PRACTICO # 4

Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden

1. $y' + y = 2 ; \ y(0) = 0$

$y' + p(x)y = q(x)$

$y' + \underbrace{1}_{p_x} y = \underbrace{2}_{q(x)}$

✓ 1^{er} paso: obtener u

$u = e^{\int p(x)dx}$

$u = e^{\int 1 dx}$

$u = e^x$

✓ 2^{do} paso: Reemplazar lo obtenido

$yu = \int qu\,dx$

$ye^x = \int 2e^x dx$

$ye^x = 2\int e^x dx$

$ye^x = 2e^x + C$

$y = \frac{2e^x}{e^x} + \frac{C}{e^x}$

$y = 2 + C/e^x$

✓ 3^{er} paso: Aplicar condiciones iniciales $[y(0) = 0]$

$y = 2 + \frac{C}{e^x}$

$0 = 2 + \frac{C}{e^0}$

$C = -2 \longrightarrow y = 2 - \frac{2}{e^x} = y = 2 - 2e^{-x}$

2. $y' - 2y = 3e^{2x} ; \ y(0) = 0$

$y = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + C \cdot e^{-\int p(x)dx}$

✓ Identificar $p(x), q(x)$

$y' + p(x)y = q(x) \qquad p(x) = -2$

$y' - 2y = 3e^{2x} \qquad q(x) = 3e^{2x}$

✓ 1^{er} paso hallar factor integrante

$I = e^{-\int p(x)dx} \qquad e^{\int p(x)dx}$

$I = e^{-\int -2dx} \qquad e^{\int -2dx}$

$I = e^{2\int dx} \qquad e^{-2\int dx}$

$I = e^{2x} \qquad e^{-2x}$

✓ 2^{do} paso: Hallar solución homogenea

$y_h = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$

$y_h = C \cdot e^{2x}$

✓ 3^{er} paso: Hallar la solución particular

$y_p = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} \cdot Q(x)dx$

$y_p = e^{2x} \cdot \int e^{-2x} \; 3e^{2x} dx$

$y_p = e^{2x} \int 3dx$

$y_p = e^{2x} \; 3x$,,

✓ 4^{to} paso: $y = y_p + y_H$

$y = e^{2x} \; 3x + C \cdot e^{2x}$

✓ Aplicando condiciones iniciales $[y(0) = 0]$

$y = e^{2x} \; 3x + Ce^{2x}$

$0 = e^{2(0)} 3(0) + C \cdot e^{2(0)}$

$0 = 0 + 1 C$

$C = 0$

✓ Cuando $y(0) = 0$

$y = e^{2x} \; 3x + 0 \cdot e^{2x}$

$y = e^{2x} \; 3x$

3. $y' + 3y = 2xe^{-3x}$

$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \int e^{\int p(x)dx} \cdot (Q(x))dx + Ce^{-\int p(x)dx}$

✓ 1^{er} paso: Hallar el factor integrante

$I = e^{-\int p(x)dx}$ $\quad$ $I = e^{\int p(x)dx}$

$I = e^{-\int 3dx}$ $\quad$ $I = e^{\int 3dx}$

$I = e^{-3x}$ $\quad$ $I = e^{3\int dx}$

$I = e^{3x}$

✓ 2^{do} paso: Hallar la solución homogenea

$y_H = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$

$y_H = C \cdot e^{-3x}$

3er paso: Hallar la solución particular

$y_p = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx$

$y_p = e^{-3x} \cdot \int e^{3x} \cdot 2x e^{-3x} dx$

$y_p = e^{-3x} \cdot \int 2x \, dx$

$y_p = e^{-3x} \cdot 2\int x \, dx$

$y_p = e^{-3x} \cdot 2\int x \, dx$

$y_p = e^{-3x} \cdot 2 \frac{x^2}{2}$

$y_p = e^{-3x} x^2$

4to paso $y = y_p + y_H$

$y = e^{-3x} x^2 + Ce^{-3x}$

$y = \frac{x^2}{e^{3x}} + \frac{C}{e^{3x}}$

4. $y' - 2xy = e^{x^2}$

$y = \underbrace{e^{-\int p(x)dx} \cdot \int e^{\int p(x)dx} (q(x))dx}_{y \text{ particular}} + \underbrace{Ce^{-\int p(x)dx}}_{y \text{ homogenea}}$

$p(x) = -2x$

$q(x) = e^{x^2}$

1er paso: Hallar factor integrante

$I = e^{-\int p(x)dx}$ $\quad$ $e^{\int p(x)dx}$

$I = e^{-\int -2x dx}$ $\quad$ $e^{\int -2x dx}$

$I = e^{2\int x dx}$ $\quad$ $e^{-2\int x dx}$

$I = e^{2 \frac{x^2}{2}}$ $\quad$ $e^{-2 \frac{x^2}{2}}$

$I = e^{x^2}$ $\quad$ e^{-x^2}

2do paso hallar la solucion homogenea

$y_H = Ce^{-\int p(x)dx}$

$y_H = C \cdot e^{x^2}$

3ro Hallar la solución particular

$y_p = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int e(x)dx} \cdot Q(x)dx$

