SF1692 ODE:
Kurssammanfattning inför tentamen

Leo Trolin

20/12-2024

Inledning

Detta är en kompakt sammanställning av de definitioner, metoder, satser och bevis i kursen SF1692 som jag tror kommer vara användbara på tentamen. Jag väljer att utelämna en del saker i kursen såsom numerik som inte kommer på tentan. När jag presenterar metoder berättar jag mer om vilka steg som ska tas än eventuella formler som finns.

Första ordningens ekvationer

Grundläggande

Definition: (**Differentialekvation av ordning** n)
En differentialekvation av ordning n är på formen

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Metod: (**Separabel ekvation**)
Differentialekvationer på formen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

löses enligt

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\ dx.$$

Kurvfamiljer

Metod: (**Kurvfamilj → diffekv.**)
Vi vill hitta en differentialekvation vars lösningar ges av kurvfamiljen

$$f(x, y, c) = 0.$$

1. Derivera ekvationen ovan med avseende på x och få en ekvation på formen $g\left(x, y, \frac{dy}{dx}, c\right) = 0$.
2. Samla ekvationerna i ett system:

$$\begin{cases} f(x, y, c) = 0 \\ g\left(x, y, \frac{dy}{dx}, c\right) = 0 \end{cases}$$

3. Eliminera c från detta system. Då har vi en ekvation på formen $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ vilket är den sökta differentialekvationen.

Metod: (**Ortogonal kurvfamilj**)
Vi vill konstruera en ortogonal kurvfamilj till den ursprungliga familjen

$$f(x, y, c) = 0,$$

alltså en kurvfamilj vars skärningar sker ortogonalt i varje punkt mot den ursprungliga familjen.

1. Skriv om den ursprungliga familjen som en diffekvation $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$.
2. Bilda en ny diffekvation $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{g(x,y)}$, alternativt $-\frac{dx}{dy} = g(x, y)$.
3. Lös denna nya diffekvation. Lösningarna bildar då den ortogonala kurvfamiljen.

Linjära första ordningens ekvationer

Definition: (**Linjär differentialekvation**)
En linjär differentialekvation är en ekvation där $y, y', \ldots$ förekommer av grad 1 eller inte alls. Till exempel är y^2 eller $\sin(y)$ ej tillåtet.

Metod: (**Integrerande faktor**)
Vi vill lösa den linjära första ordningens differentialekvation

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

1. Beräkna $\mu(x) = e^{\int P(x)\ dx}$. Integralen har flera lösningar; välj en.
2. Multiplicera med $\mu(x)$ i båda led och få

$$\mu(x) \cdot y' + \mu(x) \cdot P(x)y + \mu(x) \cdot Q(x) \iff \frac{d}{dx}\big(\mu(x) \cdot y\big) = \mu(x) \cdot Q(x).$$

3. Integrera båda led med avseende på x och lös sen för y.

Homogena ekvationer

Definition: (**Homogen funktion**)
En funktion $f(x, y)$ är homogen av grad n om $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

Definition: (**Homogen differentialekvation**)
En differentialekvation

$$M(x, y)\ dx + N(x, y)\ dy = 0 \iff \frac{dy}{dx} = \frac{-M(x, y)}{N(x, y)}$$

är homogen om M och N är homogena funktioner av samma grad.

Metod: (**Homogen differentialekvation**)
Vi vill lösa den homogena differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-M(x, y)}{N(x, y)} =: f(x, y).$$

1. Inför $z = \frac{y}{x}$.
2. Notera att f är homogen av grad 0. Alltså gäller $f(x, y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f(1, z)$.
3. Notera att $y = zx \implies \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$.
4. Kombinera dessa och få ekvationen $z + x\frac{dz}{dx} = f(1, z)$.
5. Lös denna separabla ekvation och byt sedan tillbaka från z.

Exakta ekvationer

Definition: (**Exakt ekvation**)
En exakt ekvation är en ekvation på formen

$$M(x, y)\ dx + N(x, y)\ dy = 0$$

om det finns en funktion $f(x, y)$ så att $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ och $\frac{\partial f}{\partial y} = N$.

Sats:
Om f är snäll, så är en ekvation exakt om

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Metod: (**Integrerande funktion**)
Vi vill hitta $\mu(x,y)$ så att ekvationen

$$\mu(x,y) \cdot M(x,y)\ dx + \mu(x,y) \cdot N(x,y)\ dy = 0$$

är exakt. Generellt är detta svårt, men det finns en metod som funkar ibland.

1. Notera att om ekvationen är exakt så gäller

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \implies \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \implies \frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

2. Gissa att μ bara beror på x. Då gäller $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$. Lös sen differentialekvationen för $\mu(x)$.
3. Ifall detta inte går, gissa att μ bara beror på y och fortsätt på liknande sätt.

Andra ordningens ekvationer

Reduktion av ordning

Metod: (**Reduktion av ordning**)
Vi vill reducera en andra ordningens ekvation på formen

$$F(x, y', y'') = 0$$

till en första ordningens ekvation.

1. Inför $v = y'$.
2. Skriv om ekvationen som $F(x, v, v')$ som är av ordning 1.

Metod: (**Reduktion av ordning ("autonom")**)
Vi vill reducera en andra ordningens ekvation på formen

$$F(y, y', y'') = 0$$

till en första ordningens ekvation ("autonom" eftersom x inte förekommer i ekvationen).

1. Inför $v = y'$.
2. Notera att $y'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}$.
3. Skriv om ekvationen som $F(y, v, v\frac{dv}{dy})$ som är av första ordningen om vi ser v som beroende variabel och y som oberoende variabel.

