Mathematik I

Lineare Algebra

WS 2024

1 Logik

Definition 1.1. Logik ist die *Lehre vom Argumentieren*, bzw. die *Lehre vom Schlussfolgern.* Sie hat das Ziel, die Regeln des Argumentierens so streng zu setzen, dass Widersprüche und Paradoxen möglichst ausgeschlossen sind.

1.1 Begriffe in der Logik

Aussage:	Ein Satz, der in einem gegebenen Kontext eindeutig wahr oder falsch ist
Konjunktion:	Eine logische Verknüpfung (z. B. ünd", öder")
Negation:	Umkehrung des Wahrheitswertes einer Aussage
Implikation:	Aus Aussage A folgt Aussage B
Tautologie:	Eine Aussage, die immer wahr ist
Kontradiktion	Eine widersprüchliche Aussage, die immer falsch ist

1.2 Logische Gesetze

De-Morgansche Gesetze:
$$\neg(A \land B) \iff \neg A \lor \neg B$$
$$\neg(A \lor B) \iff \neg A \land \neg B$$

Kommutativgesetz:
$$A \land B \iff B \land A$$
$$A \lor B \iff B \lor A$$

Assoziativgesetz:
$$A \land (B \land C) \iff (A \land B) \land C$$
$$A \lor (B \lor C) \iff (A \lor B) \lor C$$

Distributivgesetz:
$$A \land (B \lor C) \iff (A \land B) \lor (A \land C)$$
$$A \lor (B \land C) \iff (A \lor B) \land (A \lor C)$$

Absorptionsgesetz:
$$A \land (A \lor B) \iff A$$
$$A \lor (A \land B) \iff A$$

1.3 Quantoren

Existenzquantor:	$\exists n \in \mathbb{N}$	Es existiert ein n in der Menge der natürlichen Zahlen, für das gilt ...
Allquantor:	$\forall n \in \mathbb{N}$	Für alle Zahlen n in der Menge der natürlichen Zahlen gilt, ...

1.4 Beweisarten

1.4.1 Direkter und Indirekter Beweis

Direkter Beweis:	$A \longrightarrow B$
Beispiel n ist gerade $\longrightarrow n^2$ ist gerade	$\exists n \in \mathbb{N} : n = 2k \Longrightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = \underbrace{2(2k)}_{\in \mathbb{N}}$

Indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis):	$\neg A \longrightarrow$ Widerspruch
Beispiel Behauptung: $\sqrt{2}$ ist irrational	Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational
	$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Longrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow a^2 = 2b^2$
	$\Longrightarrow a^2$ ist gerade $\Longrightarrow a$ ist gerade
	$\Longrightarrow a = 2k \Longrightarrow 2b^2 = 4k^2 \Longrightarrow b^2 = 2k^2$
	$\Longrightarrow b^2$ ist gerade $\Longrightarrow b$ ist gerade
	$\Longrightarrow$ Widerspruch, da a und b beide gerade sind

1.4.2 Beweis durch vollständige Induktion

Die vollständige Induktion besteht aus folgenden Schritten:

1. Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage für ein beliebiges n gilt (meist $n = 0$ oder $n = 1$).
2. Induktionsvoraussetzung: durch den Induktionsanfang ist bewiesen, dass es mindestens ein n gibt, für das die Aussage stimmt.
3. Induktionsbehauptung: Es wird angenommen, dass wenn die Aussage für n stimmt, dass sie auch für $n + 1$ stimmen muss.
4. Induktionsschritt: Beweis, dass die Induktionsbehauptung richtig ist.

Das genaue Vorgehen beim Induktionsbeweis hängt von der konrekten Aussage ab.