$y_p = e^{x^2} \int e^{-x^2} \cdot e^{x^2} dx$

$y_p = e^{x^2} \int dx$

$y_p = e^{x^2} x$

4to $y = y_p + y_H$

$y = e^{x^2} \cdot x + C \cdot e^{x^2}$

5 $xy' + 2y = 3x$; $y(1) = 5$

$y' + p(x)y = q(x)$

$\frac{xy'}{x} + \frac{2x}{x} = \frac{3x}{x}$

$p(x) = 2/x$

$q(x) = 3$

$y' + \frac{2y}{x} = 3$

1er Hallar factor integrante

$I = e^{-\int p(x)dx}$

$I = e^{-\int \frac{2}{x} dx}$

$I = e^{-2\int \frac{1}{x} dx}$

$I = e^{-2\ln x}$

2do Hallar solucion Homogenea

$y_H = C \cdot e^{-\int p(x) dx}$

$y_H = C \cdot e^{-2\ln x}$

3er Hallar solución particular

$y_p = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx$

$y_p = e^{-2\ln x} \int e^{2\ln x} \cdot 3dx$

$y_p = e^{\ln x^{-2}} \int e^{\ln x^2} \cdot 3dx$

$y_p = e^{\ln x^2} \int x^2 3dx$

$yp = e^{\ln x - 2} \; 3 \int x^2 dx$

$yp = e^{\ln x^{-2}} \; 3 \int x^2 dx$

$yp = e^{\ln x^{-3}} \; 3 \frac{x^2}{3}$

$yp = e^{\ln x^{-2}} \; x^3$

✓ 4to Sumar $y = yp + yH$

$y = e^{\ln x^{-2}} \; x^3 + C \cdot e^{\ln x \cdot 2}$

$y = x^{-2} \, x^2 + C \cdot x^2$

$y = x + \frac{C}{x^2}$

✓ Aplicando condiciones iniciales $(y(1) = 5)$

$y = x + \frac{C}{x^2}$

$5 = 1 + \frac{C}{1}$

$C = 5 - 1$

$C = 4$ Cuando $y(1) = 5$ $y = x + \frac{4}{x^2}$

6. $xy' + 5y = 7x^2$

$xy' + 5y = 7x^2 \; (1 \cdot x)$

$y' + \frac{5}{x} y = 7x$

$x^{5} = \int 7x^6$

$yx^5 = x^7 + C$

$y = x^2 + Cx^{-5}$ $\boxed{\text{Solución general}}$

$5 = 4 + \frac{C}{32}$

$C = 32$

$y = x^2 + 32x^{-5}$ $\boxed{\text{Solución particular}}$

$y(2) = 5$

$u = e^{\int \frac{5}{x} dx}$

$u = e^{5 \ln x}$

$u = x^5$

7. $2xy' + y = 10\sqrt{x}$

$$2xy' + y = 10\sqrt{x} \quad (1/2x)$$
$$y' + \frac{y}{2x} = \frac{5}{x}\sqrt{x}$$
$$y\sqrt{x} = \int 5$$
$$y\sqrt{x} = 5x + C$$
$$y = 5x^{-\frac{1}{2}} + Cx^{-\frac{1}{2}}$$

$$u = e^{\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}}$$
$$u = e^{\frac{1}{2}\ln x}$$
$$u = \sqrt{x}$$

$\boxed{\text{Solución general}}$

8. $3xy' + y = 12x$

$$3xy' + y = 12x \quad (\div 3x)$$
$$y' + \frac{y}{3x} = 4$$
$$yx^{\frac{1}{3}} = \int 4x^{\frac{1}{3}}$$
$$yx^{\frac{1}{3}} = \int 4x^{\frac{1}{3}}$$
$$yx^{\frac{1}{3}} = 3x^{\frac{4}{3}} + C$$
$$y = 3x + Cx^{-\frac{1}{3}}$$

$$u = e^{\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x}}$$
$$u = e^{\ln x \frac{1}{3}}$$
$$u = x^{\frac{1}{3}}$$

$\boxed{\text{Solución general}}$

9. $3\frac{dy}{dx} - y = x^2 \operatorname{sen}(x)$

$$y'' + y' - 12y = 0$$
$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-4x} \quad (1)$$
$$y' = 3C_1e^{3x} - 4C_2e^{-4x} \quad (2)$$
$$y'' = 9C_1e^{3x} + 16C_2e^{-4x} \quad (3)$$

$$9C_1e^{3x} + 12C_2e^{-4x} - 12C_1e^{3x} - 4C_2e^{-4x} - 12C_1e^{3y} + C_2e^{-4x}$$
$$12C_1e^{3x} + 12C_2e^{-4x} - 12(C_1e^{3x} + C_2e^{4x}) = 0$$
$$12C_1e^{-4x}) - 12(C_1e^{3x} + C_2e^{-4x}) = 0$$

10. $y'' = y;\ y = \cosh x + \operatorname{senh} x$

$$y'' - y = 3y'' - 5 = 0$$
$$y = \cosh x + \operatorname{senh}$$
$$y' = \cosh x + \operatorname{senh} x \to y'' = \cosh + \sinh x$$

$$\cosh x + \sinh x - \cosh x + \sinh x = 0$$

11. $xy' + y = 3xy, \quad y(1) = 0$

$$xy' + y = 3xy$$
$$xy' + y - 3xy = 0$$
$$y' + \frac{y}{x} - 3y = 0$$

✓ Reescribiendo en la forma estandar

$$y' + \left(\frac{1}{x} - 3\right) y = 0$$

✓ Encontrando el factor de integración

$$u(x) = e^{-3x} \quad x$$
$$y' = \left(\frac{1}{x} - 3\right) y = 0$$
$$e^{-3x} x y' + e^{-3x} y - 3e^{-3x} x y = 0$$
$$(e^{-3x} x y)' = 0$$
$$(e^{-3x} x y)' = 0$$
$$(e^{-3x} x y = \int 0 dx$$
$$e^{-3x} x y = C_1$$
$$y = \frac{C_1}{e^{-3x} x} \quad y = 0$$

