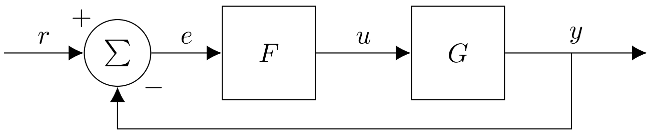
EL1000 Reglerteknik: Kurssammanfattning

Leo Trolin

27/09-2024

Denna kurssammanfattning är inte komplett, men jag väljer att publicera den ändå ifall någon är intresserad. De delar som finns med tycker jag är välskrivna nog för att vara användbara.

Grundläggande beteckningar



Figur 1: Standardsystem med återkoppling.

- r: referens; vad vi vill att y ska vara.
- e: fel; definierat som $e := r - y$.
- F: regulator.
- u: styrsignal; vad vi skickar in i det fysiska systemet
- G: det fysiska systemet. $g(t)$ kallas viktsfunktion medan $\mathcal{L}\{g\}(s) = G(s)$ kallas överföringsfunktion.
- y: utsignal.

Överföringsfunktionerna fungerar enligt $U(s) = F(s)E(s)$ och $Y(s) = G(s)U(s)$. Vi definierar det öppna systemet som $G_o(s) := G(s)F(s)$ och det slutna systemet enligt $G_c(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}$. Det gäller då alltså att $Y = G_cR$.

Vi antar att samtliga begynnelsevärden är noll; dvs. att $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \cdots = u(0) = \dot{u}(0) = \ddot{u}(0) = \cdots = 0$.

Oftast kan vi skriva $G(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ för polynom A och B. Då kallar vi rötterna till $A(s)$ för nollställen till G, och rötterna till $B(s)$ för poler till G. Detsamma kan även göras för G_o och G_c.

Stabilitet

Systemet $Y = G_cR$ är stabilt om och endast om G_c har alla sina poler i vänster halvplan (negativa realdelar). Med stabilt menar vi här *insignal-utsignalstabilt*, alltså att ett begränsat $r(t)$ ger ett begränsat $y(t)$. Detsamma kan sägas för motsvarande system $Y = GU$.

Stegsvar

Med stegsvar menar vi hur grafen av $y(t)$ ser ut om insignalen $u(t)$ är ett steg (Heavisidefunktion). Detta används för att beskriva beteende hos systemet G. Om vi istället ser G_c som systemet så betyder "stegsvar" grafen av $y(t)$ om referensen $r(t)$ är ett steg.

Följande kan sägas för polerna hos G (eller G_c...):

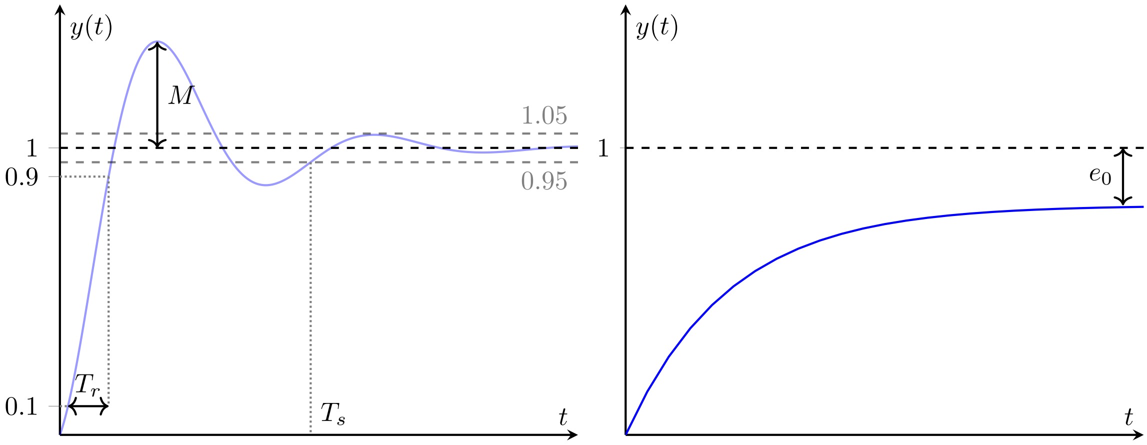
- De poler med minst avstånd till origo är *dominanta* och kommer spela störst roll i systemets beteende.
- Imaginärdelen av poler ger hur mycket y kommer att svänga. Stor imaginärdel i förhållande till liten realdel innebär stora sväningar.
- Dominanta poler med långt avstånd till origo innebär ett snabbt system.

