo grafe, za katere enakost velja in grafe, za katere ne velja.



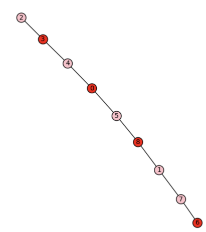
Premer 1



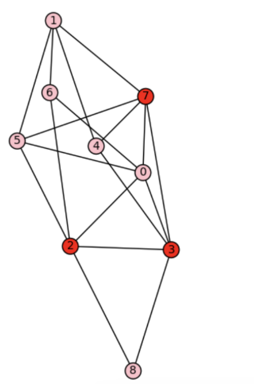
Premer 2



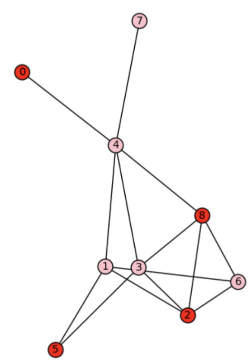
Premer 7



Premer 8

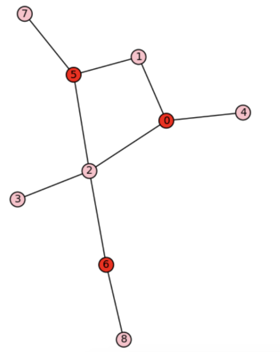


$dim(G) = dim_A(G)$

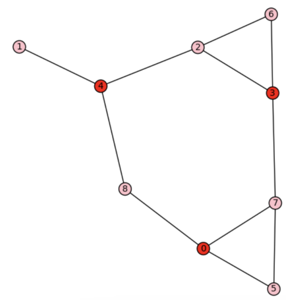


$dim(G) \neq dim_A(G)$

Figure 13: Grafi na 9 vozliščih s premerom 3

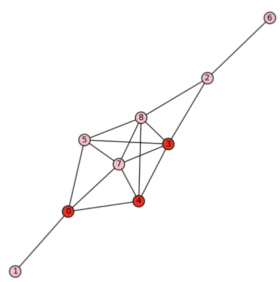


$dim(G) = dim_A(G)$

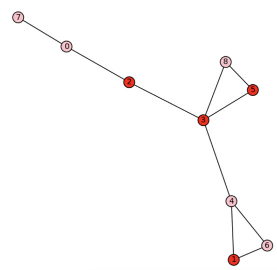


$dim(G) \neq dim_A(G)$

Figure 14: Grafi na 9 vozliščih s premerom 4

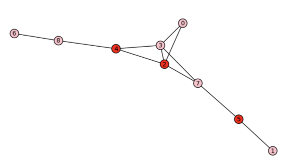


$dim(G) = dim_A(G)$

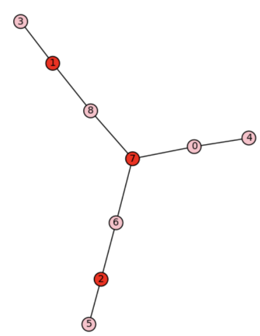


$dim(G) \neq dim_A(G)$

Figure 15: Grafi na 9 vozliščih s premerom 5



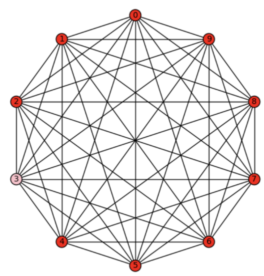
$dim(G) = dim_A(G)$



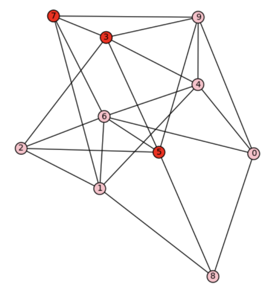
$dim(G) \neq dim_A(G)$

Figure 16: Grafi na 9 vozliščih s premerom 6

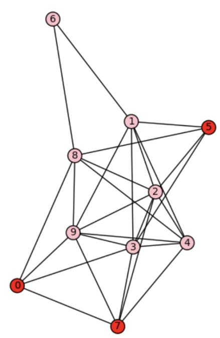
Za grafe na 10 vozliščih s premerom 6, 7 ali 8 nisva našli grafa, za katerega bi enakost veljala. Sicer pa velja zgornja ugotovitev, da enakost velja za grafe s premerom največ 2 in ne velja za grafe s premerom 9. Za grafe s premerom 3, 4 ali 5 lahko najdemo grafe, za katere enakost velja in grafe, za katere ne velja.