12. $xy' + 3y = 2x^5, \; y(2) = 1$

$$xy' + 3y = 2x^5$$

✓ Reescribiendo

$$y' + \frac{3}{x} y = 2x^4$$

✓ Encontrando el factor de integración

$$u(x) = x^3$$
$$y' + \frac{3}{x} y = 2x^4$$
$$x^3 y' + 3x^2 y = 2x^7$$
$$(x^3 y)' = 2x^7$$

$$x^3 y = \frac{x^8}{4} + C_1$$
$$y = \frac{x^5}{4} + \frac{C_1}{x^3} \cdot x = 2$$
$$1 = \frac{2^6}{4} \cdot \frac{56}{x^3}$$

13. $y' + y = e^x,\ y(0) = 1$

$y' + y = e^x$

√ Hallar el factor de la integracion

$u(x) = e^x$

$y' + y = e^x$

$y'e^x + ye^x = e^{x2}$

$(e^x y) = e^{2x}$

$e^x y = \int e^{2x}\,dx$

$e^x y = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1$

$y = \frac{e^x}{2} + \frac{C_1}{e^x} \quad x = 0 \quad y(1) = 1$

$1 = \frac{e^0}{2} + \frac{C_1}{e^0} \quad C_1 = \frac{1}{2} \quad y = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2e^x}$ //

14. $xy' - 3y = x^3,\ y(1) = 10$

$y' - \frac{3y}{x} = x^2$

√ Hallando el factor de integración

$u(x) = \frac{1}{x^3}$

$\left(\frac{1}{x^3} y\right)' = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x^3} y = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\left(\frac{1}{x^3} y\right)' = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x^3} y = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\frac{1}{x^3} y = \ln(x) + C_1$

$y = \ln(x)\,x^3 + C_1 x^3 \quad x = 1 \quad y = (1) = 10$

$10 = \ln(1) \cdot 1^3 + C_1 \cdot 1^3 \quad C_1 = 10$

$y = \ln(x)\,x^3 + 10x^3$

15. $y' + 2xy = x, \quad y(0) = -2$

$$y' + 2xy = x$$

✓ Hallando el factor de integración

$$u(x) = e^{x^2}$$

$$(e^{x^2} y)' = xe^{x^2}$$

$$e^{x^2} y = \int x e^{x^2} dx$$

$$e^{x^2} y = \frac{1}{2} e^{x^2} + C_1$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{C_1}{e^{x^2}} ; \quad -2 = \frac{1}{2} + \frac{C_1}{e^0} = C_1 = -\frac{5}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{5}{2e^{x^2}}$$

16. $y' = (1-y)\cos x, \ y(\pi) = 2$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (1-y)\cos x$$

$$\frac{1}{1-y} \frac{\partial y}{\partial x} = \cos x$$

$$\int \frac{1}{1-y} \frac{dy}{\partial x} = \cos x$$

$$2 = 1 - e^{-\sin x}$$

$$2 = e^{c} - e^{-\sin x}$$

$$2 = e^{c} - 1$$

$$1 = c^{c}$$

$$\ln(1) = c + 1$$

$$\int \frac{1}{1-y} \frac{dy}{dx} dx = \int \cos x \, dx$$

$$-\ln(1-y) = \sin x + c$$

$$\ln(1-y) = -\sin x - c$$

$$1 - y = e^{-\sin x - c}$$

$$y = 1 - e^{-\sin x - c}$$

$$y = 1 - e^{-\sin x} - e^{-c}$$

$$2 = 1 - e^{-\sin x}$$

$$2 = 1 = e^{-\sin x}$$

17. $(1+x)y' + y = \cos x$

$$y' + \frac{1}{1+x} y = \frac{\cos x}{1+x}$$

$$u(x) = e^{\int \frac{1}{1+x} dx}$$

$$u(x) = 1+x \qquad y(0) = 1$$

$$\int (1+x)y' + y = \int \cos x$$

$$(1+x)y' + y = \int \cos x \, , \quad (1+x)y = \operatorname{sen} x + c$$

$$y = \frac{\operatorname{sen} x + c}{1+x} \qquad y = \frac{\operatorname{sen} x + 1}{1+x}$$

$$1 = \frac{c}{1} \qquad c = 1$$

18. $x' = 2y + x^3 \cos x$

$$x\left(\frac{dy}{dz}\right) = 2y + x^3 \cos(x)$$

$$\frac{dy}{\partial x} - \frac{2y}{x} = x^2 \cos x$$

$$u(x) = e^{-2\ln x}$$

$$u(x) = x^{-2}$$

$$(x^{-2} y) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2y x^{-2}}{x} = \cos x$$

$$x^{-2} \cdot y = \operatorname{sen} x + c$$

$$y = x^2 (\operatorname{sen} x + c)$$

19. $y' + y \cot = \cos x$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos(x - s) dx$$

