

Detta är en sammanställning av metoder, definitioner och satser som jag anser vara bra att kunna och som jag tror kommer behövas på tentamen. Jag har försökt att hålla det så kompakt som möjligt.

## Olinjära skalära ekvationer

För alla dessa behandlas skalära ekvationer  $f(x) = 0$ , där  $f(x), x \in \mathbb{R}$ . Vi söker en rot  $x^*$  sådan att  $f(x^*) = 0$ . Dessa metoder är iterativa och ger en sekvens av gissningar  $x_0, x_1, \dots$  som kommer närmare och närmare roten  $x^*$ .

Def: **Konvergensordning:** En iterativ metod har konvergensordning  $p$  om

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = S < \infty, \quad \text{alternativt } |e_{n+1}| \approx S|e_n|^p$$

där  $e_n$  är felet, sådan att  $x_n - x^* = e_n$ . Talet  $S$  kan kallas för **konvergenshastigheten**.

För linjär konvergens ger detta en användbar approximation för  $S$ :

$$x_{n+1} - x_n \approx S(x_n - x_{n-1})$$

För kvadratisk (och högre) konvergens kan man göra följande goda approximation för felet:

$$|x_n - x_{n-1}| \approx |x_{n-1} - x^*|$$

## Intervallhalvering

Antag  $f$  kontinuerlig. Antag att det finns en rot  $x^* \in [a_0, b_0]$  med kända  $a_0$  och  $b_0$ . Antag också att  $f(a_0)$  och  $f(b_0)$  har olika tecken.

Metod:

- $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$
- Om  $f(a_0)$  och  $f(x_0)$  har olika tecken, byt till intervallet  $[a_1, b_1] := [a_0, x_0]$ . Annars: byt till intervallet  $[a_1, b_1] := [x_1, b_0]$ .
- Upprepa...

Felet halveras ungefärligt vid varje iteration (som övre begränsning). Detta medför konvergensordning 1.

## Fixpunktiteration

Skriv om ekvationen  $f(x) = 0$  som  $x = \phi(x)$  sådan att  $x^* = \phi(x^*)$  om  $f(x^*) = 0$ .

Metod:  $x_{n+1} = \phi(x_n)$

Konvergensordning...

- ...1 om  $0 < |\phi'(x^*)| < 1$ ; snabbare konvergenshastighet om  $|\phi'(x^*)| \ll 1$ .
- ...2 om  $\phi'(x^*) = 0$  och  $\phi'(x) \neq 0$ .
- ...divergent om  $|\phi'(x^*)| > 1$ .

Sats: **Global konvergens:** Antag att  $\phi$  är kontinuerligt deriverbar och har en fixpunkt  $x^*$ . Om  $|\phi'(x)| < 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ , så konvergerar  $x_n \rightarrow x^*$  för alla startgissningar  $x_0$ . Fixpunkten är då också unik.

Sats: **Lokal konvergens:** Antag att  $\phi$  är kontinuerligt deriverbar och har en fixpunkt  $x^*$ . Om  $|\phi'(x^*)| < 1$ , så konvergerar  $x_n \rightarrow x^*$  för startgissningar  $x_0$  som är tillräckligt nära  $x^*$ .

## Newton's metod

Metod:  $x_{n+1} = x_n - \delta$  där  $\delta = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Konvergensordning 2, givet att  $f'(x^*), f''(x^*) \neq 0$ . Konvergensordning 1 om  $x^*$  är en dubbelrot.

## Sekantmetoden

Metod:  $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ .

Liknar Newtons metod; tänk  $f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ .

Konvergensordning  $\varphi \approx 1.6$ , givet att  $f'(x^*) \neq 0$ . Notera att denna kräver två startgissningar.

## Olinjära ekvationssystem

För alla dessa behandlas ekvationssystem  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  där  $\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ .

### Newton's metod

Metod:  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \delta$  där  $J(\mathbf{x}_n)\delta = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$ .

Konvergensordning 2 givet att  $J(\mathbf{x}^*)$  är icke-singulär.

## Linjära ekvationssystem

För alla dessa behandlas ekvationssystem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  där  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  och  $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ .

## LU-faktorisering

Metoden delar upp  $A = LU$ , sådana att  $L$  är undertriangulär och  $U$  är övertriangulär. Systemet kan nu lösas enligt  $L\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$  och sedan  $U\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ .

