

# SF1681 Linalg Fk.

## Kurssammanfattning

Leo Trolin

05/06-2025

<b>Om sammanfattningen.....</b>	<b>1</b>
<b>F1-F5: Vektorrum och linjära avbildningar .....</b>	<b>2</b>
Grundläggande . . . . .	2
Egenvektorer & diagonalisering . . . . .	4
Jordans normalform . . . . .	5
<b>F6-F10: Inre produktrum och självadjungerade operatorer.....</b>	<b>7</b>
Inre produkter . . . . .	7
Hilbertrum . . . . .	7
Adjungerade avbildningar . . . . .	8
Isometrier . . . . .	9
Rekursion . . . . .	10
Matrisexponentialer . . . . .	10
<b>F11-F15: Övrigt .....</b>	<b>12</b>
Singulärvärdesuppdelning . . . . .	12
Sannolikhetsmatriser . . . . .	13
Tensorer . . . . .	14
Yttre algebra . . . . .	15
Kroppsutvidgningar . . . . .	15

## Om sammanfattningen

Detta är en kompakt sammanställning av definitioner, satser och bevis som jag tror kommer vara viktiga för tentan. Jag har även lagt till förklaring om intuition bakom vissa av dem.

Text i **ljusblå färg** används för saker som enligt kursens teorilista behöver kunna formuleras precist på tentan. I dessa fall har jag dock inte kopierat formuleringen exakt från föreläsningsanteckningarna, utan skrivit i egna ord och eventuellt lagt till ytterligare förklaringar. Jag har inte tagit med *allt* på teorilistan; jag hoppar över en del saker som inte har verkat relevant för denna kursomgång baserat på vad som har täckts på föreläsningarna.

Jag garanterar inte att allt i detta dokument är korrekt. Det täcker förmodligen inte allt som skulle kunna behövas på tentan, utan innehåller det som jag tror är viktigast. Det är främst skrivet för min egen inlärnin, men förhoppningsvis kommer det till nytta för fler!

### REVIDERING 2024-10-27:

- Ändrat till bullet-tecken i beviset till “En norm på ett komplext inre produktrum definierar entydigt en inre produkt”.
- Rättat felskrivningar av index i definitionen av tensorprodukt.

### REVIDERING 2024-10-30:

- Rättat felskrivning “associativ addition” under Vektorrum.
- Rättat felskrivning under “konjugatsymmetrisk”.

### REVIDERING 2025-04-28:

- Rättat “Då är  $A$  diagonal. Därmed är även  $A^\dagger$  ~~ortogonal~~ diagonal.”

### REVIDERING 2025-06-05:

- Rättat felskrivning av  $e^A$  för diagonaliserbara matriser  $A$ .

## F1-F5: Vektorrum och linjära avbildningar

### Grundläggande

Definition: (**Kropp**)

En **kropp**  $k$  är en mängd av 'skalärer' tillsammans med två operationer  $+: k \times k \rightarrow k$  och  $\cdot: k \times k \rightarrow k$  som uppfyller:

- $a + b = b + a \quad \forall a, b \in k$  (kommutativ addition)
- $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in k$  (associativ addition)
- $\exists 0 \in k : a + 0 = a \quad \forall a \in k$  (additiv identitet)
- $\forall a \in k \exists b \in k : a + b = 0$  (additiv invers)
- $ab = ba \quad \forall a, b \in k$  (kommutativ multiplikation)
- $(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in k$  (associativ multiplikation)
- $\exists 1 \in k : 1a = a \quad \forall a \in k$  (multiplikativ identitet)
- $\forall a \neq 0 \in k \exists b \in k : ab = 1$  (multiplikativ invers)
- $(a + b)c = ac + bc \quad \forall a, b, c \in k$  (distributivitet)

↳ Intuition: Exempel på vanliga kroppar är  $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ . Andra kroppar kommer ha liknande räkne-regler som vi är vana vid.

Definition: (**Vektorrum**)

Ett **vektorrum**  $V$  över en kropp  $k$  är en mängd av 'vektorer' tillsammans med två operationer  $+: V \times V \rightarrow V$  och  $\cdot: k \times V \rightarrow V$  som uppfyller:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  (kommutativ addition)
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  (associativ addition)
- $\exists \mathbf{0} \in V : \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V$  (additiv identitet)
- $\forall \mathbf{u} \in V \exists \mathbf{v} \in V : \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$  (additiv invers)
- $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u} \quad \forall a, b \in k, \forall \mathbf{u} \in V$  (associativ multiplikation med skalär)
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V$  (multiplikativ identitet)
- $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u} \quad \forall a, b \in k, \forall \mathbf{u} \in V$  (multiplikation distribuerar över skaläraddition)
- $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v} \quad \forall a \in k, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  (multiplikation distribuerar över vektoraddition)

↳ Intuition: Ett vanligt vektorrum är  $\mathbb{R}^n$ . Andra vektorrum kommer ha liknande räkne-regler som vi är vana vid.

Definition: (**Delrum**)

För ett vektorrum  $V$  över en kropp  $k$  så är  $U \subseteq V$  ett **delrum** om

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$
- $a\mathbf{u} \in U \quad \forall a \in k, \forall \mathbf{u} \in U$

och  $U \neq \emptyset$ .

Definition: (**Linjärt oberoende**)

För ett vektorrum  $V$  är mängden  $S \subset V$ ,  $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$  (kan vara oändlig) **linjärt oberoende** om

$$\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \implies (a_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n) \quad \forall n$$

↳ Intuition: Detta sammanfaller med definitionen som vi är vana vid för ändliga mängder. För oändliga mängder är definitionen ungefär likadan, men att vi bara tittar på ändliga linjärkombinationer.

Definition: (**Bas**)

För ett vektorrum  $V$  är en **bas**  $\mathcal{B}$  en delmängd som är linjärt oberoende och som uppfyller  $\text{span } \mathcal{B} = V$ .

Definition: (**Yttre direkt summa**)

Låt  $V, W$  vara vektorrum. Deras **yttre direkta summa**  $V \oplus W$  är vektorrummet som består av par  $(v, w)$  där  $v \in V$  och  $w \in W$  och operationer utförs komponentvis.

↳ Intuition: Detta motsvarar ungefär  $V \times W$ .

Definition: (**Inre direkt summa**)

Låt  $U$  vara ett vektorrum med två delrum  $V, W$ . Vi säger att  $U$  är en **inre direkt summa** av  $V$  och  $W$  vilket skrivs som  $U = V \oplus W$ , om varje vektor  $u \in U$  kan på ett unikt sätt skrivas som  $v + w$  där  $v \in V, w \in W$ .

Det följer att vi har kravet  $V \cap W = \{0\}$ .

↳ Kommentar: Symbolen  $\oplus$  används både för yttre och inre direkta summor och det kan ibland vara svårt att veta vilken som menas. Ifall det inte specificeras så menas förmodligen inre summa om en sådan är möjlig, och i annat fall yttre summa. Ibland spelar det ingen roll ifall det är en yttre eller inre summa.

