Mathematik I
Lineare Algebra
WS 2024

1 Logik

Definition 1.1. Logik ist die *Lehre vom Argumentieren*, bzw. die *Lehre vom Schlussfolgern.* Sie hat das Ziel, die Regeln des Argumentierens so streng zu setzen, dass Widersprüche und Paradoxen möglichst ausgeschlossen sind.

1.1 Begriffe in der Logik

Aussage:	Ein Satz, der in einem gegebenen Kontext eindeutig wahr oder falsch ist
Konjunktion:	Eine logische Verknüpfung (z. B. "und", "oder")
Negation:	Umkehrung des Wahrheitswertes einer Aussage
Implikation:	Aus Aussage A folgt Aussage B
Tautologie:	Eine Aussage, die immer wahr ist
Kontradiktion	Eine widersprüchliche Aussage, die immer falsch ist

1.2 Logische Gesetze

De-Morgansche Gesetze:	$\neg(A \land B) \iff \neg A \lor \neg B$
	$\neg(A \lor B) \iff \neg A \land \neg B$
Kommutativgesetz:	$A \land B \iff B \land A$
	$A \lor B \iff B \lor A$
Assoziativgesetz:	$A \land (B \land C) \iff (A \land B) \land C$
	$A \lor (B \lor C) \iff (A \lor B) \lor C$
Distributivgesetz:	$A \land (B \lor C) \iff (A \land B) \lor (A \land C)$
	$A \lor (B \land C) \iff (A \lor B) \land (A \lor C)$
Absorptionsgesetz:	$A \land (A \lor B) \iff A$
	$A \lor (A \land B) \iff A$

1.3 Quantoren

Existenzquantor:	$\exists n \in \mathbb{N}$	Es existiert ein n in der Menge der natürlichen Zahlen, für das gilt ...
Allquantor:	$\forall n \in \mathbb{N}$	Für alle Zahlen n in der Menge der natürlichen Zahlen gilt, ...

1.4 Beweisarten

1.4.1 Direkter und Indirekter Beweis

Direkter Beweis:	$A \longrightarrow B$
Beispiel n ist gerade $\longrightarrow n^2$ ist gerade	$\exists n \in \mathbb{N} : n = 2k \Longrightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\underbrace{(2k)}_{\in \mathbb{N}}$

Indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis):	$\neg A \longrightarrow$ Widerspruch
Beispiel Behauptung: $\sqrt{2}$ ist irrational	Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Longrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow a^2 = 2b^2$ $\Longrightarrow a^2$ ist gerade $\Longrightarrow a$ ist gerade $\Longrightarrow a = 2k \Longrightarrow 2b^2 = 4k^2 \Longrightarrow b^2 = 2k^2$ $\Longrightarrow b^2$ ist gerade $\Longrightarrow b$ ist gerade $\Longrightarrow$ Widerspruch, da a und b beide gerade sind

1.4.2 Beweis durch vollständige Induktion

Die vollständige Induktion besteht aus folgenden Schritten:

1. Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für ein beliebiges n gilt (meist $n = 0$ oder $n = 1$).
2. Induktionsvoraussetzung: durch den Induktionsanfang ist bewiesen, dass es mindestens ein n gibt, für das die Aussage stimmt.
3. Induktionsbehauptung: Es wird angenommen, dass wenn die Aussage für n stimmt, dass sie auch für $n + 1$ stimmen muss.
4. Induktionsschritt: Beweis, dass die Induktionsbehauptung richtig ist.

Das genaue Vorgehen beim Induktionsbeweis hängt von der konkreten Aussage ab.

Beispiel (Gaußsche Summenformel):

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang (IA): $n = 1 \quad 1 = \frac{2}{2} \quad \checkmark$

Induktionsvoraussetzung (IV): $\exists n \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Induktionsbehauptung (IB): $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Induktionsschritt (IS): $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\text{IV}} + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \square$$

2 Mengenlehre

Definition 2.1. Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

2.1 Beispiele von Mengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	(Natürliche Zahlen)
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	(Ganze Zahlen)
$\mathrm{M} = \{1, \pi, a\}$	
$\mathrm{N} = \{x \in \mathbb{Z} \vert x = k^2\}$	
$\mathrm{O} = \emptyset$ oder $\{\}$	(Leere Menge)

2.2 Definitionen

Eine Menge M ist eine **Teilmenge** von N, wenn jedes Element von M auch in N enthalten ist.

$$M \subseteq N \iff \forall x (x \in M \implies x \in N)$$

Die **Schnittmenge** von M und N ist die Menge aller Elemente, die sowohl Teil von M als auch Teil von N sind.

$$M \cap N = \{x | x \in M \wedge x \in N\}$$

Wenn $M \cap N = \emptyset$, dann heißen M und N **disjunkt**.

