SF1677 Analysens grunder
Kurssammanfattning

Leo Trolin

29/05-2024

Denna kurssammanfattning blev ganska påskyndad runt andra halvan och jag anser inte att den är färdig i dess nuvarande form. Jag väljer ändå att publicera den ifall någon är intresserad då jag förmodligen inte kommer skriva mer på den.

Kapitel 1: Reella tal

Supremum

Definition: (**Ordning**)
En ordning på en mängd S är en relation $<$ så att, för $x, y, z \in S$:

- Exakt en av följande gäller: $x < y$, $x = y$, $x > y$
- $x < y$ och $y < z \implies x < z$

Definition: (**Ordnad kropp**)
En ordnad kropp K är en kropp som är en ordnad mängd, som dessutom uppfyller för $x, y, z \in K$ att:

- $y < z \implies x + y < x + z$
- $x > 0, y > 0 \implies xy > 0$

Definition: (**Övre gräns/Undre gräns**)
Låt S vara en ordnad mängd och $E \subset S$. Då har E en övre gräns $\alpha \in E$ och är därmed uppåt begränsad om $\alpha \geq x \ \forall x \in E$.

På motsvarande sätt definierar vi undre gräns och nedåt begränsad.

Definition: (**Supremum/Infimum**)
Låt S vara en ordnad mängd och $E \subset S$. Då har E ett supremum eller minsta övre gräns $\alpha = \sup E \in S$ om:

- α är en övre gräns till E
- Om $\beta < \alpha$ så är β inte en övre gräns till E

På motsvarande sätt definierar vi infimum eller största undre gräns.

Definition: (**Supremumegenskapen**)
En ordnad mängd S har supremumegenskapen om varje icke-tom uppåt begränsad delmängd $E \subset S$ har ett supremum $\sup E \in S$.

Sats:
$\mathbb{Q}$ saknar supremumegenskapen.

↳ Bevis:

> Låt $A := \{r \in \mathbb{Q}_+ : r^2 < 2\}$. Antag att A har ett supremum $\alpha = \sup A$. Tag ett $p \in A$. Låt
>
> $$q := \frac{2p+2}{p+2} = p - \frac{\overbrace{p^2 - 2}^{<0}}{p+2} > p$$
>
> men samtidigt gäller
>
> $$q^2 - 2 = \left(\frac{2p+2}{p+2}\right)^2 - 2 = \frac{2p^2 - 4}{(p+2)^2} < 0$$
>
> så $q > p$ samt $q \in A$, vilket innebär att A inte har ett största element. Därmed måste det gälla att $\alpha^2 > 2$ (eftersom det inte finns något rationellt tal vars kvadrat är 2). Låt $B := \{r \in \mathbb{Q}_+ : r^2 > 2\}$. Tag ett $p \in B$. Låt
>
> $$q := \frac{2p+2}{p+2} = p - \frac{\overbrace{p^2 - 2}^{>0}}{p+2} < p$$
>
> men samtidigt gäller
>
> $$q^2 - 2 = \left(\frac{2p+2}{p+2}\right)^2 - 2 = \frac{2p^2 - 4}{(p+2)^2} > 0$$

> så $q < p$ samt $q \in B$, vilket innebär att B inte har ett minsta element. Detta visar att α inte kan vara minimalt vilket motsäger att α är supremum.

Konstruktion av $\mathbb{R}$

Definition: (**Snitt**)
Ett (Dedekind-)snitt är en delmängd $\alpha \subset \mathbb{Q}$ så att:

- $\alpha \neq \varnothing, \ \alpha \neq \mathbb{Q}$
- $p \in \alpha$ och $q \in \mathbb{Q}, \ q < p \implies q \in \alpha$
- $p \in \alpha \implies \exists r \in \mathbb{Q} : r > p$ och $r \in \alpha$

↳ Intuition: Vi kan tänka att ett snitt nödvändigtvis är på formen $(-\infty, x) \cap \mathbb{Q}$ för något $x \in \mathbb{R}$.

Definition: ($\mathbb{R}$)
$\mathbb{R} := \{\alpha : \alpha$ är ett snitt$\}$. Om $p \in \mathbb{Q}$ så identifierar vi p med $p^* := \{r \in \mathbb{Q} : r < p\}$.

Definition: ($<$)
För $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ låter vi $\alpha < \beta$ om $\alpha \subsetneq \beta$.

Det återstår att visa att detta verkligen utgör en ordning.

↳ Bevis:

> Transivitet är uppenbart från mängdlära. Vidare är det uppenbart att högst en av $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ och $\alpha > \beta$ kan gälla. Det återstår att visa att minst en måste gälla.
>
> Antag $\alpha \not< \beta$ och $\alpha \neq \beta$. Tag ett $a \in \alpha$ så att $a \notin \beta$. Tag ett $b \in \beta$. Då måste $b < a$ eftersom annars skulle det gälla att $a \in \beta$. Detta säger oss att $b \in \alpha$ vilket att $\alpha > \beta$.

Sats:
$\mathbb{R}$ har supremumegenskapen.