Definition: (**Linjär avbildning/operator**)

För vektorrum  $V, W$  över kroppen  $k$  är  $L : V \rightarrow W$  en **linjär avbildning** om

- $L(x + y) = L(x) + L(y) \quad \forall x, y \in V$
- $L(ax) = aL(x) \quad \forall a \in k, \forall x \in V$

Ifall  $V = W$  kallas  $L$  istället för en (linjär) **operator**.

Sats:

En linjär avbildning  $L : V \rightarrow W$  är injektiv om och endast om  $\ker L = \{0\}$ .

↳ Bevis:

$$L(x) = L(y) \iff L(x - y) = 0 \iff (x - y) \in \ker L$$

Sats: (**Dimensionssatsen**)

För en linjär avbildning  $L : V \rightarrow W$  gäller:

$$\dim \ker L + \text{rank } L = \dim V \quad (\text{bara meningsfullt om } V \text{ är ändligdimensionell})$$

Definition: (**Isomorfi**)

Låt  $V$  och  $W$  vara vektorrum. En **isomorfi**  $\Phi : V \rightarrow W$  mellan dessa vektorrum är en linjär bijektiv avbildning. Om en sådan existerar säger vi att  $V$  och  $W$  är **isomorfa**, vilket skrivs som  $V \cong W$ .

↳ Intuition: Om två vektorrum är isomorfa så är de ungefär identiska, men har olika "namn" för sina vektorer. Ändligdimensionella vektorrum är isomorfa om de har samma dimension.

Sats:

För en linjär avbildning  $L : V \rightarrow W$  gäller:

$$\ker L \oplus \text{im } L \cong V$$

↳ Intuition: Detta generaliserar dimensionssatsen till oändligdimensionella vektorrum.

↳ Bevis:

Kom ihåg:  $\ker L \subseteq V$ . Inför ett komplement  $U$  så att  $\ker L \oplus U = V$ . Inför avbildningen  $L|_U : U \rightarrow W$  som är samma sak som  $L$  men vi tillåter bara argument i  $U$ . Vi ser att  $L|_U$  är injektiv eftersom  $U \cap \ker L = \{0\}$  (per komplementets konstruktion), och surjektiv på  $\text{im } L$ . Alltså ger  $L|_U$  en isomorfi  $U \cong \text{im } L$ . Med detta kan vi skriva  $V = \ker L \oplus U \cong \ker L \oplus \text{im } L$ .

**Definition: (Kvotrum)**

Om  $U$  är ett delrum av vektorrummet  $V$  så kan vi bilda ett kvotrum  $V/U$ . Detta kvotrum består av vektorer

$$[x] := \{y \in V : x - y \in U\} = \{x + y : y \in U\}.$$

Vektorn  $[x] \in V/U$  kallas för en **ekvivalensklass**. För ekvivalensklasser definierar vi addition enligt  $[x] + [y] := [x + y]$  och multiplikation med skalär enligt  $\alpha[x] := [\alpha x]$ .

↳ **Intuition:** Ekvivalensklassen  $[x]$  beskriver att om vi adderar en vektor i  $U$  så spelar det ingen roll, eftersom vi har "kvotat bort"  $U$  i vårt kvotrum. Alltså " $[x + u] = [x]$ ".

**Sats: (Isomorfisatsen)**

För en linjär avbildning  $L : V \rightarrow W$  gäller

$$V/\ker L \cong \operatorname{im} L.$$

↳ **Bevis:**

Inför en avbildning  $\Phi : V/\ker L \rightarrow \operatorname{im} L$  enligt  $\Phi([x]) := L(x)$ .

- Visa att  $\Phi$  väldefinierad, dvs. visa  $\Phi([x]) \stackrel{?}{=} \Phi([y])$  om  $[x] = [y]$ :  
 $[x] = [y] \iff x - y \in \ker L \iff L(x - y) = 0 \iff L(x) = L(y)$
- Visa att  $\Phi$  är linjär:
  - $\Phi([x] + [y]) = \Phi([x + y]) = L(x + y) = L(x) + L(y) = \Phi([x]) + \Phi([y])$
  - $\Phi(\alpha[x]) = \Phi([\alpha x]) = L(\alpha x) = \alpha L(x) = \alpha \Phi([x])$
- Visa att  $\Phi$  är injektiv, dvs. visa  $\ker \Phi = \{[0]\}$ :  
 Vi använder att vi kan skriva  $[x] = [x + w]$  där  $w \in \ker L$ .  $\Phi([x]) = \Phi([x + w]) = 0 \iff L(x + w) = 0 \iff L(x) = 0 \iff x \in \ker L \iff [x] = [0]$ .
- Visa att  $\Phi$  är surjektiv:  
 För varje  $y \in \operatorname{im} L$  finns ett  $x \in V$  så att  $L(x) = y$  och vi kan alltså skriva  $\Phi([x]) = y$ .

Alltså är  $\Phi$  en isomorfi mellan  $V/\ker L$  och  $\operatorname{im} L$ .

**Egenvektorer & diagonalisering****Definition: (Egenvektor & egenvärde)**

För en operator  $L : V \rightarrow V$  är  $x \in V, x \neq 0$  en **egenvektor** med **egenvärde**  $\lambda$  om  $L(x) = \lambda x$ .

**Definition: (Egenrum)**

För en operator  $L$  definieras **egenrummet**  $E_\lambda$  som

$$E_\lambda := \{\text{alla egenvektorer till } L \text{ med egenvärde } \lambda\}.$$

**Definition: (Karakteristiskt polynom)**

För en  $n \times n$ -matris  $A$  är dess **karakteristiska polynom**

$$p_A(x) := \det(xI - A).$$

**Sats:**

För en operator  $L : V \rightarrow V$  är dess karakteristiska polynom  $p_A(x)$  oberoende av vilken bas matrisen  $A$  är skriven i.

↳ **Bevis:**

Välj två olika matriser  $A$  och  $B$  till  $L$ , i olika baser. Det finns alltså ett basbyte  $A = PBP^{-1}$ . Då gäller  $p_A(x) = \det(xI - A) = \det(xI - PBP^{-1}) = \det(xPP^{-1} - PBP^{-1}) = \det(P(xI - B)P^{-1}) = \det(P) \det(xI - B) \det(P^{-1}) = \det(PP^{-1}) \det(xI - B) = \det(xI - B) = p_B(x)$ .

**Sats: (Cayley-Hamiltons sats)**

För en  $n \times n$ -matris  $A$  gäller

$$p_A(A) = 0.$$

↳ **Bevis:**

(Bevis i fallet  $A$  är diagonaliserbar) Antag att  $A$  är skriven i en bas så att  $A$  är diagonal. Då är  $p_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$  och  $p_A(A) = \prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I)$ . Detta blir nollmatrisen eftersom alla  $(A - \lambda_i I)$  är diagonalmatriser och för varje position på diagonalen finns det en faktor  $(A - \lambda_i I)$  som har en nolla på den positionen.