$$\int \cot x dx$$

$$u(x) \quad e^{\ln} (\operatorname{sen} x)$$

$$u(x)$$

$$u(x) = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen} x y + y \cot x - \operatorname{sen} x \int \cos x \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen} x \cdot y = \frac{\operatorname{sen} x^2}{2} + c$$

$$y = \frac{\operatorname{sen} x^2}{\operatorname{sen} x 2} + \frac{c}{\operatorname{sen} x}$$

$$y = \frac{\operatorname{sen}^2}{2} + c \quad \operatorname{cs} x$$

20. $y' = 1 + x + y + xy$

$y' = 1 + x + y(1+x)$

$y' = (1+x) \cdot (1+y)$

$\frac{1}{1+y} \frac{dy}{dx} = 1+y$

$\ln(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + c$

$1+y = e^{x} + \frac{x^2}{2} + c$

$y = e^{x}\ x + \frac{x^2}{2} + c$

$y = e^{x} + \frac{x^2}{2} + c - 1 \qquad y(0) = 0$

$0 = e^{0} - c^{0} \cdot c^{c} - 1$

$\ln 1 = e^{2}$

$\ln(1) = c \qquad y = e^{x + \frac{x^2}{2} + 1} - 1$

21. $xy' = 3y + x^4 \cos x \quad y(2\pi) = 0$

$p = \exp\left(\int (-3)(x)\, dx\right) = e^{-3\ln} = x^{-3}$

$p = (y \cdot x^{-3}) = \cos x$

$y\, x^{-3} = \operatorname{sen} x + c$

$y(x) = x^{3} \operatorname{sen} t\, c\, x^{3}$

$y(2\pi) = 0$ implcita $c = 0$ así que $y(x) = x^{3} \sin x$

22. $y' = 2xy + 3x^2 \operatorname{Exp}(x^2), y(0) = 5$

$p = \exp\left(\int (-2x)\, dx\right) = e^{-x^2}$

$P_x(y \cdot e^{-x^2}) = 3x^2$

$y \cdot e^{-x^2} = x^3 + c$

$y(x) = (x^3 + c)\, e^{x^2}$

$y(0) = 5$ implica $c = 5$ así que $y(x) = (x^3 + 5)e^{x^2}$

23. $xy' + (2x-3)y = 4x^4$

$p = \exp\left(\int (2 - 3/x)\,dx\right) = e^{2x - 3\ln x} = x^{-3}e^{2x}$

$D_x(y \cdot x^{-3}e^{2x}) = 4e^{2x}$

$y \cdot x^{-3}e^{2x} = 2e^{2x} + C$

$y(x) = 2x^3 + Cx^3e^{-2x}$

24. $(x^2+4)y' + 3y = x$, $y(0) = 1$

$p = \exp\left(\int 3x/(x^2+4)\,dx\right) = e^{3\ln(x^2+4)/2} = (x^2+4)^{3/2}$

$D_x(y \cdot (x^2+4)^{3/2}) = x(x^2+4)^{1/2}$

$y \cdot (x^2+4)^{3/2} = \frac{1}{2}(x^2+4)^{3/2} + C$

$y(x) = \frac{1}{2} + C(x^2+4)^{-3/2}$

$y(0) = 1$ implica $C = \frac{16}{3}$ así que $y(x) = \frac{1}{3} + \frac{16}{3}(x^2+4)^{-3/2}$

25. $(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 3x^3y = 6x\exp\left(-\frac{3}{2}x^2\right)$, $y(0) = 1$

✓ Primero calculamos

$$\int \frac{3x^3\,dx}{x^2+1} = \int \left[3x - \frac{3x}{x^2+1}\right]dx = \frac{3}{2}\left[x^2 - \ln(x^2+1)\right]$$

✓ Se deduce que

$p = (x^2+1)^{-3/2}\exp(3x^2/2)$

✓ Por tanto que:

$D_x(y \cdot (x^2+1)^{-3/2}\exp(3x^2/2)) = 6x(x^2+1)^{-5/2}$

$y \cdot (x^2+1)^{-3/2}\exp(3x^2/2) = -2(x^2+1)^{3/2} + C$

$y(x) = -2\exp(3x^2/2) + C(x^2+1)^{3/2}\exp(-3x^2/2)$

Finalmente $y(0) = 1$ implica que $C = 3$ por lo que la solución

$y(x) = -2\exp(3x^2/2) + 3(x^2+1)^{3/2}\exp(-3x^2/2)$

26. $(-1-4xy^2)\frac{dy}{dx}=y^3$

con $x'=dy/dx$ la ecuacion deferencial es

$y^3x'+4y^2x=1$

✓ Entonces con y como variable independiente calculamos

$p(y)=\exp(\int(4/y)\,dy)=e^{4\ln y},\ D_y=(x\cdot y^4)=5$

$x\cdot y^4=\frac{1}{2}y^2+C,\ x(y)=\frac{1}{2y^2}+\frac{C}{y^4}$

27. $(x+ye^y)\frac{dy}{dx}=1$

con $x'=dy/dx$ • La ecuacion diferencial es

$x'-x=ye^y$ • Entonces con y como variable independiente

$p(y)=\exp(\int(-1)\,dy)=e^{-y};\ D_y(x\,e^{-y})=y$

$x\cdot e^{-y}=\frac{1}{2}y^2+C,\ x(y)=(\frac{1}{2}y^2+c)e^y$

28. $(1+2xy)\frac{dy}{dx}=1+y^2$

Con $x'=dy/dx$, la ecuación diferencial es $(1+y^2)x'-2yx=1$

∴ con y y como variable independiente calculamo

$p(y)=\exp(\int(-2y)/(1+y^2)\,dy)=e^{-\ln(y^2+1)}=(1+y^2)^{-1}$

$D_y(x\,(1+y^2)^{-1})=(1+y^2)^{-2}$

✓ Una tabla de integral ahora produce

$\frac{x}{1+y^2}=\int\frac{dy}{(1+y^2)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{1+y^2}+\tan^{-1}y+c\right)$