↳ Bevis:

> Låt $A \subset \mathbb{R}$ så att A är uppåt begränsad och icke-tom. Låt γ vara unionen av alla snitt i A. *Vi kommer visa att* $\gamma = \sup A \in \mathbb{R}$.
>
> Påstående: γ är ett snitt:
> Vi ser $\gamma \neq \varnothing$ eftersom $A \neq \varnothing$. Vi ser $\gamma \neq \mathbb{Q}$ eftersom A är uppåt begränsad.
>
> Ta ett $p \in \gamma$. Då är $p \in \alpha$ för något snitt $\alpha \in A$. Alltså gäller det för alla $q \in \mathbb{Q}$ där $q < p$ att $q \in \alpha$. Av samma anledning, $\exists r > p$ så att $r \in \alpha \subset \gamma$. ■
>
> Påstående: $\gamma = \sup A$:
> Det gäller $\alpha \leq \gamma$ för alla $\alpha \in A$ trivialt per konstruktionen av γ. Ta något $\beta < \gamma$. Då finns ett $p \in \gamma$ så att $p \notin \beta$, men $p \in \alpha$ för något $\alpha \in A$. Alltså gäller $\beta < \alpha$. ■

Definition: ($+$)
För $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ låter vi $\alpha + \beta := \{a + b : a \in \alpha, b \in \beta\}$.

Definition: ($\cdot$)
För $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ låter vi $\alpha \cdot \beta := \{a \cdot b : a \in \alpha, b \in \beta\}$.

Egenskaper hos $\mathbb{R}$

Sats: (**$\mathbb{R}$ är arkimediskt**)
Låt $x, y \in \mathbb{R}$ så att $x > 0$. Då finns ett positivt heltal n så att $nx > y$.

↳ Bevis:

Antag motsatsen, dvs. $nx < y \ \forall n$. Låt $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$. Nu har A en övre gräns y. Sätt $\alpha = \sup A$. Då $x > 0$ gäller $\alpha - x < \alpha$ så $\alpha - x$ är ej en övre gräns till A. Alltså finns ett $m \in \mathbb{N}$ så att $\alpha - x < mx$. Men nu gäller $\alpha < (m+1)x$ vilket motsäger att α är en övre gräns till A.

Sats: ($\mathbb{Q}$ **är tät i** $\mathbb{R}$)
Låt $x, y \in \mathbb{R}$ så att $x < y$. Då finns ett $p \in \mathbb{Q}$ så att $x < p < y$.

↳ Bevis:

Notera $y - x > 0$, eftersom $\mathbb{R}$ är arkimediskt existerar ett $n \in \mathbb{N}$ så att $n(y - x) > 1$. Vidare kan vi få tal ett tal $m \in \mathbb{Z}$ så att $m - 1 \leq nx < m$. Totalt har vi nu

$$nx < m \leq 1 + nx < ny.$$

Eftersom $n > 0$ gäller då $x < \frac{n}{m} < y$.

Kapitel 2: Topologi

Uppräknelighet

Definition: (**Kardinalitet**)
Två mängder A, B har samma kardinalitet om det finns en bijektion $f : A \to B$.

Definition: (**Uppräknelig/Överuppräknelig**)
Låt A vara en oändlig mängd. Om A har samma kardinalitet som $\mathbb{N}$ är A vara uppräknelig. Annars är A överuppräknelig.

Sats:
Varje oändlig delmängd av en uppräknelig mängd är uppräknelig.

Sats:
Låt (E_n) vara en följd med $n = 1, 2, 3, \ldots$ av uppräkneliga mängder. Då är $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ uppräknelig.

↳ Kommentar: Bevisas med diagonal räkning.

Sats:
$\mathbb{Q}$ är uppräkneligt.

↳ Kommentar: Bevisas genom att identifiera $\frac{p}{q} \leftrightarrow (p, q)$ och visa att alla n-tuplar (eller 2-tuplar i detta fall) av uppräkneliga mängder är uppräkneliga.

Sats:
$\mathbb{R}$ är överuppräkneligt.

↳ Kommentar: Bevisas med Cantors diagonalargument.

Metriska rum

Definition: (**Metriskt rum**)
För en mängd X utgör $d : X \times X \to \mathbb{R}$ en metrik om:

- $d(p, q) > 0$ om $p \neq q$ och $d(p, p) = 0$ (positivt definit)
- $d(p, q) = d(q, p)$ (symmetri)
- $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ (triangelolikheten)

I så fall kallas (X, d) för ett metriskt rum.

Definition: (**Omgivning**)
Låt (X, d) vara ett metriskt rum. En omgivning av $p \in X$ är $N_r(p) := \big\{q \in X : d(p, q) < r\big\}$ för $r \in \mathbb{R}$.

Definition: (**Hopningspunkt**)
Låt (X, d) vara ett metriskt rum och $E \subset X$. En punkt $p \in X$ är en hopningspunkt till E om varje omgivning $N_r(p)$ innehåller någon punkt $q \in E$ där $q \neq p$.

Definition: (**Isolerad punkt**)
Låt (X, d) vara ett metriskt rum och $E \subset X$. Om $p \in E$ inte är en hopningspunkt till E så är p en isolerad punkt.

Definition: (**Sluten**)
Låt (X, d) vara ett metriskt rum och $E \subset X$. E är sluten om varje hopningspunkt till E ingår i E.

Definition: (**Inre punkt**)
Låt (X, d) vara ett metriskt rum och $E \subset X$. En punkt $p \in E$ är en inre punkt till E om $N_r(p) \subset E$.

Definition: (**Öppen**)
Låt (X, d) vara ett metriskt rum och $E \subset X$. E är öppen om varje punkt i E är en inre punkt.

Definition: (**Perfekt**)
Låt (X, d) vara ett metriskt rum och $E \subset X$. E är perfekt om den är sluten och alla $p \in E$ är hopningspunkter till E.

