MTM 5245 - Álgebra Linear - Lista de Exercícios 04
Base, dimensão, coordenadas de um vetor com relação a uma base ordenada e matriz mudança de base.

Daqui em diante, sempre que nos referirmos a um espaço vetorial V e não mencionarmos as operações fica subentendido que as operações deste espaço vetorial são as operações usuais.

1. Sendo $v_1 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, determine $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tal que $\{v_1, v_2\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^2$.

2. Verifique quais dos seguintes conjuntos de vetores formam uma base de $\mathbb{R}^2$:

   (a) $\{(1, 2), (-1, 3)\}$;

   (b) $\{(3, -6), (-4, 8)\}$;

   (c) $\{(0, 0), (2, 3)\}$.

3. O conjunto $B = \{(2, -1), (-3, 2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Expresse um vetor qualquer de $\mathbb{R}^2$ como uma combinação linear dos vetores de B.

4. Verifique quais dos seguintes conjuntos de vetores formam uma base de $P_2(\mathbb{R})$:

   (a) $\{2x^2 + x - 4, x^2 - 3x + 1\}$;

   (b) $\{1, x, x^2\}$;

   (c) $\{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$.

5. Mostre que o conjunto

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

   é uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

6. Mostre que os vetores $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (3, 0, 2)$, e $v_4 = (2, -1, 1)$ geram o $\mathbb{R}^3$ e determine uma base de $\mathbb{R}^3$ a partir dos vetores v_1, v_2, v_3 e v_4.

7. Determine uma base do subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, -1, 0, 0), v_2 = (-2, 2, 2, 1), v_3 = (-1, 1, 2, 1)$ e $v_4 = (0, 0, 4, 2)$.

8. Determine as coordenadas de $v = (6, 2)$ com relação às seguintes bases de $\mathbb{R}^2$:

   (a) $B_1 = \{(3, 0), (0, 2)\}$;

   (b) $B_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$;

   (c) $B_3 = \{(1, 0), (0, 1)\}$;

   (d) $B_4 = \{(0, 1), (1, 0)\}$.

9. Seja $B = \{3, 2x, -x^2\}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$. Determine as coordenadas de $v = 6 - 4x + 3x^2$ com relação à base B.

10. Determine a dimensão e uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais:

    (a) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 3x\}$;

(b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 5x \text{ e } z = 0\}$;

(c) $V_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 0\}$;

(d) $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 3y \text{ e } z = -y\}$;

(e) $V_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 0\}$.

11. Seja
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,|\, c = a + b \text{ e } d = a \right\},$$
que é um subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$. Qual a dimensão de W?

12. Sejam $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $B_2 = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$.

    (a) Determine $[I]^{B_1}_{B_2}$;

    (b) Sabendo que $[v]_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, determine $[v]_{B_2}$;

    (c) Determine $[I]^{B_2}_{B_1}$.

13. Sejam $B_1 = \{1, x, x^2\}$ e $B_2 = \{1, 1 - x, 1 - x^2\}$ bases de $P_2(\mathbb{R})$.

    (a) Determine $[I]^{B_1}_{B_2}$;

    (b) Sabendo que $[v]_{B_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ determine $[v]_{B_2}$;

    (c) Determine $[I]^{B_2}_{B_1}$.

14. A matriz mudança de base de uma base B de $\mathbb{R}^2$ para a base $\{(1, 1), (0, 2)\}$ desse mesmo espaço é
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$
Determine a base B.

15. A matriz mudança de base da base $\{1 + x, 1 - x^2\}$ para uma base C, ambas do mesmo subespaço vetorial W de $P_2(\mathbb{R})$, é
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Determine a base C.