SF1681 Linalg Fk.
Kurssammanfattning

Leo Trolin

14/10-2025

Om sammanfattningen 1

F1-F5: Vektorrum och linjära avbildningar 2
- Grundläggande 2
- Egenvektorer & diagonalisering 4
- Jordans normalform 5

F6-F10: Inre produktrum och självadjungerade operatorer 7
- Inre produkter 7
- Hilbertrum 7
- Adjungerade avbildningar 8
- Isometrier 9
- Rekursion 10
- Matrisexponentialer 10

F11-F15: Övrigt 12
- Singulärvärdesuppdelning 12
- Sannolikhetsmatriser 13
- Tensorer 14
- Yttre algebra 15
- Kroppsutvidgningar 15

Om sammanfattningen

Detta är en kompakt sammanställning av definitioner, satser och bevis som jag tror kommer vara viktiga för tentan. Jag har även lagt till förklaring om intuition bakom vissa av dem.

Text i ljusblå färg används för saker som enligt kursens teorilista behöver kunna formuleras precist på tentan. I dessa fall har jag dock inte kopierat formuleringen exakt från föreläsningsanteckningarna, utan skrivit i egna ord och eventuellt lagt till ytterligare förklaringar. Jag har inte tagit med *allt* på teorilistan; jag hoppar över en del saker som inte har verkat relevant för denna kursomgång baserat på vad som har täckts på föreläsningarna.

Jag garanterar inte att allt i detta dokument är korrekt. Det täcker förmodligen inte allt som skulle kunna behövas på tentan, utan innehåller det som jag tror är viktigast. Det är främst skrivet för min egen inlärning, men förhoppningsvis kommer det till nytta för fler!

Originalet skrevs 2023-12-26. Sedan dess har jag gjort följande:

REVIDERING 2024-10-27:

- Ändrat till bullet-tecken i beviset till “En norm på ett komplext inre produktrum definierar entydigt en inre produkt”.
- Rättat felskrivningar av index i definitionen av tensorprodukt.

REVIDERING 2024-10-30:

- Rättat felskrivning “associativ addition” under Vektorrum.
- Rättat felskrivning under “konjugatsymmetrisk”.

REVIDERING 2025-04-28:

- Rättat “Då är A diagonal. Därmed är även $A^\dagger$ ~~ortogonal~~ diagonal.”

REVIDERING 2025-06-05:

- Rättat felskrivning av e^A för diagonaliserbara matriser A.

REVIDERING 2025-09-09:

- Lagt till ett saknat $L(\boldsymbol{x})$ i beviset till isomorfisatsen.
- Lagt till ett saknat konjugat i definitionen av L^2.

REVIDERING 2025-09-25:

- Lagt till saknat konjugat i sats om L^2.

REVIDERING 2025-10-14:

- Lagt till resultat om minimalpolynomets relation till Jordans normalform.

F1-F5: Vektorrum och linjära avbildningar

Grundläggande

Definition: (**Kropp**)
En kropp k är en mängd av 'skalärer' tillsammans med två operationer $+ : k \times k \to k$ och $\cdot : k \times k \to k$ som uppfyller:

- $a + b = b + a \ \forall a, b \in k$ (kommutativ addition)
- $(a + b) + c = a + (b + c) \ \forall a, b, c \in k$ (associativ addition)
- $\exists 0 \in k : a + 0 = a \ \forall a \in k$ (additiv identitet)
- $\forall a \in k \ \exists b \in k : a + b = 0$ (additiv invers)
- $ab = ba \ \forall a, b \in k$ (kommutativ multiplikation)
- $(ab)c = a(bc) \ \forall a, b, c \in k$ (associativ multiplikation)
- $\exists 1 \in k : 1a = a \ \forall a \in k$ (multiplikativ identitet)
- $\forall a \neq 0 \in k \ \exists b \in k : ab = 1$ (multiplikativ invers)
- $(a + b)c = ac + bc \ \forall a, b, c \in k$ (distributivitet)

↳ Intuition: Exempel på vanliga kroppar är $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$. Andra kroppar kommer ha liknande räkneregler som vi är vana vid.

Definition: (**Vektorrum**)
Ett vektorrum V över en kropp k är en mängd av 'vektorer' tillsammans med två operationer $+ : V \times V \to V$ och $\cdot : k \times V \to V$ som uppfyller:

- $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ (kommutativ addition)
- $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ (associativ addition)
- $\exists \boldsymbol{0} \in V : \boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u} \ \forall \boldsymbol{u} \in V$ (additiv identitet)
- $\forall \boldsymbol{u} \in V \ \exists \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ (additiv invers)
- $a(b\boldsymbol{u}) = (ab)\boldsymbol{u} \ \forall a, b \in k, \forall \boldsymbol{u} \in V$ (associativ multiplikation med skalär)
- $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \ \forall \boldsymbol{u} \in V$ (multiplikativ identitet)
- $(a + b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u} \ \forall a, b \in k, \forall \boldsymbol{u} \in V$ (multiplikation distribuerar över skäläraddition)
- $a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v} \ \forall a \in k, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ (multiplikation distribuerar över vektoraddition)

↳ Intuition: Ett vanligt vektorrum är $\mathbb{R}^n$. Andra vektorrum kommer ha liknande räkneregler som vi är vana vid.

Definition: (**Delrum**)
För ett vektorrum V över en kropp k så är $U \subseteq V$ ett delrum om

- $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$
- $a\boldsymbol{u} \in U \ \forall a \in k, \forall \boldsymbol{u} \in U$

och $U \neq \varnothing$.

Definition: (**Linjärt oberoende**)
För ett vektorrum V är mängden $S \subset V$, $S = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots\}$ (kan vara oändlig) linjärt oberoende om

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{x}_i = 0 \implies (a_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, n) \qquad \forall n$$

↳ Intuition: Detta sammanfaller med definitionen som vi är vana vid för ändliga mängder. För oändliga mängder är definitionen ungefär likadan, men att vi bara tittar på ändliga linjärkombinationer.

Definition: (**Bas**)
För ett vektorrum V är en bas $\mathcal{B}$ en delmängd som är linjärt oberoende och som uppfyller $\operatorname{span} \mathcal{B} = V$.

Definition: (**Yttre direkt summa**)
Låt V, W vara vektorrum. Deras yttre direkta summa $V \oplus W$ är vektorrummet som består av par (v, w) där $v \in V$ och $w \in W$ och operationer utförs komponentvis.

↳ Intuition: Detta motsvarar ungefär $V \times W$.

Definition: (**Inre direkt summa**)
Låt U vara ett vektorrum med två delrum V, W. Vi säger att U är en inre direkt summa av V och W vilket skrivs som $U = V \oplus W$, om varje vektor $\boldsymbol{u} \in U$ kan på ett unikt sätt skrivas som $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ där $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{w} \in W$.