$x(y)=\frac{1}{2}\left[y+(1+y^2)(\tan^{-1}y+c)\right]$

29. Exprese la solución general de $dy/dx = 1+2xy$ en termino de la función del tema

$$e.(F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$p = \exp\left(\int (-2x)\, dx\right) = e^{-x^2} \quad D_x(y \cdot e^{-x^2}) = e^{-x^2}$$

$$y \cdot e^{-x^2} = C + \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$y(x) = e^{x^2}\left(C + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x)\right)$$

30. Expresa la solución del problema del valor inicial

$$2x \frac{dy}{dx} = y + 2x\cos x, \; y(1) = 0$$

Despues de la derivación de la ecuación dada por $2x$ multiplicación por el factor integrante $p = x^{-1/2}$ dado como resultado

$$x^{-1/2} y' - \frac{1}{2} x^{-1/2} y = x^{-1/2} \cos x$$

$$D_x(x^{-1/2} y) = x^{-1/2} \cos x$$

$$x^{-1/2} = C + \int_1^x t^{-1/2} \cos t\, dt$$

La condición inicial $y(1)=0$ implica que $C=0$ por tanto la solución practicada buscada en

$$y(x) = x^{1/2} \int_1^x t^{-1/2} \cos t\, dx$$

31. Al muestra que $y_c(x) = Ce^{-\int P(x)dx}$ es la solución general de $dy/dx + P(x)y = 0$

$$y_c' = Ce^{-\int P dx}(-P) = P(y_c) \text{ asi que } y' + Py_c = 0$$

(b) Demuestre que $y_p = e^{-\int P(x)dx}\left[\int (Q(x) e^{\int P(x)dx}) dx\right]$

$$y'_p = (-P)e^{-\int P dx}\left[\int (Q e^{\int P dx}) dx\right] + e^{-\int P dx} = -Py$$

32. Encuentra la constante a y b tales que la función y = a sen x + b cos y = a sen x + b cos x satisface la ecuación diferencial

$y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$

$y = a \operatorname{sen} x + b \cos x$

$y' = a \cos x - b \operatorname{sen} x$

$y'' = -a \operatorname{sen} x - b \cos x$

$y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$

$-a \operatorname{sen} x - b \cos x + a \cos x - b \operatorname{sen} x + 2a \operatorname{sen} x + 2b \cos x = \operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen} x(-3a - b) + \cos x(a - 3b) = \operatorname{sen} x + 0 \cos x$

$-3a - b = 1$

$a - 3b = 0 \Rightarrow \times 3$

$-3a - 1 = 1$

$3a - 9b = 0$

$-10b = 1$

$b = -1/10$

$a - 3b = 0$

$a - 3(-1/10) = 0$

$a + 3/10 = 0$

$a = -3/10$

33. $(x+1)\frac{dy}{dx} + y = \ln(x) \; ; y(1) = 10$

✓ Reescribir con $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x+1} y = \frac{\ln(x)}{x+1}$

✓ Integral

$\int P(x)dx = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1)$

$ye^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} Q(x)\, dx + C$

$ye^{\ln(x+1)} = \int \frac{\ln(x)}{x+1} e^{\ln(x+1)} dx + C$

$y(x+1) = \int \ln(x)$

$y = \frac{x \ln(x) - x + C}{x+1}$

$y = \frac{x \ln(x) - x + C}{x+1}$

✓ Reemplazando variables

$$y = \frac{x\ln(x) - x + c}{x+1}$$

$$10 = \frac{(1)\ln(1) - (1) + c}{(1)+1}$$

$$(10 + \tfrac{1}{2})2 = +c \quad c = 21$$

$$y = \frac{e^{5x^2}}{9}(3x^2 - 1) + c$$

$$y = \frac{e^{5x^2}}{9}(3x^2 - 1) - \frac{20}{9}$$ solución en $y(1) - 10$

34. $x(x+1)\frac{dy}{dx} + xy = 1;\ y(e) = 1$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{(x+1)}y = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$\int P(x)\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(x+1)$$

✓ Reemplazando

$$y\,e^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}\,Q(x)\,dx + c$$

$$y\,e^{\ln(x+1)} = \int \frac{1}{x(x+1)}\,e^{\ln(x+1)}\,dx + c$$

✓ Resolver integral

$$y(x+1) = \int \frac{1}{x(x+1)}(x+1)\,dx$$

$$y = \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$$

$$y = \frac{\ln(x)}{x+1} + \frac{c}{x+1}$$

✓ Reemplazando las variables con los valores iniciales

$$y = \frac{\ln(x)}{x+1} + \frac{c}{x+1}$$

$$(e+1)1 = \ln(e) + c$$

$$e+1 = 1 + c \qquad c = e$$

$$y = \frac{\ln(x)}{x+1} + \frac{c}{x+1}$$

$$y = \frac{\ln(x)}{x+1} + \frac{e}{x+1} \quad y(e) = 1$$

35. Repite el ejemplo 4 para el caso del lago Ontario el cual vacío su cause dentro del río st y recibe un flujo del lago Erie (Via el río Niagara). La diferencia es que este lago solo tiene un volumen de 1640 km^3 y que la razón de entrada y salida de flujo es de 410 km^3/año