Man kan även behöva använda sig av pivotering ifall radbyten krävs vid faktoriseringen. I så fall används  $PA = LU$  där  $P$  är en permutationsmatris på liknande sätt.

## Beräkningskostnad

En operation  $+$ ,  $-$ ,  $\times$  eller  $\div$  räknas som en flop, alternativt en tidsenhet. Här är några komplexiteter för vanliga beräkningar:

- Skalarprodukt:  $O(n)$
- Matris-vektor-multiplikation:  $O(n^2)$
- Matris-matris-multiplikation:  $O(n^3)$
- Lösa linjärt ekvationssystem:  $O(n^3)$
- LU-faktorisering:  $O(n^3)$
- Lösa triangulärt linjärt ekvationssystem:  $O(n^2)$
- Lösa bandat ekvationssystem:  $O(n)$

LU-faktorisering är alltså snabbare om man ska lösa många system med samma matris.

## Iterativ metod

Skriv om  $A = P - B$ . Detta ger en fixpunktform  $\mathbf{x} = P^{-1}(B\mathbf{x} + \mathbf{b})$ .

Metod:  $P\mathbf{x}_{n+1} = B\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$ .

Vi bör välja  $P$  så att systemet  $P\mathbf{x} = \dots$  är enkelt att lösa.

- **Jacobis metod:** Välj  $P$  till diagonalen av  $A$ .
- **Gauss-Seidels metod:** Välj  $P$  till den undertriangulära delen av  $A$ . Denna är oftast lite snabbare.

Dessa konvergerar om  $\|P^{-1}B\| < 1$  för någon matrisnorm.

## Normer

Vektornormer:

- $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum x_j^2}$
- $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum |x_j|$
- $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_j |x_j|$

Matrisnormer:

- $\|A\|_\infty = \max_k \sum_m |a_{k,m}|$

## Eigenvärden och egenvektorer

### Potensmetoden

Metoden beräknar det till belopp största egenvärdet  $\mu$  och den tillhörande egenvektorn  $\mathbf{y}$ .

Metod:

1.  $\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{y}_k$
2.  $\mu_k = \mathbf{y}_k \cdot \mathbf{v}_{k+1}$
3.  $\mathbf{y}_{k+1} = \frac{\mathbf{v}_{k+1}}{\|\mathbf{v}_{k+1}\|}$

Sats: Antag att  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  är diagonaliserbar och har eigenvärden som uppfyller

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Då konvergerar potensmetoden mot  $\lambda_1$ , om startgissningen  $\mathbf{y}_0 \notin \text{span}\{\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  där  $\mathbf{x}_i$  är egenvektorn tillhörande  $\lambda_i$ . I så fall är konvergensen linjär med konvergenshastighet  $S = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$ .

### Inversa potensmetoden

Som potensmetoden, men ersätt  $A \mapsto A^{-1}$ . Då konvergerar metoden mot  $\frac{1}{\lambda}$  där  $\lambda$  är det till belopp minsta egenvärdet.

### Inversa potensmetoden med skift

Som potensmetoden, men ersätt  $A \mapsto (A - \sigma I)^{-1}$ . Då konvergerar metoden mot  $\frac{1}{\lambda - \sigma}$  där  $\lambda$  är egenvärdet närmast  $\sigma$ .

## Fel- och störningsanalys

### I en variabel

Här är  $x$  det exakta värdet och  $\tilde{x}$  är en approximation av  $x$ . Vi kallar indatafelet för  $\varepsilon_x$  sådan att  $\tilde{x} = x + \varepsilon_x$ . Vi använder oss av en metod  $y = F(x)$  som vi vill analysera. Vi använder liknande notation för utdatan:  $\tilde{y} = y + \varepsilon_y$ .

