# PRACTICO #8

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Dada la familia de funciones que son solución general de la ecuación diferencial en el intervalo que indica, determinar las constantes con los valores iniciales dados, comprobar que es solución de la ecuación diferencial mostrar en una gráfica la función y sus derivadas en los puntos dados.

1. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$ en $(-\infty; +\infty)$; $y'' - y' = 0$ si $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$

reemplazando $y(0) = 0$

$0 = C_1 e^{4(0)} + C_2 e^{-(0)}$

$C_1 + C_2 = 0$

reemplazando $y'(0) = 1$

$y' = 4C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x}$

$1 = 4C_1 e^{4(0)} - C_2 e^{-(0)}$

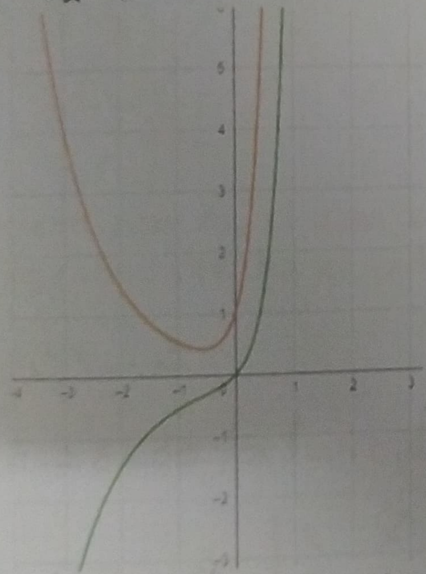
$1 = 4C_1 - C_2$

Sistema de ecuaciones

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 4C_1 - C_2 = 1 \end{cases}$ ; $C_1 = \frac{1}{5}$ ; $C_2 = -\frac{1}{5}$

$y = \frac{1}{5} e^{4x} - \frac{1}{5} e^{-x} \Rightarrow y = \frac{1}{5}(e^{4x} - e^{-x})$

$y' = \frac{4e^{4x}}{5} + \frac{e^{-x}}{5}$



2. $y = C_1 x + C_2 x \ln x$ en $(0; +\infty)$ - $x^2 y'' - x y' + y = 0$ si $y(1) = 1$; $y'(1) = 2$

$y = C_1 x + C_2 x \ln x$

$y' = C_1 + C_2 (1 + \ln x)$

Sistema de ecuaciones

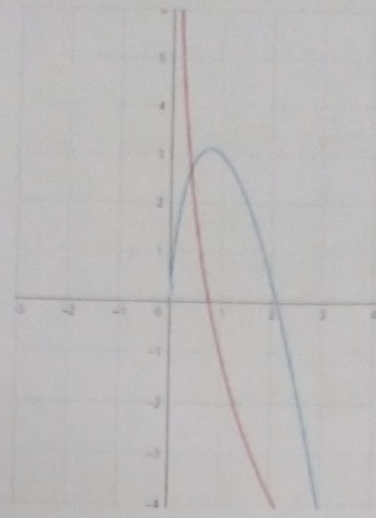
Reemplazando $y(1) = 3$ ; $y'(1) = -1$

$\begin{cases} 3 = C_1 (1) + C_2 \ln 1 \\ -1 = C_1 + C_2 (1 + \ln(1)) \end{cases}$

$C_1 = 3$ ; $C_2 = -4$

$y = 3x - 4x \ln(x)$

$y' = -4 \ln(x) - 1$

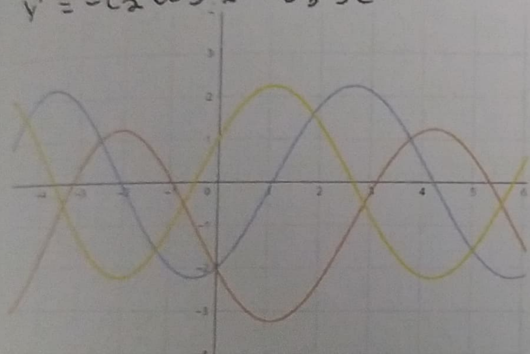


3- $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$ en $(-\infty, \infty)$; $y''' + y = 0$, si $y(\pi) = 0$; $y'(\pi) = 2$
$y''(\pi) = -1$

$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$
$y' = -C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos x$
$y'' = -C_2 \cos x - C_3 \operatorname{sen} x$

Sistema de ecuaciones
Reemplazando los valores iniciales

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \cos(\pi) + C_3 \operatorname{sen}(\pi) \\ 2 = -C_2 \operatorname{sen}(\pi) + C_3 \cos(\pi) \\ -1 = -C_2 \cos(\pi) - C_3 \operatorname{sen}(\pi) \end{cases} ; \quad \begin{matrix} C_1 = -1 \\ C_2 = -1 \\ C_3 = -2 \end{matrix}$$



$y = -1 - 1\cos x - 2 \operatorname{sen} x$
$y' = 1 \operatorname{sen} x - 2\cos x$
$y'' = \cos x + 2 \operatorname{sen} x$

Determinar si el conjunto de funciones es linealmente independiente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$