Det följer att vi har kravet $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

↳ Kommentar: Symbolen $\oplus$ används både för yttre och inre direkta summor och det kan ibland vara svårt att veta vilken som menas. Ifall det inte specificeras så menas förmodligen inre summa om en sådan är möjlig, och i annat fall yttre summa. Ibland spelar det ingen roll ifall det är en yttre eller inre summa.

Definition: (**Linjär avbildning/operator**)
För vektorrum V, W över kroppen k är $L : V \to W$ en linjär avbildning om

- $L(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = L(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{y}) \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$
- $L(a\boldsymbol{x}) = aL(\boldsymbol{x}) \quad \forall a \in k, \forall \boldsymbol{x} \in V$

Ifall $V = W$ kallas L istället för en (linjär) operator.

Sats:
En linjär avbildning $L : V \to W$ är injektiv om och endast om $\ker L = \{\mathbf{0}\}$.

↳ Bevis:
$L(\boldsymbol{x}) = L(\boldsymbol{y}) \iff L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \mathbf{0} \iff (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \in \ker L$

Sats: (**Dimensionssatsen**)
För en linjär avbildning $L : V \to W$ gäller:

$$\dim \ker L + \operatorname{rank} L = \dim V \qquad \text{(bara meningsfullt om } V \text{ är ändligdimensionell)}$$

Definition: (**Isomorfi**)
Låt V och W vara vektorrum. En isomorfi $\Phi : V \to W$ mellan dessa vektorrum är en linjär bijektiv avbildning. Om en sådan existerar säger vi att V och W är isomorfa, vilket skrivs som $V \cong W$.

↳ Intuition: Om två vektorrum är isomorfa så är de ungefär identiska, men har olika "namn" för sina vektorer. Ändligdimensionella vektorrum är isomorfa omm de har samma dimension.

Sats:
För en linjär avbildning $L : V \to W$ gäller:

$$\ker L \oplus \operatorname{im} L \cong V$$

↳ Intuition: Detta generaliserar dimenssionssatsen till oändligdimensionella vektorrum.

↳ Bevis:
Kom ihåg: $\ker L \subseteq V$. Inför ett komplement U så att $\ker L \oplus U = V$. Inför avbildningen $L|_U$: $U \to W$ som är samma sak som L men vi tillåter bara argument i U. Vi ser att $L|_U$ är injektiv eftersom $U \cap \ker L = \{\mathbf{0}\}$ (per komplementets konstruktion), och surjektiv på $\operatorname{im} L$. Alltså ger $L|_U$ en isomorfi $U \cong \operatorname{im} L$. Med detta kan vi skriva $V = \ker L \oplus U \cong \ker L \oplus \operatorname{im} L$.

Definition: (**Kvotrum**)
Om U är ett delrum av vektorrummet V så kan vi bilda ett kvotrum V/U. Detta kvotrum består av vektorer

$$[\boldsymbol{x}] := \{\boldsymbol{y} \in V : \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in U\} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} : \boldsymbol{y} \in U\}.$$

Vektorn $[\boldsymbol{x}] \in V/U$ kallas för en ekvivalensklass. För ekvivalensklasser definierar vi addition enligt $[\boldsymbol{x}] + [\boldsymbol{y}] := [\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}]$ och multiplikation med skalär enligt $\alpha[\boldsymbol{x}] := [\alpha\boldsymbol{x}]$.

↳ Intuition: Ekvivalensklassen $[\boldsymbol{x}]$ beskriver att om vi adderar en vektor i U så spelar det ingen roll, eftersom vi har "kvotat bort" U i vårt kvotrum. Alltså "$[\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{x}]$".

Sats: (**Isomorfisatsen**)
För en linjär avbildning $L : V \to W$ gäller

$$V/\ker L \cong \operatorname{im} L.$$

↳ Bevis:
Inför en avbildning $\Phi : V/\ker L \to \operatorname{im} L$ enligt $\Phi([\boldsymbol{x}]) := L(\boldsymbol{x})$.

- Visa att Φ väldefinierad, dvs. visa $\Phi([\boldsymbol{x}]) \stackrel{?}{=} \Phi([\boldsymbol{y}])$ om $[\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{y}]$:
  $[\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{y}] \iff \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \ker L \iff L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \iff L(\boldsymbol{x}) = L(\boldsymbol{y})$
- Visa att Φ är linjär:
  - $\Phi([\boldsymbol{x}] + [\boldsymbol{y}]) = \Phi([\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}]) = L(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = L(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{y}) = \Phi([\boldsymbol{x}]) + \Phi([\boldsymbol{y}])$
  - $\Phi(\alpha[\boldsymbol{x}]) = \Phi([\alpha\boldsymbol{x}]) = L(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha L(\boldsymbol{x}) = \alpha\Phi(\boldsymbol{x})$
- Visa att Φ är injektiv, dvs. visa $\ker \Phi = \{[\boldsymbol{0}]\}$:
  Vi använder att vi kan skriva $[\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}]$ där $w \in \ker L$. $\Phi([\boldsymbol{x}]) = \Phi([\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}]) = 0 \iff L(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}) = 0 \iff L(\boldsymbol{x}) = 0 \iff \boldsymbol{x} \in \ker L \iff [\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{0}]$.
- Visa att Φ är surjektiv:
  För varje $\boldsymbol{y} \in \operatorname{im} L$ finns ett $\boldsymbol{x} \in V$ så att $L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ och vi kan alltså skriva $\Phi([\boldsymbol{x}]) = \boldsymbol{y}$.

Alltså är Φ en isomorfi mellan $V/\ker L$ och $\operatorname{im} L$.

Egenvektorer & diagonalisering

Definition: (**Egenvektor & egenvärde**)
För en operator $L : V \to V$ är $\boldsymbol{x} \in V, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ en egenvektor med egenvärde λ om $L(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$.

Definition: (**Egenrum**)
För en operator L definieras egenrummet E_λ som

$$E_\lambda := \{\text{alla egenvektorer till } L \text{ med egenvärde } \lambda\}.$$

Definition: (**Karakteristiskt polynom**)
För en $n \times n$-matris A är dess karakteristiska polynom

$$p_A(x) := \det(xI - A).$$

Sats:
För en operator $L : V \to V$ är dess karakteristiska polynom $p_A(x)$ oberoende av vilken bas matrisen A är skriven i.

↳ Bevis:
Välj två olika matriser A och B till L, i olika baser. Det finns alltså ett basbyte $A = PBP^{-1}$. Då gäller $p_A(x) = \det(xI - A) = \det(xI - PBP^{-1}) = \det(xPP^{-1} - PBP^{-1}) = \det(P(xI - B)P^{-1}) = \det(P)\det(xI - B)\det(P^{-1}) = \det(PP^{-1})\det(xI - B) = \det(xI - B) = p_B(x)$.