Def: **Felgräns:**

**Absolut felgräns:**  $E_x : |\tilde{x} - x| \leq E_x$

**Relativ felgräns:**  $R_x : \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} \leq R_x$

Om  $F$  är deriverbar och snäll gäller

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &\approx \varepsilon_x F'(\tilde{x}) \\ E_y &\approx E_x |F'(\tilde{x})|\end{aligned}$$

Def: **Konditionstal:**  $\kappa : R_y \approx \kappa R_x$

## I flera variabler

Här är metoden formulerad som  $y = F(\mathbf{x})$  där  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ . Om  $F$  är snäll gäller

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &\approx \varepsilon_{x_1} \frac{\partial F(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_1} + \dots + \varepsilon_{x_n} \frac{\partial F(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \\ E_y &\approx E_{x_1} \left| \frac{\partial F(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_1} \right| + \dots + E_{x_n} \left| \frac{\partial F(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \right|\end{aligned}$$

## Experimentell störningsräkning

Denna används när  $F$  är komplicerad och ej går att derivera.

$$E_y \approx |y_{\text{exp},1} - \tilde{y}| + \dots + |y_{\text{exp},n} - \tilde{y}| \quad \text{där } y_{\text{exp},i} = F(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i + E_{x_i}, \dots, \tilde{x}_n)$$

## För linjära ekvationssystem

Vi behandlar  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  där  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  och  $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Vi har ett stört  $\tilde{\mathbf{b}}$  som ger ett stört  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

Def: **Konditionstal:**  $\kappa : R_{\mathbf{x}} = \kappa R_{\mathbf{b}}$  där  $\frac{\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq R_{\mathbf{b}}$ ,  $\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq R_{\mathbf{x}}$ .  
Beror på valet av norm.

Konditionstalet  $\kappa$  beror på  $A$  och kan beräknas med

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

## Interpolation

Vi behandlar  $n + 1$  givna punkter  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ . Vi vill hitta ett polynom  $p$  sådan att  $p(x_j) = y_j$  där  $j = 0, \dots, n$ .

Sats: Om  $x_0, \dots, x_n$  är distinkta så finns det ett unikt polynom av gradtal  $\leq n$  som passerar genom punkterna  $(x_j, y_j)$ .

## Vandermondematris

Ansätt polynomet  $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ . Då kan konstanterna beräknas enligt

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

## Newton's ansats

Ansätt polynomet  $p(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + d_n \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)$ . Då kan konstanterna beräknas enligt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \dots & \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

## Polynomevaluering

Att evaluera  $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$  naivt tar  $O(n^2)$  tid. Alternativt kan man nyttja Horner's metod, och skriva om polynomet som  $p(x) = c_0 + x(c_1 + x(\dots + x(c_{n+1} + c_nx) \dots))$  och evaluera inifrån ut. Detta tar  $O(n)$  tid.

## Felanalys

Vi betraktar ett polynomet  $p(x)$  som interpolerar en funktion  $f(x)$  i intervallet  $[a, b]$ .

Def: **Maxfelet:**  $E_n := \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)|$

Sats: För varje  $x \in [a, b]$  finns det ett  $\xi \in [a, b]$  som beror på  $x$ , sådant att

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

## Styckvis interpolation

För styckvis linjär interpolation med steglängd  $h$  gäller

Sats:

$$E_n \leq Mh^2 \quad \text{där } M = \max_{a \leq \xi \leq b} \frac{|f''(\xi)|}{8}$$

## Minstakvadratmetoden

### Linjärt

Vi vill lösa  $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$  där  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $n > m$ . Alternativt: vi vill minimera  $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ .

Detta kan lösas med normalekvationen

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}.$$

Alternativt kan det lösas med QR-faktorisering... (metoden ej viktig).

### Olinjärt - Gauss-Newtons metod

Vi har en vektorvärd funktion  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  och vi vill lösa  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{0}$ , alternativt minimera  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|$ .

Metod:  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \boldsymbol{\delta}$  där  $\boldsymbol{\delta} : J(\mathbf{x}_k)\boldsymbol{\delta} \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$  löses i minstakvadratmening.

## Derivering

Metod: **Framåttdifferens**:  $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + O(h)$

Metod: **Centraldifferens**:  $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + O(h^2)$

Def: **Noggrannhetsordning**: En metod har noggrannhetsordning  $p$  om felet  $e_h \leq Ch^p$  för små  $h$ .

Om  $u_h$  är en metod utförd med steglängd  $h$ , och denna är tillräckligt snäll så gäller även  $e_h \approx Ch^p$ .

