MTM 5245 - Álgebra Linear - Lista de Exercícios 02
Subespaços vetoriais

1. Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais. Quais dos seguintes conjuntos W abaixo são subespaços vetoriais de V?

   (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 0\}$;
   (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 1\}$;
   (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$;
   (d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 3z = 0\}$;
   (e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y \text{ é irracional}\}$.

2. Considere o espaço vetorial $V = P(\mathbb{R})$ com as operações usuais. Quais dos seguintes conjuntos W abaixo são subespaços vetoriais de V?

   (a) $W = \{p(x) \in P(\mathbb{R}) \,|\, p(x) \text{ tem grau maior que } 2\}$;
   (b) $W = \{p(x) \in P(\mathbb{R}) \,|\, p(0) = 2p(1)\}$;
   (c) $W = \{p(x) \in P(\mathbb{R}) \,|\, p(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$;
   (d) $W = \{p(x) \in P(\mathbb{R}) \,|\, p(x) + p'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

3. Considere o espaço vetorial $V = M_2(\mathbb{R})$ com as operações usuais. Quais dos seguintes conjuntos W abaixo são subespaços vetoriais de V?

   (a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid c = a + b \text{ e } d = 0 \right\}$;
   (b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = a + d \text{ e } c = a - d \right\}$;
   (c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid c = -a \right\}$.

4. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais e sejam U, V e W os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = z\},$$
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = 0\} \text{ e}$$
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\}.$$

   Mostre que $U + V = \mathbb{R}^3$, $U + W = \mathbb{R}^3$ e $V + W = \mathbb{R}^3$. Em algum destes casos a soma é direta?

5. Considere o espaço vetorial $V = M_2(\mathbb{R})$ com as operações usuais e sejam U e W os seguintes subespaços vetoriais de V:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ e}$$
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -3a & 0 \\ c & 3d \end{pmatrix} \mid a, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Mostre que $U + W = V$. Essa soma é uma soma é direta?

6. Sejam V um espaço vetorial e U, W dois subespaços vetoriais de V.

   (a) Prove que a intersecção $U \cap W$ é também um subespaço vetorial de V.
   (b) Mostre que se $U \subseteq W$ então $U + W = W$.
   (c) Mostre que se $U \subseteq W$ então $U \cap W = U$.

7. Mostre com um exemplo que a união de dois subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial V pode não ser um subespaço vetorial de V.