**Definition: (Minimalpolynom)**

För en  $n \times n$ -matris  $A$  är dess **minimalpolynom**  $q_A(x)$  det moniska (ledande koefficient är 1) polynom av lägst grad som uppfyller  $q_A(A) = 0$ . Samma definition gäller för en operator  $L : V \rightarrow V$  om dess matris är  $A$  i någon bas.

**Sats:**

Minimalpolynomet  $q_A$  delar det karakteristiska polynomet  $p_A$ .

↳ **Bevis:**

Polynomdivision ger  $p_A(x) = q_A(x)s(x) + r(x)$  där  $\deg r < \deg q_A$ . Vi antar  $r(x) \neq 0$  och jobbar mot en motsägelse. Sätt in  $x = A$ :

$$\begin{aligned} p_A(A) &= q_A(A)s(A) + r(A) \\ \iff 0 &= 0 \cdot s(A) + r(A) \implies r(A) = 0 \end{aligned}$$

Detta visar att  $q_A$  inte är av lägst möjlig grad eftersom  $r$  uppfyller  $r(A) = 0$ , vilket ger motsägelse.

**Sats:**

Alla egenvärden  $\lambda$  till matrisen  $A$  uppfyller  $q_A(\lambda) = 0$ .

↳ **Bevis:**

$q_A$  delar  $p_A$  så varje nollställe till  $q_A$  är också ett nollställe till  $p_A$  och är därmed ett egenvärde.

**Sats:**

Om minimalpolynomet  $q_A$  har distinkta faktorer så är  $A$  diagonaliserbar.

**Sats: (Samtidig diagonalisering)**

Låt  $L_1, L_2 : V \rightarrow V$  vara diagonaliserbara operatorer på ett ändligt vektorrum. Då gäller

$L_1, L_2$  är **samtidigt diagonaliserbara**, dvs. har en gemensam egenbas

( $\exists$  bas i vilken bådas matriser är diagonala)

$$\iff$$

$$L_1 L_2 = L_2 L_1 \text{ (} L_1, L_2 \text{ kommuterar)}$$

↳ **Bevis:**

Antag att  $L_1, L_2$  är samtidigt diagonaliserbara. Då är deras matriser båda diagonala i den gemensamma egenbasen. Diagonala matriser kommuterar. Detta visar högerimplikationen.

Antag att  $L_1, L_2$  kommuterar (*bevisidé*). Notera att om  $\mathbf{x}$  är en egenvektor till  $L_1$  med egenvärde  $\lambda$  så gäller  $L_1 L_2 \mathbf{x} = L_2 L_1 \mathbf{x} = \lambda L_2 \mathbf{x} \implies L_2 \mathbf{x}$  är också en egenvektor till  $L_1$  med egenvärde  $\lambda$ . Om vi väljer en egenbas för  $L_1$  så kommer  $L_2$  därmed vara blockdiagonal i denna bas (ett block för varje egenrum till  $L_1$ ). Eftersom  $L_2$  är diagonaliserbar så måste varje block vara diagonaliserbart. Detta visar vänsterimplikationen. Kommentar: Ifall  $L_1$  har upprepade egenvärden, men  $L_2$  inte har det så måste vi vara försiktiga i hur vi väljer den gemensamma egenbasen. Detta motsvarar att vi "diagonaliserar varje block".

## Jordans normalform

**Definition: (Generaliserad egenvektor)**

För en operator  $L : V \rightarrow V$  är  $\mathbf{x} \in V, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  en **generaliserad egenvektor** med egenvärde  $\lambda$  och **ordning**  $m$  om

$$(L - \lambda I)^m \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ och } (L - \lambda I)^{m-1} \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

**Definition: (Generaliserat egenrum)**

För en operator  $L : V \rightarrow V$  är det **generaliserade egenrummet**  $\tilde{E}_\lambda$  som hör till  $\lambda$ :

$$\tilde{E}_\lambda := \{\text{alla generaliserade egenvektorer till } L \text{ med egenvärde } \lambda\}.$$

**Definition: (Nilpotent)**

En matris  $A$  är **nilpotent** om  $A^n = 0$  för något  $n$ .

**Sats: (Jordans normalform)**

Låt  $L$  vara en operator med  $p_L(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ . Då finns en bas så att matrisen tillhörande  $L$  är på **Jordans normalform**:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & & & 0 \\ & \Lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Lambda_r \end{pmatrix}$$

där  $\Lambda_j$  är **Jordanblock** som är på formen

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda_j & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Jordans normalform är unikt bestämd upp till ordningen på blocken.

Vidare gäller det (detta är inte en formell del av satsen, men är bra att veta):

- Den geometriska multipliciteten ( $\#$  egenvektorer) för egenvärdet  $\lambda$  är lika med antalet Jordanblock med  $\lambda$ .
- Den algebraiska multipliciteten ( $\#$  faktorer i  $p_L$ ) för egenvärdet  $\lambda$  är lika med summan av storleken av alla Jordanblock med  $\lambda$ .
- $\dim \ker(L - \lambda I)^m - \dim \ker(L - \lambda I)^{m-1}$  ger antalet Jordanblock innehållande  $\lambda$  av storlek  $\geq m$ . Intuition:  $L - \lambda I$  i jordanbasen har nollor på diagonalen och ettor på superdiagonalen, inom varje  $\lambda$ -block. Att öka potensen innebär att exakt en etta försvinner från varje block som har minst en etta på sin superdiagonal. För varje etta som försvinner så ökar dimensionen av kärnan med 1. Därmed ger  $\dim \ker(L - \lambda I)^m - \dim \ker(L - \lambda I)^{m-1}$  antalet block som förlorade en etta efter den  $m$ :te potensen, och därmed måste vara av minst storlek  $m$ .

## F6-F10: Inre produktrum och självadjungerade operatorer

### Inre produkter

Definition: (**Inre produkt**)

Låt  $V$  vara ett vektorrum över  $\mathbb{C}$ . En **inre produkt**  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  uppfyller:

- $\langle x | \cdot \rangle : V \rightarrow \mathbb{C}$  är linjär  
 $\langle x_1 + x_2 | y \rangle = \langle x_1 | y \rangle + \langle x_2 | y \rangle$  (seskvilinear)  
 $\langle \alpha x | y \rangle = \bar{\alpha} \langle x | y \rangle$
- $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$  (konjugatsymmetrisk)
- $\langle x | x \rangle \in \mathbb{R}$  och är  $> 0$  om  $x \neq 0$  (positivt definit)

Samma definition gäller även för vektorrum över  $\mathbb{R}$  om vi ersätter  $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ . I så fall försvinner alla konjugat, och den första egenskapen kallas då bilinjär och den andra symmetrisk.

↳ Kommentar: En inre produkt över ett  $n$ -dimensionellt vektorrum kan beskrivas med en  $n \times n$ -matris  $G$  enligt  $\langle x | y \rangle = x^\dagger G y$  där  $g_{i,j} = \langle b_i | b_j \rangle$  där  $b_i$  betecknar vektorrummets  $i$ :te basvektor.

Definition: (**Inre produktrum**)

Ett vektorrum tillsammans med en inre produkt över den kallas för ett **inre produktrum**.