$V = 1640 \text{ Km}^3$

$r_i = r_o = r = 410 \text{ km}^3/\text{año}$

$x_0 = x(0) = 5cV$: cuando es $x(t) = 2cV$?

$$\frac{\partial x}{\partial t} = rc - \frac{r}{V}x$$

✓ Escribiendo en la barra lineal

$$\frac{dx}{dx} + px = q$$

$$x(t) = e^{-pt}\left[x_0 \int_0^t q e^{pt}\, dt\right] = e^{-pt}\left[x_0 + \frac{q}{p}(e^{pt} - 1)\right]$$

$$= e^{-rt/V}\left[(5cV + \frac{rc}{r/V}(e^{rt/V} - 1)\right]$$

$$x(t) = cV + 4cVe^{-rt/V} \quad cV + 4cVe^{-rc/V} = 2cV$$

$$\text{para } t = \frac{V}{r}\ln(4) = \frac{1640}{410}\ln(4) = 5.5\text{ias años}$$

36. Un tanque contiene inicialmente 60 gal de agua pura. Salmuera, que contiene 1 lb de sal por gal entra al tanque a una razón de 2 gal/min, y la solución (perfectamente mezclada) sale del recipiente a razón de 3 gal/min; en estas condiciones, el tanque se vacía exactamente después de una 1h. (a) Encuentre la cantidad de sal en el tanque después de t min. b) ¿Cuál es la cantidad máxima de sal dentro del recipiente?

$R_e = 2$ gal/min $R_s = 3$ gal/min

$C_e = 1$ lb/gal $V(t) = (60 - t)$ gal

$R_e C_e = 2(1)$ (lb/min $C_S(t) = \frac{A(t)}{V(t)} = \frac{4t}{60-t}$ lb/gal

$$R_s C_S(t) = 3\frac{A(t)}{60-t} \text{ (lb/min}$$

$\frac{d}{dt} A(t) = R_e C_e - R_s C_s(t) = 2(1) - 3 \frac{A(t)}{60-t} = 2 - \frac{3}{60-t} A(t)$

a) $A'(t) + \frac{3}{60-t} A(t) = 2$, con $A(0) = 0$

$e^{\int \frac{3}{60-t} dt} = e^{-3\ln(60-t)} = e^{\ln(60-t)^{-3}} = (60-t)^{-3}$

Por tanto: $A'(t) + \frac{3}{60-t} A(t) = e \Rightarrow (60-t)^{-3} \left[A'(t) + \frac{3A(t)}{60-t}\right]$
$= 2(60-t)^{-3}$

$\frac{d}{dt}\left[(60-t)^{-3} A(t)\right] = 2(60-t)^{-3} - 2\int (60-t)^{-3} dt =$

$\frac{-2(60-t)^{-2}}{-2} + C$

$A(t) = (60-t) + C(60-t)^3$

$A(0) = 0 \Rightarrow 60 + C(60)^3 = 0 \Rightarrow C = \frac{60}{...}$

$A(t) = (60-t) - \frac{60}{60^3}(60-t)^3 \Rightarrow A(t) = (60-t) - 60\left(\frac{60-t}{60}\right)^3$

b) Cuando hay 10 de en el tanque han parado 50min

$60 - t = 10 \Rightarrow t = 50$

La cantidad de sal es entorno

$A(50) = 10 - 60\left(\frac{10}{60}\right)^3 = 10 - 0{,}28 = 9{,}7216$

37. $\frac{dy}{dx} + 2y \cdot F(x) - y_0 = 0$

$F(x) \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$
$0 \leq x \leq 3$

para $f(x) = 1$

$\frac{dy}{dx} + 2y = 1$

Resolver la integral
$e^{\int 2 dx} = e^{2x}$

$ye^{2x} \int e^{2x} \, a_x \, dx$

$ye^{2x} = \frac{e^{2x}}{2} + c$ cuando $y(0)=0$

$x = 0$

La solución

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} & , 0 \leq x \leq 3 \\ ce^{-2x} & , x > 3 \end{cases}$$

$\lim \; ce^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

$\lim\limits_{x \to 3} ce^{-2x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

$ce^{c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-c}$

$c = \frac{1}{2e^{c}} - \frac{1e}{2e^{c}} \Rightarrow c = \frac{1}{2e^{c}} - \frac{1}{2}$

37. $(x+1)\frac{dy}{dx} + y = \ln(x) \; ; y(1) = 10$

✓ Reescribir la ecuación diferencial

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x+1}y = \frac{\ln(x)}{x+1}$

$\int P(x)\,dx = \int \frac{1}{x+1}dx = \ln(x+1)$

$ye^{\int P(x)\,dx} = \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx + C$