4. $x, x^2, 4x - x^2$

Utilizando la función wronskiano

$$w(x, x^2, 4x - x^2) = \begin{vmatrix} x & x^2 & 4x - x^2 \\ 1 & 2x & 4 - 2x \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$ $\therefore$ Las funciones son linealmente dependientes

5. $\cos(2x), 1, \cos^2 x$

Utilizando la función Wronskiano

$$w(\cos(2x), 1, \cos^2(x)) = \begin{vmatrix} \cos(2x) & 1 & \cos^2(x) \\ -2\operatorname{sen}(2x) & 0 & \cos^2 \\ -4\cos(2x) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4\cos(2x)$$

$\therefore$ Las funciones son linealmente independientes

6. $e^{x}, e^{-x}, \operatorname{senh}(x)$

utilizando la función wronskiano

$$w(e^{x}, e^{-x}, \operatorname{senh}(x)) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} & \operatorname{senh}(x) \\ e^{x} & -e^{-x} & \cosh(x) \\ e^{x} & e^{x} & \operatorname{senh}(x) \end{vmatrix} = 0$$

∴ Las funciones son linealmente dependiente

Dada la ecuación característica de cierta ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes determinar la ecuación.

7. $D^2 + 10D = 0$

$D(D+10) = 0$

$D_1 = 0 \,;\; D_2 = -10$

$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-10x}$

$\underline{y = C_1 + C_2 e^{-10x}}$

$\boxed{D = \frac{dy}{dx}}$

8. $D^4 + 5D^3 + D^2 = 1$

$D^2(D^2 + 5D + 1) = 1$

$D_1^2 = 0 \,;\; D_2 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \,;\; D_3 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$

$\underline{y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{\frac{-5-\sqrt{21}}{2}} + C_3 e^{\frac{-5+\sqrt{21}}{2}}}$

$\boxed{D = \frac{dy}{dx}}$

9. $(D^2 + 2)^2 (D+3) = 0$

$(D^2 + 2)(D^2 + 2)(D+3) = 0$

$D_1^2 = 2 \,;\; D_2^2 = 2 \,;\; D = -3$

$D_1 = \sqrt{2}$ $\quad D_3 = \sqrt{2}$ $\quad D_5 = -3$

$D_2 = -\sqrt{2}$ $\quad D_4 = -\sqrt{2}$

$\boxed{D = \frac{dy}{dx}}$

$\underline{y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 e^{\sqrt{2}x} + C_4 e^{-\sqrt{2}x} + C_5 e^{-3}}$

10. $D^{10}=0$

$D_1=0;\ D_2=0;\ D_3=0;\ D_4=0;\ D_5=0;\ D_6=0;\ D_7=0;\ D_8=0;$
$D_9=0;\ D_{10}=0$

$y=C_1e^{0x}+C_2e^{0x}+C_3e^{0x}+C_4e^{0x}+C_5e^{0x}+C_6e^{0x}+C_7e^{0x}+C_8e^{0x}+C_9e^{0x}+C_{10}e^{0x}$

$\underline{y=C_1+C_2+C_3+C_4+C_5+C_6+C_7+C_8+C_9+C_{10}}$ $\boxed{D=\frac{dy}{dx}}$

Dada las raices de la ecuación caracteristica de cierta ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes determinar la ecuación.

11. $D_1=1;\ D_2=2$ $\boxed{D=\frac{dy}{dx}}$

$\underline{y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}}$

12. $D_1=D_2=i;\ D_3=D_4=-i$

$D_1=D_2=\sqrt{-1};\ D_3=D_4=-\sqrt{-1}$ $\boxed{D=\frac{dy}{dx}}$

$\underline{y=C_1e^{x}\cos(\sqrt{x})+C_2e^{x}\operatorname{sen}(\sqrt{x})-C_3e^{x}\cos\sqrt{x}+C_4e^{x}\operatorname{sen}(\sqrt{x})}$

13. $D_1=D_2=5+2i;\ D_3=D_4=5-2i;\ D_5=D_6=0$

$D_1, D_2, D_3, D_4$ son raices complejas conjugadas, por lo tanto:

$D_1=D_2=a+bi;\ D_1=D_2=e^{ax}\cos bx;\ D_1=D_2=e^{5x}\cos 2x$
$D_3=D_4=a-bi;\ D_3=D_4=e^{ax}\operatorname{sen} bx;\ D_3=D_4=e^{5x}\operatorname{sen}2x$ $\boxed{D=\frac{dy}{dx}}$

$\underline{y=C_1e^{5x}\cos 2x+C_2e^{5x}\cos 2x+C_3e^{5x}\operatorname{sen}2x+C_4e^{5x}\operatorname{sen}2x+C_5+C_6}$

Determinar la solución de las ecuaciones diferenciales y graficar las funciones que tienen solución particular osea las que tienen condiciones iniciales.