Definition: (**Dolkoperatorn**)

För en matris  $A$  definierar vi **dolk-operatorn** som  $A^\dagger := \bar{A}^T$ .

Definition: (**Norm**)

Med en inre produkt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  kan vi definiera en **norm** som  $|x| := \sqrt{\langle x | x \rangle}$ .

Sats:

Om  $G$  är en positivt definit och konjugatsymmetrisk matris så definierar den en inre produkt enligt  $\langle x | y \rangle := x^\dagger G y$ .

Definition: (**Ortogonalt komplement**)

Låt  $W \subseteq V$  vara ett delrum till ett inre produktrum  $V$ . Vi definierar det **ortogonala komplementet**  $W^\perp$  till  $W$  som

$$W^\perp := \{x \in V : \langle x | y \rangle = 0 \ \forall y \in W\}.$$

Sats:

Låt  $V$  vara ett inre produktrum och  $U \subseteq V$  vara en ändligdimensionellt delrum. Då gäller  $V = U \oplus U^\perp$  som inre direkt summa.

### Hilbertrum

Definition: (**Cauchyföljd**)

Låt  $V$  vara ett inre produktrum. En följd  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  i detta rum är en **Cauchyföljd** om  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : |x_n - x_m| < \varepsilon \ \forall m, n > N$ .

↳ Intuition: En cauchyföljd är en följd där elementen "närmar" sig varandra, där att "närma" sig definieras av inre produktrumets norm.

Definition: (**Hilbertrum**)

Ett inre produktrum  $V$  är ett **Hilbertrum** om alla Cauchyföljder i det konvergerar (mot något i rummet!).

↳ Intuition:  $\mathbb{R}$  och  $\mathbb{C}$  är Hilbertrum. Därmed är även  $\mathbb{R}^n$  och  $\mathbb{C}^n$  Hilbertrum. Dock är inte  $\mathbb{Q}$  det, till exempel eftersom följden  $\{3, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \dots\} \rightarrow \pi \notin \mathbb{Q}$ .



Definition: ( $\ell^2(\mathbb{C})$ )

$$\ell^2(\mathbb{C}) := \left\{ \{x_i\}_{i=0}^\infty : \sum_{i=0}^\infty |x_i|^2 < \infty \right\}.$$

Sats:

$\ell^2(\mathbb{C})$  tillsammans med inre produkten  $\langle \{x_i\} | \{y_i\} \rangle := \sum_{i=0}^\infty \overline{x_i} y_i$  är ett Hilbertrum.

Definition: ( $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ )

Låt oss beskriva en process för att konstruera  $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ . Börja med  $C^0([0, 1], \mathbb{C})$  och den inre produkten  $\langle f | g \rangle := \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$ . Lägg till alla gränsvärden av Cauchyföljder från detta. Tag sedan kvoten med  $U$ , där  $U$  är mängden av alla funktioner  $f$  som är ett gränsvärde i någon tidigare nämnt Cauchyföljd som uppfyller  $|f| = 0$ .

Sats:

$L^2([0, 1], \mathbb{C})$  tillsammans med inre produkten  $\langle f | g \rangle := \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$  är ett Hilbertrum.

- ↳ Intuition: Vi lade till gränsvärden av funktioner för att försöka omvandla  $C^0$  till ett Hilbertrum. Dock finns det funktioner vars integral blir noll trots att de inte är nollfunktionen (mängden  $U$ ), så dessa kvotade vi bort.

## Adjungerade avbildningar

Definition: (Adjungerad avbildning)

Låt  $L : V \rightarrow W$  vara en linjär avbildning mellan inre produktrum. Då är  $L^\dagger : W \rightarrow V$  den adjungerade avbildningen om  $\langle L(x) | y \rangle = \langle x | L^\dagger(y) \rangle$ .

Sats:

Låt  $L : V \rightarrow V$  vara en operator på ett inre produktrum där  $V$  är ändligdimensionellt. Då existerar ett unikt  $L^\dagger$ .

- ↳ Bevis:  
Låt  $\{e_i\}$  vara en ON-bas för  $V$ . Låt  $A = (a_{i,j})$  vara matrisen för  $L$  m.a.p. denna bas. Notera att nu gäller  $\langle e_i | L(e_j) \rangle = a_{i,j}$ . Om  $L^\dagger$  existerar så gäller vidare  $\langle e_i | L(e_j) \rangle = \langle L^\dagger(e_i) | e_j \rangle = \overline{\langle e_j | L^\dagger(e_i) \rangle} = \overline{a_{j,i}}$ . Detta visar entydighet. Vi kan även visa existens genom att sätta  $L^\dagger$ 's matris till  $A^\dagger$  och utföra beräkningarna ovan baklänges.
- ↳ Kommentar:  $L^\dagger$  existerar inte alltid för oändligdimensionella vektorrum. Om den existerar så ges dess matris av  $A^\dagger$ , om  $A$  är matrisen tillhörande  $L$  m.a.p. ON-bas. Det är därför vi betecknar den adjungerade avbildningen med  $\dagger$ .

Definition: (Självadjungerad/Hermiteisk)

Låt  $L : V \rightarrow V$  vara en operator på ett inre produktrum. Då är  $L$  självadjungerad om  $L = L^\dagger$ . Dess matris är i så fall Hermiteisk, alltså  $A = A^\dagger$  (m.a.p. ON-bas).

Sats:

Om  $L$  är självadjungerad så är alla egenvärden till  $L$  reella.

- ↳ Bevis:  
Låt  $x$  vara en egenvektor med egenvärde  $\lambda$ . Eftersom  $L$  är självadjungerad gäller:

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle L(x) | x \rangle}_{= \langle \lambda x | x \rangle = \bar{\lambda} |x|^2} &= \underbrace{\langle x | L(x) \rangle}_{= \langle x | \lambda x \rangle = \lambda |x|^2} \\ &= \langle \lambda x | x \rangle = \bar{\lambda} |x|^2 \end{aligned}$$

och då  $|x| \neq 0$  ger detta  $\bar{\lambda} = \lambda \implies \lambda$  är reell.

Sats: (Spektralsatsen)

Låt  $L : V \rightarrow V$  vara en självadjungerad operator på ett ändligdimensionellt inre produktrum  $V$ . Då kan  $L$  diagonaliseras med en ortogonal bas och reella egenvärden.

↳ Bevis:

(Påståendet om reella egenvärden bevisades tidigare) Vi utför induktion över  $\dim V$ . Basfallet  $\dim V = 1$  är trivialt då en  $1 \times 1$ -matris har en alltid ortogonal egenbas (bestående av en enda egenvektor).

Tag en egenvektor  $\mathbf{x}$  med egenvärde  $\lambda$  (alla matriser har minst en). Låt  $U = \text{span}\{\mathbf{x}\}$ . Notera att om  $\mathbf{y} \in U^\perp$  så gäller  $\langle L(\mathbf{y}) | \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y} | L(\mathbf{x}) \rangle = \lambda \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle = 0$ . Detta säger oss att  $L(\mathbf{y}) \in U^\perp$ .