Homogena ekvationer

Definition: (**Homogen ekvation**)
En andra ordningens linjär differentialekvation är homogen om den är på formen

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

Sats:
Låt y_1 och y_2 vara lösningar till en homogen diffekvation. Då är $c_1y_1 + c_2y_2$ också en lösning för godtyckliga $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Bevis: s. 13.

Definition: (**Linjärt beroende**)
Funktionerna f och g är linjärt beroende på $[a, b]$ om det finns konstanter c_1, c_2 inte båda noll så att $c_1f(x) + c_2g(x) = 0$ för alla $x \in [a, b]$. Annars är funktionerna linjärt oberoende.

Sats:
Låt y_1 och y_2 vara linjärt oberoende lösningar på $[a, b]$ till den homogena ekvationen där P, Q är kontinuerliga på $[a, b]$. Då är $y = c_1y_1 + c_2y_2$ den allmänna lösningen. Alltså är alla lösningar på formen av y för $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Bevis: s. 13.

Definition: (**Wronskian**)
För två funktioner $y_1(x), y_2(x)$ definierar vi Wronskianen som

$$W(x, y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Sats:
Låt y_1 och y_2 vara lösingar till den homogena ekvationen på $[a, b]$. Då gäller endast en av följande:

- $W(x) = 0 \ \forall x \in [a, b]$
- $W(x) \neq 0 \ \forall x \in [a, b]$

Bevis: s. 14.

Sats:
Låt y_1 och y_2 vara lösingar till den homogena ekvationen på $[a, b]$. Då gäller

$$y_1, y_2 \text{ linjärt beroende på } [a, b] \iff W(x) = 0 \ \forall x \in [a, b].$$

Bevis: s. 14.

Metod: (**Reduktion av ordning**)
Givet en lösning y_1 till den homogena ekvationen vill vi hitta en till lösning y_2.

1. Ansätt $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ som en lösning.
2. Beräkna y_2' och y_2'' och sätt in dessa i diffekvationen.
3. Detta ger en diffekvation innehållande v'', v' och kända funktioner av x. Med substitutionen $u = v'$ blir detta en första ordningens differentialekvation.
4. Lös för u, beräkna sedan $v = \int u \, dx$ och ta slutligen fram $y_2 = vy_1$.

Konstanta koefficienter

Metod:
Vi vill lösa

$$y'' + py' + qy = 0 \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

1. Finn rötter r_1, r_2 till det karaktäristiska polynomet $r^2 + pr + q = 0$.
2. Lösningarna ges av olika saker beroende på rötterna.
   - Reella, distinkta rötter:
     $$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$$
   - Reell dubbelrot:
     $$y_1 = e^{rx}, \quad y_2 = xe^{rx}$$
   - Komplexkonjugerade rötter $r = a \pm bi$:
     $$y_1 = e^{ax}\cos(bx), \quad y_2 = e^{ax}\sin(bx)$$

Inhomogena ekvationer

Sats:
Låt y_p vara en lösning (“partikulärlösning”) till $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ $(*)$, och låt y_h vara lösningen till den tillhörande homogena diffekvationen. Då är den allmänna lösningen $y = y_h + y_p$ till $(*)$. Bevis: s. 13.

Metod: (**Gissa form på lösning**)
Vi vill hitta en partikulärlösning till

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x).$$

Vi gör detta genom att gissa formen på lösningen. Det finns ingen exakt metod för detta, och det kommer inte alltid att fungera.

1. Ansätt någon y_p med obestämda konstanter, så att denna ungefär matchar formen på $R(x)$, $Q(x)y_p$, $P(x)y_p'$ och y_p''.
2. Beräkna y_p' och y_p'' och stoppa in dessa i diffekvationen.
3. Lös för alla obestämda konstanter, om möjligt.

Metod: (**Variation av parametrar**)
Vi vill hitta en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$, givet två linjärt oberoende lösningar y_1, y_2 till den motsvarande homogena ekvationen.

1. Ansätt $y_p = v_1y_1 + v_2y_2$ som partikulärlösning där v_1, v_2 är obestämda funktioner.
2. Antag att $v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$, så att derivering av detta inte ger några andraderivator av v. Detta är okej, eftersom att vi måste göra något antagnade för att få två ekvationer så att vi kan lösa för både v_1 och v_2.
3. Beräkna y_p' och y_p''. Sätt in dessa tillsammans med y_p i diffekvationen. En del termer kommer att försvinna eftersom y_1, y_2 är lösningar till den homogena diffekvationen. Kvar blir $v_1'y_1' + v_2'y_2' = R(x)$.
4. Kombinera detta med antagandet från tidigare, vilket ger systemet
$$\begin{cases} v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0 \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' = R(x) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R(x) \end{pmatrix}$$
5. Lös detta system. Detta är alltid görbart eftersom att y_1 och y_2 är linjärt oberoende. Vi får:
$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} -y_2R(x) \\ y_1R(x) \end{pmatrix}$$
6. Hitta v_1 och v_2 genom integration. Sedan fås partikulärlösningen av $y_p = v_1y_1 + v_2y_2$.

System av första ordningens ekvationer

Allmänt

Metod: (**Hög ordnings diffekv. → första ordningens system**)
Vi vill konvertera en diffekvation av ordning n på formen

$$y^{(n)} = F(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

till ett system av första ordningens ekvationer.

1. Inför $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$.
2. Systemet blir då

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ \vdots & \vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases}.$$

Metod: (**Form av lösningskurvor**)
Vi vill titta på formen av lösningskurvor till det (icke-linjära) system

$$\begin{cases} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{cases}$$

eftersom det är svårt att lösa explicit för $x(t), y(t)$.

1. Notera att
$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$
2. Lös denna diffekvation (om möjligt). Detta ger en relation mellan x och y som inte beror på t, som kan plottas.