Sats: (**Cayley-Hamiltons sats**)
För en $n \times n$-matris A gäller

$$p_A(A) = 0.$$

↳ Bevis:
(*Bevis i fallet A är diagonaliserbar*) Antag att A är skriven i en bas så att A är diagonal. Då är $p_A(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$ och $p_A(A) = \prod_{i=1}^{n}(A - \lambda_i I)$. Detta blir nollmatrisen eftersom alla $(A - \lambda_i I)$ är diagonalmatriser och för varje position på diagonalen finns det en faktor $(A - \lambda_i I)$ som har en nolla på den positionen.

Definition: (**Minimalpolynom**)
För en $n \times n$-matris A är dess minimalpolynom $q_A(x)$ det moniska (ledande koefficient är 1) polynom av lägst grad som uppfyller $q_A(A) = 0$. Samma definition gäller för en operator $L : V \to V$ om dess matris är A i någon bas.

Sats:
Minimalpolynomet q_A delar det karakteristiska polynomet p_A.

↳ Bevis:
Polynomdivision ger $p_A(x) = q_A(x)s(x) + r(x)$ där $\deg r < \deg q_A$. Vi antar $r(x) \neq 0$ och jobbar mot en motsägelse. Sätt in $x = A$:

$$\begin{aligned} & p_A(A) = q_A(A)s(A) + r(A) \\ \iff\ & 0 = 0 \cdot s(A) + r(A) \implies r(A) = 0 \end{aligned}$$

Detta visar att q_A inte är av lägst möjlig grad eftersom r uppfyller $r(A) = 0$, vilket ger motsägelse.

Sats:
Alla egenvärden λ till matrisen A uppfyller $q_A(\lambda) = 0$.

↳ Bevis:
q_A delar p_A så varje nollställe till q_A är också ett nollställe till p_A och är därmed ett egenvärde.

Sats:
Om minimalpolynomet q_A har distinkta faktorer så är A diagonaliserbar.

Sats: (**Samtidig diagonalisering**)
Låt $L_1, L_2 : V \to V$ vara diagonaliserbara operatorer på ett ändligt vektorrum. Då gäller

L_1, L_2 är samtidigt diagonaliserbara, dvs. har en gemensam egenbas
($\exists$ bas i vilken bådas matriser är diagonala)
$$\iff$$
$L_1 L_2 = L_2 L_1$ (L_1, L_2 kommuterar)

↳ Bevis:
Antag att L_1, L_2 är samtidigt diagonaliserbara. Då är deras matriser båda diagonala i den gemensamma egenbasen. Diagonala matriser kommuterar. Detta visar högerimplikationen.

Antag att L_1, L_2 kommuterar (*bevisidé*). Notera att om $\boldsymbol{x}$ är en egenvektor till L_1 med egenvärde λ så gäller $L_1 L_2 \boldsymbol{x} = L_2 L_1 \boldsymbol{x} = \lambda L_2 \boldsymbol{x} \implies L_2 \boldsymbol{x}$ är också en egenvektor till L_1 med egenvärde λ. Om vi väljer en egenbas för L_1 så kommer L_2 därmed vara blockdiagonal i denna bas (ett block för varje egenrum till L_1). Eftersom L_2 är diagonaliserbar så måste varje block vara diagonaliserbart. Detta visar vänsterimplikationen. Kommentar: Ifall L_1 har upprepade egenvärden, men L_2 inte har det så måste vi vara försiktiga i hur vi väljer den gemensamma egenbasen. Detta motsvarar att vi "diagonaliserar varje block".

Jordans normalform

Definition: (**Generaliserad egenvektor**)
För en operator $L : V \to V$ är $\boldsymbol{x} \in V, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ en generaliserad egenvektor med egenvärde λ och ordning m om

$$(L - \lambda I)^m \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ och } (L - \lambda I)^{m-1} \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

Definition: (**Generaliserat egenrum**)
För en operator $L : V \to V$ är det generaliserade egenrummet $\widetilde{E}_\lambda$ som hör till λ:

$$\widetilde{E}_\lambda := \{\text{alla generaliserade egenvektorer till } L \text{ med egenvärde } \lambda\}.$$

Definition: (**Nilpotent**)
En matris A är nilpotent om $A^n = 0$ för något n.

Sats: (**Jordans normalform**)
Låt L vara en operator med $p_L(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$. Då finns en bas så att matrisen tillhörande L är på Jordans normalform:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & & & 0 \\ & \Lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Lambda_r \end{pmatrix}$$

där Λ_j är Jordanblock som är på formen

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Jordans normalform är unikt bestämd upp till ordningen på blocken.

Vidare gäller det (detta är inte en formell del av satsen, men är bra att veta):

- Den geometriska multipliciteten (# egenvektorer) för egenvärdet λ är lika med antalet Jordanblock med λ.
- Den algebraiska multipliciteten (# faktorer i p_L) för egenvärdet λ är lika med summan av storleken av alla Jordanblock med λ.
- Multipliciteten av faktorn $(x - \lambda)$ i minimalpolynomet är lika med storleken av det största Jordanblock med λ.
- $\dim\ker(L - \lambda I)^m - \dim\ker(L - \lambda I)^{m-1}$ ger antalet Jordanblock innehållande λ av storlek $\geq m$. Intuition: $L - \lambda I$ i jordanbasen har nollor på diagonalen och ettor på superdiagonalen, inom varje λ-block. Att öka potensen innebär att exakt en etta försvinner från varje block som har minst en etta på sin superdiagonal. För varje etta som försvinner så ökar dimensionen av kärnan med 1. Därmed ger $\dim\ker(L - \lambda I)^m - \dim\ker(L - \lambda I)^{m-1}$ antalet block som förlorade en etta efter den m:te potensen, och därmed måste vara av minst storlek m.

F6-F10: Inre produktrum och självadjungerade operatorer

Inre produkter

Definition: (**Inre produkt**)
Låt V vara ett vektorrum över $\mathbb{C}$. En inre produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ uppfyller:

- $\langle \boldsymbol{x}|\cdot\rangle : V \to \mathbb{C}$ är linjär
  $\langle \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2|\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}_2|\boldsymbol{y}\rangle$ (seskvilinjär)
  $\langle \alpha\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \overline{\alpha}\,\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle$
- $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}\rangle}$ (konjugatsymmetrisk)
- $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\rangle \in \mathbb{R}$ och är > 0 om $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ (positivt definit)

Samma definition gäller även för vektorrum över $\mathbb{R}$ om vi ersätter $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$. I så fall försvinner alla konjugat, och den första egenskapen kallas då bilinjär och den andra symmetrisk.

↳ Kommentar: En inre produkt över ett n-dimensionellt vektorrum kan beskrivas med en $n \times n$-matris G enligt $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \boldsymbol{x}^\dagger G \boldsymbol{y}$ där $g_{i,j} = \left\langle \boldsymbol{b}_i \middle| \boldsymbol{b}_j \right\rangle$ där $\boldsymbol{b}_i$ betecknar vektorrummets i:te basvektor.