Inför  $L|_{U^\perp}: U^\perp \rightarrow U^\perp$  som är samma sak som  $L$  men vi tillåter bara argument i  $U^\perp$ . Enligt resonemanget ovan vet vi att bilden blir just  $U^\perp$ . Nu har vi alltså en självadjungerad operator  $L|_{U^\perp}$  på  $U^\perp$  och vi vet  $\dim U^\perp < \dim V$ . Detta är vad satsen antar fast av lägre dimension, så vi kan därmed induktivt anta att det finns en ON-bas av egenvektorer för  $U^\perp$ . Alla dessa är ortogonala mot egenvektorn  $\mathbf{x}$  per  $U$ 's konstruktion.

## Isometrier

Definition: (**Isometri**)

Låt  $L: V \rightarrow W$  vara en linjär avbildning mellan inre produktrum.  $L$  är en **isometri** om  $|L(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}| \forall \mathbf{x} \in V$ .

Sats:

En norm på ett komplext inre produktrum definierar entydigt en inre produkt.

↳ Bevis:

Låt  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle := |\mathbf{x}|^2$ . Notera, med hjälp av räkneregler för inre produkter:

- $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|^2 + \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle + |\mathbf{y}|^2$
- $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y} | \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|^2 - \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle + |\mathbf{y}|^2$
- $|\mathbf{x} + i\mathbf{y}|^2 = \langle \mathbf{x} + i\mathbf{y} | \mathbf{x} + i\mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|^2 + i\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle - i\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle + |\mathbf{y}|^2$
- $|\mathbf{x} - i\mathbf{y}|^2 = \langle \mathbf{x} - i\mathbf{y} | \mathbf{x} - i\mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|^2 - i\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + i\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle + |\mathbf{y}|^2$

Nu kan vi kombinera dessa och definiera en inre produkt med

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle := \frac{|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 - i|\mathbf{x} + i\mathbf{y}|^2 + i|\mathbf{x} - i\mathbf{y}|^2}{4}.$$

↳ Kommentar: Vi kan göra ungefär samma sak för reella inre produktrum, men då behöver vi bara de två första punkterna ovan.

Sats:

$L$  är en isometri  $\iff \langle L(\mathbf{x}) | L(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$ .

↳ Bevis:

Det följer från beviset av att en norm entydigt definierar en inre produkt.

Sats:

$L$  är en isometri  $\iff L^\dagger \circ L = I$  (om  $L^\dagger$  existerar)

↳ Bevis:

$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle L(\mathbf{x}) | L(\mathbf{y}) \rangle = \langle L^\dagger \circ L(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle \iff 0 = \langle L^\dagger \circ L(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle L^\dagger \circ L(\mathbf{x}) - \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$ .  
Påståendet  $0 = \langle L^\dagger \circ L(\mathbf{x}) - \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$  ska gälla för alla  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , vilket uppfylls om och endast om  $L^\dagger \circ L(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \mathbf{0}$  eftersom nollvektorn är den enda vektorn som är ortogonal mot alla  $\mathbf{y}$ . Detta ger  $L^\dagger \circ L(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \iff L^\dagger \circ L = I$ .

Definition: (**Ortogonal/unitär**)

En isometri  $L$  över reella inre produktrum är **ortogonal** om den är inverterbar.

En isometri  $L$  över komplexa inre produktrum är **unitär** om den är inverterbar.

↳ Kommentar: I så fall gäller enligt satsen ovan att  $L^\dagger = L^{-1}$ .

Sats:

Alla egenvärden till en unitär operator  $L$  har belopp 1.

↳ Bevis:

Låt  $\mathbf{x}$  vara en egenvektor med egenvärde  $\lambda$ . Då gäller  $|\mathbf{x}| = |L(\mathbf{x})| = |\lambda||\mathbf{x}| \implies |\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}| \implies |\lambda| = 1$ .

Sats:

Unitära operatorer  $L : V \rightarrow V$  på ett ändligdimensionellt inre produktrum  $V$  kan diagonaliseras ortogonalt.

↳ Bevis:

(Beviset är mycket likt det till Spektralsatsen; allt utom det andra stycket har jag kopierat därifrån) Vi utför induktion över  $\dim V$ . Basfallet  $\dim V = 1$  är trivialt då en  $1 \times 1$ -matris har en alltid ortogonal egenbas (bestående av en enda egenvektor).

Tag en egenvektor  $\mathbf{x}$  med egenvärde  $\lambda$  (alla matriser har minst en). Låt  $U = \text{span}\{\mathbf{x}\}$ . Notera att om  $\mathbf{y} \in U^\perp$  så gäller  $0 = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle = \langle L(\mathbf{y}) | L(\mathbf{x}) \rangle = \lambda \langle L(\mathbf{y}) | \mathbf{x} \rangle$ . Vi vet att  $\lambda \neq 0$  vilket ger  $0 = \langle L(\mathbf{y}) | \mathbf{x} \rangle$ , alltså  $L(\mathbf{y}) \in U^\perp$ .

Inför  $L|_{U^\perp} : U^\perp \rightarrow U^\perp$  som är samma sak som  $L$  men vi tillåter bara argument i  $U^\perp$ . Enligt resonemanget ovan vet vi att bilden blir just  $U^\perp$ . Nu har vi alltså en unitär operator  $L|_{U^\perp}$  på  $U^\perp$  och vi vet  $\dim U^\perp < \dim V$ . Detta är vad satsen antar fast av lägre dimension, så vi kan därmed induktivt anta att det finns en ON-bas av egenvektorer för  $U^\perp$ . Alla dessa är ortogonala mot egenvektorn  $\mathbf{x}$  per  $U$ 's konstruktion.

Definition: (Normal)

En operator  $L : V \rightarrow V$  är **normal** om  $L^\dagger \circ L = L \circ L^\dagger$ .

↳ Intuition: Unitära och självadjungerade operatorer är exempel på normala operatorer.

Sats:

Låt  $L : V \rightarrow V$  vara en operator på ett komplext ändligdimensionellt inre produktrum. Då är  $L$  normal om och endast om  $L$  är ortogonalt diagonaliserbar.

↳ Bevis:

(Vi bevisar bara  $L$  är ortogonalt diagonaliserbar  $\implies L$  är normal) Låt  $A$  vara matrisen för  $L$  i den ortogonala egenbasen. Då är  $A$  diagonal. Därmed är även  $A^\dagger$  diagonal. Diagonala matriser kommuterar med varandra, så vi vet att  $AA^\dagger = A^\dagger A$ .

## Rekursion

Definition: (Linjär rekursion)

En linjär rekursion av ordning  $m$  är en sekvens  $x_0, x_1, \dots$  som ges av

$$x_n = \sum_{i=1}^m a_{m-i} x_{n-i}$$

och begynnelsedata  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ .

↳ Intuition: Fibonaccis talföljd är en linjär rekursion av ordning 2 där  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ .

## Matrisexponentialer

Definition: (exp)

Vi definierar exponentialfunktionen av en matris  $A$  som

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Detta är definierat om  $A$  har ändlig norm, dvs.  $\exists c$  så att  $|A\mathbf{x}| < c \forall \mathbf{x} : |\mathbf{x}| = 1$ .

↳ Intuition: Denna definition kommer från Taylorutvecklingen av  $e^x$ .

Sats:

Om  $A$  är diagonaliserbar som  $A = PDP^{-1}$ , då gäller  $e^A = Pe^DP^{-1}$  där  $e^D$  kan beräknas genom att ta exp på varje diagonalelement.

Sats:

Om  $AB = BA$  så gäller  $e^Ae^B = e^{A+B}$ .

Sats:

Låt  $A$  vara en Hermitesk ändligdimensionell matris. Då är  $e^{iA}$  unitär.

↳ Bevis:

Enligt Spektralsatsen finns en ON-bas av ortogonala egenvektorer med reella egenvärden till  $A$ . Inför matrisen  $D$  som är  $A$  i denna bas;  $D$  är alltså en diagonalmatris med reella diagonalelement  $\lambda_j$ . Då blir  $e^{iD}$  en diagonalmatris med  $e^{i\lambda_j}$  som diagonalelement. Vi vet att  $|e^{i\lambda_j}| = 1$ , så därför har alla egenvärden till  $e^{iA}$  belopp 1 och därmed är  $e^{iA}$  unitär.

Sats:

Låt  $A$  vara en reell antisymmetrisk matris. Då är  $e^A$  ortogonal.

↳ Bevis:

$-A$  är antisymmetrisk  $\implies -iA$  är Hermitesk  $\implies e^{i(-iA)}$  är unitär, dvs.  $e^A$  är ortogonal.

## F11-F15: Övrigt

### Singulärvärdesuppdelning

Sats:

Låt  $L : V \rightarrow W$  vara en linjär avbildning mellan ändligdimensionella vektorrum. Då kan vi välja baser för  $V$  och  $W$  så att matrisen för  $L$  blir (på blockform)

$$\begin{pmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [0] \end{pmatrix}$$

där  $I$  är en  $r \times r$ -identitetsmatris där  $r = \text{rank } L$ .

↳ Bevis:

(*Bevisidé*) Välj en bas  $\mathcal{B}$  för komplementet till  $\ker L$ . Denna kommer ha dimension  $r$ . Utvidga denna till en bas för hela  $V$ . Välj sedan en bas  $\mathcal{C}$  för  $\text{im } L$  (också dimension  $r$ ) enligt  $L(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$  och utvidga denna till en bas för hela  $W$ .

Sats: (Singulärvärdesuppdelning)

Om  $L : V \rightarrow W$  är en linjär avbildning mellan ändligdimensionella inre produktrum så finns ON-bas  $\{\mathbf{x}_i\}$  för  $V$  och  $\{\mathbf{y}_i\}$  och  $W$  så att matrisen  $A$  för  $L$  blir (på blockform)

$$A = \begin{pmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [0] \end{pmatrix}$$

där  $D$  är en positiv reell  $k \times k$ -diagonalmatris, där  $k = \text{rank } L$ .

↳ Bevis:

(*Bevisidé*) Bilda en operator  $H : V \oplus W \rightarrow V \oplus W$ . Denna definieras, för  $\mathbf{x} \in V$  och  $\mathbf{y} \in W$  enligt

$$H \left( \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} L^\dagger(\mathbf{y}) \\ L(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Välj ON-baser för  $V$  och  $W$  och låt  $A$  vara matrisen för  $L$  m.a.p. dessa. Då blir matrisen  $B$  för  $H$ :

$$B = \begin{pmatrix} [0] & A^\dagger \\ A & [0] \end{pmatrix}.$$

Vi ser att  $B^\dagger = B$  och därmed är  $B$  ortogonalt diagonaliserbar med reella egenvärden enligt Spektralsatsen. Välj en ON-bas av egenvektorer  $[\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i]^T$  med egenvärden  $\lambda_i$  för  $B$ ; alltså

$$H \left( \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} L^\dagger(\mathbf{y}_i) \\ L(\mathbf{x}_i) \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix} \iff \begin{cases} L^\dagger(\mathbf{y}_i) = \lambda_i \mathbf{x}_i, \\ L(\mathbf{x}_i) = \lambda_i \mathbf{y}_i. \end{cases}$$

Notera att om  $\lambda_i$  är ett egenvärde för  $B$  så är även  $-\lambda_i$  det, vilket ses genom att evaluera  $H([\mathbf{x}_i, -\mathbf{y}_i]^T)$ .

Vi erhåller den sökta matrisen  $A$  genom att välja de egenvektorer för  $B$  som har positiva egenvärden.

↳ Kommentar: Notera vidare att  $L^\dagger \circ L(\mathbf{x}_i) = L^\dagger(\lambda_i \mathbf{y}_i) = \lambda_i^2 \mathbf{x}_i$  och liknande  $L \circ L^\dagger(\mathbf{y}_i) = L(\lambda_i \mathbf{x}_i) = \lambda_i^2 \mathbf{y}_i$ . Låt oss samla våra observationer:

$$\begin{cases} L(\mathbf{x}_i) = \lambda_i \mathbf{y}_i, \\ L^\dagger(\mathbf{y}_i) = \lambda_i \mathbf{x}_i, \\ L^\dagger \circ L(\mathbf{x}_i) = \lambda_i^2 \mathbf{x}_i, \\ L \circ L^\dagger(\mathbf{y}_i) = \lambda_i^2 \mathbf{y}_i \end{cases}$$

vilka är användbara när vi ska bestämma  $\lambda_i$ ,  $\mathbf{x}_i$  och  $\mathbf{y}_i$  i praktiken.

**Definition: (Singularvärdesuppdelning mm.)**

Med beteckningen i satsen/beviset ovan kallas  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$  som är diagonalelementen i  $D$  för **singularvärden** till  $L$ . Dessa sorteras i storleksordning som  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$ . Vektorerna  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  kallas **högersingularvektorer** och  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$  kallas **vänstersingularvektorer**. Tillsammans kallas de för **singularvektorer**.

Det gäller att vi kan skriva  $A = \sum \sigma_i \mathbf{y}_i \mathbf{x}_i^\dagger$ , vilket är matrisens **singularvärdesuppdelning**. Ibland skrivs det även som  $A = Y \Sigma X^\dagger$  där  $Y$  har alla  $\mathbf{y}_i$  som kolonner;  $\Sigma$  är en diagonalmatris med alla  $\sigma_i$ ; och  $X$  har alla  $\mathbf{x}_i$  som kolonner.

↳ **Intuition:** Detta ger ett sätt att dela upp en matris som en summa av rang-1-matriser m.a.p. ON-baser.

**Definition: (Pseudoinvers)**

Med beteckningen ovan har  $A$  en **pseudoinvers**  $A^+$  som ges av  $A^+ = \sum \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^\dagger$ .