14. $y''+y'-y=0$

$D^2+D-1=0$

$D_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\ D_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\boxed{D=\frac{dy}{dx}}$

$\underline{y=C_1e^{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}+C_2e^{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}}$

15. $y^{iv} + 2y'' + 1 = 0$

$(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$ $\quad D_1 = i \,;\, D_2 = -i \,;\, D_3 = i \,;\, D_4 = -i$ $\quad D = \frac{d}{dx}$

$(D^2 + 1)(D^2 + 1) = 0$ $\quad \underline{y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + C_3 x \operatorname{sen} x + C_4 x \cos x}$

16. $y'' - 7y' + 10y = 0$ si $y(0) = y'(0) = 2$ $\quad D = \frac{dy}{dx}$

$(D^2 - 7D + 10)y = 0 \,;\, D^2 - 7D + 10 = 0 \,;\, (D-5)(D-2) = 0 \,;\, D_1 = 5,\, D_2 = 2$

$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{2x} \,;\, y' = 5C_1 e^{5x} + 2C_2 e^{2x}$

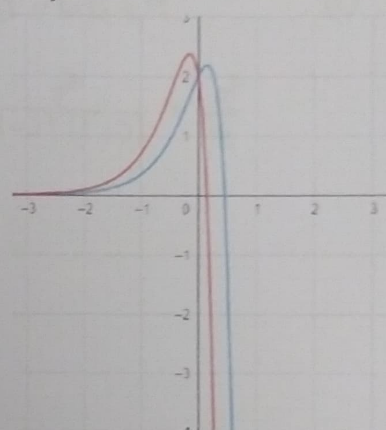
Sistema de ecuaciones

Reemplazando las condiciones $y(0) = y'(0) = 2$

$$\begin{cases} 2 = C_1 e^{5(0)} + C_2 e^{2(0)} \\ 2 = 5C_1 e^{5(0)} + 2C_2 e^{2(0)} \end{cases}$$

$C_1 = -\frac{2}{3} \,;\, C_2 = \frac{8}{3}$

$\underline{y = -\frac{2}{3} e^{5x} + \frac{8}{3} e^{2x}}$

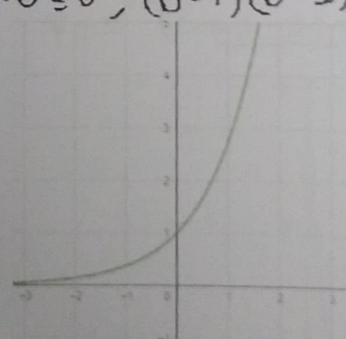


17. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ si $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$

$(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0 \,;\, D^3 - 6D^2 + 11D - 6 = 0 \,;\, (D-1)(D-2)(D-3) = 0$

$D_1 = 1 \,;\, D_2 = 2 \,;\, D_3 = 3$

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$
$y' = C_1 e^{x} + 2C_2 e^{2x} + 3C_3 e^{3x}$
$y'' = C_1 e^{x} + 4C_2 e^{2x} + 9C_3 e^{3x}$



Sistema de ecuaciones

Reemplazando la condición $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$ $\quad D = \frac{dy}{dx}$

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^{0} + C_2 e^{2(0)} + C_3 e^{3(0)} \\ 1 = C_1 e^{0} + 2C_2 e^{2(0)} + 3C_3 e^{3(0)} \\ 1 = C_1 e^{0} + 4C_2 e^{2(0)} + 9C_3 e^{3(0)} \end{cases} \;;\; \begin{matrix} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \end{matrix} \;;\; y = 1e^{x} + 0e^{2x} + 0e^{3x}$$

$\underline{y = e^{x}}$ $\quad \underline{y' = e^{x}}$ $\quad \underline{y'' = e^{x}}$

18. $y^{(9)} - y^{(7)} + 273y^{(5)} - 820y''' + 570y' = 0$

$\boxed{D = \frac{dy}{dx}}$

$D^9 - D^7 + 273D^5 - 820D^3 + 570D = 0$

$D(D^8 - D^6 + 273D^4 - 820D^2 + 570) = 0$

$\therefore$ No se puede factorizar mas

19. $y'' - 6y' + 9y = e^x$

$y = y_c + y_h$

Calculamos $y_h$

$(D^2 - 6D + 9)y = 0$

$(D-3)(D-3) = 0$ $\boxed{D = \frac{dy}{dx}}$

$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} x$

Calculamos $y_c$

$y = \frac{e^x}{D^2 - 6D + 9} \Rightarrow y = \frac{e^x}{(D-3)(D-3)}$ ; $\alpha = 1$

$y = \frac{e^x}{(1-3)(1-3)} = \frac{e^x}{4}$

Solución final

$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{e^x}{4}$

20. $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-3x}$ ; $y(0) = y'(0) = 1$

$y = y_c + y_h$

Calculamos $y_h$

$D^2 + 4D + 5 = 0$

$D_1 = -2 + i$ ; $D_2 = -2 - i$ $\boxed{D = \frac{dy}{dx}}$

$y_h = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \operatorname{sen} x$

Calculamos $y_c$

$y_c = 10e^{-3x}$

$y_c = \frac{10e^{-3x}}{D^2 + 4D + 5}$ ; $\alpha = -3$

$y_c = \frac{10e^{-3x}}{2} = 5e^{-3x}$

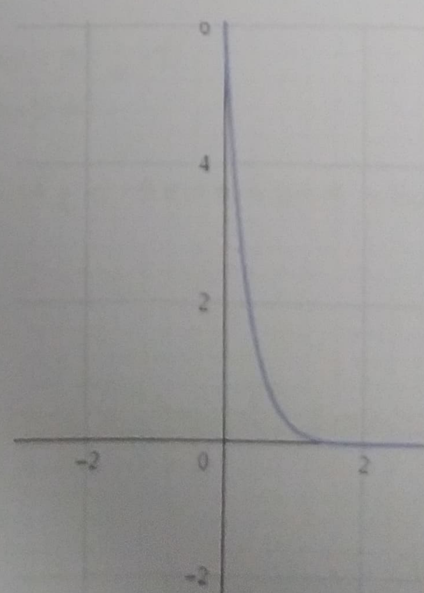
Solución

$y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \operatorname{sen} x + 5e^{-3x}$