Definition: (**Begränsad**)
Låt (X, d) vara ett metriskt rum och $E \subset X$. E är begränsad om $\exists M \in \mathbb{R}$ och $q \in X$ så att $d(p, q) < M \ \forall p \in E$.

Definition: (**Tät**)
Låt (X, d) vara ett metriskt rum och $E \subset X$. E är tät i X om alla $p \in X$ är hopningspunkter till E.

Definition: (**Tillslutning**)
Låt (X, d) vara ett metriskt rum och $E \subset X$. Vi definierar $E' := \{\text{hopningspunkter till } E\}$ och tillslutningen av E som $\overline{E} := E \cup E'$.

Sats:
E är öppen $\iff$ E^c är sluten.

↳ Bevis:

> $\implies$:
> Antag att E är öppen. Antag att x är en hopningspunkt till E^c. Då gäller att varje omgivning $N_r(x) \not\subset E$, så x kan inte vara en inre punkt till E. Därmed gäller $x \notin E \iff x \in E^c$. ■
> $\impliedby$:
> Antag att E^c är sluten. Tag en punkt $x \in E$. Då gäller $x \notin E^c$, så x kan inte vara en hopningspunkt till E. Alltså finns en omgivning $N_r(x)$ som inte innehåller någon punkt i E^c, och därmed gäller $N_r(x) \subset E$ vilket visar att x är en inre punkt till E. ■

Sats:
Om $\{E_\alpha\}$ är en familj av öppna mängder så är $\bigcup_\alpha E_\alpha$ öppen.

Sats:
Om $\{E_\alpha\}$ är en familj av slutna mängder så är $\bigcap_\alpha E_\alpha$ sluten.

Sats:
Låt X och Y vara metriska rum så att $X \subset Y$, och låt $E \subset X$. Då är E öppen i X om och endast om $E = X \cap F$ för något öppet $F \subset Y$.

Exempel: (**Cantormängden**)
Låt $E_0 = [0, 1]$, $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, ... Cantormängden definieras som $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Det gäller att Cantormängden är överuppräknelig och perfekt men inte innehåller något segment (a, b).

Definition: (**Separerad**)
Låt A, B vara delmängder av ett metriskt rum X. A och B är separerade om $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$.

Definition: (**Sammanhängande**)
Låt E vara en delmängd av ett metriskt rum X. E är sammanhängande om E inte kan skrivas som unionen av två icke-tomma separerade mängder.

Kompakthet

Definition: (**Öppen övertäckning**)
Låt X vara ett metriskt rum och $E \subset X$. En öppen övertäckning av E är en familj av öppna mängder $\{G_\alpha\}$ så

att $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.

Definition: (**Kompakt**)
Låt X vara ett metriskt rum och $K \subset X$. K är kompakt i X om varje öppen övertäckning $\{G_\alpha\}$ har en ändlig delövertäckning, dvs. om det finns ändligt många index $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ så att $K \subset \bigcup_{j=1}^N G_{\alpha_j}$.

Sats:
$K \subset X$ är kompakt $\implies$ K är begränsad.

Sats:
$K \subset X$ är kompakt $\implies$ K är sluten.

Sats:
Låt $K \subset X$ vara kompakt. Om $E \subset K$ är sluten så är E också kompakt.

↳ Bevis:

> Låt $\{G_\alpha\}$ vara en öppen övertäckning av E. Då gäller att $K \subset E^c \cup \bigcup_\alpha G_\alpha$. Eftersom E^c och alla G_α är öppna så ger kompaktheten av K att det finns ändligt många $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ så att $K \subset E^c \cup \bigcup_{j=1}^N G_{\alpha_j}$, och då speciellt $E \subset \bigcup_{j=1}^N G_{\alpha_j}$.

↳ Korrolarium: K är kompakt och E är sluten $\implies$ $K \cap F$ är kompakt.

Sats:
Låt $\{K_\alpha\}$ vara en familj av kompakta mängder så att snittet av varje ändlig delfamilj är icke-tomt. Då är $\bigcap_\alpha K_\alpha$ icke-tomt.

↳ Bevis:

> BWOC, antag att $\bigcap_\alpha K_\alpha = \varnothing$. Ta en av mängderna i $\{K_\alpha\}$ och kalla den K_1. Då gäller att ingen punkt i K_1 tillhör alla K_α. För alla α, låt $G_\alpha := K_\alpha^c$ som är öppen. Nu gäller att $\{G_\alpha\}$ är en öppen övertäckning av K_1 (om ej övertäckning så skulle det finnas en punkt i K_1 som inte tillhör något K_α^c). Eftersom att K_1 är kompakt så finns en ändlig delövertäckning $K_1 \subset \bigcup_{j=1}^N G_{\alpha_j} = \left(\bigcap_{j=1}^N K_\alpha\right)^c$, dvs. $K_1 \cap \bigcap_{j=1}^N K_\alpha = \varnothing$ vilket motsäger satsen antagande.

↳ Korrolarium: Om $\{K_n\}$ är kompakta och $K_{n+1} \subset K_n$ så är $\bigcup_{n=1}^\infty K_n$ icke-tom.

Sats:
Låt $\{I_n\}$ vara en följd av icke-tomma (slutna) intervall i $\mathbb{R}$ så att $I_{n+1} \subset I_n$. Då är $\bigcup_{n=1}^\infty I_n$ icke-tomt.