Die **Vereinigungsmenge** von M und N ist die Menge aller Elemente, die in M oder in N enthalten sind.

$$M \cup N = \{x | x \in M \vee x \in N\}$$

Sind $M, N, C \subseteq$ gilt:		
Kommutativgesetz:	$M \cap N = N \cap M$	$M \cup N = N \cup M$
Assoziativgesetz:	$M \cap (N \cap C) = (M \cap N) \cap C$	$M \cup (N \cup C) = (M \cup N) \cup C$
Distributivgesetz:	$M \cap (N \cup C) = (M \cap N) \cup (M \cap C)$	$M \cup (N \cap C) = (M \cup N) \cap (M \cup C)$
Absorptionsgesetz:	$M \cap (M \cup N) = M$	$M \cup (M \cap N) = M$

Die **Differenzmenge** von M und N besteht aus allen Elementen der Menge M, die nicht in N enthalten sind.

$$M \setminus N = \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$$

Die **Menge aller Teilmengen** einer Menge M wird als $P(M)$ angegeben.

$$M = \{1, a, \pi\}$$

$$P(M) = \emptyset, M, \{1\}, \{a\}, \{\pi\}, \{1, a\}, \{1, \pi\}, \{a, \pi\}$$

Die Anzahl der Elemente in einer Menge bezeichnet man als **Kardinalität** oder **Mächtigkeit**. Geschrieben wird sie als

$$|M| = ...$$

Die Anzahl der möglichen Teilmengen ist

$$|P(M)| = 2^{|M|}$$

Anmerkung 2.1. Die Kardinalität der Menge der natürlichen Zahlen ist $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, welche als kleinste abzählbare Unendlichkeit bekannt ist.

2.3 Kartesisches Produkt

Das **kartesische Produkt** einer Menge M und einer Menge N ist definiert als

$$M \times N := \{(a, b) | a \in M, b \in N\}$$

Die Kardinalität des kartesischen Produkts ist definiert als

$$|M \times N| = |M| \cdot |N|$$

2.4 Relationen

Eine **Relation** R zwischen einer Menge M und einer Menge N ist eine Beziehung zwischen Elementen von M und N, geordnet in Paare (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$. Daraus folgt, dass jede Relation zwischen zwei Mengen eine Teilmenge des kartesischen Produkts ebendieser ist. Eine Relation wird geschrieben als $\sim_R$. Gilt $M = N$, so heißt die Relation **homogen**.

Betrachtet man eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, so ist diese Funktion eine Relation R zwischen D und $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in D\ \exists^{=1} y \in \mathbb{R} : (x, y) \in R$$

Daraus lässt sich allgemein feststellen, dass eine Funktion $f : D \longrightarrow N$ eine Relation R zwischen D und N ist, für die gilt:

$$\forall x \in D\ \exists^{=1} y \in N : (x, y) \in R$$

2.5 Eigenschaften von homogenen Relationen

Reflexiv:	$\forall m \in M : m \sim_R m$
Transitiv:	$m_1 \sim_R m_2 \land m_2 \sim_R m_3 \Longrightarrow m_1 \sim_R m_3$
Symmetrisch:	$m_1 \sim_R m_2 \Longrightarrow m_2 \sim_R m_1$
Antisymmetrisch:	$m_1 \sim_R m_2 \land m_2 \sim_R m_1 \Longrightarrow m_1 = m_2$
Asymmetrisch :	$m_1 \sim_R m_2 \Longrightarrow \neg(m_2 \sim_R m_1)$

Außerdem heißt R **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

2.6 Äquivalenzklassen

Betrachtet man eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf eine Menge M mit zwei Elementen $m, n \in M$, so heißen diese **äquivalent**, wenn $m \sim_R n$.

Eine Teilmenge $a \subseteq M$ heißt **Äquivalenzklasse**, wenn gilt

- Sind $m, n \in A,$ so ist $m \sim_R n$
- Ist $m \in A \land n \in M$ mit $n \sim_R m,$ so ist $n \in A$

Das bedeutet, die Äquivalenzklasse $[a]$ enthält alle Elemente, die mit a in Relation stehen. Existiert eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf M und sind $m, n \in M$, dann gilt entweder $[m] = [n]$ oder $[m]$ und $[n]$ sind disjunkt.

2.7 Repräsentantensystem

Ein **Repräsentant** einer Äquivalenzklasse $[a]$ ist ein Element $a \in [a]$, das die Klasse repräsentiert.

Ein **Repräsentantensystem** ist eine Teilmenge $N \subseteq M$ die genau einen Repräsentanten jeder Äquivalenzklasse enthält.

Beispiel 2.1. Gegeben ist die Relation "modulo 3" auf der Menge $\mathbb{Z}$. Zwei Zahlen a, b sind äquivalent bezüglich dieser Relation, wenn sie bei der Division durch 3 den gleichen Rest haben. Mathematisch bedeutet das:

$$a \equiv b (\operatorname{mod} 3) \quad \text{wenn} \quad 3 \mid a - b$$

Die Äquivalenzklassen für diese Äquivalenzrelation sind die Menge aller Elemente, die zueinander äquivalent sind. In diesem Fall existieren drei Äquivalenzklassen, nämlich für jeden möglichen Rest (0, 1, 2) der Division jeweils eine.

$$[0] = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$$
$$[1] = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$$
$$[2] = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$$

Nun kann man ein Repräsentantensystem für diese Äquivalenzrelation aufstellen. Dafür nimmt man aus jeder Äquivalenzklasse ein beliebiges Element (da die Elemente alle untereinander äquivalent sind, repräsentiert ein beliebiges Element die gesamte Klasse).

Ein mögliches Repräsentantensystem für diese Relation ist:

$$\{0, 1, 2\}$$