$y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) + 5e^{-3x}$

Para la condición $y(0) = y'(0) = 1$

$y = e^{-2x}(\cos x - \operatorname{sen}(x)) + 5e^{-3x}$



# PRACTICO #9

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR MÉTODO VARIACION DE PARÁMETRO

En los problemas 1-18 resuelva cada ecuación diferencial por medio de variación de parametros.

1. $y'' + y = \sec x$

Realizando el calculo auxiliar $m^2+1=0$ entonces:

$y_c = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

Identificando $f(x) = \sec x$ tenemos:

$$u_1' = -\frac{\operatorname{sen} x \sec x}{1} = -\tan x \quad ; \quad u_2' = \frac{\cos x \sec x}{1} = 1$$

$u_1 = \ln|\cos x|$ ; $u_2 = x$ ; entonces tenemos:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \cos x \ln|\cos x| + x \operatorname{sen} x$$

2. $y'' + y = \tan x$

Realizando el calculo auxiliar $m^2+1=0$ tenemos:

$y_c = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$ ; $W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1$

Identificando $f(x) = \tan x$; tenemos: $u_1' = -\operatorname{sen} x \tan x = \cos x - \sec x$

$u_2' = \operatorname{sen} x$

$u_1 = \operatorname{sen} x - \ln|\sec x + \tan x|$

$u_2 = -\cos x$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \cos x(\operatorname{sen} x - \ln|\sec x + \tan x|) - \cos x \operatorname{sen} x$$

3. $y'' + y = \operatorname{sen} x$

Haciendo el calculo auxiliar $m^2+1=0$ tenemos:

$y_c = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$ ; $W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1$

Identificando $f(x) = \operatorname{sen} x$ tenemos:

$\mu_1' = -\operatorname{sen}^2 x$

$\mu_2' = \cos(x)\operatorname{sen}(x)$

Entonces: $\mu_1 = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x - \frac{1}{2}x$

$\mu_2 = -\frac{1}{2}\cos^2 x$

$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos^2 x - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{2}\cos^2 x \operatorname{sen} x$

$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x$

4. $y'' + y = \sec x \tan x$

Haciendo el calculo auxiliar $m^2+1=0$ tenemos:

$y_c = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$ ; $W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1$

Identificando $y = \sec(x)\tan(x)$ tenemos:

$\mu_1' = -\operatorname{sen} x(\sec x \tan x) = -\tan^2 x = 1 - \sec^2 x$

$\mu_2' = \cos x(\sec x \tan x) = \tan x$

Entonces:

$\mu_1 = x - \tan x$ ; $\mu_2 = -\ln|\cos x|$

$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x\cos x - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \ln|\cos x|$

$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x\cos x - \operatorname{sen} x \ln|\cos x|$

5. $y'' + y = \cos^2 x$

Haciendo el calculo auxiliar $m^2+1=0$ tenemos:

$y_c = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$ ; $W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1$

Identificando $f(x) = \cos^2 x$ tenemos:

$\mu_1' = -\operatorname{sen} x \cos^2 x$ ; $\mu_2' = \cos^3 x = \cos x(1 - \operatorname{sen}^2 x)$

Entonces:

$u_1 = \frac{1}{3}\cos^3 x$ ; $u_2 = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x$

$y = C_1\cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\cos^4 x + \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^4 x$

$y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen}^2 x$

$y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x$

6. $y'' - y = \sec^2 x$

Haciendo el calculo auxiliar $m^2+1=0$ entonces:

$y_c = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x$ ; $W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1$

Identificando $f(x) = \sec^2 x$ tenemos:

$u_1' = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ ; $u_2' = \sec x$

$u_1 = -\frac{1}{\cos x} = -\sec x$ ; $u_2 = \ln|\sec x + \tan x|$

$y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x - \cos x \sec x + \operatorname{sen} x \ln|\sec x + \tan x|$

$y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x - 1 + \operatorname{sen} x \ln|\sec x + \tan x|$

7. $y'' - y = \cosh x$

Haciendo el calculo auxiliar $m^2+1=0$ tenemos:

$y_c = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ ; $W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$

Identificando $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x)$

$u_1' = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}$ ; $u_2' = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2x}$

$u_1 = -\frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{1}{4}x$ ; $u_2 = -\frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x$

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{8}e^{-x} + \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{8}e^x - \frac{1}{4}xe^{-x}$

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x \operatorname{senh} x$

8. $y'' - y = \operatorname{senh} 2x$

Haciendo el calculo auxiliar $m^2+1=0$ tenemos

$y_c = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$; $W = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$