Beispiel (Gaußsche Summenformel):

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang (IA): $n = 1 \quad 1 = \frac{2}{2} \quad \checkmark$

Induktionsvoraussetzung (IV): $\exists n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Induktionsbehauptung (IB): $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Induktionsschritt (IS): $\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\text{IV}} + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \square$$

2 Mengenlehre

Definition 2.1. Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

2.1 Beispiele von Mengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	(Natürliche Zahlen)
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	(Ganze Zahlen)
$\mathrm{M} = \{1, \pi, a\}$	
$\mathrm{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = k^2\}$	
$\mathrm{O} = \emptyset$ oder $\{\}$	(Leere Menge)

2.2 Definitionen

Eine Menge M ist eine **Teilmenge** von N, wenn jedes Element von M auch in N enthalten ist.

$$M \subseteq N \Longleftrightarrow \forall x (x \in M \Longrightarrow x \in N)$$

Die **Schnittmenge** von M und N ist die Menge aller Elemente, die sowohl Teil von M als auch Teil von N sind.

$$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$$

Wenn $M \cap N = \emptyset$, dann heißen M und N **disjunkt**.

Die **Vereinigungsmenge** von M und N ist die Menge aller Elemente, die in M oder in N enthalten sind.

$$M \cup N = \{x | x \in M \vee x \in N\}$$

Sind $M, N, C \subseteq$ gilt:		
Kommutativgesetz:	$M \cap N = N \cap M$	$M \cup N = N \cup M$
Assoziativgesetz:	$M \cap (N \cap C) = (M \cap N) \cap C$	$M \cup (N \cup C) = (M \cup N) \cup C$
Distributivgesetz:	$M \cap (N \cup C) = (M \cap N) \cup (M \cap C)$	$M \cup (N \cap C) = (M \cup N) \cap (M \cup C)$
Absorptionsgesetz:	$M \cap (M \cup N) = M$	$M \cup (M \cap N) = M$

Die **Differenzmenge** von M und N besteht aus allen Elementen der Menge M, die nicht in N enthalten sind.

$$M \setminus N = \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$$

Die **Menge aller Teilmengen** einer Menge M wird als $P(M)$ angegeben.

$$M = \{1, a, \pi\}$$
$$P(M) = \emptyset, M, \{1\}, \{a\}, \{\pi\}, \{1, a\}, \{1, \pi\}, \{a, \pi\}$$

Die Anzahl der Elemente in einer Menge bezeichnet man als **Kardinalität** oder **Mächtigkeit**. Geschrieben wird sie als

$$|M| = ...$$

Die Anzahl der möglichen Teilmengen ist

$$|P(M)| = 2^{|M|}$$

Anmerkung 2.1. Die Kardinalität der Menge der natürlichen Zahlen ist $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, welche als kleinste abzählbare Unendlichkeit bekannt ist.

2.3 Kartesisches Produkt

Das **kartesische Produkt** einer Menge M und einer Menge N ist definiert als

$$M \times N := \{(a, b) | a \in M, b \in N\}$$

Die Kardinalität des kartesischen Produkts ist definiert als

$$|M \times N| = |M| \cdot |N|$$

2.4 Relationen

Eine **Relation** R zwischen einer Menge M und einer Menge N ist eine Beziehung zwischen Elementen von M und N, geordnet in Paare (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$. Daraus folgt, dass jede Relation zwischen zwei Mengen eine Teilmenge des kartesischen Produkts ebendieser ist. Eine Relation wird geschrieben als $\sim_R$. Gilt $M = N$, so heißt die Relation **homogen**.

Betrachtet man eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, so ist diese Funktion eine Relation R zwischen D und $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in D\ \exists^{=1} y \in \mathbb{R} : (x, y) \in R$$

Daraus lässt sich allgemein feststellen, dass eine Funktion $f : D \longrightarrow N$ eine Relation R zwischen D und N ist, für die gilt:

$$\forall x \in D\ \exists^{=1} y \in N : (x, y) \in R$$

2.5 Eigenschaften von homogenen Relationen

Reflexiv:	$\forall m \in M : m \sim_R m$
Transitiv:	$m_1 \sim_R m_2 \wedge m_2 \sim_R m_3 \Longrightarrow m_1 \sim_R m_3$
Symmetrisch:	$m_1 \sim_R m_2 \Longrightarrow m_2 \sim_R m_1$
Antisymmetrisch:	$m_1 \sim_R m_2 \wedge m_2 \sim_R m_1 \Longrightarrow m_1 = m_2$
Asymmetrisch :	$m_1 \sim_R m_2 \Longrightarrow \neg(m_2 \sim_R m_1)$

Außerdem heißt R **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

2.6 Äquivalenzklassen

Betrachtet man eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf eine Menge M mit zwei Elementen $m, n \in M$, so heißen diese **äquivalent**, wenn $m \sim_R n$.

