
MTM 5245 - Álgebra Linear - Lista de Exercícios 01

Espaços vetoriais

Nos exercícios de 1 a 7 apresenta-se um conjunto munido com as operações de adição e multiplicação por escalar especificadas. Verificar quais deles são espaços vetoriais. Para aqueles que não são espaços vetoriais, citar os axiomas que não se verificam apresentando uma justificativa.

1. \mathbb{R}^3 com as operações definidas para quaisquer $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ por:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$

$$\alpha(x, y, z) = (0, 0, 0).$$

2. $V = \{(x, 2x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}$ com as operações definidas para quaisquer $x_1, x_2, \alpha \in \mathbb{R}$ por:

$$(x_1, 2x_1, 3x_1) + (x_2, 2x_2, 3x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2, 3x_1 + 3x_2);$$

$$\alpha(x_1, 2x_1, 3x_1) = (\alpha x_1, 2\alpha x_1, 3\alpha x_1).$$

3. \mathbb{R}^2 com as operações definidas para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ por:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1);$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

4. \mathbb{R}^2 com as operações definidas para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ por:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, 0).$$

5. $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ com as operações usuais de matrizes.

6. \mathbb{R}^2 com as operações definidas para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ por:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0);$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

7. \mathbb{R}^2 com as operações definidas para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ por:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

$$\alpha(x, y) = (x, \alpha y).$$