Linjära system

Definition: (**Linjärt system**)
Ett system är linjärt om det är på formen

$$\begin{cases} x' &= a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ y' &= a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{cases}.$$

Definition: (**Homogent linjärt system**)
Ett linjärt system är homogent om $f_1(t) = 0, f_2(t) = 0$ för alla t (på ett intervall).

Definition: (**Wronskian**)
För vektorvärda funktioner $\boldsymbol{x}_1(t), \dots, \boldsymbol{x}_n(t)$ definierar vi Wronskianen som

$$W(t, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) & \cdots & \boldsymbol{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

Sats:
Låt $\boldsymbol{x}_1(t) = [x_1(t), y_1(t)]^{\mathrm{T}}$ och $\boldsymbol{x}_2(t) = [x_2(t), y_2(t)]^{\mathrm{T}}$ vara två lösningar till det homogena systemet på intervallet I. Om $W(t) \neq 0 \ \forall t \in I$ så är den allmänna lösningen $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2$. Bevis: s. 15.

Sats:
Låt $\boldsymbol{x}_1(t) = [x_1(t), y_1(t)]^{\mathrm{T}}$ och $\boldsymbol{x}_2(t) = [x_2(t), y_2(t)]^{\mathrm{T}}$ vara två lösningar till det homogena systemet på intervallet I. Då gäller endast en av följande:

- $W(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \neq 0 \ \forall t \in I$.
- $W(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0 \ \forall t \in I$.

Bevis: s. 15.

Sats:
Låt $\boldsymbol{x}_p$ vara en partikulärlösning till ett linjärt system, och låt $\boldsymbol{x}_1$ och $\boldsymbol{x}_2$ vara oberoende lösningar till det motsvarande homogena linjära systemet. Då ges den allmänna lösningen till det linjära systemet av

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2.$$

Metod: (**Konstanta koefficienter**)
Vi vill lösa det homogena linjära systemet med konstanta koefficienter

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

1. Ta fram egenvärdena λ_1, λ_2 till A och tillhörande egenvektorer $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$.
2. Lösningarna ges av olika saker beroende på egenvärdena.

- Reella, distinkta egenvärden:

$$\boldsymbol{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{x}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2$$

- Komplexkonjugerade egenvärden:
  1. Komplexa lösningar ges av $\boldsymbol{z}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{z}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2$ där $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$.
  2. Dela upp $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_1 + i\boldsymbol{w}_2$ där $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{R}^2$. Den andra egenvektorn $\boldsymbol{v}_2$ behövs ej.
  3. Skriv om $\boldsymbol{z}_1 = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)(\boldsymbol{w}_1 + i\boldsymbol{w}_2)$ och utför multiplikationen.
  4. Reella lösningar ges nu av $\boldsymbol{x}_1 = \mathrm{Re}(\boldsymbol{z}_1)$ och $\boldsymbol{x}_2 = \mathrm{Im}(\boldsymbol{z}_1)$, alltså:

$$\boldsymbol{x}_1(t) = e^{at}(\cos bt \cdot \boldsymbol{w}_1 - \sin bt \cdot \boldsymbol{w}_2), \quad \boldsymbol{x}_2(t) = e^{at}(\sin bt \cdot \boldsymbol{w}_1 + \cos bt \cdot \boldsymbol{w}_2)$$

- Lika egenvärden, och $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ oberoende:

$$\boldsymbol{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{x}_2(t) = e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_2$$

- Lika egenvärden, och $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ nödvändigtvis beroende:

$$\boldsymbol{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{x}_2(t) = te^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1 + e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{w} \quad \text{där} (A - \lambda_1 I)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_1$$

Definition: (**Fundamentalmatris**)
Låt vara $\boldsymbol{x}_1(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)$ vara lösningar till $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ så att $\boldsymbol{x}_i(0) = \boldsymbol{e}_i$. Då bildar vi fundamentalmatrisen

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) & \cdots & \boldsymbol{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

Det gäller då även att $e^{At} = \Phi(t)$.

Kritiska punkter

Definition: (**Autonomt system**)
Ett system är autonomt om det inte innehåller något t, alltså om det är på formen

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases}.$$

Definition: (**Kritisk punkt**)
En kritisk punkt (x_0, y_0) till ett autonomt system är en punkt uppfyller $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$.

Definition: (**Stabil**)
Låt $P = (0, 0)$ vara en kritisk punkt. Denna är en stabil kritisk punkt om $\forall R > 0\ \exists r > 0, r \leq R$ så att $\left|(x_0, y_0)\right| \leq r \implies \left|(x(t), y(t))\right| \leq R\ \forall t \geq 0$. Alltså, att alla banor som någon gång befinner sig som mest r långt borta från P aldrig kommer vara mer än R långt borta från P. Annars är P instabil.

Definition: (**Asymptotiskt stabil**)
Låt $P = (0, 0)$ vara en kritisk punkt. Denna är en asymptotiskt stabil kritisk punkt om den är stabil, och $\exists R' > 0$ så att $\left|(x_0, y_0)\right| \leq R' \implies (x(t), y(t)) \to P$ då $t \to \infty$. Alltså, att alla banor som någon gång befinner sig som mest R' långt borta från P närmar sig P.

Definition: (**Närma sig, träda in**)
Låt $(x(t), y(t))$ vara en lösning till ett autonomt system. Lösningen närmar sig punkten (x_0, y_0) om

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \quad \text{och} \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = y_0.$$

Lösningen träder in i punkten (x_0, y_0) om dessutom

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} \text{ existerar } (\pm\infty \text{ är okej}),$$

alltså att lösningen närmar sig punkten från ett fixt "håll".

Definition: (**Typer av kritiska punkter**)
Låt $P = (x_0, y_0)$ vara en kritiskt punkt.