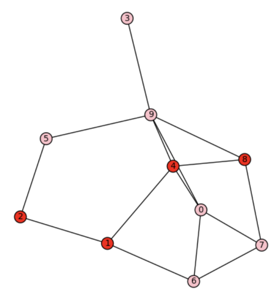
Premer 1



Premer 2

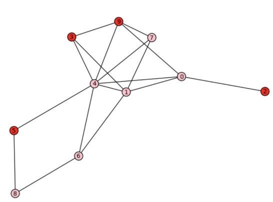


$dim(G) = dim_A(G)$

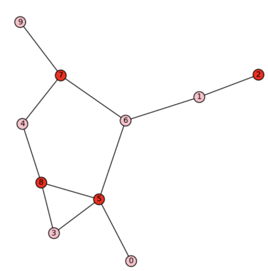


$dim(G) \neq dim_A(G)$

Figure 17: Grafi na 10 vozliščih s premerom 3

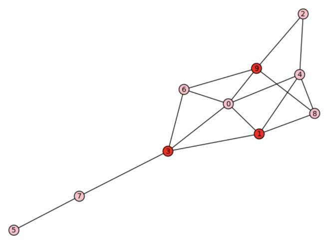


$dim(G) = dim_A(G)$

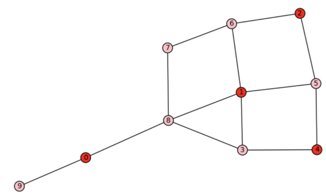


$dim(G) \neq dim_A(G)$

Figure 18: Grafi na 10 vozliščih s premerom 4

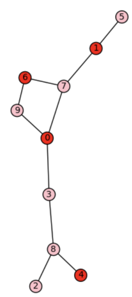


$dim(G) = dim_A(G)$

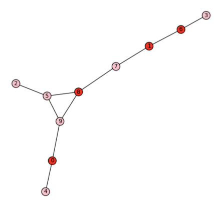


$dim(G) \neq dim_A(G)$

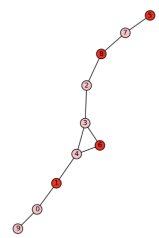
Figure 19: Grafi na 10 vozliščih s premerom 5



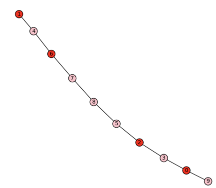
Premer 6



Premer 7

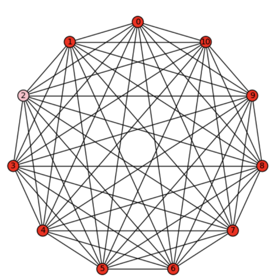


Premer 8

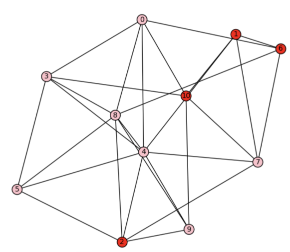


Premer 9

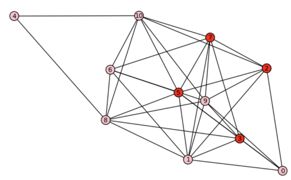
Za grafe na 11 vozliščih s premerom 6, 7, 8 ali 9 nisva našli grafa, za katerega bi enakost veljala. Sicer pa velja zgornja ugotovitev, da enakost velja za grafe s premerom največ 2 in ne velja za grafe s premerom 10. Za grafe s premerom 3, 4 ali 5 lahko najdemo grafe, za katere enakost velja in grafe, za katere ne velja.