↳ Bevis:

> Beteckna $I_n = [a_n, b_n]$. Definiera $E := \{a_n : n = 1, 2, \dots\}$. Vi ser att E är icketom och uppåt begränsad av t. ex. b_1, så $x := \sup E$ existerar. Eftersom $a_n \leq a_{n+m} \leq b_{m+n} \leq b_n$ för positiva heltal n, m så måste $x \in I_n$ för alla n.

↳ Korrolarium: Samma sak kan göras för k-celler I_n genom att iterera beviset ovan på varje koordinat.

Sats:
Varje *k-cell* är kompakt, där k-cell är en mängd $I = \big\{(x_1, \dots, x_k) : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, k\big\} \subset \mathbb{R}^k$.

↳ Bevis:

> Ta en k-cell I. Låt $\delta := \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_k - a_k)^2}$. Då gäller $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leq \delta \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in I$. Ta en öppen övertäckning $\{G_\alpha\}$ av I och antag BWOC att den inte har en ändlig delövertäckning. Definiera $c_j := \frac{a_j + b_j}{2}$ för $j = 1, \dots, k$. Då utgör intervallen $[a_j, c_j]$ och $[c_j, b_j]$ 2^k stycken k-celler Q_l vars union är I. Minst en av Q_l måste sakna en ändlig delövertäckning; kalla en sådan I_1. Vi utför samma process på I_1 och får I_2, osv. ad infinitum.
> Vi har nu en följd av k-celler $\{I_n\}$ som uppfyller $I_{n+1} \subset I_n$ och dessutom kan ingen av dessa täckas av en ändlig delövertäckning. Enligt korrolariet ovan måste det finnas ett $\boldsymbol{\xi}$ som ligger i alla I_n, och måste speciellt tillhöra något G_α. Eftersom som detta G_α är öppet finns något $r > 0$ så att $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\xi}| < r \implies$

> $\boldsymbol{y} \in G_\alpha$. Välj nu n så stort att $2^{-n}\delta < r$. Per vår konstruktion vet vi att $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leq 2^{-n}\delta$ för $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in I_n$, så detta medför att $I_n \subset G_\alpha$ vilket motsäger att I_n inte kan täckas av en ändlig delövertäckning.

Sats: (**Heine-Borel+**)
Låt $E \subset \mathbb{R}^k$. Då är följande ekvivalenta:

(i) E är sluten och begränsad

(ii) E är kompakt

(iii) Varje oändlig delmängd av E har en hopningspunkt i E

↳ Bevis:

> (i) $\implies$ (ii):
> $E \subset I$ för någon k-cell I. Så E är en sluten delmängd av en kompakt mängd $\implies$ E är kompakt. ■
> *(ii) $\implies$ (i) visades tidigare.*
>
> (ii) $\implies$ (iii):
> Låt E vara kompakt och ta en oändlig delmängd $F \subset E$. Antag BWOC att F ej har en hopningspunkt i E. Så, varje $q \in E$ är inte en hopningspunkt till F och därmed finns en omgivning V_q som inte innehåller någon punkt i F förutom q. Notera att $\{V_q\}$ utgör en öppen övertäckning av E. Eftersom E är kompakt så finns en ändlig delövertäckning. Men eftersom varje V_q bara innehåller en punkt i F som är oändlig så kan ingen ändlig delmängd av $\{V_q\}$ täcka F och därmed speciellt inte E, vilket ger motsägelse. ■
>
> (iii) $\implies$ (i):
> Antag BWOC att E är obegränsad. Då finns för varje $n = 1, 2, \ldots$ ett $x_n \in E$ så att $|x_n| > E$. Då är $\{x_n\}$ en oändlig delmängd i E som saknar hopningspunkt i E, vilket ger motsägelse.
>
> Antag BWOC att E ej är sluten. Då finns ett $x_0 \in \mathbb{R}^k$ där $x_0 \notin E$ men x_0 är hopningspunkt till E. Då finns en följd $\{x_n\}$ i E så att $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. Denna följd är en oändlig delmängd av E, men har ingen hopningspunkt förutom x_0 vilket ger motsägelse. ■

Följdsats: (**Weierstrass sats**)
Varje begränsad följd i $\mathbb{R}^k$ har en hopningspunkt i $\mathbb{R}^k$.

Följdsats: (**Bolzano-Weierstrass sats**)
Varje begränsad följd i $\mathbb{R}$ har en konvergent delföljd.

Sats:
Låt $K \subset X \subset Y$ där X, Y är metriska rum. Då är K kompakt i Y om och endast om K är kompakt i X.

Kapitel 3: Talföljder och serier

Konvergens

Definition: (**Konvergera**)
En följd $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ i ett metriskt rum X konvergerar mot $p \in X$ om $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ så att $d(p_n, p) < \varepsilon$ för $n \geq N$. Vi skriver $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ eller $p_n \to p$ då $n \to \infty$.

Sats:
Om $\{p_n\}$ är konvergent så är $\{p_n\}$ begränsad.

Sats:
Om $E \subset X$ och p är en hopningspunkt till E så finns en följd $\{p_n\}$ i E så att $p_n \to p$.

Sats:
Om $\{p_n\}$ är en följd i ett kompakt metriskt rum X så har $\{p_n\}$ en delföljd som konvergerar mot något $p \in X$.

↳ Kommentar: Följer från Heine-Borel+.

Definition: (**Cauchyföljd**)
En följd $\{p_n\}$ i ett metriskt rum X är en Cauchyföljd om $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ så att $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ för $n, m \geq N$.

