# Metrična dimenzija sosednosti

Alja Dostal in Zala Gregorc

Januar 2025

## 1 Uvod

Najin projekt z naslovom *Adjacency metric dimension* prevedeno *Metrična dimenzija sosednosti*, se navezuje na projekt predhodne skupine z istim naslovom. Cilj projekta je bil raziskati metrično dimenzijo sosednosti na različnih grafih in njihovih produktih ter v kakšni zvezi sta metrična dimenzija sosednosti in metrična dimenzija.

Projekt sva delali v programu CoCalc (v programskem okolju SageMath). Za osnovno kodo sva vzeli kodo skupine A in jo prilagodili svojim potrebam. Analizo sva opravili na majhnih grafih.

**Algorithm 1** Izračun metrične dimenzije sosednosti `dim_A(G)`

**Require:** Graf $G$ z vozlišči $V$
**Ensure:** Metrična dimenzija sosednosti in množica $S$

**function** DIM_A($G$)
    $V \leftarrow G$.vertices() ▷ Pridobimo seznam vozlišč
    $p \leftarrow$ MixedIntegerLinearProgram(maximization = False)
    $x \leftarrow p$.new_variable(binary = True) ▷ Binarne spremenljivke za vozlišča
    M $\leftarrow G$.adjacency_matrix() ▷ Matrika sosednosti
    $\min\Big(\sum_{v \in V} x[v]\Big)$ ▷ Minimiziramo vsoto $x[v]$ za $v \in V$
    **for** $v \in V$ **do**
        **for** $w \in V$ **do**
            **if** $v \neq w$ **then**
                Dodaj pogoj: $\sum_{u \in V} \Big| \mathrm{M}[u][v] - \mathrm{M}[u][w] \Big| \cdot x[u] + x[v] + x[w] \geq 1$
            **end if**
        **end for**
    **end for**
    Reši CLP ▷ Rešimo linearni program
    $S \leftarrow \{v \in V \mid p.\text{get\_values}(x[v]) = 1\}$ ▷ Množica rešitev
    **return** moč množice $S$ in $S$ ▷ Metrična dimenzija sosednosti in $S$
**end function**

**Algorithm 2** Izračun metrične dimenzije `dim(G)`

**Require:** Graf $G$ z vozlišči $V$
**Ensure:** Metrična dimenzija in množica $S$

**function** DIM($G$)
  $V \leftarrow G$.vertices() ▷ Pridobimo seznam vozlišč
  **if** $V = \emptyset$ **then** ▷ Če graf nima vozlišč
    **return** $(0, \emptyset)$
  **end if**
  razdalje $\leftarrow G$.distance_all_pairs() ▷ Izračun razdalj med vsemi pari vozlišč
  $p \leftarrow$ MixedIntegerLinearProgram(maximization = False)
  $x \leftarrow p$.new_variable(binary = True) ▷ Binarne spremenljivke za vozlišča
  $\min\left(\sum_{v \in V} x[v]\right)$ ▷ Minimiziramo vsoto $x[v]$ za $v \in V$
  **for** $v \in V$ **do**
    **for** $w \in V$ **do**
      **if** $v \neq w$ **then**
        Dodaj pogoj: $\left(\sum_{u \in V} \left| \text{razdalje.get}(u, \{\}).\text{get}(v, 0) - \text{razdalje.get}(u, \{\}).\text{get}(w, 0) \right| \cdot x[u] \geq 1\right)$
      **end if**
    **end for**
  **end for**
  Reši CLP ▷ Rešimo linearni program
  $S \leftarrow \{v \in V \mid p.\text{get\_values}(x[v]) = 1\}$ ▷ Množica rešitev
  **return** moč množice $S$ in $S$ ▷ Metrična dimenzija in množica $S$
**end function**

## 2 Grafi $dim(G) = dim_A(G)$

Prva stvar, ki naju je zanimala, je bilo, za katere grafe velja $dim(G) = dim_A(G)$. Zgenerirali sva naključne grafe z verjetnostjo vsake povezave $p = 0.5$. Če nastali graf ni bil povezan, sva ga izločili.

**Algorithm 3** Generiranje naključnega povezanega grafa

**Require:** št_vozlišč, verjetnost $p = 0.5$
**Ensure:** Povezan graf $G$

**function** NAKLJUCNI_GRAF($G$)
  **while** True **do**
    $G \leftarrow$ naključni graf s št_vozlišč in verjetnostjo povezave $p$ (`RandomGNP`)
    **if** $G$ je povezan **then return** $G$
    **end if**
  **end while**
**end function**

Enakost metrične dimenzije in metrične dimenzije sosednosti sva preizkusili na naključnih grafih ter opazili, da enakost ne velja za poti daljše od treh vozlišč. Naključne grafe, ki sva jih uporabili najdemo v mapci "NAKLJUČNI GRAFI".

