MTM 5245 - Álgebra Linear - Lista de Exercícios 03
Combinação linear, subespaços vetoriais gerados, espaços vetoriais finitamente gerados, dependência e independência linear.

1. Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais e sejam $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em V.

   (a) Escreva o vetor $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v;

   (b) Para que valor de k o vetor $(-8, 14, k)$ é combinação linear de u e v?

   (c) Determine uma condição entre a, b e c para que o vetor (a, b, c) seja uma combinação linear de u e v.

2. Considere o espaço vetorial $V = P_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \,|\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais e sejam $p_1(x) = x^2 - 2x + 1, p_2(x) = x + 2$ e $p_3(x) = 2x^2 - x$ em V.

   (a) Escreva, se possível, o vetor $p(x) = 5x^2 - 5x + 7$ como combinação linear de $p_1(x), p_2(x)$ e $p_3(x)$;

   (b) Escreva, se possível, o vetor $p(x) = 5x^2 - 5x + 7$ como combinação linear de $p_1(x)$ e $p_2(x)$;

   (c) Determine uma condição entre a, b e c para que o vetor $p(x) = ax^2 + bx + c$ seja combinação linear de $p_2(x)$ e $p_3(x)$;

   (d) É possível escrever $p_1(x)$ como uma combinação linear de $p_2(x)$ e $p_3(x)$?

3. Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais. Dê um sistema de geradores para cada um dos seguintes subespaços vetoriais de V, e descreva cada um destes subespaços geometricamente:

   (a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y = 0\}$;

   (b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$;

   (c) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y - 3z = 0\}$;

   (d) $W_1 \cap W_2$;

   (e) $W_2 + W_3$.

4. Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^4$ com as operações usuais e

$$S = [(1, 1, -2, 4), (1, 1, -1, 2), (1, 4, -4, 8)].$$

   (a) O vetor $\left(\frac{2}{3}, 1, -1, 2\right)$ pertence a S?

   (b) O vetor $(0, 0, 1, 1)$ pertence a S?

5. Considere o espaço vetorial $V = M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ com as operações usuais e o subespaço vetorial

$$W = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

   de V.

   O vetor $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

6. Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais. Determine os subespaços vetoriais de V gerados pelos seguintes conjuntos:

   (a) $A = \{(2, -1, 3)\}$;

   (b) $A = \{(-1, 3, 2), (2, -2, 1)\}$;

   (c) $A = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$.

7. Considere o espaço vetorial $V = M_2(\mathbb{R})$ com as operações usuais. Verifique se o conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

   é um conjunto gerador de V.

8. Considere o espaço vetorial $V = P_3(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais. Mostre que V é gerado por $\{1 - x^3, (1 - x)^2, 1 - x, 1\}$.

9. Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais. Classifique os seguintes subconjuntos de V em LI ou LD:

   (a) $\{(2, -1, 3)\}$;

   (b) $\{(1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$;

   (c) $\{(2, 1, 3), (0, 0, 0), (1, 5, 2)\}$;

   (d) $\{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 2), (3, 1, -2)\}$.

10. Considere o espaço vetorial $V = P_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais. Classifique os seguintes subconjuntos de V em LI ou LD:

   (a) $\{2 + x - x^2, -4 - x + 4x^2, x + 2x^2\}$;

   (b) $\{1 - x + 2x^2, x - x^2, x^2\}$;

   (c) $\{x^2 - x + 1, x^2 + 2x\}$.

11. Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais. Determine o(s) valor(es) de k para que o conjunto $\{(-1, 0, 2), (1, 1, 1), (k, -2, 0)\}$ seja LI.

12. Considere o espaço vetorial $V = M_2(\mathbb{R})$ com as operações usuais. Determine o(s) valor(es) de k para que o conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   seja LD.