- **Stabil nod**: Alla banor i en omgivning av P träder in mot P då $t \to \infty$.
- **Instabil nod**: Alla banor i en omgivning av P träder in mot P då $t \to -\infty$.
- **Sadelpunkt**: Det finns lösningar på två halvlinjer som träder in mot P då $t \to \infty$, och lösningar på två andra halvlinjer som träder in mot P då $t \to \infty$. Sadelpunkter är instabila.
- **Centrum/Vortex**: Punkten P omges av en familj av slutna banor, men inga banor som närmar sig P. Centrum är stabila.
- **Stabil spiral**: Alla banor i en omgivning av P närmar sig P då $t \to \infty$, men träder ej in.
- **Instabil spiral**: Alla banor i en omgivning av P närmar sig P då $t \to -\infty$, men träder ej in.

Metod: (**Klassificering av KP i linjära system**)
Vi vill klassificera de kritiska punkterna i $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ där $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

1. Notera att den enda kritiska punkten är $(0, 0)$ (om inte A är singulär).
2. Ta fram A:s egenvärden λ_1, λ_2. Klassificeringen beror nu på egenvärdena.

- Om egenvärdena är reella:
  - $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: Instabil nod
  - $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: Stabil nod
  - $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$: Sadelpunkt
- Om egenvärdena är komplexkonjugerade som $\lambda = a \pm bi$:
  - $a = 0$: Centrum
  - $a < 0$: Stabil spiral
  - $a > 0$: Instabil spiral

Lyapunovfunktioner

Definition: (**Lyapunovfunktion**)
En Lyapunovfunktion $E(x, y)$ är en funktion som uppfyller:

- $E(x, y)$ är positivt definit.
- $\frac{d}{dt}E(x, y)$ är negativt semidefinit.

Definition: (**Strikt Lyapunovfunktion**)
En Lyapunovfunktion $E(x, y)$ är en strikt Lyapunovfunktion om $\frac{d}{dt}E(x, y)$ är negativt definit.

Sats:
Betrakta det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases} .$$

Om det existerar en Lyapunovfunktion $E(x, y)$ så är systemet stabilt i den kritiska punkten $(0, 0)$. Om det existerar en strikt Lyapunovfunktion $E(x, y)$ så är denna kritiska punkt även asymptotiskt stabil. Bevis: s. 16.

Kritiska punkter i ickelinjära system

Sats:
Betrakta det ickelinjära systemet $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$. Låt $\boldsymbol{G}$ uppfylla $\left|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\right| = o\left(|\boldsymbol{x}|\right)$ då $|\boldsymbol{x}| \to 0$; alltså $\frac{\left|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\right|}{|\boldsymbol{x}|} \to 0$ då $|\boldsymbol{x}| \to 0$. Låt matrisen A ha egenvärden λ_1, λ_2.

- Om $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0, \mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$ så är systemet asymptotiskt stabilt i den kritiska punkten $(0, 0)$.
- Om $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ för något i så är systemet instabilt i den kritiska punkten $(0, 0)$.

Metod:
Vi vill avgöra stabiliteten i den kritiska punkten $(0, 0)$ i det olinjära systemet $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ (där $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$).

1. Linjärisera systemet som $\boldsymbol{x}' = J(\boldsymbol{0})\boldsymbol{x} + O\left(|\boldsymbol{x}|^2\right)$.
2. Ta fram egenvärdena till $J(\boldsymbol{0})$ och använd satsen ovan.

Picardsatser

Sats: (**Picards sats**)
Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Antag att $f(x, y)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga på en sluten rektangel R så att (x_0, y_0) är en inre punkt till R. Då existerar det ett $h > 0$ så att begynnelsevärdesproblemet har en unik lösning för $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Bevis: s. 16.

Sats:
Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Antag att $f(x, y)$ är kontinuerlig och uppfyller Lipschitzvillkoret $\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \leq K|y_1 - y_2|$ i remsan $x \in [a, b] =: I, y \in (-\infty, \infty)$. Antag också att $x_0 \in I$. Då har begynnelsevärdesproblemet en unik lösning för $x \in I$. Bevis: s. 19

Sats: (**Picard för system**)
Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y_1' & = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots & \vdots \\ y_n' & = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}, \quad y_1(x_0) = a_1, \ldots, y_n(x_0) = a_n.$$

Antag att $f_1, \ldots f_n$ och $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ är kontinuerliga i en region R i $x, y_1, \ldots, y_n$-rummet. Antag också att $(x_0, a_1, \ldots, a_n)$ är en inre punkt i R. Då har begynnelsevärdesproblemet en unik lösning.

Sats: (**Picard för linjära diffekv. av ordning 2**)
Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1.$$

Antag att P, Q, R är kontinuerliga på intervallet I och att $x_0 \in I$. Då har begynnelsevärdesproblemet en unik lösning för $x \in I$.

Laplacetransformer

I detta kapitel utelämnar jag en del saker som står i tabellen för laplacetransformer. Istället fokuserar jag på det som inte finns i den tabellen.

Definition: (**Laplacetransformen**)
Låt $f(t)$ vara en styckvist kontinuerlig funktion. Då definierar vi dess laplacetransform som

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

om integralen konvergerar.

Sats:
Laplacetransformen är linjär, alltså $\mathcal{L}\left\{af(t) + bg(t)\right\} = a\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + b\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$. Den inversa laplacetransformen $\mathcal{L}^{-1}$ är också linjär.

Definition: (**Stegfunktionen**)
Stegfunktionen definieras som

$$\mathcal{U}_c(t) = \mathcal{U}(t-c) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}.$$

Definition: (**Faltning**)
Låt f och g vara två funktioner. Vi definierar f faltat med g som

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau.$$

Det gäller att $f * g = g * f$.

