Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1 Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2^2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Beurteilen Sie, ob es sich um ein homogenes LGS handelt und ob es in Normalform vorliegt.

Aufgabe 2 Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das LGS

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x - y + az &= 1 \\ y + z &= b \end{aligned}$$

eine, keine oder unendlich viele Lösungen? Geben Sie jeweils den Rang des LGS an.

Matrizen und Matrixprodukt

Aufgabe 3 Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, falls möglich, eine Lösung x_0 des Gleichungssystems $Ax = b$.

Aufgabe 4 Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Welche der nachfolgenden Matrizen existieren? Berechnen Sie diese.

- $A \cdot B$
- $A \cdot B^T$
- $A \cdot C$
- $A^2 \cdot B$
- $A \cdot A^T$
- $C^T \cdot C$
- $A \cdot E_3$
- $E_2 \cdot B$
- $e_3^T \cdot C$
- $A \cdot (B + C)$

Aufgabe 5 Gib eine Matrix M an, sodass

$$2 \cdot M + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist.

Lineare Abbildungen

Aufgabe 6 Bestimmen Sie Rang und Nullität der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

jeweils als Matrix über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_7$

Aufgabe 7 Berechnen Sie die Dimension von Bild und Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 7 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 Geben Sie Bild und Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

an und geben Sie jeweils eine Basis der beiden Räume an.