Definition: (**Inre produktrum**)
Ett vektorrum tillsammans med en inre produkt över den kallas för ett inre produktrum.

Definition: (**Dolkoperatorn**)
För en matris A definierar vi dolk-operatorn som $A^\dagger := \overline{A}^{\mathrm{T}}$.

Definition: (**Norm**)
Med en inre produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ kan vi definiera en norm som $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\rangle}$.

Sats:
Om G är en positivt definit och konjugatsymmetrisk matris så definierar den en inre produkt enligt $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle := \boldsymbol{x}^\dagger G \boldsymbol{y}$.

Definition: (**Ortogonalt komplement**)
Låt $W \subseteq V$ vara ett delrum till ett inre produktrum V. Vi definierar det ortogonala komplementet $W^\perp$ till W som

$$W^\perp := \{\boldsymbol{x} \in V : \langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = 0 \ \forall \boldsymbol{y} \in W\}.$$

Sats:
Låt V vara ett inre produktrum och $U \subseteq V$ vara en ändligdimensionellt delrum. Då gäller $V = U \oplus U^\perp$ som inre direkt summa.

Hilbertrum

Definition: (**Cauchyföljd**)
Låt V vara ett inre produktrum. En följd $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\geq 0}$ i detta rum är en Cauchyföljd om $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m| < \varepsilon\ \forall m, n > N$.

↳ Intuition: En cauchyföljd är en följd där elementen "närmar" sig varandra, där att "närma" sig definieras av inre produktrummets norm.

Definition: (**Hilbertrum**)
Ett inre produktrum V är ett Hilbertrum om alla Cauchyföljder i det konvergerar (mot något i rummet!)

↳ Intuition: $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ är Hilbertrum. Därmed är även $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$ Hilbertrum. Dock är inte $\mathbb{Q}$ det, till exempel eftersom följden $\{3, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \dots\} \to \pi \notin \mathbb{Q}$.

Definition: **($\ell^2(\mathbb{C})$)**

$$\ell^2(\mathbb{C}) := \left\{ \{x_i\}_{i=0}^{\infty} : \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}.$$

Sats:
$\ell^2(\mathbb{C})$ tillsammans med inre produkten $\big\langle \{x_i\} \big| \{y_i\} \big\rangle := \sum_{i=0}^{\infty} \overline{x_i} y_i$ är ett Hilbertrum.

Definition: **($L^2([0,1],\mathbb{C})$)**
Låt oss beskriva en process för att konstruera $L^2([0,1],\mathbb{C})$. Börja med $C^0([0,1],\mathbb{C})$ och den inre produkten $\langle f|g\rangle := \int_0^1 \overline{f(t)} g(t)\, dt$. Lägg till alla gränsvärden av Cauchyföljder från detta. Tag sedan kvoten med U, där U är mängden av alla funktioner f som är ett gränsvärde i någon tidigarenämnd Cauchyföljd som uppfyller $|f| = 0$.

Sats:
$L^2([0,1],\mathbb{C})$ tillsammans med inre produkten $\langle f|g\rangle := \int_0^1 \overline{f(t)} g(t)\, dt$ är ett Hilbertrum.

↳ Intuition: Vi lade till gränsvärden av funktioner för att försöka omvandla C^0 till ett Hilbertrum. Dock finns det funktioner vars integral blir noll trots att de inte är nollfunktionen (mängden U), så dessa kvotade vi bort.

Adjungerade avbildningar

Definition: **(Adjungerad avbildning)**
Låt $L : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan inre produktrum. Då är $L^\dagger : W \to V$ den adjungerade avbildningen om $\big\langle L(\boldsymbol{x}) \big| \boldsymbol{y} \big\rangle = \big\langle \boldsymbol{x} \big| L^\dagger(\boldsymbol{y}) \big\rangle$.

Sats:
Låt $L : V \to V$ vara en operator på ett inre produktrum där V är ändligdimensionellt. Då existerar ett unikt $L^\dagger$.

↳ Bevis:
Låt $\{\boldsymbol{e}_i\}$ vara en ON-bas för V. Låt $A = (a_{i,j})$ vara matrisen för L m.a.p. denna bas. Notera att nu gäller $\big\langle \boldsymbol{e}_i \big| L(\boldsymbol{e}_j) \big\rangle = a_{i,j}$. Om $L^\dagger$ existerar så gäller vidare $\big\langle \boldsymbol{e}_i \big| L(\boldsymbol{e}_j) \big\rangle = \big\langle L^\dagger(\boldsymbol{e}_i) \big| \boldsymbol{e}_j \big\rangle = \overline{\big\langle \boldsymbol{e}_j \big| L^\dagger(\boldsymbol{e}_i) \big\rangle} = \overline{a_{j,i}}$. Detta visar entydighet. Vi kan även visa existens genom att sätta $L^\dagger$:s matris till $A^\dagger$ och utföra beräkningarna ovan baklänges.

↳ Kommentar: $L^\dagger$ existerar inte alltid för oändligdimensionella vektorrum. Om den existerar så ges dess matris av $A^\dagger$, om A är matrisen tillhörande L m.a.p. ON-bas. Det är därför vi betecknar den adjungerande avbildningen med $\dagger$.

Definition: **(Självadjungerad/Hermitesk)**
Låt $L : V \to V$ vara en operator på ett inre produktrum. Då är L självadjungerad om $L = L^\dagger$. Dess matris är i så fall Hermitesk, alltså $A = A^\dagger$ (m.a.p. ON-bas).

Sats:
Om L är självadjungerad så är alla egenvärden till L reella.

↳ Bevis:
Låt $\boldsymbol{x}$ vara en egenvektor med egenvärde λ. Eftersom L är självadjungerad gäller:

$$\underbrace{\big\langle L(\boldsymbol{x}) \big| \boldsymbol{x} \big\rangle}_{= \langle \lambda \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \rangle = \overline{\lambda} |\boldsymbol{x}|^2} = \underbrace{\big\langle \boldsymbol{x} \big| L(\boldsymbol{x}) \big\rangle}_{= \langle \boldsymbol{x} | \lambda \boldsymbol{x} \rangle = \lambda |\boldsymbol{x}|^2}$$

och då $|\boldsymbol{x}| \neq 0$ ger detta $\overline{\lambda} = \lambda \implies \lambda$ är reell.

Sats: **(Spektralsatsen)**
Låt $L : V \to V$ vara en självadjungerad operator på ett ändligdimensionellt inre produktrum V. Då kan L diagonaliseras med en ortogonal bas och reella egenvärden.

↳ Bevis:
(*Påståendet om reella egenvärden bevisades tidigare*) Vi utför induktion över $\dim V$. Basfallet $\dim V = 1$ är trivialt då en 1×1-matris har en alltid ortogonal egenbas (bestående av en enda egen“vektor”).