Detta medför några användbara approximationer:

$$\left| u_h - u_{\frac{h}{2}} \right| \geq \left| e_{\frac{h}{2}} \right|$$

$$2^p \approx \frac{u_h - u_{\frac{h}{2}}}{u_{\frac{h}{2}} - u_{\frac{h}{4}}}$$

## Integration

### Kvadraturmetoder

Def: **Kvadraturmetod**: En metod för att approximera integraler. Vikter  $w_j$  väljs på något sätt, så att integralen approximeras med

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^n w_j f(x_j).$$

Metod: **Trapetsregeln**:  $I_h = h \left( \frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$ . Noggrannhetsordning 2.

Metod: **Simpsons formel**:  $I_h = \frac{h}{3} \left( f(x_0) + 4 \sum_{j \text{ udda}} f(x_j) + 2 \sum_{j \text{ jämnt}} f(x_j) + f(x_n) \right)$ , givet att  $n$  är jämn. Noggrannhetsordning 4.

Metod: **Trapetsregeln, två dimensioner**:

$$I = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m f(x_j, y_k) h_x h_y w_{j,k} \quad \text{där } w_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{inre punkter} \\ 1/2, & \text{kantpunkter} \\ 1/4, & \text{hörnpunkter} \end{cases}$$

Def: **Enkel regel**: Integration av ett delintervall.

Def: **Sammansatt regeln**: Integration av alla delintervall.

Def: **Precisionsgrad**: En enkel regel har precisionsgrad  $d$  om den integrerar följande monom exakt:  $1, x, \dots, x^d$ .

Sats: Om en enkel regel har precisionsgrad  $d$ , så har motsvarande sammansatta regel noggrannhetsordning  $p = d + 1$ , givet att  $f \in C^{d+1}$ .

Om integranden är periodisk på integrationsintervallet, så blir noggrannheten 'spektral' och bättre än alla algebraiska noggrannhetsordningar.

## Monte Carlo-integration

Här behandlar vi en högdimensionell integral  $\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ .

Metod: Välj punkter  $X_1, \dots, X_N \in \Omega$  slumpmässigt. Då gäller

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{|\Omega|}{N} \sum_{j=1}^N f(X_j) + O(N^{-1/2}).$$

## Richardsonextrapolation

Kalla  $u_h$  för metoden med steglängd  $h$ , som har noggrannhetsordning  $p$ . Richardsonextrapolation kan användas för samtliga sorters problem där teorin om noggrannhetsordningar kan appliceras.

Metod: Bilda

$$\tilde{u}_{h/2} := u_{h/2} - \frac{u_h - u_{h/2}}{2^p - 1}.$$

Denna kommer minst ha noggrannhetsordning  $p + 1$ .

## Optimering

Här behandlar vi problem som handlar om att minimera en funktion  $f(x)$ . För att istället maximera går det att ersätta  $f \mapsto -f$ .

Man kan enklast använda någon metod för ekvationslösning ovan, såsom Newtons metod fast applicerat på  $f'$  alternativt  $\nabla F$  istället, för att minimera/optimera.

## Gyllene-snittet sökning

Antag att  $f$  är unimodal i  $[a_0, b_0]$ , alltså

- $f$  har ett unikt minimum  $x^* \in [a_0, b_0]$
- $f$  är strikt avtagande  $\forall x < x^*$  samt strikt växande  $\forall x > x^*$

Metod:

- Välj  $x_0, y_0$  enligt  $x = b - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$ ;  $y = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$ .
- Om  $f(x_0) > f(y_0)$ : byt till intervallet  $[x_0, b_0]$ . Annars: byt till  $[a_0, y_0]$ .
- Upprepa...

## Gradientsökning

Används för flervariabelfunktioner  $F(\mathbf{x})$ .

Metod:  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \nabla F(\mathbf{x}_k)$  där  $\alpha_k$  väljs så att minimera längs den givna riktningen  $-\nabla F \mathbf{x}_k$ , med hjälp av en optimeringsmetod för envariabelfunktioner.

Alternativt kan riktningen  $-\nabla F_j$  användas med ett slumpvist valt  $j$  i varje iteration; då kallas metoden för **stokastiska gradientmetoden**. Detta är användbart om  $F$  är av väldigt hög dimension.

## Med bivillkor

Vi kan använda oss av Lagrange-multiplikation som vi känner till från flervariabelanalysen. Alternativt kan vi använda straff-funktioner. Vi definierar om  $F$  så att den antar extremt stora värden när bivilkoren ej är uppfyllda.