↳ **Kommentar:** Denna pseudoinvers är den matris som uppfyller

$$\begin{cases} A^+ A A^+ = A^+, \\ A A^+ A = A, \\ (A A^+)^\dagger = A A^+, \\ (A^+ A)^\dagger = A^+ A. \end{cases}$$

Vidare ger pseudoinversen en lösning till minstakvadratproblemet  $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$  enligt  $\mathbf{x} = A^+ \mathbf{b}$ . Dessutom är denna lösning den vektor som har minst norm bland alla lösningar.

**Sannolikhetsmatriser****Definition: (Sannolikhetsvektor)**

En **sannolikhetsvektor** eller **stokastisk vektor** är en vektor med element i  $[0, 1]$  vars summa är 1.

↳ **Intuition:** Elementet på position  $i$  ger sannolikheten att befinna sig i läge  $i$ .

**Definition: (Sannolikhetsmatris)**

En **sannolikhetsmatris** eller **stokastisk matris** är matris med element i  $[0, 1]$  där summan är varje kolonn är 1.

↳ **Intuition:** Elementet på rad  $i$  och kolonn  $j$  ger sannolikheten att gå från läge  $j$  till läge  $i$ .

**Definition:** ( $\mathbb{1}$ )

$$\mathbb{1} := [1, 1, \dots, 1].$$

↳ **Kommentar:** Om  $\mathbf{p}$  är en sannolikhetsvektor så gäller  $\mathbb{1}\mathbf{p} = 1$ . Om  $A$  är en sannolikhetsmatris så gäller  $\mathbb{1}A = \mathbb{1}$ .

**Sats:**

Varje sannolikhetsmatris har egenvärdet 1.

↳ **Bevis:**

Låt  $A$  vara en sannolikhetsmatris. Då gäller  $\mathbb{1}A = \mathbb{1}$ . Om vi transponerar båda led får vi  $A^T \mathbb{1}^T = \mathbb{1}^T$  vilket säger oss att 1 är ett egetvärde till  $A^T$ . Vidare har varje matris samma egetvärden som sitt transponat.

**Definition: (Markovkedja)**

En **Markovkedja** är en process där  $\mathbf{p}(t+1) = A\mathbf{p}(t)$  där  $\mathbf{p}(t)$  är en sannolikhetsvektor i tiden  $t$  och  $A$  är en sannolikhetsmatris.

**Sats: (Perron-Frobenius sats)**

Låt  $A$  vara en sannolikhetsmatris där alla element i  $A^m$  är positiva för något  $m$ . Då gäller:

- Det finns en egenvektor  $\mathbf{v}$  med positiva element vars egetvärde är 1.
- $\dim \ker(A - I)^n = 1$  för alla  $n \geq 1$ .

- Om  $\lambda \neq 1$  är ett egenvärde så gäller  $|\lambda| < 1$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n \mathbf{p}(0) = \mathbf{v}$  oberoende av  $\mathbf{p}(0)$ .

↳ Intuition: Det finns en “steady-state”-sannolikhetsvektor som alltid nås oavsett begynnelsedata.

Definition: (**Irreducibel**)

En icke-negativ matris  $A$  kallas **irreducibel** om det inte finns någon omordning av standardbasen som gör matrisen block-övertriangulär.

↳ Intuition: Om en sannolikhetsmatris är irreducibel så går varje nod att nå från varje nod (antalet krävda steg får vara olika för olika par av noder).

Definition: (**Reguljär**)

En sannolikhetsmatris  $A$  är **reguljär** om alla element i  $A^m$  är positiva för något  $m$ .

↳ Intuition: Om en sannolikhetsmatris är reguljär så går varje nod att nå från varje nod, genom att ta precis  $m$  steg.

Från detta kan vi se att “reguljär  $\implies$  irreducibel” men “irreducibel  $\not\Rightarrow$  reguljär”.

## Tensorer

Definition: (**Multilinjär**)

En avbildning  $f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$  är **multilinjär** om  $f$  är linjär när vi fixerar alla utom ett av argumenten, för alla argument. När  $n = 2$  kallas  $f$  för **bilinjär**.

Definition: (**Dualt rum**)

Låt  $V$  vara ett vektorrum över  $k$ . Då är dess **duala rum**  $V^* := \{f : V \rightarrow k : f \text{ är linjär}\}$  vilket även kan skrivas som  $\text{Hom}_k(V, k)$ .

↳ Intuition: Om  $V = \mathbb{R}^n$  så ges  $V^*$  av alla  $n$ -långa radvektorer, om vi ser på dessa som funktioner som tar in en kolonnvektor och utför skalärprodukt.

Definition: (**Ändligdimensionell tensorprodukt**)

Låt  $V$  och  $W$  vara ändligdimensionella vektorrum över kroppen  $k$ . Då definieras deras **tensorprodukt** som  $V \otimes W := \{f : V^* \times W^* \rightarrow k : f \text{ är bilinjär}\}$ . Element i  $V \otimes W$  kallas för en **tensor**.

↳ Intuition: Om  $\dim V = n$  och  $\dim W = m$  så är  $\dim V \otimes W = nm$ . Element i  $V \otimes W$  kan representeras som  $n \times m$ -matriser  $A$ , om vi ser på dem som funktioner som tar in vektorer från  $V^*$  och  $W^*$  och utför vänster- respektive högermultiplikation med  $A$ . Alltså, om  $\mathbf{v} \in V^*$  och  $\mathbf{w} \in W^*$  som radvektorer så kan vi tänka “ $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} A \mathbf{w}^T$ ”.

Definition: (**Tensorprodukt**)

Låt  $V$  och  $W$  vara vektorrum med baser  $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$  respektive  $\{\mathbf{y}_j\}_{j \in J}$ . Då är **tensorprodukten**  $V \otimes W$  ett vektorrum med basen  $\{\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j\}_{i \in I, j \in J}$ .

Om  $\mathbf{x} = \sum_{i \in I} a_i \mathbf{x}_i \in V$  och  $\mathbf{y} = \sum_{j \in J} b_j \mathbf{y}_j \in W$  så definieras

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} := \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j \mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j.$$

↳ Intuition: Denna definition säger inte vad som menas med basvektorn  $\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j$ , men om vi använder intuitionen från det ändligdimensionella fallet så motsvarar denna basvektor en av alla möjliga matriser  $A$ . Alternativt kan vi bara tolka  $\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j$  som någon sorts kombination av  $\mathbf{x}_i$  och  $\mathbf{y}_j$ . Sättet som vi definierar  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$  på motsvarar att  $\cdot \otimes \cdot$  är bilinjär.