Tag en egenvektor $\boldsymbol{x}$ med egenvärde λ (alla matriser har minst en). Låt $U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{x}\}$. Notera att om $\boldsymbol{y} \in U^\perp$ så gäller $\langle L(\boldsymbol{y}) | \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{y} | L(\boldsymbol{x}) \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{y} | \boldsymbol{x} \rangle = 0$. Detta säger oss att $L(\boldsymbol{y}) \in U^\perp$.

Inför $L|_{U^\perp} \colon U^\perp \to U^\perp$ som är samma sak som L men vi tillåter bara argument i $U^\perp$. Enligt resonemanget ovan vet vi att bilden blir just $U^\perp$. Nu har vi alltså en självadjungerad operator $L|_{U^\perp}$ på $U^\perp$ och vi vet $\dim U^\perp < \dim V$. Detta är vad satsen antar fast av lägre dimension, så vi kan därmed induktivt anta att det finns en ON-bas av egenvektorer för $U^\perp$. Alla dessa är ortogonala mot egenvektorn $\boldsymbol{x}$ per U:s konstruktion.

Isometrier

Definition: (**Isometri**)
Låt $L : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan inre produktrum. L är en isometri om $|L(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}| \ \forall \boldsymbol{x} \in V$.

Sats:
En norm på ett komplext inre produktrum definierar entydigt en inre produkt.

↳ Bevis:
Låt $\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \rangle := |\boldsymbol{x}|^2$. Notera, med hjälp av räkneregler för inre produkter:

- $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} | \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle = |\boldsymbol{x}|^2 + \langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}\rangle + |\boldsymbol{y}|^2$
- $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2 = \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} | \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \rangle = |\boldsymbol{x}|^2 - \langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}\rangle + |\boldsymbol{y}|^2$
- $|\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}|^2 = \langle \boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y} | \boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y} \rangle = |\boldsymbol{x}|^2 + i\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle - i\langle \boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}\rangle + |\boldsymbol{y}|^2$
- $|\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}|^2 = \langle \boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y} | \boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y} \rangle = |\boldsymbol{x}|^2 - i\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle + i\langle \boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}\rangle + |\boldsymbol{y}|^2$

Nu kan vi kombinera dessa och definiera en inre produkt med

$$\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle := \frac{|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2 - i|\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}|^2 + i|\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}|^2}{4}.$$

↳ Kommentar: Vi kan göra ungefär samma sak för reella inre produktrum, men då behöver vi bara de två första punkterna ovan.

Sats:
L är en isometri $\iff \langle L(\boldsymbol{x}) | L(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle$.

↳ Bevis:
Det följer från beviset av att en norm entydigt definierar en inre produkt.

Sats:
L är en isometri $\iff L^\dagger \circ L = I$ (om $L^\dagger$ existerar)

↳ Bevis:
$\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \langle L(\boldsymbol{x}) | L(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle L^\dagger \circ L(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{y} \rangle \iff 0 = \langle L^\dagger \circ L(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \langle L^\dagger \circ L(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle$. Påståendet $0 = \langle L^\dagger \circ L(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle$ ska gälla för alla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, vilket uppfylls om och endast om $L^\dagger \circ L(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ eftersom nollvektorn är den enda vektorn som är ortogonal mot alla $\boldsymbol{y}$. Detta ger $L^\dagger \circ L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \iff L^\dagger \circ L = I$.

Definition: (**Ortogonal/unitär**)
En isometri L över reella inre produktrum är ortogonal om den är inverterbar.
En isometri L över komplexa inre produktrum är unitär om den är inverterbar.

↳ Kommentar: I så fall gäller enligt satsen ovan att $L^\dagger = L^{-1}$.

Sats:
Alla egenvärden till en unitär operator L har belopp 1.

↳ Bevis:
Låt $\boldsymbol{x}$ vara en egenvektor med egenvärde λ. Då gäller $|\boldsymbol{x}| = \big|L(\boldsymbol{x})\big| = |\lambda||\boldsymbol{x}| \implies |\boldsymbol{x}| = |\lambda||\boldsymbol{x}| \implies |\lambda| = 1$.

Sats:
Unitära operatorer $L : V \to V$ på ett ändligdimensionellt inre produktrum V kan diagonaliseras ortogonalt.

↳ Bevis:
(*Beviset är mycket likt det till Spektralsatsen; allt utom det andra stycket har jag kopierat därifrån*) Vi utför induktion över $\dim V$. Basfallet $\dim V = 1$ är trivialt då en 1×1-matris har en alltid ortogonal egenbas (bestående av en enda egen"vektor").

Tag en egenvektor $\boldsymbol{x}$ med egenvärde λ (alla matriser har minst en). Låt $U = \operatorname{span}\{\boldsymbol{x}\}$. Notera att om $\boldsymbol{y} \in U^\perp$ så gäller $0 = \langle \boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}\rangle = \big\langle L(\boldsymbol{y})\big|L(\boldsymbol{x})\big\rangle = \lambda \big\langle L(\boldsymbol{y})\big|\boldsymbol{x}\big\rangle$. Vi vet att $\lambda \neq 0$ vilket ger $0 = \big\langle L(\boldsymbol{y})\big|\boldsymbol{x}\big\rangle$, alltså $L(\boldsymbol{y}) \in U^\perp$.

Inför $L|_{U^\perp} \colon U^\perp \to U^\perp$ som är samma sak som L men vi tillåter bara argument i $U^\perp$. Enligt resonemanget ovan vet vi att bilden blir just $U^\perp$. Nu har vi alltså en unitär operator $L|_{U^\perp}$ på $U^\perp$ och vi vet $\dim U^\perp < \dim V$. Detta är vad satsen antar fast av lägre dimension, så vi kan därmed induktivt anta att det finns en ON-bas av egenvektorer för $U^\perp$. Alla dessa är ortogonala mot egenvektorn $\boldsymbol{x}$ per U:s konstruktion.

Definition: (**Normal**)
En operator $L : V \to V$ är normal om $L^\dagger \circ L = L \circ L^\dagger$.

↳ Intuition: Unitära och självadjungerade operatorer är exempel på normala operatorer.

Sats:
Låt $L : V \to V$ vara en operator på ett komplext ändligdimensionellt inre produktrum. Då är L normal om och endast om L är ortogonalt diagonaliserbar.

↳ Bevis:
(*Vi bevisar bara L är ortogonalt diagonaliserbar $\implies$ L är normal*) Låt A vara matrisen för L i den ortogonala egenbasen. Då är A diagonal. Därmed är även $A^\dagger$ diagonal. Diagonala matriser kommuterar med varandra, så vi vet att $AA^\dagger = A^\dagger A$.