Definition: (**Diracs deltafunktion**)
Diracs deltafunktion är inte riktigt en funktion, men den kan "definieras" som

$$\delta_c(t) = \delta(t-c) = \begin{cases} \infty, & t = c \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \qquad \text{alternativt } \int_{-\infty}^{\infty} \delta_c(t)\, dt = 1 \text{ och } \delta_c(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{c\}.$$

Metod:
Vi vill lösa ett begynnelsevärdesproblem där $x_0 = 0$.

1. Tag laplacetransformen av båda led.
2. Lös den resulterande ekvationen (eller systemet) för $Y(s)$ (eller $\boldsymbol{Y}(s)$).
3. Applicera den inversa laplacetransformen på båda led. Inversa laplacetransformer beräknas genom att titta i laplacetransformtabellen.

Bevis

Låt y_p vara en lösning ("partikulärlösning") till $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ $(*)$, och låt y_h vara lösningen till den tillhörande homogena diffekvationen $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ $(**)$. Då är den allmänna lösningen $y = y_h + y_p$ till $(*)$.

Bevis:
Låt $y(x)$ vara en godtycklig lösning till $(*)$. Vi ser då att $y - y_p$ löser $(**)$ enligt

$$\begin{aligned} &(y-y_p)'' + P(x)(y-y_p)' + Q(x)(y-y_p) \\ =&\big(y'' + P(x)y' + Q(x)y\big) - \Big(y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p\Big) \\ =&R(x) - R(x) = 0. \end{aligned}$$

Inför beteckningen $y_h = y_h(x, c_1, c_2)$ eftersom denna beror på två parametrar c_1, c_2. Eftersom att y_h är en generell lösning till $(**)$ så gäller $y(x) - y_p(x) = y_h(x, c_1, c_2)$ för något val av c_1, c_2. Omskrivning ger $y(x) = y_h(x, c_1, c_2) + y_p(x)$. Detta visar att den godtyckliga lösningen $y(x)$ kan skrivas på formen i satsformuleringen. ■

Låt y_1 och y_2 vara lösningar till en homogen diffekvation $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ $(*)$. Då är $c_1y_1 + c_2y_2$ också en lösning för godtyckliga $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bevis:
Beviset följer från insättning av $c_1y_1 + c_2y_2$ i $(*)$:

$$\begin{aligned} &(c_1y_1 + c_2y_2)'' + P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ =&c_1\left(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1\right) + c_2\left(y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2\right) \\ =&c_1(0) + c_2(0) = 0 \end{aligned}$$

■

Låt y_1 och y_2 vara linjärt oberoende lösningar på $[a, b]$ till den homogena ekvationen $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ $(*)$ där P, Q är kontinuerliga på $[a, b]$. Då är $y = c_1y_1 + c_2y_2$ den allmänna lösningen. Alltså är alla lösningar på formen av y för $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bevis:
Detta bevis använder de två hjälpsatserna om Wronskianen nedan. Låt $y(x)$ vara en godtycklig lösning till $(*)$ på $[a, b]$. Vi vill visa att det alltid går att hitta konstanter c_1, c_2 så att

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \ \forall x \in [a, b].$$

Enligt Picards sats för linjära ekvationer av ordning två så räcker det med likhet i begynnelsevillkoren för att lösningarna ska vara identiska på hela intervallet. Alltså vill vi för ett $x_0 \in I$ visa att

$$\begin{cases} y(x_0) &= c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) \\ y'(x_0) &= c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) \end{cases}.$$

Från linjär algebra vet vi att detta system alltid är lösbart för c_1, c_2 om

$$\det\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} = W(x_0) \neq 0.$$

Enligt den första hjälpsatsen ser vi att valet av x_0 inte spelar någon roll för resultatet. Enligt den andra hjälpsatsen ser vi att Wronskianen är nollskild eftersom y_1, y_2 är linjärt oberoende. ■

Låt y_1 och y_2 vara lösingar till den homogena ekvationen på $[a, b]$. Då gäller endast en av följande:
- $W(x) = 0 \ \forall x \in [a, b]$
- $W(x) \neq 0 \ \forall x \in [a, b]$

Bevis:
Vi börjar med att beräkna Wronskianens derivata:

$$\begin{aligned} W &= y_1 y_2' - y_1' y_2 \\ W' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \\ &= y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \end{aligned}$$

Dessutom vet vi att y_1 och y_2 är lösningar vilket ger

$$y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1 = 0 \tag{1}$$
$$y_2'' + P(x) y_2' + Q(x) y_2 = 0 \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \implies y_1(2) - y_2(1) \text{ ger} \\ y_1 y_2'' + P(x) y_1 y_2' + Q(x) y_1 y_2 - y_1'' y_2 - P(x) y_1' y_2 - Q(x) y_1 y_2 = 0 \\ \iff y_1 y_2'' - y_1'' y_2 + P(x)(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0 \\ \iff W' + P(x) W = 0 \implies W(x) = c e^{-\int P(x)\ dx} \end{gathered}$$

Från detta ser vi att $W(x) = 0 \iff c = 0$ och $W(x) \neq 0 \iff c \neq 0$. ■

Låt y_1 och y_2 vara lösingar till den homogena ekvationen på $[a, b]$. Då gäller

$$y_1, y_2 \text{ linjärt beroende på } [a, b] \iff W(x) = 0 \ \forall x \in [a, b].$$

Bevis:
Antag att y_1, y_2 är linjärt beroende på $[a, b]$. Vi vill nu visa att $y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0$. Från det linjära beroendet har vi $y_2 = c y_1 \implies y_2' = c y_1'$ för någon konstant c. Alltså gäller $y_1 y_2' - y_1' y_2 = y_1(c y_1') - y_1'(c y_1) = 0$. Detta visar implikationen åt ena hållet i satsen.