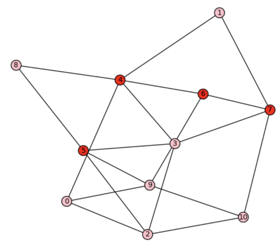
Premer 1



Premer 2

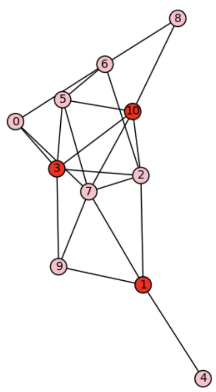


$dim(G) = dim_A(G)$

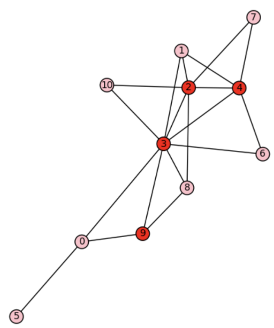


$dim(G) \neq dim_A(G)$

Figure 20: Grafi na 11 vozliščih s premerom 3

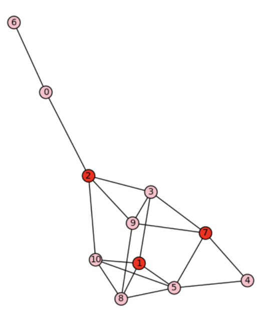


$dim(G) = dim_A(G)$

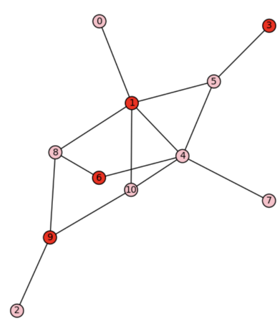


$dim(G) \neq dim_A(G)$

Figure 21: Grafi na 11 vozliščih s premerom 4

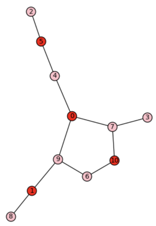


$dim(G) = dim_A(G)$

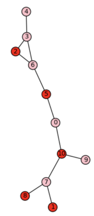


$dim(G) \neq dim_A(G)$

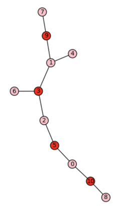
Figure 22: Grafi na 11 vozliščih s premerom 5



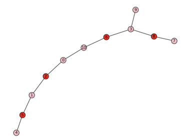
Premer 6



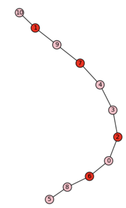
Premer 7



Premer 8

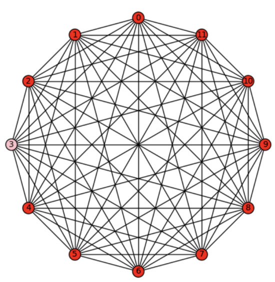


Premer 9

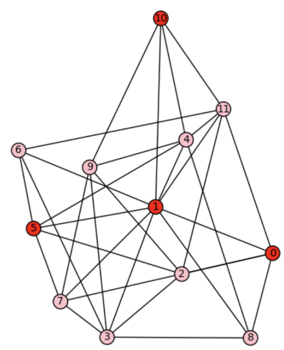


Premer 10

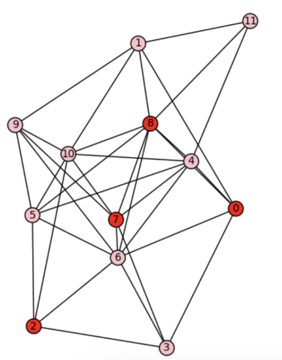
Za grafe na 12 vozliščih s premerom 6, 8, 9 ali 10 nisva našli grafa, za katerega bi enakost veljala. Sicer pa velja zgornja ugotovitev, da enakost velja za grafe s premerom največ 2 in ne velja za grafe s premerom 11. Za grafe s premerom 3, 4, 5 ali 7 lahko najdemo grafe, za katere enakost velja in grafe, za katere ne velja.