Identificando $f(x) = \operatorname{senh} 2x$ tenemos:

$u_1' = -\frac{1}{4} e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{x}$ ; $u_2' = \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{4} e^{3x}$

$u = \frac{1}{12} e^{-3x} + \frac{1}{4} e^{x}$ ; $u_2 = -\frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{12} e^{3x}$

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{12} e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} - \frac{1}{12} e^{2x}$

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{6} \left( e^{2x} - e^{-2x} \right)$

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} \operatorname{senh} 2x$

9. $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$

Haciendo el calculo auxiliar $m^2 - 4 = 0$ tenemos:

$y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ ; $W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4$

Identificando $f(x) = e^{2x}/x$ tenemos:

$u_1' = \frac{1}{4x}$ ; $u_2' = \frac{-e^{4x}}{4x}$

$u_1 = \frac{1}{4} \ln(x)$ ; $u_2 = -\frac{1}{4} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{4t}}{t} \, dt$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4} \left( e^{2x} \ln(x) - e^{-2x} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{4t}}{t} \, dt \right)$

10. $y'' - 9y = \frac{9x}{e^{3x}}$

Haciendo el calculo auxiliar $m^2 - 9 = 0$ tenemos:

$y_c = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ ; $W = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6$

Identificando $f(x)=\frac{9x}{e^{3x}}$ tenemos:

$u_1' = -\frac{1}{24}e^{-6x}$ ; $u_2' = -\frac{3}{2}x$

$u_1 = -\frac{1}{24}e^{-6x} - \frac{1}{4}xe^{-6x}$ ; $u_2 = -\frac{3}{4}x^2$

$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} \underline{-\frac{1}{4}xe^{-3x}(1-3x)}$

11. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$

Haciendo el calculo auxiliar $m^2+3m+2=(m+1)(m+2)=0$ tenemos:

$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$ ; $W = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-3x}$

Identificando $f(x) = \frac{1}{(1+e^x)}$ tenemos:

$u_1' = \frac{e^x}{1+e^x}$ ; $u_2' = -\frac{e^{2x}}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} - e^x$

$u_1 = \ln(1+e^x)$ ; $u_2 = \ln(1+e^x) - e^x$

$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}\ln(1+e^x) - e^{x}$

$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} \underline{+(1+e^{-x})e^{-x}\ln(1+e^x)}$

12. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$

Haciendo el calculo auxiliar $m^2-2m+1=(m-1)^2=0$ tenemos:

$y_c = c_1e^x + c_2e^x$ ; $W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x+e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$

Identificando $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$

$u_1' = \frac{xe^xe^x}{e^{2x}(1+x^2)} = -\frac{x}{1+x^2}$ ; $u_2' = \frac{1}{1+x^2}$

$u_1 = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ ; $u_2 = \tan^{-1}(x)$

$y = C_1 e^x + C_2 e^x x - \frac{1}{2} e^x \ln(1+x^2) + x e^x \tan^{-1}(x)$

13. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} e^x$

Haciendo el calculo auxiliar $m^2 + 3m + 2 = (m+1)(m+2) = 0$

$y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ ; $W = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-3x}$

Identificando $f(x) = \operatorname{sen} e^x$ tenemos:

$u_1' = \frac{e^{-2x}\operatorname{sen} e^x}{e^{-3x}} = \frac{e^x \operatorname{sen} e^x}{}$ ; $u_2' = \frac{e^{-x}\operatorname{sen} e^x}{-e^{-3x}} = -e^{2x}\operatorname{sen} e^x$

$u_1 = -\cos e^x$ ; $u_2 = e^x \cos x - \operatorname{sen} e^x$

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - e^{-x}\cos e^x + e^{-x}\cos e^x - e^{-2x}\operatorname{sen} e^x$

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - e^{-2x}\operatorname{sen} e^x$

14. $y'' - 2y' + y = e^t \arctan t$

Haciendo calculo auxiliar $m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 = 0$ tenemos:

$y_c = C_1 e^t - C_2 t e^t$ ; $W = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & te^t + e^t \end{vmatrix} = e^{2t}$

Identificando $f(x) = e^t \tan^{-1} t$

$u_1' = -\frac{te^t e^t \tan^{-1} t}{e^{2t}} = -t\tan^{-1} t$ ; $u_2' = \frac{e^t e^t \tan^{-1} t}{e^{2t}} = \tan^{-1} t$

$u_1 = -\frac{1+t^2}{2}\tan^{-1}(t) + \frac{t}{2}$ ; $u_2 = t\tan^{-1} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$

$y = C_1 e^t + C_2 t e^t + \left(-\frac{1+t^2}{2}\tan^{-1} t + \frac{t}{2}\right)e^t + \left(t\tan^{-1} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)te^t$

$y = C_1 e^t + C_2 t e^t + \frac{1}{2} e^t \left[(t^2-1)\tan^{-1} t - \ln(1+t^2)\right]$

15. $y'' + 2y' + y = e^{-t}\ln t$

Haciendo el calculo auxiliar $m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 = 0$ tenemos:

$y_c = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$ ; $W = \begin{vmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & -te^{-t} + e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-2t}$