Antag nu att $y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0$. Ifall $y_1 = 0$ är y_1, y_2 per definition linjärt beroende. Antag därför att $y_1 \neq 0$ på $[c, d] \subset [a, b]$. Då gäller

$$\begin{aligned} &\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0 \text{ på } [c, d] \\ \implies &\frac{d}{dx} \frac{y_2}{y_1} = 0 \text{ på } [c, d] \\ \implies &y_2 = k y_1 \text{ på } [c, d]. \end{aligned}$$

Vi ser att y_2 och $k y_1$ är lika på $[c, d]$, så därför är deras derivator också lika där. Picards sats för linjära ekvationer av ordning två ger då att $y_2 = k y_1$ på hela $[a, b]$. Detta visar att y_1, y_2 är linjärt beroende på $[a, b]$. ■

$$\mathcal{L}\left\{(f * g)(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$$

Bevis:
Vi börjar i HL och utgår från definitionen av laplacetransformen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \mathcal{L}\left\{g(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(\tau)\ d\tau \int_0^\infty e^{-s\tau} f(t)\ dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+t)} f(\tau)\ d\tau \right) g(t)\ dt \end{aligned}$$

Inför variabeln $x = \tau + t$ med $d\tau = dx$ i den inre integralen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} &= \int_0^\infty \left(\int_t^\infty e^{-sx} f(x-t)\ dx\right) g(t)\ dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^x e^{-sx} f(x-t) g(t)\ dt\ dx\end{aligned}$$

med byte av integrationsordning på det sättet eftersom vi integrerar i den första kvadranten i (x,t) planet, över området $x \geq t$. Vi fortsätter:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-sx} \left(\int_0^x f(x-t) g(t)\ dt\right) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-sx} (f * g)(x)\ dx \\ &= \mathcal{L}\left\{(f*g)(t)\right\}\end{aligned}$$

■

Låt $\boldsymbol{x}_1(t) = [x_1(t), y_1(t)]^{\mathrm{T}}$ och $\boldsymbol{x}_2(t) = [x_2(t), y_2(t)]^{\mathrm{T}}$ vara två lösningar till det homogena systemet $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ $(*)$ på intervallet I. Om $W(t) \neq 0$ $\forall t \in I$ så är den allmänna lösningen $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2$.

Bevis:
Enligt Picards sats så är $\boldsymbol{x}(t)$ den allmänna lösningen om konstanterna c_1, c_2 kan väljas för att uppfylla de godtyckliga villkoren $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ för $t_0 \in I$, alltså

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ y_1(t_0) & y_2(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Detta system kan alltid lösas om determinanten av matrisen är nollskild. Vi vill att det ska kunna lösas för alla $t_0 \in I$, och kräver alltså

$$\det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix} = W(t) \neq 0\ \forall t \in I.$$

■

Låt $\boldsymbol{x}_1(t) = [x_1(t), y_1(t)]^{\mathrm{T}}$ och $\boldsymbol{x}_2(t) = [x_2(t), y_2(t)]^{\mathrm{T}}$ vara två lösningar till det homogena systemet $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ på intervallet I. Då gäller endast en av följande:

- $W(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \neq 0$ $\forall t \in I$.
- $W(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ $\forall t \in I$.

Bevis:
Detta bevis är mycket likt det tidigare beviset av en liknande sats för andra ordningens ekvationer, se Bevis: s. 14. I detta fall har vi

$$W = x_1y_2 - x_2y_1, \quad W' = x_1'y_2 + x_1y_2' - x_2'y_1 - x_2y_1'.$$

Vidare har vi från lösningarna:

$$x_1'(t) = a_1(t)x_1(t) + b_1(t)y_1(t) \tag{1}$$
$$y_1'(t) = a_2(t)x_1(t) + b_2(t)y_1(t) \tag{2}$$
$$x_2'(t) = a_1(t)x_2(t) + b_1(t)y_2(t) \tag{3}$$
$$y_2'(t) = a_2(t)x_2(t) + b_2(t)y_2(t) \tag{4}$$

Med $y_2 \cdot (1) + x_1 \cdot (4) - y_1 \cdot (3) - x_2 \cdot (2)$ (dessa valda för att bilda W' i HL) får vi

$$W' = (a_1 + b_2)W \implies W(t) = ce^{\int (a_1(t)+b_2(t))\ dt}.$$

Alltså gäller $W = 0 \iff c = 0, W \neq 0 \iff c \neq 0$. ■

Det finns även bevis till fler satser för linjära system som liknar bevisen för motsvarande satser för andra ordningens ekvationer. Dessa väljer jag att utelämna i denna kurssammanfattning.

> Betrakta det autonoma systemet
>
> $$\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y) \end{cases}.$$
>
> Om det existerar en Lyapunovfunktion $E(x,y)$ så är systemet stabilt i den kritiska punkten $(0,0)$. Om det existerar en strikt Lyapunovfunktion $E(x,y)$ så är denna kritiska punkt även asymptotiskt stabil.

Bevis:
(Endast beviside behövs; fullständigt bevis ges här) Antag att det existerar en Lyapunovfunktion $E(x,y)$. Låt C_1 vara en stor cirkel med radie $R > 0$ centrerad i origo. Låt $m = \min_{\boldsymbol{x} \in C_1} E(\boldsymbol{x}) > 0$. Låt C_2 vara en mindre cirkel med radie $r > 0$ med $r < R$ centrerad i origo, så att $E(\boldsymbol{x}) < m\ \forall \boldsymbol{x} \in C_2$ vilket är möjligt eftersom E är kontinuerlig och positivt definit. Betrakta en godtycklig lösning $\boldsymbol{\xi}(t)$ som är inuti C_2 vid $t = t_0$. Alltså gäller $E(\boldsymbol{\xi}(t_0)) < m$. Eftersom $\frac{dE}{dt} \leq 0$ så gäller $E(\boldsymbol{\xi}(t)) < m$ för alla $t \geq t_0$. Alltså kan $\boldsymbol{\xi}$ aldrig lämna cirkeln C_1. Detta visar stabilitet.