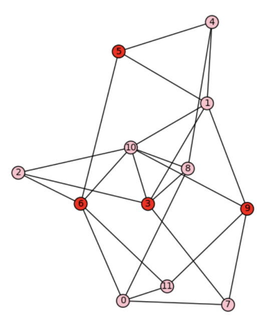
Premer 1



Premer 2

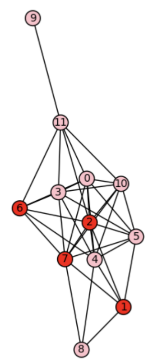


$dim(G) = dim_A(G)$

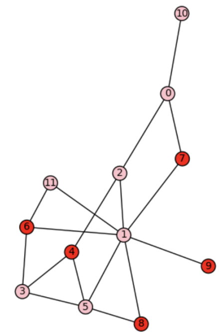


$dim(G) \neq dim_A(G)$

Figure 23: Grafi na 12 vozliščih s premerom 3

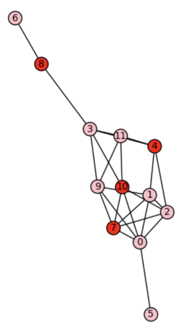


$dim(G) = dim_A(G)$

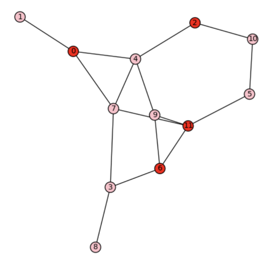


$dim(G) \neq dim_A(G)$

Figure 24: Grafi na 12 vozliščih s premerom 4

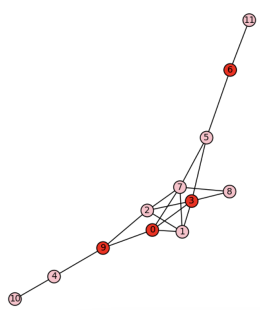


$dim(G) = dim_A(G)$

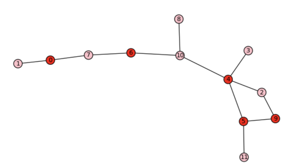


$dim(G) \neq dim_A(G)$

Figure 25: Grafi na 12 vozliščih s premerom 5

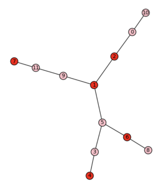


$dim(G) = dim_A(G)$

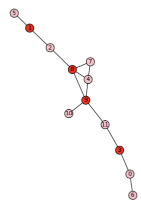


$dim(G) \neq dim_A(G)$

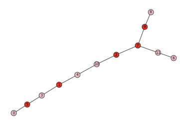
Figure 26: Grafi na 12 vozliščih s premerom 7



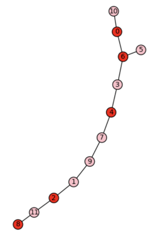
Premer 6



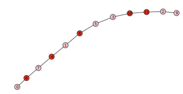
Premer 8



Premer 9

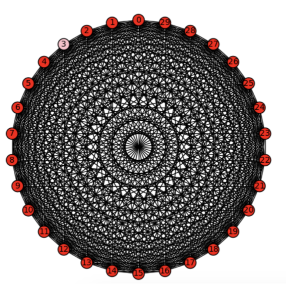


Premer 10

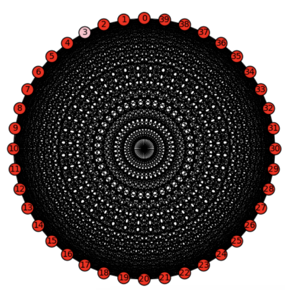


Premer 11

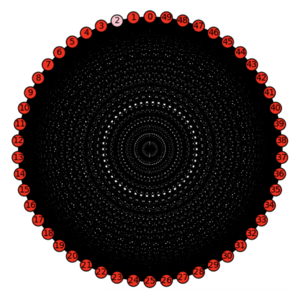
Opazili sva, da enakost velja za grafe s premerom 1. Za njih velja, da imajo verjetnost povezav $p = 1$. To sva želeli preveriti, zato sva preverili še za večje grafe. Za vse polne grafe enakost velja.



30 vozlišč



40 vozlišč



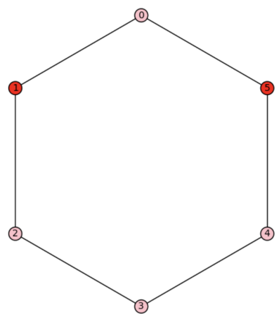
50 vozlišč

Na podlagi preizkusov lahko potrdiva, da sta metrična dimenzija in metrična dimenzija sosednosti za graf z n vozlišči zagotovo enaki za grafe s premerom največ 2, nista pa enaki za poti, to pomeni za graf s premerom $n-1$. Za grafe s premeri med 3 in n težko rečemo, za katere enakost velja in za katere ne.

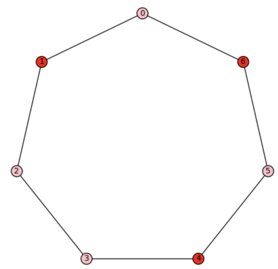
Ker je iz tovrstne metode težko razbrati značilnosti grafov, za katere enakost velja oziroma ne velja in nisva opazili nobenih posebnih lastnosti, sva se odločili preveriti še na posameznih družinah grafov. Grafe, na katerih sva opravili analizo, so v mapi "DRUŽINE GRAFOV".

Izbrali sva naslednje družine grafov: dvodelne grafe, ciklične grafe, 2d mrežne grafe, zvezde in kolesa.

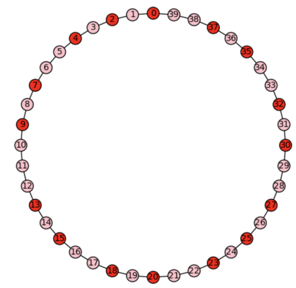
Za vse **ciklične grafe** do šest vozlišč (vključno s šest) enakost velja, za večje cikle pa ne.