Vi behöver vidare definiera hur basbyten fungerar inom denna definition. Låt  $\{\mathbf{x}'_i\}_{i \in I}$  och  $\{\mathbf{y}'_j\}_{j \in J}$  vara nya baser för  $V$  respektive  $W$ . Låt  $\mathbf{x}'_i$  uttryckt i originalbasen vara  $\mathbf{x}'_i = \sum_{k \in I} p_{i,k} \mathbf{x}_k$  och liknande  $\mathbf{y}'_j = \sum_{l \in J} q_{j,l} \mathbf{y}_l$ . Då definierar vi

$$\mathbf{x}'_i \otimes \mathbf{y}'_j := \sum_{k \in I} \sum_{l \in J} p_{i,k} q_{j,l} \mathbf{x}_k \otimes \mathbf{y}_l.$$

Sats: (**Universella egenskapen**)

Låt  $f : V \times W \rightarrow U$  vara en bilinjär avbildning på vektorrummen  $V$ ,  $W$  och  $U$ . Då finns en unik linjär avbildning  $L : V \otimes W \rightarrow U$  så att  $f$  "faktoriserar genom den bilinjära avbildningen  $V \times W \rightarrow V \otimes W$ ", dvs.  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})$ .

↳ Bevis:

Antag att vi har baser  $\{\mathbf{x}_i\}$  och  $\{\mathbf{y}_j\}$  för  $V$  respektive  $W$ . Definiera nu  $L : V \otimes W \rightarrow U$  som  $L(\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j) := f(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ . Vi har alltså bara definierat vad  $L$  gör med basvektorerna, men med bilinjäriteten definierar det hela  $L$ . Låt  $\mathbf{x} = \sum_i a_i \mathbf{x}_i \in V$  och  $\mathbf{y} = \sum_j b_j \mathbf{y}_j \in W$  vara godtyckliga vektorer. För beviset återstår bara att visa  $L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \stackrel{?}{=} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) &= L\left(\sum_i \sum_j a_i b_j \mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j\right) = \sum_i \sum_j a_i b_j L(\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j) = \sum_i \sum_j a_i b_j f(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j) \\ &= f\left(\sum_i a_i \mathbf{x}_i, \sum_j b_j \mathbf{y}_j\right) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

**Yttre algebra**Definition: (**Alternande**)

En multilinjär avbildning  $f$  är **alternande** om  $f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = 0$  då  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$  för något  $i \neq j$ .

Definition: (**Antisymmetrisk**)

En multilinjär avbildning  $f$  är **antisymmetrisk** eller **skevsymmetrisk** om  $f(\dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_j, \dots) = -f(\dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_i, \dots)$ , dvs.  $f$  negeras om två argument byter plats.

Sats:

Om vi jobbar i en kropp där  $2 \neq 0$  så är en multilinjär avbildning  $f$  alternande om och endast om den är antisymmetrisk.

↳ Intuition: För det mesta i denna kurs kan vi tänka "alternande  $\iff$  antisymmetrisk".

Definition: (**Yttre potens**)

Låt  $V$  vara ett vektorrum med bas  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Dess  $l$ :te **yttre potens**  $\bigwedge^l V$  är ett vektorrum med basvektorer  $\mathbf{e}_{s_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{s_l}$  för varje mängd  $\{s_1, \dots, s_l\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  där  $s_1 < \dots < s_l$ .

Vi kan även skriva  $\bigwedge V := \bigoplus_{i=0}^n \bigwedge^i V$ .

↳ Intuition:  $\bigwedge$  motsvarar en bilinjär alternande avbildning. Därmed är  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0$  så dessa behövs inte i vår bas. Vidare är  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i$  så vi behöver bara en av dessa i vår bas; vi brukar välja dem i stigande ordning.

En bas för  $\bigwedge^0 V$  kan ses som  $\{1\}$ .

**Kroppsutvidgningar**Definition: (**Delkropp**)

Låt  $K$  vara en kropp. Då är  $k \subseteq K$  en delkropp om den är sluten under addition och multiplikation, och respektive additiva/multiplikativa inverser och identitet finns i  $k$ .

Sats:

Låt  $K$  vara en kropp och  $k \subseteq K$  vara en delkropp. Då är  $K$  ett vektorrum över  $k$ .

Definition: (**Primkropp**)

Låt  $K$  vara en kropp. Då är dess **primkropp** skärningen av alla delkroppar.

Definition: (**Karakteristik**)

Låt  $K$  vara en kropp där  $\underbrace{1 + \dots + 1}_{p \text{ st.}} = 0$  där  $p$  är minimalt. Då har  $K$  **karakteristik**  $p$ .

Detta kan skrivas som  $|K| = p$ . En oändlig kropp sägs ha karakteristik 0.

Sats:

Låt  $K$  vara en ändlig kropp. Då måste  $\mathbb{F}_p$  vara dess primkropp där  $p$  är ett primtal, och  $|K| = p^n$  för något  $n \in \mathbb{N}$ .



Sats:

Låt  $K$  vara en kropp med karakteristik  $p$ . Då gäller  $(a + b)^p = a^p + b^p \forall a, b \in K$ .

Definition: (**Irreducibel**)

Ett polynom är **irreducibelt** om det inte kan skrivas som en produkt av två polynom av lägre grad.

Sats: (**Kroppsutvidgning**)

Låt  $A$  vara en kvadratisk matris över en kropp  $k$ .  $K = \{p(A) : p(x) \in k[x]\}$  är en kropp om och endast om minimalpolynomet  $q_A(x)$  är irreducibelt.

↳ Intuition: Här har vi definierat en ny kropp  $K$  med hjälp av matriser. Vi tänker alltså på varje möjligt matrispolynom i  $A$  som olika "skalärer" i  $K$ . Med hjälp av att  $q_A(A) = 0$  kan vi skriva om varje polynom av grad  $\geq \deg q_A$  som ett polynom av lägre grad. En bas för  $K$  blir alltså  $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$  där  $n = \deg q_A$ .

↳ Bevis:

(Visa  $q_A$  ej irreducibelt  $\implies K$  är ej kropp) Om  $q_A$  ej är irreducibelt kan vi skriva  $q_A(x) = p(x)s(x)$  där  $\deg p(x) < \deg q_A(x)$  och  $\deg s(x) < \deg q_A(x)$ . Detta ger att  $0 = q_A(A) = p(A)s(A)$ . Vidare är  $p(A), s(A) \in K$  och  $p(A), s(A) \neq 0$  eftersom  $q_A$  är minimalpolynomet. Vi ser alltså att en produkt av nollskillda element blir 0, så  $K$  är inte en kropp.

(Visa  $q_A$  irreducibelt  $\implies K$  är kropp. De flesta egenskaper av kroppar visas ganska enkelt; Vi visar bara att varje element i  $K$  har en multiplikativ invers.) Vi vill alltså visa att varje element  $p(A)$  är en inverterbar matris. Antag att det finns ett  $p(A)$  som ej är inverterbart och att detta är av lägst grad. Då ser vi att  $p(x)$  måste vara av grad  $> 0$ . Polynomdivision ger då  $q_A(x) = p(x)s(x) + r(x)$  där  $r(x) \neq 0$  och  $\deg r(x) < \deg p(x)$ . Vi vet att  $r(x)$  är inverterbart eftersom  $p(x)$  är av lägst grad. Med detta kan vi skriva  $0 = p(A)s(A) + r(A)$  eller  $(-r(A))^{-1}s(A)p(A) = I$  vilket visar att  $p(A)$  är inverterbart.