Antag nu att det existerar en strikt Lyapunovfunktion $E(x,y)$. Med samma beteckning som innan gäller då $\lim_{t\to\infty} E(\boldsymbol{\xi}(t)) = L$ där $L \geq 0$. Vi vill visa att L måste vara 0, för det innebär att lösningen närmar sig den kritiska punkten.

Vi antar $L > 0$ och jobbar mot en motsägelse. Välj en liten cirkel C_3 med radie $r' > 0$ med $r' < r$ centrerad i origo, så att $E(\boldsymbol{x}) < L$ för $\boldsymbol{x} \in C_3$. Då har $\frac{dE}{dt}(\boldsymbol{x})$ ett negativt maximum $-k$ för $\boldsymbol{x}$ mellan eller inuti C_1 och C_3, eftersom att denna är kontinuerlig och negativt definit. Eftersom att vi antog att lösningen $\boldsymbol{\xi}$ befinner sig mellan C_1 och C_3 för alla $t_0 < t < \infty$ så kommer då $\frac{d}{dt}E(\boldsymbol{\xi}(t)) \leq -k$. Alltså kommer $E(\boldsymbol{\xi}(t)) < 0$ för stora t vilket är en motsägelse. Detta visar asymptotisk stabilitet. ■

> Betrakta begynnelsevärdesproblemet
>
> $$y' = f(x,y), \quad y(a_x) = a_y.$$
>
> Antag att $f(x,y)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga på en sluten rektangel R så att (a_x, a_y) är en inre punkt till R. Då existerar det ett $h > 0$ så att begynnelsevärdesproblemet har en unik lösning för $x \in [a_x - h, a_x + h] =: I$.

Bevis:
(Endast beviside behövs; jag utelämnar vissa steg här men ger förmodligen mer info än nödvändigt) Vi börjar med att skriva om begynnelsevärdesproblemet som en integralekvation:

$$y(x) = a_y + \int_{a_x}^{x} f(t, y(t))\ dt \qquad (*)$$

Inför "picarditerationerna":

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= a_y \\
y_1(x) &= a_y + \int_{a_x}^{x} f(t, y_0(t))\ dt \\
&\vdots \\
y_n(x) &= a_y + \int_{a_x}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\ dt
\end{aligned}$$

Vi skriver om $y_n = y_{n-1} + (y_n - y_{n-1}) = \cdots = y_0 + \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})$. Låt nu $y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(y_k - y_{k-1})$. Det kommer visa sig att detta är lösningen till integralekvationen.

Med kontinuiteterna kan vi visa att det finns ett K så att $\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \leq K|y_2 - y_1|$ (Lipschitzvillkoret) för $(x, y_1) \in R$ och $(x, y_2) \in R$, vilket jag utelämnar. Dessutom finns ett M så att $\max_{(x,y)\in R}\left|f(x, y)\right| \leq M$. Bilda nu en mindre rektangel

$$R' = \{(x, y) : |x - a_x| \leq h, \left|y - a_y\right| \leq Mh\} \subset R$$

med ett h som uppfyller $h \leq \frac{1}{2K}$. I denna rektangel kan alltså y inte gå "långt" bort från a_y.

Vi vill nu visa att y är väldefinierad genom att visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k(x) - y_{k-1}(x)\right|$ konvergerar för $x \in I$. Observera att $y_0(x) = a_y \in R'\ \forall x \in I$. Vidare gäller

$$\left|y_1(x) - y_0(x)\right| = \left|\int_{a_x}^{x} f(t, y_0(t))\ dt\right| \leq Mh$$

eftersom h är längden på integrationsintervallet och M är en övre begränsning på funktionsvärdet av f. Alltså ligger $y_1(x) \in R'\ \forall x \in I$. Enligt liknande resonemang ligger även $y_n(x) \in R'\ \forall x \in I,\ \forall n$. Inför nu konstanten $a = \max_{x\in I}\left|y_1(x) - y_0(x)\right|$. Med detta tillsammans med Lipschitzvillkoret (vilket är uppfyllt då alla $y_n \subset R' \subset R$) har vi då att

$$\left|f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))\right| \leq K\left|y_1(t) - y_0(t)\right| \leq Ka.$$

Vi använder detta för att visa:

$$\left|y_2(x) - y_1(x)\right| = \left|\int_{a_x}^{x} \big(f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))\big)\ dt\right| \leq h \cdot Ka.$$

På liknande sätt gäller

$$\begin{aligned}
\left|f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))\right| &\leq K\left|y_2(t) - y_1(t)\right| \leq K(hKa) = K^2ah \\
\implies \left|y_3(x) - y_2(x)\right| &= \left|\int_{a_x}^{x} \big(f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))\big)\ dt\right| \leq h \cdot K^2ah = a(Kh)^2.
\end{aligned}$$

Iteration av detta resonemang ger

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| \leq a(Kh)^{n-1}.$$

Från vårt val av h har vi även att $a(Kh)^{n-1} \leq a(1/2)^{n-1}$. Med detta har vi följande resultat för serien i fråga:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k(x) - y_{k-1}(x)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} a\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad \text{som konvergerar.}$$

Nu vet vi att y är väldefinierad! Dessutom vet vi att $y \in R'$ eftersom att alla y_n gör det och R' är sluten.

Vi behöver även visa att y är kontinuerlig. Jag utelämnar den biten, men det följer från att alla y_n är kontinuerliga och $y_n \to y$ "likformigt".