$ye^{\ln(x+1)} = \int \left(\frac{\ln(x)}{x+1}\right) e^{\ln(x+1)}\,dx + C$

✓ Simplificar y resolver la integral

$y(x+1) = \int \ln(x)$

$y = \frac{x\ln(x) - x + 6}{x+1}$

$y = \frac{\ln(x) \to + c}{x+1}$

$y = \frac{x\ln(x) - x + 6}{x+1}$

$10 = \frac{(1)\ln(1) - (1) + 6}{(1)+1}$

$(10 + \frac{1}{2})2 = +6 \quad 6 = 21$

$y = \frac{e^{5x^2}}{9}(3x^2 - 1) - \frac{10}{9} \; y(0) = 10$

39. Suponga que en la cascada mostrada en la figura 1.5.5 inicialmente el tanque 1 contiene 100 gal de etanol puro y el tanque 1 es de 10 gal/min, y los otros dos flujos son también de 10 gal/min. a) Encuentre las cantidades $x(t)$ y $y(t)$ de etanol en los dos tanques en el tiempo $t \geq 0$. b) Descubra la cantidad la cantidad máxima de etanol en el tanque 2.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{-x}{10} \quad x(0) = 100$$

Solución para el tanque $x(0) \cdot (t) = 100e^{-t/10}$

✓ Entonces el problema del valor inicial

$$x\frac{da}{dx} = \frac{x}{10} \quad x(0) = 100$$

$$\frac{dy}{\partial t} = \frac{dx}{10} - \frac{x}{10} = 10e^{-t/10} \quad \frac{y}{10}, \; y(0) = 0$$

✓ Solución para el tanque 2 $\quad y(t) = 10te^{-t/10}$

b) El valor maximo de "y" se produce

$$y'(t) = 10e^{-t/10} \quad -te^{-t/10} = 0$$

✓ y por tanto cuando $t = 10$. Entonces tenemos que

$$y_{max} = y(10) = 100e^{-1} \Rightarrow 36{,}79 \text{ gal}$$

40. En la figura 1.5.6 se muestra una cascada múltiple. En tiempo $t = 0$ el tanque 0 contiene 1 gal de etanol y 1 gal de agua; todos los tanques restantes contienen 2 gal de agua para cada uno. Se bombea agua pura hacia adentro del tanque 0 a razón de 1 gal/min, y la mezcla variante en cada tanque 0 a razón de 1 gal/min, y la mezcla variante en proporción. Considere, como siempre, que las mezclas se conserven perfectamente uniformes por agitación. Así, $x_n(t)$ representa la cantidad de etanol en el tanque n en el tiempo t.

Suponiendo inductivamente que $x_n = t^n e^{-t/2}/(n!\,2^n)$
La ecuación para x_{n+1} es

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}x_{n+1} = \frac{t^n e^{-t/2}}{n!\,2^{n+1}} - \frac{1}{2}x_{n+1}$$

Resolvemos la ecuación de primer orden con $x_{n+1}(0) = 0$ y contamos que

$$x_{n+1} = \frac{t^{n+1} e^{-t/2}}{(n+1)!\,2^{n+1}}$$

41. Una mujer de 30 años de edad acepta un puesto de ingeniero con un salario inicial de 30.000 dolares por año su salario inicial de 30.000 dolares por año su salario $S(t) = 30e^{t/20}$ miles de dolares despues de t años mientras tanto, 12% de su salario es depositado continuamente en una cuenta para su jubilación la cual acumula intereses a una taza anual continua de 6% (a) Estime ΔA en términos de Δt para obtener una ecuación diferencial que se satisfaga por la cantidad $A(t)$ en su cuenta de jubilación despues de t años. (b) Calcule $A(40)$ la cantidad disponible para su retiro a la edad de 70 años.

a) $A'(t) = 0{,}06A + 0{,}12S = 0{,}06A + 3{,}6e^{0{,}05t}$

b) La solución con $A(0) = 0$

$$A(t) = 360\,(e^{0{,}06t} - e^{0{,}05t})$$

$\therefore A(40) = 1308{,}283$ miles de dolares

42. Suponga que un granizo, que cae con una densidad $\delta = 1$ inicia su caída desde la posición de reposo con un radio inicial $r = 0$. Despues de un tiempo su radio es $r = kt$. (k es una constante), el cual crece durante la precipitación. Utilice la segunda ley de Newton de acuerdo con la cual la fuerza neta F que actua sobre una masa variable m es igual a la razón de cambio en el tiempo dp/dt de su ímpetu $p = mv$ para establecer y resolver un problema de valor inicial.

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg, \quad v(0) = 0,$$

donde m es la masa variable del granizo y $v = dy/dt$ es su velocidad siendo los valores positivos del eje y hacia abajo. Muestre que si $dv/dt = g/4$, entonces el granizo cae como si estuviera bajo la