Eine Teilmenge $a \subseteq M$ heißt **Äquivalenzklasse**, wenn gilt

- Sind $m, n \in A,$ so ist $m \sim_R n$
- Ist $m \in A \wedge n \in M$ mit $n \sim_R m,$ so ist $n \in A$

Das bedeutet, die Äquivalenzklasse $[a]$ enthält alle Elemente, die mit a in Relation stehen. Existiert eine Äquivalenzrelation $\sim_R$ auf M und sind $m, n \in M$, dann gilt entweder $[m] = [n]$ oder $[m]$ und $[n]$ sind disjunkt.

2.7 Repräsentantensystem

Ein **Repräsentant** einer Äquivalenzklasse $[a]$ ist ein Element $a \in [a]$, das die Klasse repräsentiert.

Ein **Repräsentantensystem** ist eine Teilmenge $N \subseteq M$ die genau einen Repräsentanten jeder Äquivalenzklasse enthält.

Beispiel 2.1. Gegeben ist die Relation "modulo 3äuf der Menge $\mathbb{Z}$. Zwei Zahlen a, b sind äquivalent bezüglich dieser Relation, wenn sie bei der Division durch 3 den gleichen Rest haben. Mathematisch bedeutet das:

$$a \equiv b (\bmod 3) \quad \text{wenn} \quad 3 \mid a - b$$

Die Äquivalenzklassen für diese Äquivalenzrelation sind die Menge aller Elemente, die zueinander äquivalent sind. In diesem Fall existieren drei Äquivalenzklassen, nämlich für jeden möglichen Rest (0, 1, 2) der Division jeweils eine.

$$[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$
$$[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$
$$[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

Nun kann man ein Repräsentantensystem für diese Äquivalenzrelation aufstellen. Dafür nimmt man aus jeder Äquivalenzklasse ein beliebiges Element (da die Elemente alle untereinander äquivalent sind, repräsentiert ein beliebiges Element die gesamte Klasse).

Ein mögliches Repräsentantensystem für diese Relation ist:

$$\{0, 1, 2\}$$

3 Algebraische Strukturen

3.1 Halbgruppen, Monoide, Gruppen

Betrachtet man eine Menge M, so bezeichnet man die Abbildung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M$$

als **innere Verknüpfung** von M. Diese Verknüpfung kann zum Beispiel eine Addition oder Multiplikation sein. Bildet man nun ein Tupel mit der Menge und der inneren Verknüpfung, also $(M, \circ)$, so nennt man dieses Tupel auch **Magma**.

Gilt für diese Verknüpfung das **Assoziativgesetz**, also sprich

$$\forall a, b, c \in M : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

so heißt die Menge M eine **Halbgruppe**.

Beispiel 3.1. Folgende Beispiele sind Halbgruppen: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$

Existiert in der Halbgruppe zusätzlich ein **neutrales Element** $e \in M$, sodass gilt

$$\forall a \in M : a \circ e = e \circ a = a$$

so heißt die Halbgruppe eine **Monoid**.

Beispiel 3.2. Folgende neutrale Elemente existieren als Beispiel: $(\mathbb{Z}, +)$: 0, $(\mathbb{R}, \cdot)$: 1, $(P(M), \cup)$: $\emptyset$

Existiert in der Monoid zusätzlich zu dem neutralen Element ein **inverses Element** $a^{-1} \in M$, sodass gilt

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

so heißt die Monoid eine **Gruppe**.

Beispiel 3.3. Folgende Beispiele sind Gruppen: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

Anmerkung 3.1. Ist eine Gruppe zusätzlich noch kommutativ, also wenn

$$\forall a, b \in M : a \circ b = b \circ a$$

gilt, so spricht man von einer **abelschen Gruppe**.