$n = 6$

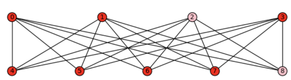


$n = 7$

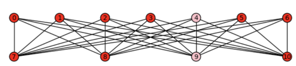


$n = 40$

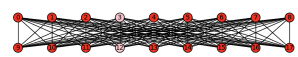
Za **polne dvodelne grafe** velikosti n, m, kjer n in m pretečeta od tri do devet, sta dimenziji enaki.



$n = 4$, $m = 5$

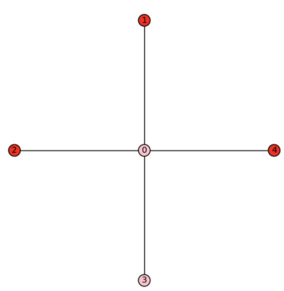


$n = 7$, $m = 4$

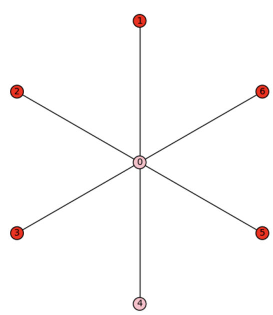


$n = 9$, $m = 9$

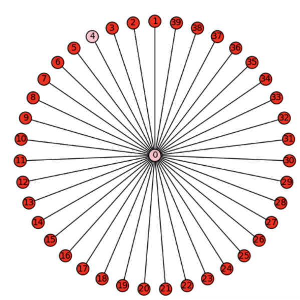
Ker so **zvezdasti grafi** vrsta dvodelnih grafov, ni presenetljivo, da enakost za grafe velikosti od tri do deset vozlišč velja. To sva preverili še za grafe s tridesetimi in štiridesetimi vozlišči, tudi za te enakost velja.



$n = 5$

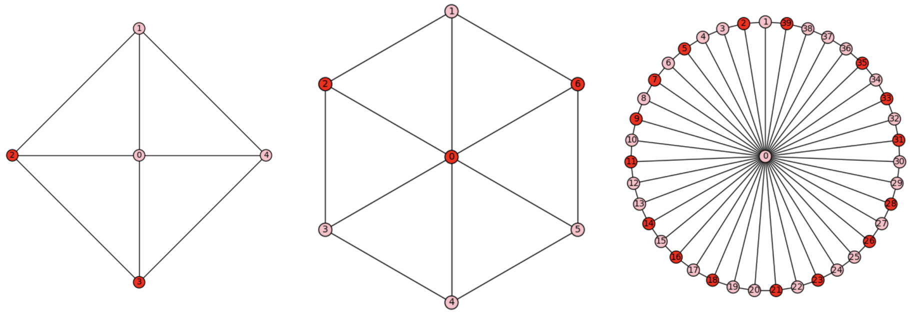


$n = 7$



$n = 40$

Za **kolesa** enakost prav tako velja za grafe velikosti od tri do deset vozlišč. Enako kot prej sva to preverili še za grafe velikosti do štirideset vozlišč, tudi za njih enakost velja.



$n = 5$ $n = 7$ $n = 40$

Za **2d mrežne grafe** enakost v splošnem ne velja.

3 Grafi in njihovi produkti

Zanimali sta naju metrična dimenzija sosednosti in metrična dimenzija karteizičnih, direktnih in krepkih produktov mrežnih ter torusnih mrežnih grafov. Vsi grafi, na katerih sva opravili analizo, so v mapi "GRAFI PRODUKTOV".

Najprej si poglejmo kodi, s katerimi sva definirali mrežni graf in torusni mrežni graf.

Algorithm 5 Generiraj mrežni graf kot kartezični produkt dveh poti

---

Require: n (dolžina prve poti), m (dolžina druge poti)
Ensure: mrežni graf

```
function MREŽNI_GRAF(M)
    P1 ← PathGraph(n)
    P2 ← PathGraph(m)
    Print Metrična dimenzija sosednosti prve poti: dim_A(P1)
    Print Metrična dimenzija sosednosti druge poti: dim_A(P2)
    M ← P1.cartesian_product(P2)
    return M
end function
```

Algorithm 6 Generiraj torusni mrežni graf kot kartezični produkt dveh ciklov

Require: n (dolžina prvega cikla), m (dolžina drugega cikla)
Ensure: torusni mrežni graf

```
function TORUSNI_MREŽNI_GRAF(T)
    C1 ← CycleGraph(n)
    C2 ← CycleGraph(m)
    Print Metrična dimenzija sosednosti prvega cikla: dim_A(C1)
    Print Metrična dimenzija sosednosti drugega cikla: dim_A(C2)
    T ← C1.cartesian_product(C2)
    return T
end function
```

Zgenerirali sva dva mrežna grafa oziroma dva torusna mrežna grafa $G1$ in $G2$ ter izračunali njune produkte. Pri tem sva uporabili majhne grafe. Osnovni grafi (poti in cikli), ki sva jih potem množili, so velikosti do štiri vozlišča. Sami produkti pa do šestintrideset vozlišč.