Rekursion

Definition: (**Linjär rekursion**)
En linjär rekursion av ordning m är en sekvens $x_0, x_1, \ldots$ som ges av

$$x_n = \sum_{i=1}^{m} a_{m-i} x_{n-i}$$

och begynnelsedata $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$.

↳ Intuition: Fibonaccis talföljd är en linjär rekursion av ordning 2 där $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

Matrisexponentialer

Definition: (**exp**)
Vi definierar exponentialfunktionen av en matris A som

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Detta är definierat om A har ändlig norm, dvs. $\exists c$ så att $|A\boldsymbol{x}| < c \ \forall \boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x}| = 1$.

↳ Intuition: Denna definition kommer från Taylorutvecklingen av e^x.

Sats:
Om A är diagonaliserbar som $A = PDP^{-1}$, då gäller $e^A = Pe^D P^{-1}$ där e^D kan beräknas genom att ta exp på varje diagonalelement.

Sats:
Om $AB = BA$ så gäller $e^A e^B = e^{A+B}$.

Sats:
Låt A vara en Hermitesk ändligdimensionell matris. Då är e^{iA} unitär.

↳ Bevis:
Enligt Spektralsatsen finns en ON-bas av ortogonala egenvektorer med reella egenvärden till A. Inför matrisen D som är A i denna bas; D är alltså en diagonalmatris med reella diagonalelement λ_j. Då blir e^{iD} en diagonalmatris med $e^{i\lambda_j}$ som diagonalelement. Vi vet att $\left|e^{i\lambda_j}\right| = 1$, så därför har alla egenvärden till e^{iA} belopp 1 och därmed är e^{iA} unitär.

Sats:
Låt A vara en reell antisymmetrisk matris. Då är e^A ortogonal.

↳ Bevis:
$-A$ är antisymmetrisk $\implies$ $-iA$ är Hermitesk $\implies$ $e^{i(-iA)}$ är unitär, dvs. e^A är ortogonal.

F11-F15: Övrigt

Singulärvärdesuppdelning

Sats:
Låt $L : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan ändligdimensionella vektorrum. Då kan vi välja baser för V och W så att matrisen för L blir (på blockform)

$$\begin{pmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [0] \end{pmatrix}$$

där I är en $r \times r$-identitetsmatris där $r = \operatorname{rank} L$.

↳ Bevis:
(*Bevisidé*) Välj en bas $\mathcal{B}$ för komplementet till $\ker L$. Denna kommer ha dimension r. Utvidga denna till en bas för hela V. Välj sedan en bas $\mathcal{C}$ för $\operatorname{im} L$ (också dimension r) enligt $L(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{c}_i$ och utvidga denna till en bas för hela W.

Sats: (**Singulärvärdesuppdelning**)
Om $L : V \to W$ är en linjär avbildning mellan ändligdimensionella inre produktrum så finns ON-bas $\{\boldsymbol{x}_i\}$ för V och $\{\boldsymbol{y}_i\}$ och W så att matrisen A för L blir (på blockform)

$$A = \begin{pmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [0] \end{pmatrix}$$

där D är en positiv reell $k \times k$-diagonalmatris, där $k = \operatorname{rank} L$.

↳ Bevis:
(*Bevisidé*) Bilda en operator $H : V \oplus W \to V \oplus W$. Denna definieras, för $\boldsymbol{x} \in V$ och $\boldsymbol{y} \in W$ enligt

$$H\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} L^\dagger(\boldsymbol{y}) \\ L(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

Välj ON-baser för V och W och låt A vara matrisen för L m.a.p. dessa. Då blir matrisen B för H:

$$B = \begin{pmatrix} [0] & A^\dagger \\ A & [0] \end{pmatrix}.$$

Vi ser att $B^\dagger = B$ och därmed är B ortogonalt diagonaliserbar med reella egenvärden enligt Spektralsatsen. Välj en ON-bas av egenvektorer $[\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i]^{\mathrm{T}}$ med egenvärden λ_i för B; alltså

$$H\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_i \\ \boldsymbol{y}_i \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} L^\dagger(\boldsymbol{y}_i) \\ L(\boldsymbol{x}_i) \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_i \\ \boldsymbol{y}_i \end{pmatrix} \iff \begin{cases} L^\dagger(\boldsymbol{y}_i) = \lambda_i \boldsymbol{x}_i, \\ L(\boldsymbol{x}_i) = \lambda_i \boldsymbol{y}_i. \end{cases}$$

Notera att om λ_i är ett egenvärde för B så är även $-\lambda_i$ det, vilket ses genom att evaluera $H([\boldsymbol{x}_i, -\boldsymbol{y}_i]^{\mathrm{T}})$.

Vi erhåller den sökta matrisen A genom att välja de egenvektorer för B som har positiva egenvärden.

↳ Kommentar: Notera vidare att $L^\dagger \circ L(\boldsymbol{x}_i) = L^\dagger(\lambda_i \boldsymbol{y}_i) = \lambda_i^2 \boldsymbol{x}_i$ och liknande $L \circ L^\dagger(\boldsymbol{y}_i) = L(\lambda_i \boldsymbol{x}_i) = \lambda_i^2 \boldsymbol{y}_i$. Låt oss samla våra observationer:

$$\begin{cases} L(\boldsymbol{x}_i) = \lambda_i \boldsymbol{y}_i, \\ L^\dagger(\boldsymbol{y}_i) = \lambda_i \boldsymbol{x}_i, \\ L^\dagger \circ L(\boldsymbol{x}_i) = \lambda_i^2 \boldsymbol{x}_i, \\ L \circ L^\dagger(\boldsymbol{y}_i) = \lambda_i^2 \boldsymbol{y}_i \end{cases}$$

vilka är användbara när vi ska bestämma λ_i, $\boldsymbol{x}_i$ och $\boldsymbol{y}_i$ i praktiken.

Definition: (**Singulärvärdesuppdelning mm.**)
Med beteckningen i satsen/beviset ovan kallas $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$ som är diagonalelementen i D för singulärvärden till L. Dessa sorteras i storleksordning som $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$. Vektorerna $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$ kallas högersingulärvektorer och $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_k$ kallas vänstersingulärvektorer. Tillsammans kallas de för singulärvektorer.

Det gäller att vi kan skriva $A = \sum \sigma_i \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{x}_i^\dagger$, vilket är matrisens singulärvärdesuppdelning. Ibland skrivs det även som $A = Y\Sigma X^\dagger$ där Y har alla $\boldsymbol{y}_i$ som kolonner; Σ är en diagonalmatris med alla σ_i; och X har alla $\boldsymbol{x}_i$ som kolonner.

↳ Intuition: Detta ger ett sätt att dela upp en matris som en summa av rang-1-matriser m.a.p. ON-baser.

Definition: (**Pseudoinvers**)
Med beteckningen ovan har A en pseudoinvers A^+ som ges av $A^+ = \sum \frac{1}{\sigma_i} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_i^\dagger$.