Identificando $f(t) = e^{-t}\ln t$

$u_1' = -\dfrac{te^{-t}e^{-t}\ln t}{e^{-2t}} = -t\ln t$ ; $u_2' = \dfrac{e^{-t}e^{-t}\ln t}{e^{-2t}} = \ln t$

$u_1 = -\frac{1}{2}t^2\ln t + \frac{1}{4}t^2$ ; $u_2 = t\ln t - t$

$y = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t}\ln t + \frac{1}{4}t^2 e^{-t} + t^2 e^{-t}\ln t - t^2 e^{-t}$

$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t}\ln t - \frac{3}{4}t^2 e^{-t}$

16. $2y'' + 2y' + y = 4\sqrt{x}$

Haciendo el calculo auxiliar $2m^2 + 2m + 1 = 0$ tenemos

$y_c = e^{-x/2}(C_1 \cos x/2 + C_2 \operatorname{sen} x/2)$;

$W = \begin{vmatrix} e^{-x/2}\cos(x/2) & e^{-x/2}\operatorname{sen}(x/2) \\ (-1/2)e^{-x/2}\cos(x/2) - \frac{1}{2}e^{-x/2}\operatorname{sen}(x/2) & \frac{1}{2}e^{-x/2}\cos(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}e^{-x/2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^{-x}$

Identificando $f(x) = 2\sqrt{x}$ tenemos:

$u_1' = -4e^{x/2}\sqrt{x}\operatorname{sen}(\frac{x}{2})$ ; $u_2' = 4e^{x/2}\sqrt{x}\cos(x/2)$

$u_1 = -4\int_{x_0}^{x} e^{t/2}\sqrt{t}\operatorname{sen}(t/2)\,dt$ ; $u_2 = 4\int_{x_0}^{x} e^{t/2}\sqrt{t}\cos(t/2)\,dt$

$y = e^{-x/2}(C_1\cos(x/2) + C_2\operatorname{sen}(x/2)) - 4e^{-x/2}\cos(x/2)\int_{x_0}^{x} e^{t/2}\sqrt{t}\operatorname{sen}(t/2)\,dt$
$+ 4e^{-x/2}\operatorname{sen}(x/2)\int_{x_0}^{x} e^{t/2}\sqrt{t}\cos(t/2)\,dt$

17. $3y'' - 6y' + 6y = e^x \sec x$

Haciendo el calculo auxiliar $3m^2 - 6m + 6 = 0$ tenemos:

$$y_c = e^x(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) \; ; \; W = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \operatorname{sen} x \\ e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x & e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

Identificando $f(x) = \frac{1}{3} e^x \sec x$ tenemos:

$$u_1' = -\frac{(e^x \operatorname{sen} x)(e^x \sec x)/3}{e^{2x}} = -\frac{1}{3} \tan x \; ; \; u_1 = \frac{1}{3} \ln(\cos x)$$

$$u_2' = \frac{(e^x \cos x)(e^x \sec x)/3}{e^{2x}} = \frac{1}{3} \; ; \; u_2 = \frac{1}{3} x$$

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \cos x + \frac{1}{3} \ln(\cos x)\, e^x \cos x + \frac{1}{3} x e^x \operatorname{sen} x$$

18. $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1-x^2}$

Haciendo el calculo auxiliar $4m^2 - 4m + 1 = (2m-1)^2 = 0$ tenemos:

$$y_c = C_1 e^{x/2} + C_2 x e^{x/2} \; ; \; W = \begin{vmatrix} e^{x/2} & x e^{x/2} \\ \frac{1}{2} e^{x/2} & \frac{1}{2} x e^{x/2} + e^{x/2} \end{vmatrix} = e^x$$

Identificando $f(x) = \frac{1}{4} e^{x/2} \sqrt{1-x^2}$ tenemos:

$$u_1' = -\frac{e^{x/2} x e^{x/2} \sqrt{1-x^2}}{4e^x} = -\frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} \; ; \; u_1 = \frac{1}{12}(1-x^2)^{3/2}$$

$$u_2' = \frac{e^{x/2} e^{x/2} \sqrt{1-x^2}}{4e^x} = \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} \; ; \; u_2 = \frac{x}{8}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8} \operatorname{sen}^{-1} x$$

$$y = C_1 e^{x/2} + C_2 x e^{x/2} - \frac{1}{12} e^{x/2} (1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{8} x^2 e^{x/2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8} x e^{x/2} \operatorname{sen}^{-1} x$$

En los problemas 19 a 22 resuelva cada ecuación diferencial mediante variación de parámetros, sujeta a las condiciones iniciales $y(0)=1$; $y'(0)=0$.

