Mathematik I

Lineare Algebra

WS 2024

1 Logik

Definition 1.1. Logik ist die *Lehre vom Argumentieren*, bzw. die *Lehre vom Schlussfolgern.* Sie hat das Ziel, die Regeln des Argumentierens so streng zu setzen, dass Widersprüche und Paradoxen möglichst ausgeschlossen sind.

1.1 Begriffe in der Logik

Aussage:	Ein Satz, der in einem gegebenen Kontext eindeutig wahr oder falsch ist
Konjunktion:	Eine logische Verknüpfung (z. B. "und", "oder")
Negation:	Umkehrung des Wahrheitswertes einer Aussage
Implikation:	Aus Aussage A folgt Aussage B
Tautologie:	Eine Aussage, die immer wahr ist
Kontradiktion	Eine widersprüchliche Aussage, die immer falsch ist

1.2 Logische Gesetze

De-Morgansche Gesetze:	$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$
	$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$
Kommutativgesetz:	$A \wedge B \iff B \wedge A$
	$A \vee B \iff B \vee A$
Assoziativgesetz:	$A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$
	$A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$
Distributivgesetz:	$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
	$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Absorptionsgesetz:	$A \wedge (A \vee B) \iff A$
	$A \vee (A \wedge B) \iff A$

1.3 Quantoren

Existenzquantor:	$\exists n \in \mathbb{N}$	Es existiert ein n in der Menge der natürlichen Zahlen, für das gilt ...
Allquantor:	$\forall n \in \mathbb{N}$	Für alle Zahlen n in der Menge der natürlichen Zahlen gilt, ...

1.4 Beweisarten

1.4.1 Direkter und Indirekter Beweis

Direkter Beweis: $A \longrightarrow B$

Beispiel n ist gerade $\longrightarrow n^2$ ist gerade $\quad \exists n \in \mathbb{N} : n = 2k \Longrightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = \underbrace{2(2k)}_{\in \mathbb{N}}$

Indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis): $\neg A \longrightarrow$ Widerspruch

Beispiel Behauptung: $\sqrt{2}$ ist irrational

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Longrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow a^2 = 2b^2$

$\Longrightarrow a^2$ ist gerade $\Longrightarrow a$ ist gerade

$\Longrightarrow a = 2k \Longrightarrow 2b^2 = 4k^2 \Longrightarrow b^2 = 2k^2$

$\Longrightarrow b^2$ ist gerade $\Longrightarrow b$ ist gerade

$\Longrightarrow$ Widerspruch, da a und b beide gerade sind

1.4.2 Beweis durch vollständige Induktion

Die vollständige Induktion besteht aus folgenden Schritten:

1. Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für ein beliebiges n gilt (meist $n = 0$ oder $n = 1$).
2. Induktionsvoraussetzung: durch den Induktionsanfang ist bewiesen, dass es mindestens ein n gibt, für das die Aussage stimmt.
3. Induktionsbehauptung: Es wird angenommen, dass wenn die Aussage für n stimmt, dass sie auch für $n + 1$ stimmen muss.
4. Induktionsschritt: Beweis, dass die Induktionsbehauptung richtig ist.

Das genaue Vorgehen beim Induktionsbeweis hängt von der konkreten Aussage ab.

Beispiel (Gaußsche Summenformel):

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang (IA): $n = 1 \quad 1 = \frac{2}{2} \quad \checkmark$

Induktionsvoraussetzung (IV): $\exists n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Induktionsbehauptung (IB): $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Induktionsschritt (IS): $\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\text{IV}} + (n+1)$

$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$

$= \frac{n^2+n+2n+2}{2}$

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \square$

2 Mengenlehre

Definition 2.1. Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

2.1 Beispiele von Mengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	(Natürliche Zahlen)
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	(Ganze Zahlen)
$\mathrm{M} = \{1, \pi, a\}$	
$\mathrm{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = k^2\}$	
$\mathrm{O} = \emptyset$ oder $\{\}$	(Leere Menge)

2.2 Definitionen

Eine Menge A ist eine **Teilmenge** von B, wenn jedes Element von A auch in B enthalten ist.

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall x (x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

Die **Schnittmenge** von A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl Teil von A als auch Teil von B sind.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Wenn $A \cap B = \emptyset$, dann heißen A und B **disjunkt**.

Die **Vereinigungsmenge** von A und B ist die Menge aller Elemente, die in A oder in B enthalten sind.

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Sind $A, B, C \subseteq$ gilt:		
Kommutativgesetz:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetz:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivgesetz:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Absorptionsgesetz:	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$

Die **Differenzmenge** von A und B besteht aus allen Elementen der Menge A, die nicht in B enthalten sind.

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$