↳ Kommentar: Denna pseudoinvers är den matris som uppfyller

$$\begin{cases} A^+AA^+ = A^+, \\ AA^+A = A, \\ (AA^+)^\dagger = AA^+, \\ (A^+A)^\dagger = A^+A. \end{cases}$$

Vidare ger pseudoinversen en lösning till minstakvadratproblemet $A\boldsymbol{x} \approx \boldsymbol{b}$ enligt $\boldsymbol{x} = A^+\boldsymbol{b}$. Dessutom är denna lösning den vektor som har minst norm bland alla lösningar.

Sannolikhetsmatriser

Definition: (**Sannolikhetsvektor**)
En sannolikhetsvektor eller stokastisk vektor är en vektor med element i $[0, 1]$ vars summa är 1.

↳ Intuition: Elementet på position i ger sannolikheten att befinna sig i läge i.

Definition: (**Sannolikhetsmatris**)
En sannolikhetsmatris eller stokastisk matris är matris med element i $[0, 1]$ där summan är varje kolonn är 1.

↳ Intuition: Elementet på rad i och kolonn j ger sannolikheten att gå från läge j till läge i.

Definition: ($\mathbb{1}$)
$\mathbb{1} := [1, 1, \dots, 1]$.

↳ Kommentar: Om $\boldsymbol{p}$ är en sannolikhetsvektor så gäller $\mathbb{1}\boldsymbol{p} = 1$. Om A är en sannolikhetsmatris så gäller $\mathbb{1}A = \mathbb{1}$.

Sats:
Varje sannolikhetsmatris har egenvärdet 1.

↳ Bevis:
Låt A vara en sannolikhetsmatris. Då gäller $\mathbb{1}A = \mathbb{1}$. Om vi transponerar båda led får vi $A^\mathrm{T}\mathbb{1}^\mathrm{T} = \mathbb{1}^\mathrm{T}$ vilket säger oss att 1 är ett egenvärde till A^T. Vidare har varje matris samma egenvärden som sitt transponat.

Definition: (**Markovkedja**)
En Markovkedja är en process där $\boldsymbol{p}(t+1) = A\boldsymbol{p}(t)$ där $\boldsymbol{p}(t)$ är en sannolikhetsvektor i tiden t och A är en sannolikhetsmatris.

Sats: (**Perron-Frobenius sats**)
Låt A vara en sannolikhetsmatris där alla element i A^m är positiva för något m. Då gäller:

- Det finns en egenvektor $\boldsymbol{v}$ med positiva element vars egenvärde är 1.
- $\dim \ker(A - I)^n = 1$ för alla $n \geq 1$.

- Om $\lambda \neq 1$ är ett egenvärde så gäller $|\lambda| < 1$.
- $\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{v}$ oberoende av $\boldsymbol{p}(0)$.

↳ Intuition: Det finns en "steady-state"-sannolikhetsvektor som alltid nås oavsett begynnelsedata.

Definition: (**Irreducibel**)
En ickenegativ matris A kallas irreducibel om det inte finns någon omordning av standardbasen som gör matrisen block-övertriangulär.

↳ Intuition: Om en sannolikhetsmatris är irreducibel så går varje nod att nå från varje nod (antalet krävda steg får vara olika för olika par av noder).

Definition: (**Reguljär**)
En sannolikhetsmatris A är reguljär om alla element i A^m är positiva för något m.

↳ Intuition: Om en sannolikhetsmatris är reguljär så går varje nod att nå från varje nod, genom att ta precis m steg.

Från detta kan vi se att "reguljär $\implies$ irreducibel" men "irreducibel $\not\Longrightarrow$ reguljär".

Tensorer

Definition: (**Multilinjär**)
En avbildning $f : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to W$ är multilinjär om f är linjär när vi fixerar alla utom ett av argumenten, för alla argument. När $n = 2$ kallas f för bilinjär.

Definition: (**Dualt rum**)
Låt V vara ett vektorrum över k. Då är dess duala rum $V^* := \{f : V \to k : f \text{ är linjär}\}$ vilket även kan skrivas som $\mathrm{Hom}_k(V, k)$.

↳ Intuition: Om $V = \mathbb{R}^n$ så ges V^* av alla n-långa radvektorer, om vi ser på dessa som funktioner som tar in en kolonnvektor och utför skalärprodukt.

Definition: (**Ändligdimensionell tensorprodukt**)
Låt V och W vara ändligdimensionella vektorrum över kroppen k. Då definieras deras tensorprodukt som $V \otimes W := \{f : V^* \times W^* \to k : f \text{ är bilinjär}\}$. Element i $V \otimes W$ kallas för en tensor.

↳ Intuition: Om $\dim V = n$ och $\dim W = m$ så är $\dim V \otimes W = nm$. Element i $V \otimes W$ kan representeras som $n \times m$-matriser A, om vi ser på dem som funktioner som tar in vektorer från V^* och W^* och utför vänster- respektive högermultiplikation med A. Alltså, om $\boldsymbol{v} \in V^*$ och $\boldsymbol{w} \in W^*$ som radvektorer så kan vi tänka "$f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}A\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}$".

Definition: (**Tensorprodukt**)
Låt V och W vara vektorrum med baser $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in I}$ respektive $\{\boldsymbol{y}_j\}_{j\in J}$. Då är tensorprodukten $V \otimes W$ ett vektorrum med basen $\{\boldsymbol{x}_i \otimes \boldsymbol{y}_j\}_{i\in I, j\in J}$.

Om $\boldsymbol{x} = \sum_{i\in I} a_i \boldsymbol{x}_i \in V$ och $\boldsymbol{y} = \sum_{j\in J} b_j \boldsymbol{y}_j \in W$ så definieras

$$\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} := \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} a_i b_j \boldsymbol{x}_i \otimes \boldsymbol{y}_j.$$

↳ Intuition: Denna definition säger inte vad som menas med basvektorn $\boldsymbol{x}_i \otimes \boldsymbol{y}_j$, men om vi använder intuitionen från det ändligdimensionella fallet så motsvarar denna basvektor en av alla möjliga matriser A. Alternativt kan vi bara tolka $\boldsymbol{x}_i \otimes \boldsymbol{y}_j$ som någon sorts kombination av $\boldsymbol{x}_i$ och $\boldsymbol{y}_j$. Sättet som vi definierar $\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}$ på motsvarar att $\cdot \otimes \cdot$ är bilinjär.