Definition: (**Fullständigt**)
Ett metriskt rum där alla Cauchyföljder konvergerar kallas fullständigt.

Definition: (**Diameter**)
Låt $E \subset X$. Diametern av E är $\operatorname{diam} E := \sup \{d(p,q) : p, q \in E\}$ om det existerar. Annars säger vi $\operatorname{diam} E = \infty$.

Sats:
Varje konvergent följd är Cauchy.

Sats:
Låt $\{p_n\}$ vara en Cauchyföljd i ett kompakt metriskt rum X. Då är $\{p_n\}$ konvergent mot något $p \in X$.

↳ Bevis:

> Låt $E_N = \{p_N, p_{N+1}, \dots\}$ för $N = 1, 2, \dots$. Då gäller $\lim \operatorname{diam} E_N = \lim \operatorname{diam} \overline{E}_N = 0$. Eftersom $\overline{E}_N$ är slutna i det kompakta X så är alla $\overline{E}_N$ kompakta. Vidare, eftersom $\overline{E}_{N+1} \subset \overline{E}_N$, så finns exakt en punkt $p \in \bigcap \overline{E}_N$.
> Låt $\varepsilon > 0$. Då finns N_0 så att $N \geq N_0 \implies \operatorname{diam} \overline{E}_N < \varepsilon$. Så eftersom $p \in \overline{E}_N$ så gäller $d(p,q) < \varepsilon$ för alla $q \in \overline{E}_N$. Med andra ord gäller $d(p_n, p) < \varepsilon$ för $n \geq N_0$.

Sats:
$\mathbb{R}^k$ är ett fullständigt metriskt rum.

Sats:
Om $\{s_n\}$ är en monoton följd i $\mathbb{R}$ så är $\{s_n\}$ konvergent om och endast om $\{s_n\}$ är begränsad.

↳ Bevis:

> ‘ $\implies$ ’ visades tidigare. Vi visar nu ‘ $\impliedby$ ’ i fallet där $\{s_n\}$ är monotont växande:
>
> Antag att $\{s_n\}$ är växande och begränsad. Då finns $S := \sup\{s_n\}$. För varje $\varepsilon > 0$ finns N så att $S - \varepsilon < s_N$, eftersom $S - \varepsilon$ inte kan vara en övre gräns till $\{s_n\}$. Vidare eftersom $\{s_n\}$ är växande gäller för $n \geq N$ att $S - \varepsilon < s_n < s$ vilket visar att $s_n \to S$ konvergerar.

Definition: (**limsup/liminf**)
Låt $\{s_n\}$ vara en följd i $\mathbb{R}$. Låt E vara mängden av alla tal x så att $s_{n_k} \to x$ för någon delföljd $\{s_{n_k}\}$. Då definierar vi:

$$\limsup_{n\to\infty} s_n := \begin{cases} \sup E, & \text{om detta existerar} \\ \infty, & \text{annars} \end{cases}$$

$$\liminf_{n\to\infty} s_n := \begin{cases} \inf E, & \text{om detta existerar} \\ -\infty, & \text{annars} \end{cases}$$

Alternativt kan vi definiera $\limsup s_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} s_m$.

Serier

Definition: (**Konvergens (serie)**)
Vi säger att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar till s om följden av partialsummor $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ konvergerar till s.

Sats: (**Cauchykriteriet**)
Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar om och endast om $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ så att $m \geq n \geq N \implies \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$.

Sats:
Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar så måste $|a_n| \to 0$ när $n \to \infty$.

Sats: (**Jämförelsetest**)
Betrakta serier $\sum a_k$ och $\sum b_k$.

(i) Om det finns N så att $n \geq N \implies |a_n| \leq b_n$, och $\sum b_k$ är konvergent, så är $\sum a_k$ konvergent.

(ii) Om det finns N så att $n \geq N \implies a_n \geq b_n \geq 0$, och $\sum b_k$ är divergent, så är $\sum a_k$ divergent.

Sats: (**Rot-testet**)
Betrakta serien $\sum a_k$. Sätt $\alpha = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Om $\alpha < 1$ så är $\sum a_k$ konvergent. Om $\alpha > 1$ så är $\sum a_k$ divergent.

↳ Bevis:

> Antag $\alpha < 1$. Välj något β så att $\alpha < \beta < 1$. Välj N så att $\sqrt[k]{|a_k|} < \beta$ för $k \geq N$, vilket är möjligt iom. lim sup. Nu gäller $|a_k| < \beta^k$. Eftersom $\sum \beta^k$ är en konvergent geometrisk serie så konvergerar $\sum a_k$ enligt jämförelsetest.
>
> Antag $\alpha > 1$. Då finns en delföljd a_{n_k} så att $\sqrt[k]{|a_{n_k}|} \to \alpha$, vilket ger att termerna a_k inte går mot noll.

Sats: (**Kvot-testet**)
Betrakta serien $\sum a_k$. Om $\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ så konvergerar serien. Om $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1\ \forall k \geq N$ för något N så divergerar serien.

↳ Bevis:

> Antag $\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| =: \alpha < 1$. Välj något β så att $\alpha < \beta < 1$. Välj N så att $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < \beta$ för $k \geq N$, vilket är möjligt iom. lim sup. Nu gäller $|a_{N+1}| < \beta|a_N|$, och itererat $|a_{N+p}| < \beta^p|a_N|$. Eftersom $|a_N|\sum \beta^k$ är en konvergent geometrisk serie så konvergerar $\sum a_k$ enligt jämförelsetest.
> Antag $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$. Då går termerna inte mot noll och vi får divergens.

