Metrična dimenzija sosednosti - B

Alja Dostal in Zala Gregorc

December 2024

1 Uvod

Pri projektu se bova ukvarjali z metrično dimenzijo sosednosti na različnih grafih. Pri tem si bova pomagali s kodo za celoštevilski linearni program, ki ga je napisala skupina A. Kodo bova prilagajali lastnostim različnih grafov.

Privzemimo, da je $G = (V, E)$ neusmerjen povezan graf, kjer je $V(G)$ množica vozlišč in $E(G)$ množica povezav. Za $u, v \in V(G)$ definiramo spremenljivko:

$$n_{u,v} = \begin{cases} 1, & \text{če } uv \in E(G) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

CLP je oblike:

$$\min \sum_{v \in V(G)} x_v$$

$$\text{p.p.} \sum_{u \in V(G)} \mid n_{u,v} - n_{u,w} \mid \cdot x_u + x_v + x_w \geq 1, \, \forall v, w \in V(G)$$

$$x_v \in \{0, 1\}, \, \forall v \in V(G)$$

2 Definicije in pojmi

V tem poglavju bova opisali nekaj pojmov in definicij, ki jih bova uporabljali v nalogi.

Definicija: Za dve vozlišči $u, v \in V(G)$ je razdalja $d(u, v)$ število povezav na najkrajši poti med u in v. Množica vozlišč $S \subseteq V(G)$ je rešljiva množica za graf G, če za vsaki različni vozlišči $u, v \in V(G)$ velja, da obstaja vsaj eno vozlišče $w \in S$, za katerega je $d(w, u) \neq d(w, v)$. To pomeni, da lahko z razdaljami do vozlišč v množici S enolično identificiramo vsako vozlišče G. **Metrična dimenzija** grafa G, označena kot $\dim(G)$, je moč najmanjše rešljive množica.

Definicija: Množica $S \subseteq V(G)$ je rešljiva množica za sosedstva, če za poljubni dve vozlišči $u, v \in V(G)$, kjer u in v nimata enakega sosedstva, za $w \in S$ velja $d(w, u) \neq d(w, v)$. Moči najmanjše množice S pravimo **metrična dimenzija sosednosti** in jo označimo z $\dim_A(G)$.

Tu se namesto na individualna vozlišča osredotočamo na sosedstvo vozlišč.

Definicija: V teoriji grafov je **kartezični produkt** $G \square H$ grafov G in H, graf definiran na kartezičnem produktu množice vozlišč $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$, $u \in V(G)$, $v \in V(H)$ in na množici povezav $E(G \square H)$, ki je množica vseh parov povezav u_1v_1 in u_2v_2, za katere je $v_1 = v_2$ in $u_1u_2 \in E(G)$ ali $u_1 = u_2$ in $v_1v_2 \in E(H)$.

Definicija: Direktni produkt $G \times H$ grafov G in H je graf definiran na kartezičnem produktu množice vozlišč $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$, $u \in V(G)$, $v \in V(H)$ in na množici povezav $E(G \times H)$, ki je množica vseh parov povezav u_1v_1 in u_2v_2, za katere velja $u_1u_2 \in E(G)$ in $v_1v_2 \in E(H)$.

Definicija: Močan produkt $G \boxtimes H$ grafov G in H je graf definiran na kartezičnem produktu množice vozlišč $V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H)$, $u \in V(G)$, $v \in V(H)$ in na množici povezav $E(G \boxtimes H)$, pri čemer za povezavi u_1v_1 in u_2v_2 velja vsaj eden od naslednjih pogojev: $v_1 = v_2$ in $u_1u_2 \in E(G)$ ali $u_1 = u_2$ in $v_1v_2 \in E(H)$ ali $u_1u_2 \in E(G)$ in $v_1v_2 \in E(H)$.

Močan produkt torej združuje značilnosti kartezičnega in direktnega produkta.

Definicija: Mrežni graf G je graf definiran z množico vozlišč $V(G) = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ in povezav $E(G)$, pri čemer je vozlišče (i, j) povezano z $(i + 1, j)$, če $i + 1 \leq m$ in z $(i, j + 1)$, če $j + 1 \leq n$, za $i, j \in \mathbb{Z}$.

Torusni mrežni graf je posebna vrsta mrežnega grafa, kjer so robovi mreže povezani tako, da tvorijo torus. Dobimo ga tako, da mrežnemu grafu dodamo povezave med robovi, ki so med seboj nasprotni, tako po vrsticah kot po stolpcih.

3 Opis problema

Najina prva naloga je, da primerjava standardno metrično dimenzijo $\dim(G)$ z metrično dimenzijo sosednosti $\dim_A(G)$ in poiščeva grafe, kjer sta si enaki.

Druga naloga je, da to metriko preizkusiva na različnih produktih grafov. Bolj natančno, analizirali bova obnašanje na kartezičnih, močnih in direktnih produktih. Predvsem se bova osredotočili na mrežne grafe in torusne mrežne grafe.

Saj v splošnem velja $\dim(G) \leq \dim_A(G)$, bova nazadnje poskusili najti obstoječo konstanto c, da velja $\dim_A(G) \leq c \dim(G)$. Zanima naju torej omejenost $\dim_A(G)$ glede na standardno metrično dimenzijo $\dim(G)$ za vsak graf G.