Vi behöver vidare definiera hur basbyten fungerar inom denna definition. Låt $\{\boldsymbol{x}'_i\}_{i\in I}$ och $\{\boldsymbol{y}'_j\}_{j\in J}$ vara nya baser för V respektive W. Låt $\boldsymbol{x}'_i$ uttryckt i originalbasen vara $\boldsymbol{x}'_i = \sum_{k\in I} p_{i,k} \boldsymbol{x}_k$ och liknande $\boldsymbol{y}'_j = \sum_{l\in J} q_{j,l} \boldsymbol{y}_l$. Då definierar vi

$$\boldsymbol{x}'_i \otimes \boldsymbol{y}'_j := \sum_{k\in I} \sum_{l\in J} p_{i,k} q_{j,l} \boldsymbol{x}_k \otimes \boldsymbol{y}_l.$$

Sats: (**Universella egenskapen**)
Låt $f : V \times W \to U$ vara en bilinjär avbildning på vektorrummen V, W och U. Då finns en unik linjär avbildning $L : V \otimes W \to U$ så att f "faktoriserar genom den bilinjära avbildningen $V \times W \to V \otimes W$", dvs. $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = L(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})$.

↳ Bevis:
Antag att vi har baser $\{\boldsymbol{x}_i\}$ och $\{\boldsymbol{y}_j\}$ för V respektive W. Definiera nu $L : V \otimes W \to U$ som $L(\boldsymbol{x}_i \otimes \boldsymbol{y}_j) := f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_j)$. Vi har alltså bara definierat vad L gör med basvektorerna, men med bilinjäriteten definierar det hela L. Låt $\boldsymbol{x} = \sum_i a_i \boldsymbol{x}_i \in V$ och $\boldsymbol{y} = \sum_j b_j \boldsymbol{y}_j \in W$ vara godtyckliga vektorer. För beviset återstår bara att visa $L(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) \stackrel{?}{=} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

$$L(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) = L\left(\sum_i \sum_j a_i b_j \boldsymbol{x}_i \otimes \boldsymbol{y}_j\right) = \sum_i \sum_j a_i b_j L(\boldsymbol{x}_i \otimes \boldsymbol{y}_j) = \sum_i \sum_j a_i b_j f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_j)$$
$$= f(\sum_i a_i \boldsymbol{x}_i, \sum_j b_j \boldsymbol{y}_j) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Yttre algebra

Definition: (**Alternerande**)
En multilinjär avbildning f är alternerande om $f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = 0$ då $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_j$ för något $i \neq j$.

Definition: (**Antisymmetrisk**)
En multilinjär avbildning f är antisymmetrisk eller skevsymmetrisk om $f(\dots, \boldsymbol{x}_i, \dots, \boldsymbol{x}_j, \dots) = -f(\dots, \boldsymbol{x}_j, \dots, \boldsymbol{x}_i, \dots)$, dvs. f negeras om två argument byter plats.

Sats:
Om vi jobbar i en kropp där $2 \neq 0$ så är en multilinjär avbildning f alternerande om och endast om den är antisymmetrisk.

↳ Intuition: För det mesta i denna kurs kan vi tänka "alternerande $\iff$ antisymmetrisk".

Definition: (**Yttre potens**)
Låt V vara ett vektorrum med bas $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$. Dess l:te yttre potens $\bigwedge^l V$ är ett vektorrum med basvektorer $\boldsymbol{e}_{s_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{s_l}$ för varje mängd $\{s_1, \dots, s_l\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ där $s_1 < \dots < s_l$.

Vi kan även skriva $\bigwedge V := \bigoplus_{i=0}^n \bigwedge^i V$.

↳ Intuition: $\bigwedge$ motsvarar en bilinjär alternerande avbildning. Därmed är $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_i = 0$ så dessa behövs inte i vår bas. Vidare är $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_i$ så vi behöver bara en av dessa i vår bas; vi brukar välja dem i stigande ordning.

En bas för $\bigwedge^0 V$ kan ses som $\{1\}$.

Kroppsutvidgningar

Definition: (**Delkropp**)
Låt K vara en kropp. Då är $k \subseteq K$ en delkropp om den är sluten under addition och multiplikation, och respektive additiva/multiplikativa inverser och identitet finns i k.

Sats:
Låt K vara en kropp och $k \subseteq K$ vara en delkropp. Då är K ett vektorrum över k.

Definition: (**Primkropp**)
Låt K vara en kropp. Då är dess primkropp skärningen av alla delkroppar.

Definition: (**Karakteristik**)
Låt K vara en kropp där $\underbrace{1 + \dots + 1}_{p \text{ st.}} = 0$ där p är minimalt. Då har K karakteristik p.

Detta kan skrivas som $|K| = p$. En oändlig kropp sägs ha karakteristik 0.

Sats:
Låt K vara en ändlig kropp. Då måste $\mathbb{F}_p$ vara dess primkropp där p är ett primtal, och $|K| = p^n$ för något $n \in \mathbb{N}$.

Sats:
Låt K vara en kropp med karakteristik p. Då gäller $(a+b)^p = a^p + b^p \ \forall a, b \in K$.

Definition: (**Irreducibel**)
Ett polynom är irreducibelt om det inte kan skrivas som en produkt av två polynom av lägre grad.

Sats: (**Kroppsutvidgning**)
Låt A vara en kvadratisk matris över en kropp k. $K = \{p(A) : p(x) \in k[x]\}$ är en kropp om och endast om minimalpolynomet $q_A(x)$ är irreducibelt.

↳ Intuition: Här har vi definierat en ny kropp K med hjälp av matriser. Vi tänker alltså på varje möjligt matrispolynom i A som olika "skalärer" i K. Med hjälp av att $q_A(A) = 0$ kan vi skriva om varje polynom av grad $\geq \deg q_A$ som ett polynom av lägre grad. En bas för K blir alltså $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$ där $n = \deg q_A$.

↳ Bevis:
(*Visa q_A ej irreducibelt $\implies$ K är ej kropp*) Om q_A ej är irreducibelt kan vi skriva $q_A(x) = p(x)s(x)$ där $\deg p(x) < \deg q_A(x)$ och $\deg s(x) < \deg q_A(x)$. Detta ger att $0 = q_A(A) = p(A)s(A)$. Vidare är $p(A), s(A) \in K$ och $p(A), s(A) \neq 0$ eftersom q_A är minimalpolynomet. Vi ser alltså att en produkt av nollskillda element blir 0, så K är inte en kropp.

(*Visa q_A irreducibelt $\implies$ K är kropp. De flesta egenskaper av kroppar visas ganska enkelt; Vi visar bara att varje element i K har en multiplikativ invers.*) Vi vill alltså visa att varje element $p(A)$ är en inverterbar matris. Antag att det finns ett $p(A)$ som ej är inverterbart och att detta är av lägst grad. Då ser vi att $p(x)$ måste vara av grad > 0. Polynomdivision ger då $q_A(x) = p(x)s(x) + r(x)$ där $r(x) \neq 0$ och $\deg r(x) < \deg p(x)$. Vi vet att $r(x)$ är inverterbart eftersom $p(x)$ är av lägst grad. Med detta kan vi skriva $0 = p(A)s(A) + r(A)$ eller $(-r(A))^{-1}s(A)p(A) = I$ vilket visar att $p(A)$ är inverterbart.