Sats: (**Leibniz kriterie**)
Antag $|a_1| \geq |a_2| \geq \dots$, och $a_{2m-1} \geq 0$, $a_{2m} \leq 0$ samt $\lim a_k = 0$. Då konvergerar $\sum a_k$.

Kapitel 4: Kontinuitet

Definition: (**Kontinuitet**)
Låt X och Y vara metriska rum med metriker d_X respektive d_Y. Låt $f : E \to Y$ vara en funktion med $E \subset X$. Vi säger att f är kontinuerlig i en punkt $p \in E$ om $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ så att $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ för alla $x \in E$ så att $d_X(x,p) < \delta$.

Sats:
Låt X, Y och Z vara metriska rum. Givet funktioner $f : X \to Y$ och $g : Y \to Z$, bilda $h := g \circ f$. Om f är kontinuerlig i $p \in X$, och g är kontinuerlig i $f(p) \in Y$, då är h kontinuerlig i p.

Sats:
Låt $f : X \to Y$ vara en funktion mellan två metriska rum. f är kontinuerlig om och endast om $f^{-1}(V)$ är öppen för alla öppna $V \subset Y$.

↳ Bevis:

> $\Longrightarrow$:
> Antag att f är kontinuerlig och V är öppen i Y. Ta ett $p \in X$ där $f(p) \in V$, alltså $p \in f^{-1}(V)$ (om inget sådant p existerar är $f^{-1}(V) = \varnothing$ som är öppen). Eftersom V är öppen så $\exists \varepsilon > 0$ så att $d_Y(y, f(p)) < \varepsilon \implies y \in V$. Eftersom f är kontinuerlig så, för detta ε, $\exists \delta > 0$ så att $d_X(x,p) < \delta \implies d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Alltså, för alla $x \in X$ så att $d_X(x,p) < \delta$ gäller $f(x) \in V$, dvs. $x \in f^{-1}(V)$, dvs. x är en inre punkt till $f^{-1}(V)$. Detta visar att $f^{-1}(V)$ är öppen.
>
> $\Longleftarrow$:
> Antag att $f^{-1}(V)$ är öppen för alla öppna V. Ta något $p \in X$ och $\varepsilon > 0$. Definiera $V := N_\varepsilon(f(p))$ som är öppen och därmed är $f^{-1}(V)$ öppen, och notera $p \in f^{-1}(V)$. Då $\exists \delta > 0$ så att $d_X(x,p) < \delta \implies x \in f^{-1}(V)$ och vidare för sådana x gäller $f(x) \in V \implies d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Vi ser alltså, med detta val av δ, att f är kontinuerlig.

↳ Korrolarium: f är kontinuerlig om och endast om $f^{-1}(V)$ är sluten för alla slutna V.

Sats:
Om $f : X \to Y$ är kontinuerlig och X är kompakt, då är $f(X)$ kompakt.

↳ Korrolarium: Om $f : X \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och X är kompakt, då antar f ett största och minsta värde.

Definition: (**Likformigt kontinuerlig**)
En funktion $f : X \to Y$ mellan metriska rum är likformigt kontinuerlig på X om $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ så att $d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

↳ Intuition: Som definitionen av kontinuitet, men för varje ε måste *samma* δ funka för alla punkter $x \in X$.

Sats:
Om $f : X \to Y$ är kontinuerlig på ett kompakt X, då är f likformigt kontinuerlig.

Sats:
Om $f : E \to Y$, $E \subset X$ är kontinuerlig och E är sammanhängande, då är $f(E)$ sammanhängande.

↳ Korrolarium: Satsen om mellanliggande värde: Om $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig så är $f([a, b])$ sammanhängande.

Kapitel 5: Derivata

Definition: (**Derivata**)
Ta en funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ och en punkt $x \in [a, b]$. Derivatan av f i x är $f'(x) := \lim_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ om detta existerar och är ändligt.

Sats:
Om $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ är deriverbar så är f också kontinuerlig.

Sats: (**Medelvärdesatsen**)
Låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig, och deriverbar på (a, b). Då $\exists \xi \in (a, b)$ så att $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Sats: (**Generaliserade medelvärdesatsen**)
Låt $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara kontinuerliga, och deriverbara på (a, b). Då $\exists \xi \in (a, b)$ så att $\big(f(b) - f(a)\big)\, g'(\xi) = \big(g(b) - g(a)\big)\, f'(\xi)$.

Sats:
Antag att f är deriverbar på $[a, b]$, och $f'(a) < \lambda < f'(b)$ för något λ. Då finns $\xi \in (a, b)$ så att $f'(\xi) = \lambda$.

↳ Intuition: Derivatan antar alla mellanliggande värden.

Sats: (**L'Hôpital**)
Låt $-\infty \le a < b \le \infty$. Antag att $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbara på (a, b) och $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$. Antag antingen "$f(x) \to 0$ och $g(x) \to 0$ när $x \to a$" eller "$g(x) \to \infty$ när $x \to a$". Om $f'(x)/g'(x) \to A$ när $x \to a$ så gäller då $f(x)/g(x) \to A$ när $x \to a$.

Sats: (**Taylors formel**)
Ta en funktion $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ och ett positivt heltal n. Antag att $f^{(n-1)}$ är kontinuerlig på $[\alpha, \beta]$ och att $f^{(n)}(t)$ existerar i varje $t \in (\alpha, \beta)$. Låt a och x vara olika punkter i $[\alpha, \beta]$. Då finns ett ξ mellan a och x så att $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^n$.