Kartezični produkt: $H1 = G1$.cartesian_product($G2$)
Direktni produkt: $H2 = G1$.tensor_product($G2$)
Krepki produkt: $H3 = G1$.strong_product($G2$)

Izračunali sva njihovo metrično dimenzijo sosednosti in metrično dimenzijo. Produkte sva naredili na dveh grafih velikosti 2×2, dveh grafih velikosti 2×3 ter na grafih velikosti 2×2 in 2×3.

Metrično dimenzijo in metrično dimenzijo sosednosti produktov sva primerjali med seboj in z metrično dimenzijo ter metrično dimenzijo sosednosti faktorjev.

Za mrežne grafe sva opazili naslednje. Rezultati so prikazani v tabeli, kjer z *dim* označujemo metrično dimenzijo, z dim_A pa metrično dimenzijo sosednosti.

Grafi		**Prvi faktor**		**Drugi faktor**		**Kartezični produkt**		**Direktni produkt**		**Krepki produkt**	
M_1	M_2	$\dim(G_1)$	$\dim_A(G_1)$	$\dim(G_2)$	$\dim_A(G_2)$	$\dim(H_1)$	$\dim_A(H_1)$	$\dim(H_2)$	$\dim_A(H_2)$	$\dim(H_3)$	$\dim_A(H_3)$
2×2	2×2	2	2	2	2	4	6	12	12	5	5
2×2	2×3	2	2	2	2	4	7	12	12	5	6
2×3	2×3	2	2	2	2	4	11	12	12	5	7

Table 1: Primerjava metričnih dimenzij in metričnih dimenzij sosednosti mrežnih grafov ter njihovih produktov.

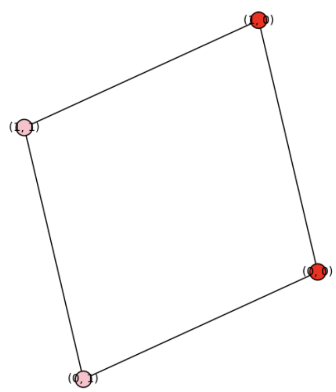
Pri produktih so (to lahko opazimo že pri kartezičnem produktu poti, s katerimi sva generirali mrežne grafe) metrične dimenzije sosednosti vhodnih grafov vedno manjše od njunih produktov.

Pri kartezičnem produktu je poleg tega je mogoče opaziti, da večji kot so faktorji, večja ali enaka je metrična dimenzija sosednosti. Metrična dimenzija je ostala za vsak kartezični produkt, ne glede na faktor, enaka. Ni pa opaziti kakšnih vzorcev, ki bi veljali med dimenzijami faktorjev in produktov. Podobno velja za krepki produkt.

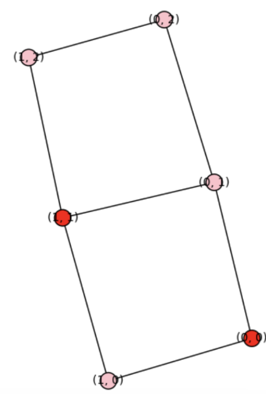
V primeru direktnega produkta mrežnih grafov, sta dimenziji med seboj enaki in za vse faktorje so enake vrednosti. Vendar nam to ničesar ne pove, saj bi morali hipoteze, kot je ta, da se enakost med metrično dimenzijo in metrično dimenzijo sosednosti ohranja s produktom, preveriti na več grafih, predvsem pa na večjih.

Primer za produkte mrežnih grafov 2×2 in 2×3:

Mrežna grafa:

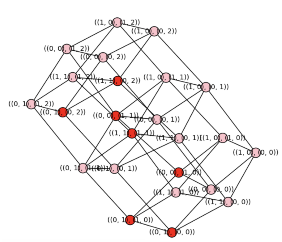


Mrežni graf 2×2

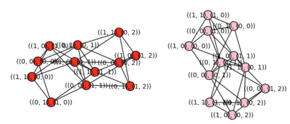


Mrežni graf 2×3

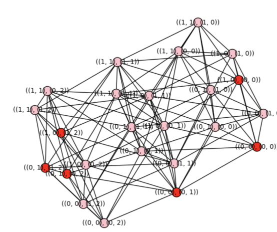
Produkti:



Kartezični produkt



Direktni produkt



Krepki produkt

Za torusne mrežne grafe veljajo podobne ugotovitve kot za mrežne grafe. Rezultati so prikazani v tabeli, kjer z dim označujemo metrično dimenzijo, z dim_A pa metrično dimenzijo sosednosti.