Poleg tega sva opazili, da enakost velja za grafe z vsemi povezavami, drugače imenovane polne grafe. To sva želeli preveriti, zato sva nastavili verjetnost povezav na $p = 1$, da sva dobili le polne grafe ter preverili za graf velikosti petdeset. Za vse enakost velja.

Ker je iz tovrstne metode težko razbrati značilnosti grafov, za katere enakost velja oziroma ne velja in nisva opazili nobenih posebnih lastnosti, sva se odločili preveriti še na posameznih družinah grafov. Grafe, na katerih sva opravili analizo, so v mapi "DRUŽINE GRAFOV".

Izbrali sva naslednje družine grafov: dvodelne grafe, ciklične grafe, 2d mrežne grafe, zvezde in kolesa.

Za vse **ciklične grafe** do šest vozlišč (vključno s šest) enakost velja, za večje cikle pa ne.

Za **polne dvodelne grafe** velikosti $n, m$, kjer $n$ in $m$ pretečeta od tri do devet, sta dimenziji enaki.

Ker so **zvezdasti grafi** vrsta dvodelnih grafov, ni presenetljivo, da enakost za grafe velikosti od tri do deset vozlišč velja. To sva preverili še za grafe s tridesetimi in štiridesetimi vozlišči, tudi za te enakost velja.

Za **kolesa** enakost prav tako velja za grafe velikosti od tri do deset vozlišč. Enako kot prej sva to preverili še za grafe velikosti do štirideset vozlišč, tudi za njih enakost velja.

Za **2d mrežne grafe** enakost v splošnem ne velja.

# 3 Grafi in njihovi produkti

Zanimali sta naju metrična dimenzija sosednosti in metrična dimenzija kartezičnih, direktnih in močnih produktov mrežnih ter torusnih mrežnih grafov. Grafi, na katerih sva opravili analizo, so v mapi "GRAFI PRODUKTOV".

Najprej si poglejmo kodi, s katerimi sva definirali mrežni graf in torusni mrežni graf.

**Algorithm 4** Generiraj mrežni graf kot kartezični produkt dveh poti

**Require:** $n$ (dolžina prve poti), $m$ (dolžina druge poti)
**Ensure:** mrežni graf

```
function MREŽNI_GRAF(M)
    P1 ← PathGraph(n)
    P2 ← PathGraph(m)
    Print Metrična dimenzija sosednosti prve poti: dim_A(P1)
    Print Metrična dimenzija sosednosti druge poti: dim_A(P2)
    M ← P1.cartesian_product(P2)
    return M
end function
```

**Algorithm 5** Generiraj torusni mrežni graf kot kartezični produkt dveh ciklov

**Require:** $n$ (dolžina prvega cikla), $m$ (dolžina drugega cikla)
**Ensure:** torusni mrežni graf

```
function TORUSNI_MREŽNI_GRAF(T)
    C1 ← CycleGraph(n)
    C2 ← CycleGraph(m)
    Print Metrična dimenzija sosednosti prvega cikla: dim_A(C1)
    Print Metrična dimenzija sosednosti drugega cikla: dim_A(C2)
    T ← C1.cartesian_product(C2)
    return T
end function
```

Zgenerirali sva dva mrežna grafa oziroma dva torusna mrežna grafa $G1$ in $G2$ ter izračunali njune produkte. Pri tem sva uporabili majhne grafe. Osnovni grafi (poti in cikli), ki sva jih potem množili, so velikosti do štiri vozlišča. Sami produkti pa do šestintrideset vozlišč.
Kartezični produkt: $H1 = G1$.cartesian_product($G2$)
Direktni produkt: $H2 = G1$.tensor_product($G2$)
Krepki produkt: $H3 = G1$.strong_product($G2$)
Izračunali sva njihovo metrično dimenzijo sosednosti in metrično dimenzijo. Produkte sva naredili na dveh grafih velikosti $2 \times 2$, dveh grafih velikosti $2 \times 3$ ter na grafih velikosti $2 \times 2$ in $2 \times 3$.

Metrično dimenzijo in metrično dimenzijo sosednosti produktov sva primerjali med seboj in z metrično dimenzijo ter metrično dimenzijo sosednosti faktorjev.

Za mrežne grafe sva opazili naslednje.