Kapitel 6: Integraler

Definition: (**Partition**)
En partition P av $[a, b]$ är ändligt många punkter $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b$.

Definition: (**Riemann-integral**)
Låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara begränsad. För en partition P, sätt $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$. Sätt vidare $M_i := \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$ och $m_i := \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$. Sätt $U(P, f) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ och $L(P, f) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$. Beteckna överintegralen $\overline{\int_a^b} f\ dx =: \inf_P U(P, f)$ och underintegralen $\underline{\int_a^b} f\ dx =: \sup_P L(P, f)$. Om dessa två är samma kallar vi detta för integralen $\int_a^b f\ dx$.

Definition: (**Förfining**)
En partition P^* är en förfining av partionen P om $P \subset P^*$.

Sats:
Om P^* är en förfining av P så gäller $U(P^*, f) \leq U(P, f)$ och $L(P^*, f) \geq L(P, f)$.

Sats:
$\underline{\int}_a^b f \, \mathrm{d}x \leq \overline{\int}_a^b f \, \mathrm{d}x$.

Sats: (**Riemannkriteriet**)
f är Riemannintegrerbar på $[a, b]$ om och endast om $\forall \varepsilon > 0$ existerar en partition P så at $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$.

Sats:
Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så är f Riemannintegrerbar på $[a, b]$.

Sats:
Om f är monoton på $[a, b]$ så är f Riemannintegrerbar på $[a, b]$.

Sats:
Om f är begränsad på $[a, b]$ med ändligt många diskontinuiteter så är f Riemannintegrerbar på $[a, b]$.

Sats:
Antag att f är Riemannintegrerbar på $[a, b]$ med $m \leq f(x) \leq M$. Låt ϕ vara kontinuerlig på $[m, M]$. Sätt $h := \phi \circ f$. Då är h Riemannintegrerbar på $[a, b]$.

↳ Korrolarium:

- f, g integrerbara på $[a, b] \implies fg$ integrerbar på $[a, b]$.
- f integrerbar på $[a, b] \implies |f|$ integrerbar på $[a, b]$.
- f integrerbar på $[a, b] \implies \left|\int_a^b f \, \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f| \, \mathrm{d}x$.

Sats:
Låt f vara Riemannintegrerbar på $[a, b]$. För $x \in [a, b]$ sätt $F(x) := \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$. Då är F likformigt kontinuerlig på $[a, b]$. Vidare om f är kontinuerlig i ett x_0 så är F deriverbar i x_0 med $F'(x_0) = f(x_0)$.

Sats: (**Analysens huvudsats**)
Låt f vara Riemannintegrerbar på $[a, b]$. Antag att det finns ett F så att $F' = f$ på $[a, b]$. Då är $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Kapitel 7: Funktionsföljder och funktionsserier

Definition: (**Punktvis konvergens**)
Låt $\{f_n\}$ vara en följd av funktioner $f_n : E \to \mathbb{C}$. Om $\{f_n(x)\}$ är konvergent för varje $x \in E$ så definierar vi $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, och säger att $f_n \to f$ punktvis på E.

Definition: (**Likformig konvergens**)
Låt $\{f_n\}$ vara en följd av funktioner $f_n : E \to \mathbb{C}$. Vi säger att $f_n \to f$ likformigt om $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ så att $n \geq N \implies \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon \ \forall x \in E$.

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergerar likformigt om följden av partialsummor $s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ konvergerar likformigt.

Sats: (**Cauchys kriterie för likformig konvergens (CKLK)**)
Låt $\{f_n\}$ vara en följd av funktioner $f_n : E \to \mathbb{C}$. Då konvergerar $f_n \to f$ likformigt om och endast om $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ så att $m, n \geq N \implies \left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon \ \forall x \in E$.

Sats: (**Weierstrass M-test**)
Låt $\{f_n\}$ vara en följd av funktioner $f_n : E \to \mathbb{C}$. Om $\left|f_n(x)\right| \leq M_n \ \forall x \in E$, och $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ är konvergent, då är $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ likformigt konvergent.

Sats:
Antag att $f_n \to f$ likformigt på E. Då gäller $\lim_{t\to x} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(x)$.

↳ Korrolarium: Om alla f_n är kontinuerliga, och $f_n \to f$ likformigt, så är f kontinuerlig.

Sats:
Antag att $f_n \to f$ likformigt på $[a, b]$, och att alla f_n är integrerbara på $[a, b]$. Då är f integrerbar, och $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x$.

Sats:
Antag att alla f_n på $[a, b]$ är deriverbara, och att $\{f_n'\}$ är likformigt konvergent, och att $\{f_n(x_0)\}$ konvergerar för något x_0. Då konvergerar f_n likformigt, kalla gränsfunktionen f. Då gäller $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ för $x \in [a, b]$.

Definition: (**Punktvis begränsad**)
Följden $\{f_n\}$ av funktioner $f_n : E \to \mathbb{C}$ är punktvis begränsad om följden $\{f_n(x)\}$ är begränsad för varje $x \in E$.

Definition: (**Likformigt begränsad**)
Följden $\{f_n\}$ av funktioner $f_n : E \to \mathbb{C}$ är likformigt begränsad om $\exists M$ så att $\big|f_n(x)\big| \le M$ för alla $x \in E$ och $n \in \mathbb{N}$.