3.1.1 Permutationsgruppen

Eine **Permutation** ist eine bijektive Abbildung von einer Menge auf sich selbst. Das bedeutet, dass die Permutation die gleichen Elemente wie die Ausgangsmenge beinhaltet und lediglich die Reihenfolge verändert wird. Diese permuttierten Elemente werden als $\sigma \in S_N$ bezeichnet.

Betrachtet man die Zahlen, die vertauscht wurden, so spricht man von **Transpositionen**.

Beispiel 3.4. Gegeben ist

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Vertauscht wurden unter anderem die Zahlen 1 und 2, also spricht man von der Transposition $\tau_{12} = \langle 1\ 2 \rangle$

Die Verknüpfung, bei der die Permutation die gleiche Reihenfolge wie die Ausgangsmenge abbildet, nennt man id.

Ist $\tau = \langle i\ k \rangle$, so gilt:

$$\tau \circ \tau = \mathrm{id}$$

Eine wichtige Eigenschaft von Permutationen ist außerdem die **Signatur**. Die Signatur $\mathrm{sign}(\sigma)$ ist die Anzahl der Fehlstände, also der Anzahl an Vertauschungen, bei denen $i < j$ aber $\sigma(i) > \sigma(j)$ gilt.

Die Signatur ist definiert als:

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{für gerade Anzahl an Vertauschungen} \\ -1 & \text{für ungerade Anzahl an Vertauschungen} \end{cases}$$

Um die Signatur zu bestimmen kann man entweder alle Fehlstände zählen oder die folgende Formel verwenden:

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

3.1.2 Endliche Gruppen

Eine Gruppe G heißt **endlich**, wenn $|G| < \infty$, also wenn G nur endlich viele Elemente hat.

Die Ordnung der Gruppe G ist die Anzahl der Elemente in G, also $\text{ord}(G) = |G| = n$. Die Ordnung eines Elements $g \in G$ ist das kleinste $n \geq 1$ für das gilt: $g^n = e$. Also in anderen Worten, es muss ein $g^n \in G$ existieren, für das am Ende das neutrale Element e herauskommt und das kleinste n, für das dies gilt, bezeichnet man als Ordnung der Gruppe.

Anmerkung 3.2. Die Ordnung eines Elements g ist immer ein Teiler der Ordnung der Gruppe G.

$$\text{ord}(g) \mid \text{ord}(G)$$

Beispiel 3.5. Gegeben ist die Gruppe $(\mathbb{Z}\backslash 7\mathbb{Z}, \cdot, 1)$. Die gegebene Menge ist die Restklasse von $\mathbb{Z} \mod 7$ und somit endlich, da sie nur aus den Elementen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ besteht. Das bedeutet, $\text{ord}(G) = 6$. Somit muss jedes $g \in G$ die Ordnung $1, 2, 3$ oder 6 haben.

Um die Ordnung für ein Element $g \in G$ zu bestimmen, multipliziert man es solange mit sich selbst, bis das neutrale Element e (in diesem Fall 1) herauskommt. Für beispielsweise $g = 3$ ergibt sich dadurch:

$$\begin{aligned}
3^1 &\equiv 3 \\
3 \cdot 3 = 3^2 &\equiv 2 \\
3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 &\equiv 6 \\
3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 &\equiv 4 \\
3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 &\equiv 5 \\
3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 &\equiv 1 \\
\text{ord}(3) &= 6
\end{aligned}$$

3.2 Ringe

Ein **Ring** ist ein Tripel $(R, +, \cdot)$, mit einer nicht leeren Menge R und zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, für das gilt:

- $(R, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(R, \cdot, 1)$ ist eine Halbgruppe
- Es gilt das Distributivgesetz

Ist $(R, \cdot, 1)$ ein Monoid, so spricht man von einem **unitären Ring**. Ist das Monoid $(R, \cdot, 1)$ zusätzlich ein kommutatives Monoid, spricht man von einem kommutativen unitären Ring.

3.3 Körper

Ein **Körper** ist im Endeffekt nichts anderes als ein Ring, bei dem $(R\backslash\{0\}, \cdot, 1)$ eine abelsche Gruppe ist.