19. $4y''-y=xe^{x/2}$

Haciendo el calculo auxiliar $4m^2-1=(2m-1)(2m+1)=0$ entonces:

$y_c=c_1e^{x/2}+c_2e^{-x/2}$ ; $W=\begin{vmatrix} e^{x/2} & e^{-x/2} \\ \frac{1}{2}e^{x/2} & -\frac{1}{2}e^{-x/2} \end{vmatrix}=-1$

Identificando $f(x)=\dfrac{xe^{x/2}}{4}$ tenemos:

$u_1'=x/4$ ; $u_1=x^2/8$

$u_2'=\dfrac{-xe^x}{4}$ ; $u_2=\dfrac{-xe^x}{4}+\dfrac{e^x}{4}$

$y=c_1e^{x/2}+c_2e^{-x/2}+\frac{1}{8}x^2e^{x/2}-\frac{1}{4}xe^{x/2}+\frac{1}{4}e^{x/2}$

$y=c_1e^{x/2}+c_2e^{-x/2}+\frac{1}{8}x^2e^{x/2}-\frac{1}{4}xe^{x/2}$

$y'=\frac{1}{2}c_1e^{x/2}-\frac{1}{2}c_2e^{-x/2}+\frac{1}{16}x^2e^{x/2}+\frac{1}{8}xe^{x/2}-\frac{1}{4}e^{x/2}$

Aplicando condiciones iniciales $y(0)=1$; $y'(0)=0$ tenemos:

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ \frac{1}{2}c_1-\frac{1}{2}c_2-\frac{1}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow c_1=\frac{3}{4} \ ; \ c_2=\frac{1}{4}$$

$$y=\frac{3}{4}e^{x/2}+\frac{1}{4}e^{-x/2}+\frac{1}{8}x^2e^{x/2}-\frac{1}{4}xe^{x/2}$$

20. $2y''+y'-y=x+1$

Haciendo la ecuación del calculo auxiliar $2m^2+m-1=(2m-1)(m+1)=0$ tenemos:

$y_c=c_1e^{x/2}+c_2e^{-x}$ ; $W=\begin{vmatrix} e^{x/2} & e^{-x} \\ \frac{1}{2}e^{x/2} & -e^{-x} \end{vmatrix}=-\frac{3}{2}e^{-x/2}$

Identificando la función $f(x)=(x+1)/2$ tenemos:

$u_1'=\frac{1}{3}e^{-x/2}(x+1)$ ; $u_1=-e^{-x/2}\left(\frac{2}{3}x-2\right)$

$$\mu_2' = -\frac{1}{3}e^{x}(x+1) \quad ; \quad \mu_2 = -\frac{1}{3}xe^{x}$$

$$y = C_1e^{x/2} + C_2e^{-x} - x - 2$$
$$y' = \frac{1}{2}C_1e^{x/2} - C_2e^{-x} - 1$$

Con las condiciones iniciales tenemos

$$\begin{cases} C_1 - C_2 - 2 = 1 \\ \frac{1}{2}C_1 - C_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{8}{3} \;,\; C_2 = \frac{1}{3}$$

$$\underline{y = \frac{8}{3}e^{x/2} + \frac{1}{3}e^{-x} - x - 2}$$

21. $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$

Haciendo el calculo auxiliar $m^2 + 2m - 8 = (m-2)(m+4) = 0$ tenemos:

$$y_c = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} \quad ; \quad W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-4x} \\ 2e^{2x} & -4e^{-4x} \end{vmatrix} = -6e^{-2x}$$

Identificando $f(x) = 2e^{-2x} - e^{-x}$ tenemos:

$$\mu_1' = \frac{1}{3}e^{-4x} - \frac{1}{6}e^{-3x} \quad ; \quad \mu_1 = -\frac{1}{12}e^{-4x} + \frac{1}{18}e^{-3x}$$

$$\mu_2' = -\frac{1}{6}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{2x} \quad ; \quad \mu_2 = \frac{1}{18}e^{3x} - \frac{1}{6}e^{2x}$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} - \frac{1}{12}e^{-2x} + \frac{1}{18}e^{-x} + \frac{1}{18}e^{-x} - \frac{1}{6}e^{-2x}$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-x} \quad ; \quad y' = 2C_1e^{2x} - 4C_2e^{-4x} + \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{9}e^{-x}$$

Aplicando condiciones iniciales $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$ tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{5}{36} = 1 \\ 2C_1 - 4C_2 + \frac{7}{18} = 0 \end{cases} \;;\; C_1 = \frac{25}{36} \;;\; C_2 = \frac{4}{9}$$

$$\underline{y = \frac{25}{36}e^{2x} + \frac{4}{9}e^{4x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}}$$

$22.\ y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}$

Haciendo el calculo auxiliar $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$ tenemos:

$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ ; $W = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}$

Identificando $f(x) = (12x^2 - 6x)e^{2x}$ tenemos:

$u_1' = 6x^2 - 12x^3$ ; $u_1 = 2x^3 - 3x^4$

$u_2' = 12x^2 - 6x$ ; $u_2 = 4x^3 - 3x^2$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^{2x}(x^4 - x^3)$ ; $y' = 2c_1 e^{2x} + c_2(2xe^{2x} + e^{2x}) + e^{2x}(4x^3 - 3x^2) + 2e^{2x}(x^4 - x^3)$

Aplicando condiciones iniciales tenemos:

$\begin{cases} c_1 = 1 \\ 2c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1$ ; $c_2 = -2$ ; $y = e^{2x}(x^4 - x^3 - 2x + 1)$

En los problemas 23 y 24 las funciones que se indican son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea asociada en $(0; +\infty)$. Determine la solución general de la ecuación homogénea.