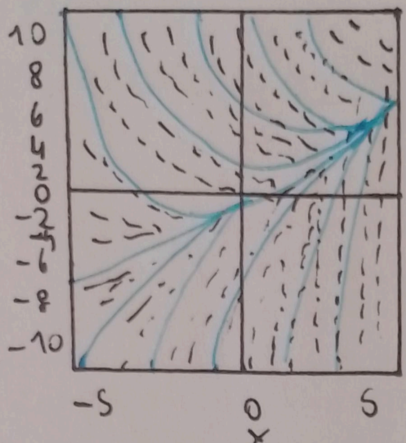
Influencia de un cuarto de la gravedad

✓ Su masa del granizo es el tiempo t

$m = (4/3)\pi r^3 = (4/3)\pi k^3 t^3$ ∴ La ecuación

$d(mv)/dt = mg$ simplifican a $tv' + 3v = gt$

43. En la figura 1.5.7 se observa un campo de isoclinas y curvas solución típicas para la ecuación $y' = x - y$. (a) Muestre que cada curva solución tiende a la derecha $y = x - 1$ cuando $x \to +\infty$
b) Para cada uno de los siguientes cinco valores $y_1 = 3.998, 3.999, 4.000, 4.001$ y 4.002, determine el valor inicial y_0 (con cuatro cifras decimales de precisión), de tal manera que $y(5) = y_1$ para la solución que satisface la condición inicial $y(-5) = y_0$



✓ Solución inicial

$$y' = x - y, \quad y(-5) = y_0$$

$$y(x) = x - 1 + (y_0 + 6)\, e^{-x-5}$$

✓ Sustituyendo $x = 5$

$4 + (y_0 + 6)e^{-10} = y_1$ donde $y_1 = 3.998, 3.999, 4, 4.001, 4.002$

$y_0 = -50.0529, -28.0265, -6.0000, 16.0265, 38.0529$

44. La figura 1.5.8 muestra un campo de isoclinas y curvas solución típicas para la ecuación $y' = x + y$. (a) Muestre que cada curva solución se aproxima a la recta $y = -x - 1$ cuando $x \to -\infty$. (b) Para cada uno de los siguientes cinco valores $y_1 = -10, -5, 0, 5, y 10$. determine el valor inicial y_0 (con cinco cifras decimales de precisión) de tal manera que $y(5) = y_1$ para la solución que satisface la condición inicial $y(-5) = y_0$?

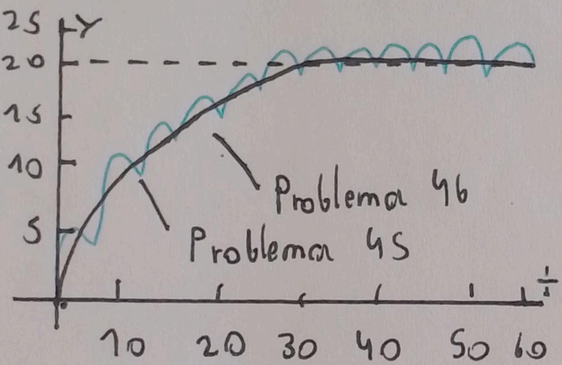
Solución

$$y' = x + y, \ y(-5) = y_0 \text{ es}$$
$$y(x) = -x - 1 + (y_0 - 4)e^{x+5}$$

Sustituyendo $x = 5$ $\quad -6 + (y_0 - 4)e^{10} = y_1$ cuando $y_1 =$ $-10, -5, 0, 5, 10$

$y_0 = 3.99982, 4.00005, 4.00027, 4.00050, 4.00075$

45. El agua que entra en el estanque tiene una concentración de contaminantes de $c(t) = 10$ litros por metro cúbico (L/m^3). verifique que la gráfica de $x(t)$ se asemeje a la curva ascendente de la figura 1.5.9, la cual se aproxima asintóticamente a la gráfica de la solución de equilibrio $x(t) = 20$ que corresponde al contenido de contaminantes del estanque en el largo plazo. ¿Cuánto tiempo tomará para que la concentración de contaminantes en el estanque llegue a $5L/m^3$?



Solución

$$r = \frac{1}{5}, \ c_0 = 10, \ V = 2$$

Sustituyendo en la ecuación

$$x' = rc_0 - (r/V)x$$

$$\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{1}{10}x$$

✓ Cuando $x(t)$; $p = e^{t/10}$; $x(0) = 0$

$$x(t) = 20(1 - e^{-t/10})$$

$\therefore$ $x = 10$, $t = 10\ln 2 = 6.93$ meses, $x(t) \to 20$ cuando $t \to \infty$

46. El agua que entra al estanque tiene una concentración de contaminantes de $c(t) = 10(1 + \cos t)$ L/m³, la cual varía entre 0 y 20, con una periodo de oscilación promedio de 10 L/m³ en un periodo de oscilación de $6\frac{1}{4}$ meses. ¿Se puede decir que el contenido de contaminantes del estanque oscilará periódicamente cerca de un nivel promedio de 20 millones de litros? Verifique que la gráfica de $x(t)$ - de hecho lo hace - se parezca a la curva oscilatoria de la figura 1.5.9. ¿Cuánto tiempo tomará para que la concentración de contaminantes del estanque llegue a 5L/m³?

✓ Solución

$r = \frac{1}{5}$, $c_0 = 10(1+\cos t)$, $V = 2$,

✓ Sustituyendo en la ecuación $x' = rc_0 - (r/V)x$

$$\frac{dx}{dt} = 2(1+\cos t) - \frac{1}{10}x, \quad \frac{dx}{dx} + \frac{1}{10}x = 2(1+\cos t)$$

✓ Cuando $x(t)$; $p = e^{t/10}$

$$x e^{t/10} = \int (2e^{t/10} + 2e^{t/10}\cos t)\,dt$$

$$= 20e^{t/10} + 2\frac{e^{t/10}}{(\frac{1}{10})^2 + 1^2}\left(\frac{1}{10}\cos t + \sin t\right) + C$$

$\therefore$ $x(0) = 0$