Nu återstår det att visa att y faktiskt löser integralekvationen $(*)$. Alltså vill vi visa att $y(x) - a_y - \int_{a_x}^{x} f(t, y(t))\, dt \overset{?}{=} 0$. Vi vet redan, från definitionen av picarditerationerna, att $y_n(x) - a_y - \int_{a_x}^{x} f(t, y_{n-1}(t)\, dt) = 0$. Vi kombinerar dessa ekvationer och får följande som vi vill visa:

$$y(x) - y_n(x) + \int_{a_x}^{x} \big(f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y(t))\big)\, dt \overset{?}{=} 0 \tag{$**$}$$

Vi undersöker beloppet av detta:

$$\begin{aligned}
&\left| y(x) - y_n(x) + \int_{a_x}^{x} \big(f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y(t))\big)\, dt \right| \\
\leq &\big| y(x) - y_n(x) \big| + \left| \int_{a_x}^{x} \big(f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y(t))\big)\, dt \right| \\
\leq &\big| y(x) - y_n(x) \big| + Kh \max_{t \in I} \big| y_{n-1}(t) - y(t) \big| && \text{(Lipschitz)}
\end{aligned}$$

Eftersom $y_n \to y$ likformigt vet vi att båda termerna på formen $\big|y_n(x) - y(x)\big| \to 0$ då $n \to \infty$. Detta visar att beloppet av $(**)$ är uppåt begränsad av 0 då $n \to \infty$, så $(**)$ blir sann! Med detta har vi visat existens av lösning till $(*)$.

Vi fortsätter med att visa entydighet av lösningen y. Vi antar att $\bar{y}$ är en annan lösning.

Till en början ska vi visa att $\bar{y}$ måste vara i R' på hela intervallet I. Vi antar att $\bar{y}$ lämnar R' vid punkten x_1 och jobbar mot en motsägelse. Alltså: $\big|\bar{y}(x_1) - a_y\big| = Mh$ (höjden av R') för $|x_1 - a_x| < h$. Desstom låter vi x_1 vara den första punkten där $\bar{y}$ lämnar R'; alltså: $\big|\bar{y}(x) - a_y\big| < Mh$ för $|x - a_x| < |x_1 - a_x|$. Detta innebär (per Medelvärdesatsen) att det existerar ett x^* mellan a_x och x_1 så att $\big|\bar{y}'(x^*)\big| = \frac{Mh}{|x_1 - a_x|} > \frac{Mh}{h} = M$. Men å andra sidan har vi att $\bar{y}$ löser diffekvationen vilket medför $\big|\bar{y}'(x^*)\big| = \big|f(x^*, \bar{y}(x^*))\big| \leq M$ eftersom i punkten x^* befinner $\bar{y}$ sig i R'. Sammanfattat har vi $M < \big|\bar{y}'(x^*)\big| \leq M$ vilket är en motsägelse! Vi har nu visat att $\bar{y} \subset R'$ på I.

Fortsättningsvis ska vi använda detta för att visa $\bar{y} \overset{?}{=} y$. Inför $A = \max_{x \in I} |\bar{y} - y| \geq 0$. Vi har:

$$\begin{aligned}
\big|\bar{y}(x) - y(x)\big| = &\left| \int_{a_x}^{x} \big(f(t, \bar{y}(t)) - f(t, y(t))\big)\, dt \right| \\
\leq &Kh \max_{x \in I} \big|\bar{y}(x) - y(x)\big| && \text{(Lipschitz, ty } \bar{y}, y \subset R) \\
\leq &KhA \leq \frac{A}{2} && \big(h \leq 1/2K\big) \\
\implies \max_{x \in I} &\big|\bar{y}(x) - y(x)\big| \leq \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Alltså har vi $0 \leq A \leq A/2 \implies A = 0 \implies \bar{y}(x) = y(x)\ \forall x \in I$. Med detta har vi visat entydighet! ■

Låt oss sammanfatta stegen vi tog:

- Skriv om problemet som en integralekvation.
- Inför picarditerationer y_n.
- Inför en mindre rektangel R' med bra egenskaper.
- Visa att alla $y_n \subset R'$.
- Visa att $y_n \to y$ konvergerar till en (kontinuerlig) funktion.
- Visa att y löser integralekvationen. Detta visar existens av lösning.
- Inför en annan lösning $\bar{y}$.
- Visa att $\bar{y} \subset R'$.

- Visa att $\bar{y} = y$. Detta visar entydighet av lösningen.

Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$y' = f(x, y), \quad y(a_x) = a_y.$$

Antag att $f(x, y)$ är kontinuerlig och uppfyller Lipschitzvillkoret $\big|f(x, y_1) - f(x, y_2)\big| \leq K|y_1 - y_2|$ i remsan $x \in [a, b] =: I, y \in (-\infty, \infty)$. Antag också att $a_x \in I$. Då har begynnelsevärdesproblemet en unik lösning för $x \in I$.

Bevis:
(Endast bevisidé) Detta bevis liknar beviset för Picards sats. Som förut använder vi picarditerationer $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Denna gång behöver vi inte ha en rektangel R' eftersom att Lipschitzvillkoret är uppfyllt för alla y-värden för $x \in I$. Istället hittar vi ett M så att $\big|y_1(x) - y_0(x)\big| \leq M$ på I. Detta görs genom

$$M_1 := \max_{x \in I} \big|y_1(x)\big| \geq 0, \quad M := \big|y_0(x)\big| + M_1$$
$$\implies \big|y_1(x) - y_0(x)\big| \leq M \ \forall x \in I.$$

Med detta så kan vi resonera på liknande sätt som i picardbeviset och visa att $|y_n - y_{n-1}|$ blir mindre och mindre för större n, och att picarditerationerna därför konvergerar.