Pri kartezičnem produktu so (to lahko opazimo že pri kartezičnem produktu poti, s katerimi sva generirali mrežne grafe) metrične dimenzije sosednosti vhodnih grafov vedno manjše od njunih produktov. Poleg tega je mogoče opaziti, da večji kot so faktorji, večja ali enaka je metrična dimenzija sosednosti. Metrična dimenzija je ostala za vsak kartezični produkt, ne glede na faktor, enaka. Ni pa opaziti kakšnih vzorcev, ki bi veljali med dimenzijami faktorjev in produktov. Podobno velja za krepki produkt.

V primeru direktnega produkta mrežnih grafov, sta dimenziji med seboj enaki in za vse faktorje so enake vrednosti. Vendar nam to ničesar ne pove, saj bi morali hipoteze, kot je ta, da se enakost med metrično dimenzijo in metrično dimenzijo sosednosti ohranja s produktom, preveriti na več grafih, predvsem pa na večjih.

Za torusne mrežne grafe veljajo enake ugotovitve kot za mrežne grafe.

Pri kartezičnem produktu torusnih mrežnih grafov sva ugotovili enako kot pri kartezičnem produktu mrežnih grafov, le da se v tem primeru metrične dimenzije produktov spreminjajo glede na faktor. Tudi tu ni opaziti kakšnih vzorcev, ki bi veljali med dimenzijami faktorjev in produktov.

V primeru krepkega produkta sta dimenziji med seboj enaki, vendar se glede na faktor vrednosti dimenzij razlikujejo. Enako kot pri direktnem produktu mrežnih grafov velja, da bi morali hipoteze, kot je ta, da velja enakost med metrično dimenzijo in metrično dimenzijo sosednosti za krepke produkte torusnih mrežnih grafov, preveriti na več grafih, predvsem pa na večjih.

Pri direktnem produktu torusnih mrežnih grafov nisva ničesar opazili.

# 4 Razmerje med $dim(G)$ in $dim_A(G)$

Ugotoviti sva želeli, če obstaja kakšna konstanta $c$, da za metrične dimenzije velja $\dim_A(G) \leq c \dim(G)$.

**Algorithm 6** Izračun razmerja med dim(G) in $\dim_A$(G)

```
function TEST_GRAF(g)
    metricna ← dim(g)[0]
    metricna_sosednosti ← dim_A(g)[0]
    if dim > 0 then
        razmerje ← metricna_sosednosti/metricna
    else
        razmerje ← ∞
    end if
    return metricna, metricna_sosednosti, razmerje
end function
```

To sva testirali na naključnih grafih s tri do trideset vozlišči.

**Algorithm 7** Izračun maksimalnega razmerja

max_razmerje $\leftarrow 0$
**for** n = 3,...,30 **do**
  $G \leftarrow$ nakljucni_graf$(n, p)$
  (metricna, metricna_sosednosti, razmerje) $\leftarrow$ test_graf$(G)$
  max_razmerje $\leftarrow$ max(max_razmerje, razmerje)
**end for**

Iz vzorcev sva opazili, da več kot je povezav, bolj se to razmerje približuje ena oziroma je 1, za grafe z vsemi povezavami ($p = 1$). To ni presenetljivo, saj sva že prej ugotovili, da za polne grafe enakost med metrično dimenzijo sosednosti in metrično dimenzijo velja. Z manjšo verjetnostjo povezav se je ta konstanta večala.

Za posamezno verjetnost povezave sva generirali naključne grafe s tri do trideset vozlišči in to ponovili desetkrat. Nato sva izračunali povprečje maksimalnih razmerij. V spodnji tabeli so prikazani rezultati za posamezno verjetnost.

| p | max vrednost |
|---|---|
| 0.1 | 3.72 |
| 0.2 | 2.38 |
| 0.3 | 1.85 |
| 0.4 | 1.72 |
| 0.5 | 1.62 |
| 0.6 | 1.33 |
| 0.7 | 1.10 |
| 0.8 | 1.05 |
| 0.9 | 1.00 |
| 1 | 1.00 |

Iz dobljenih rezultatov lahko rečemo, da je za grafe z malo povezavami zgornja meja štiri. Za polne grafe oziroma grafe z veliko povezavami je konstanta ena, kar pa pomeni, da sta dimenziji enaki.

# 5 Zaključek

V nalogi sva ugotovili, da v splošnem za grafe težko rečemo, če za njih velja enakost metrične dimenzije in metrične dimenzije sosednosti. Kljub temu, da za večino zgeneriranih naključnih grafov to velja, težko najdemo vzorce, da bi to lahko povezali s celotno družino grafov. Ugotovili sva, da produkti kvečjemu povečajo metrično dimenzijo sosednosti, ni pa opaziti drugih vzorcev. Glede na rezultate eksperimentov lahko rečemo, da lahko metrično dimenzijo sosednosti navzgor omejimo s produktom števila 4 in metrične dimenzije.