Algebraische Strukturen

Mengen, Relationen

Aufgabe 1 Seien folgende Mengen gegeben:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{0, 2, 4, 6, 8\}, \qquad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Berechne folgende Mengen:

1. $(A \cup B) \setminus C$
2. $A \cap (B \setminus C)$
3. $((C \cap B) \cup (A \cap C))$
4. $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

Wie kann man diese Mengen auch umformulieren?

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Potenzmenge der Menge

$$M = \{\emptyset, 1, a, 3\}$$

Aufgabe 3 Welche der folgenden Relationen auf der Menge aller Personen sind Äquivalenzrelationen?

1. Ist genauso groß wie
2. Ist jünger als

Gruppen, Ringe, Körper

Aufgabe 4 Prüfe, um welche algebraische Struktur es sich bei $(G, \circ)$ handelt, wobei $G = \{a, b, c, d\}$ und

∘	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

handelt. Falls möglich, gib auch die Ordnung von c, das neutrale Element und das inverse Element zu b an.

Aufgabe 5 Wir betrachten die Verknüpfung

$$\circ : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2,\ (x, y) \mapsto (x_1 y_2 - x_2 y_1, x_2 y_2)$$

auf $\mathbb{Z}$. Beurteilen Sie, ob diese Verknüpfung assoziativ bzw. kommutativ ist, ob es ein neutrales Element und Inverse bezüglich dieser Verknüpfung gibt. Entscheiden sie abschließend, ob es sich um eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe oder nichts davon handelt.

Aufgabe 6 Wir betrachten die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Permutationen $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \tau$, sowie deren Inverse, falls diese existieren.

Aufgabe 6 Welche der folgenden Mengen sind Körper?

1. $\mathbb{F}_{17}$
2. $\mathbb{F}_4$
3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
4. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

Modulorechnung

Aufgabe 7 Gib die Restklasse [2] in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ explizit an (das heißt alle Vertreter).

Aufgabe 8 Berechne $\frac{5}{17}$ in $\mathbb{F}_{53}$.

Aufgabe 9 Berechne x mit:

$$5^{3245} \equiv x \bmod 7$$

Aufgabe 10 Geben Sie alle Nullteiler von $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ an und bestimmen Sie $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^{\times}$.

Komplexe Zahlen

Aufgabe 11 Gib für die folgenden komplexen Zahlen Real- und Imaginärteil an:

i) $z_1 = \frac{1}{i} + i$

ii) $z_2 = (i+1)^4$

iii) $z_3 = (22+i) \cdot (22-i)$

iv) $z_4 = \frac{1}{2i+2}$

Aufgabe 12 Geben Sie folgende komplexe Zahlen in Polarkoordinaten an:

i) $z_1 = 3i^2 + 3i$

ii) $z_2 = i - 1$

iii) $z_3 = 14$

Aufgabe 13 Ein Kreis mit Radius 7 mit dem Ursprung als Mittelpunkt lässt sich in den kartesischen Koordinaten mit folgender Gleichung darstellen:

$$K(x,y) : x^2 + y^2 - 49 = 0$$

Wie sieht diese Gleichung in Polarkoordinaten aus?

Aufgabe 14 Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 + z = i$$

in den komplexen Zahlen an.