Grafi		**Prvi faktor**		**Drugi faktor**		**Kartezični produkt**		**Direktni produkt**		**Krepki produkt**	
M_1	M_2	$\dim(G_1)$	$\dim_A(G_1)$	$\dim(G_2)$	$\dim_A(G_2)$	$\dim(H_1)$	$\dim_A(H_1)$	$\dim(H_2)$	$\dim_A(H_2)$	$\dim(H_3)$	$\dim_A(H_3)$
2×2	2×2	2	2	2	2	4	6	12	12	5	5
2×2	2×3	2	2	2	2	3	7	12	12	5	5
2×3	2×3	2	2	2	2	4	10	6	8	7	7

Table 2: Primerjava metričnih dimenzij in metričnih dimenzij sosednosti torusnih mrežnih grafov ter njihovih produktov.

Pri produktih torusnih mrežnih grafov sva ugotovili enako, kot pri produktih mrežnih grafov, da se metrične dimenzije in metrične dimenzije sosednosti povečajo.

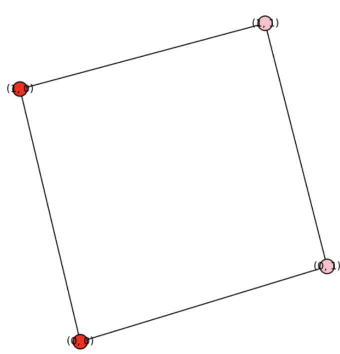
Pri kartezičnem produktu torusnih mrežnih grafov se metrične dimenzije produktov spreminjajo glede na faktor, kar se ni zgodilo pri mrežnih grafih. Drugače veljajo enake ugotovitve. Tudi tu ni opaziti kakšnih vzorcev, ki bi veljali med dimenzijami faktorjev in produktov.

Pri direktnem produktu torusnih mrežnih grafov nisva ničesar opazili.

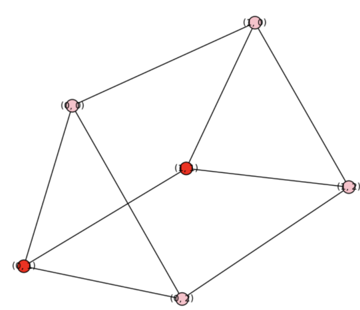
V primeru krepkega produkta sta dimenziji med seboj enaki, vendar se glede na faktor vrednosti dimenzij razlikujejo. Enako kot prej velja, da bi morali hipoteze, kot je ta, da velja enakost med metrično dimenzijo in metrično dimenzijo sosednosti za krepke produkte torusnih mrežnih grafov, preveriti na več večjih grafih.

Primer za produkte torusnih mrežnih grafov 2×2 in 2×3:

Torusna mrežna grafa:

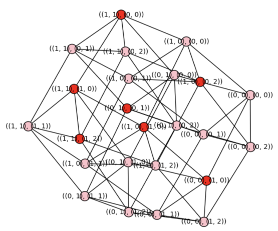


Torusni mrežni graf 2×2

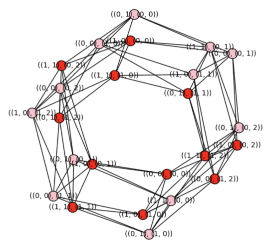


Torusni mrežni graf 2×3

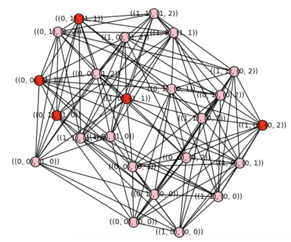
Produkti:



Kartezični produkt



Direktni produkt



Krepki produkt

4 Razmerje med $dim(G)$ in $dim_A(G)$

Ugotoviti sva želeli, če obstaja kakšna konstanta c, da za metrične dimenzije velja $\dim_A(G) \leq c \dim(G)$.