$23.\ x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}$ ; $y_1 = x^{-1/2}\cos x$ ; $y_2 = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$

Reescribir la ecuación a la forma:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) = y = x^{-1/2}$$

Identificamos $f(x) = x^{-1/2}$. De $y_1 = x^{-1/2}\cos x$ y $y_2 = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$

$$W = \begin{vmatrix} x^{-1/2}\cos x & x^{-1/2}\operatorname{sen} x \\ -x^{-1/2}\operatorname{sen} x - 1/2\, x^{-3/2}\cos x & x^{-1/2}\cos x - \frac{1}{2}x^{-3/2}\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

$u_1' = \operatorname{sen} x$ ; $u_1 = \cos x$

$u_2' = \cos x$ ; $u_2 = \operatorname{sen} x$

$y = c_1 x^{-1/2}\cos x + c_2 x^{-1/2}\operatorname{sen} x + x^{-1/2}$

24. $x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x)$; $y_1 = \cos(\ln x)$ ; $y_2 = \operatorname{sen}(\ln x)$

Reescribimos la ecuación a la forma:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{\sec(\ln x)}{x^2}$$

Identificando $f(x)$ tenemos $f(x) = \sec \frac{\ln x}{x^2}$. De $y_1 = \cos(\ln x)$ y $y_2 = \operatorname{sen}(\ln x)$ tenemos:

$$W = \begin{vmatrix} \cos(\ln x) & \operatorname{sen}(\ln x) \\ \frac{-\operatorname{sen}(\ln x)}{x} & \frac{\cos(\ln x)}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \; ; \quad u_1' = \frac{-\tan(\ln x)}{x} \; ; \; u_1 = \ln|\cos(\ln x)|$$

$$u_2' = \frac{1}{x} \; ; \; u_2 = \ln x$$

$$y = \cos(\ln x)\ln|\cos(\ln x)| + (\ln x)\operatorname{sen}(\ln x)$$

En los problemas 25 al 28 resuelva la ecuación diferencial de tercer orden usando variación de parámetros

25. $y''' + y' = \tan x$

Haciendo el calculo auxiliar $m^3 + m = m(m^2+1) = 0$ tenemos:

$$y_c = C_1 + C_2\cos x + C_3 \operatorname{sen} x \; ; \quad W = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = 1$$

Identificando $f(x) = \tan(x)$ tenemos:

$u_1' = \tan x$ ; $u_1 = -\ln|\cos x|$

$u_2' = -\operatorname{sen} x$ ; $u_2 = \cos x$

$u_3' = \cos x - \sec x$ ; $u_3 = \operatorname{sen} x - \ln|\sec x + \tan x|$

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3 \operatorname{sen} x - \ln|\cos x| - \operatorname{sen} x \ln|\sec x + \tan x|$$

26. $y''' + 4y' = \sec 2x$

Haciendo el calculo auxiliar $m^3 + 4m = m(m^2+4) = 0$ tenemos:

$$y_c = C_1 + C_2\cos(2x) + C_3\operatorname{sen}2x \; ; \quad W = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ 0 & -2\operatorname{sen}2x & 2\cos 2x \\ 0 & -4\cos 2x & -4\operatorname{sen}2x \end{vmatrix} = 8$$

Identificando $f(x) = \sec 2x$ tenemos:

$u_1' = \frac{1}{4}\sec 2x$ ; $u_1 = \frac{1}{8}\ln|\sec 2x + \tan 2x|$

$u_2' = -\frac{1}{4}$ ; $u_2 = -\frac{1}{4}x$

$u_3' = -\frac{1}{4}\tan 2x$ ; $u_3 = \frac{1}{8}\ln|\cos 2x|$

$y = c_1 + c_2\cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\ln|\sec 2x + \tan 2x| - \frac{1}{4}x\cos 2x$

$+ \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x \ln|\cos 2x|$

27. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x}$

Haciendo el calculo auxiliar $3m^2 - 6m + 30 = 0$ tenemos:

$y_c = e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$

$$w = \begin{vmatrix} e^x\cos 3x & e^x \operatorname{sen} 3x \\ e^x\cos 3x - 3e^x \operatorname{sen} 3x & 3e^x\cos 3x + e^x \operatorname{sen} 3x \end{vmatrix} = 3e^{2x}$$

Identificando $f(x) = \frac{1}{3}e^x \tan x$ tenemos:

$u_1' = -\frac{1}{9}\operatorname{sen} 3x \tan 3x$ ; $u_1 = \frac{1}{27}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{27}\left[\ln\left(\cos\frac{3x}{2} - \operatorname{sen}\frac{3x}{2}\right)\right]$

$u_2' = \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3x$ ; $u_2 = -\frac{1}{27}\cos 3x$

$y = e^x(c_1\cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$

28. $y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$

Haciendo la ecuación auxiliar $m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 = 0$ tenemos:

$y_c = c_1 e^x + c_2 x e^x$ ; $w = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$

Identificando $f(x) = \frac{e^x}{x}$ tenemos:

$u_1' = -1$ ; $u_1 = -x$
$u_2' = \frac{1}{x}$ ; $u_2 = \ln x$

$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + 4x^2 + 16x + 21 - xe^x + xe^x \ln x$