Definition: (**Ekvikontinuerlig**)
En familj $\mathcal{F}$ av funktioner $f : E \to \mathbb{C}$ är ekvikontinuerlig om $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ så att $d(x, y) < \delta \implies \big|f_n(x) - f_n(y)\big| < \varepsilon\ \forall f \in \mathcal{F}$.

Sats:
Låt $\{f_n\}$ vara en punktvis begränsad följd av funktioner $f_n : E \to \mathbb{C}$ där E är uppräknelig. Då finns en delföljd $\{f_{n_k}\}$ som konvergerar punktvis.

Sats: (**Arzela-Ascolis lemma**)
Låt K vara ett kompakt metriskt rum. Låt $\{f_n\}$ vara en punktvis begränsad och ekvikontinuerlig av funktioner $f_n \in C(K)$. Då har $\{f_n\}$ en likformigt konvergent delföljd.

Sats: (**Arzela-Ascoli**)
Låt K vara ett kompakt metriskt rum och $\mathcal{F}$ vara en familj av funktioner i $C(K)$. Då är $\mathcal{F}$ relativt kompakt i $C(K)$, dvs. $\overline{\mathcal{F}}$ är kompakt i $C(K)$, om och endast om $\mathcal{F}$ är likformigt begränsad och ekvikontinuerlig.

Sats: (**Weierstrass**)
Om $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig så finns polynom p_n så att $p_n \to f$ likformigt på $[a, b]$.

Sats:
Låt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ med någon konvergensradie $R > 0$. Då konvergerar serien likformigt på $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ för varje litet $\varepsilon > 0$. Vidare är f kontinuerlig och deriverbar på $(-R, R)$.

Sats:
Låt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ med någon konvergensradie $R > 0$. Då gäller nödvändigtvis att $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Kapitel 9: Flervarre

Definition:
$L(X, Y)$ definieras som mängden av alla linjära avbildningar $X \to Y$.

Definition:
För $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ definierar vi $\|A\| := \sup\{|Ax| : x \in \mathbb{R}^n, |x| \le 1\}$.

Sats:
Om $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ så gäller $\|A\| < \infty$ och A är likformigt kontinuerlig.

Definition: (**Differentierbar**)
Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara öppen och ta en funktion $f : E \to \mathbb{R}^m$. f är differentierbar i punkten $\boldsymbol{x} \in E$ om det finns en linjär avbildning $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ så att $\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\big|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) - A\boldsymbol{h}\big|}{|\boldsymbol{h}|} = 0$. I så fall skriver vi $f'(\boldsymbol{x}) = A$.

Sats: (**Kedjeregeln**)
Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara öppen och ta en funktion $f : E \to \mathbb{R}^m$ där f är differentierbar i $\boldsymbol{x}_0 \in E$. Låt $D \subset f(E)$ vara öppen och ta en funktion $g : D \to \mathbb{R}^k$ där g är differentierbar i $f(\boldsymbol{x}_0)$. Låt $F = g \circ f$. Då är F differentierbar i $\boldsymbol{x}_0$ med $F'(\boldsymbol{x}_0) = g'\big(f(\boldsymbol{x}_0)\big)\, f'(\boldsymbol{x}_0)$.

Sats:
Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara öppen och ta en funktion $f : E \to \mathbb{R}^m$. Då är f differentierbar i E med f' kontinuerlig om och endast om alla partialderivator till f existerar och är kontinuerliga.

↳ Kommentar: I så fall säger vi $f \in C^1(E)$.

Definition: (**Kontraktion**)
Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Om $\phi : X \to X$ har ett tal c så att $0 < c < 1$ och $d(\phi(x), \phi(y)) \leq cd(x, y)$ $\forall x, y \in X$ så är ϕ en kontraktion på X.

Sats: (**Banachs fixpunktsats**)
Om X är ett fullständigt metriskt rum och $\phi : X \to X$ är en kontraktion så har ϕ en unik fixpunkt x^* så att $\phi(x^*) = x^*$.

Sats: (**Inversa funktionssatsen**)
Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara öppen. Låt $f : E \to \mathbb{R}^n$ uppfylla $f \in C^1$. Låt $\boldsymbol{a} \in E$ så att $f'(\boldsymbol{a})$ är inverterbar. Då finns öppna mängder $U, V \subset \mathbb{R}^n$ så att $\boldsymbol{a} \in U$ och $f(\boldsymbol{a}) \in V$ och $f^{-1} : V \to U$ existerar.

Sats: (**Implicita funktionssatsen**)
Låt $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ vara öppen. Låt $f : E \to \mathbb{R}^n$ vara C^1. Ta $(a, b) \in E$ (alltså $a \in \mathbb{R}^n$ och $b \in \mathbb{R}^m$) så att $f(a, b) = 0$. Låt $A = f'(a, b) = (A_x, A_y)$ där A_x är $n \times n$ och A_y är $n \times m$. Antag att A_x är inverterbar. Då finns öppna mängder $U \subset E$ och $W \subset \mathbb{R}^m$ så att $(a, b) \in U$ och $b \in W$, och för varje $y \in W$ finns ett unikt x så att $(x, y) \in U$ och $f(x, y) = 0$. Med detta kan vi skriva $x = g(y)$. Denna funktion $g : W \to \mathbb{R}^n$ uppfyller då $g \in C^1$, $g(b) = a$, $f(g(y), y) = 0$ och $g'(b) = -(A_x)^{-1}A_y$.