Algorithm 7 Izračun razmerja med dim(G) in $\dim_A$(G)

function TEST_GRAF(g)
    metricna $\leftarrow$ dim(g)[0]
    metricna_sosednosti $\leftarrow$ dim_A(g)[0]
    if dim > 0 **then**
        razmerje $\leftarrow$ metricna_sosednosti/metricna
    else
        razmerje $\leftarrow \infty$
    end if
    return metricna, metricna_sosednosti, razmerje
end function

To sva testirali na naključnih grafih s tri do trideset vozlišči.

Algorithm 8 Izračun maksimalnega razmerja

max_razmerje $\leftarrow$ 0
for n = 3,. . . ,30 **do**
    $G \leftarrow$ nakljucni_graf(n, p)
    (metricna, metricna_sosednosti, razmerje) $\leftarrow$ test_graf(G)
    max_razmerje $\leftarrow$ max(max_razmerje, razmerje)
end for

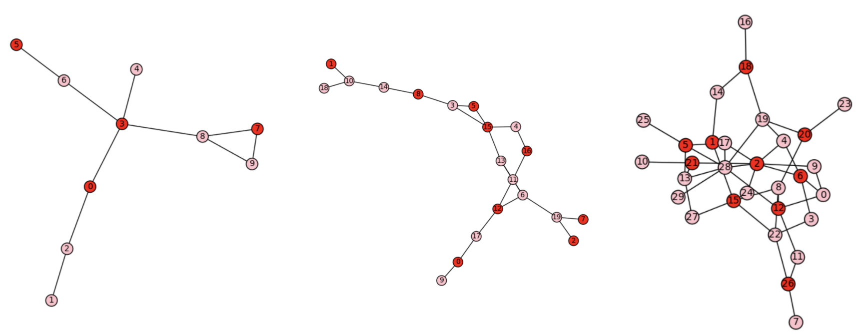
Iz vzorcev sva opazili, da več kot je povezav, bolj se to razmerje približuje ena oziroma je 1, za grafe z vsemi povezavami ($p = 1$). To ni presenetljivo, saj sva že prej ugotovili, da za polne grafe enakost med metrično dimenzijo sosednosti in metrično dimenzijo velja. Z manjšo verjetnostjo povezav se je ta konstanta večala.

Za posamezno verjetnost povezave sva generirali naključne grafe s tri do trideset vozlišči in to ponovili desetkrat. Nato sva izračunali povprečje maksimalnih razmerij. V spodnji tabeli so prikazani rezultati za posamezno verjetnost.

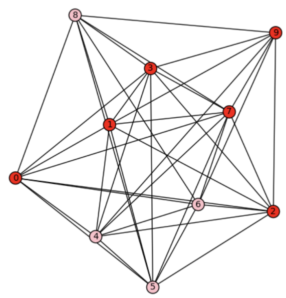
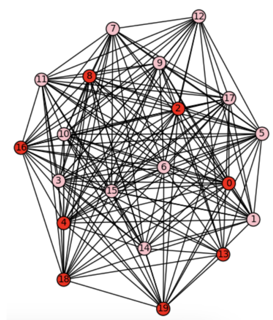
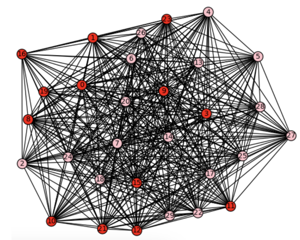
p	max vrednost
0.1	3.72
0.2	2.38
0.3	1.85
0.4	1.72
0.5	1.62
0.6	1.33
0.7	1.10
0.8	1.05
0.9	1.00
1	1.00

Iz dobljenih rezultatov lahko rečemo, da je za grafe z malo povezavami zgornja meja štiri. Za polne grafe oziroma grafe z veliko povezavami je konstanta ena, kar pa pomeni, da sta dimenziji enaki.

Primeri grafov za $p = 0.1$ z 10, 20 in 30 vozlišči:



Primeri grafov za $p = 0.9$ z 10, 20 in 30 vozlišči:

5 Zaključek

V nalogi sva ugotovili, da v splošnem za grafe težko rečemo, če za njih velja enakost metrične dimenzije in metrične dimenzije sosednosti. Zagotovo vemo, da enakost velja za grafe s premerom največ 2, ne pa za poti strogo daljše od treh vozlišč. Kljub temu, da za večino zgeneriranih naključnih grafov to velja, težko najdemo vzorce, da bi to lahko povezali s celotno družino grafov. Ugotovili sva, da produkti kvečjemu povečajo metrično dimenzijo sosednosti, ni pa opaziti drugih vzorcev. Glede na rezultate eksperimentov lahko rečemo, da lahko metrično dimenzijo sosednosti navzgor omejimo s produktom števila 4 in metrične dimenzije.