Sats: (**Slutvärdessatsen**)
Om $Y(s)$ har alla nollskilda poler strikt i vänster halvplan så gäller

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s).$$

Om u är ett steg, dvs. $U(s) = \frac{1}{s}$ så gäller enligt denna sats att $\lim_{t\to\infty} y(t) = G(0)$. Detta tal $G(0)$ kallas statisk förstärkning.

Stegsvar - beteckningar



Figur 2: Vanliga beteckningar för stegsvar för G_c; alltså hur $y(t)$ ser ut när $r(t) = 1$ då $t > 0$.

För följande beteckningar har vi som i fig. 2 antagit ett stegsvar med $r(t) = 1$ för $t > 0$ så att slutvärdet $y(\infty)$ önskas vara 1. Dessutom antar vi $y(0) = 0$. För andra referenser och startvärden får man skala om och translera.

- M: översläng (*overshoot*) - hur mycket mer än slutvärdet y antar som max (som andel av slutvärdet).
- T_r: stigtid (*rise time*) - tiden det tar för y att gå från 0.1 till 0.9 (av slutvärdet).
- T_s: insvängningstid (*settling time*) - det minsta tal så att för $t \geq T_s$ är $y(t)$ som mest 5% ifrån slutvärdet.
- e_0: statiskt fel - felet efter oändlig tid, alltså $e_0 = r - y(\infty)$.

PID-Regulatorn

En PID-regulator är följande:

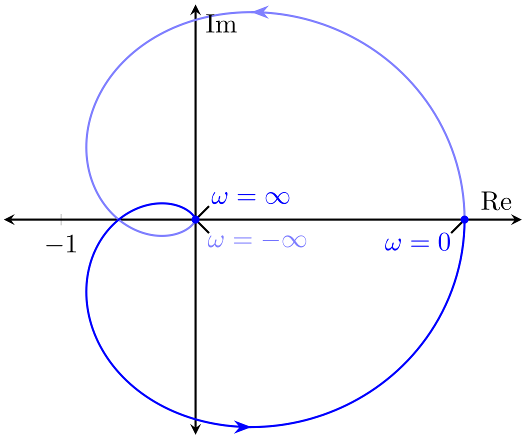
$$F(s) = \underbrace{K_P}_{\text{proportionell}} + \underbrace{\frac{K_I}{s}}_{\text{integral}} + \underbrace{K_D s}_{\text{derivata}}$$

Detta motsvarar alltså $u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\ \mathrm{d}\tau + K_D \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e(t)$. De olika delarna har följande ungefärliga effekter:

- K_P
  - Högre K_P ger lägre stigtid. Det kan dock leda till att u blir större än vad som är fysiskt möjligt.
  - En regulator med bara P-del kommer ha statiskt fel, givet att det finns störning. Högre K_P ger lägre statiskt fel.
- K_I
  - Existens av K_I eliminerar statiskt fel. Högre K_I ger lägre stigtid.
  - För högt K_I kan leda till oscillationer.
- K_D
  - Högt K_D motverkar snabba förändringar. Detta kan reducera oscillationer men ge längre stigtid.

Nyquist

Nyquistkurvor ritas vanligtvis för det öppna systemet G_o. De kan även ritas för andra system, men det behandlas inte i detta dokument.



Figur 3: Typisk Nyquistkurva.

En Nyquistkurva som i fig. 3 visar $G_o(i\omega)$ i det komplexa planet som en kurva i riktningen $\omega = \infty$ till $\omega = -\infty$. Ofta utelämnas segmentet $\omega \in (0, -\infty)$ (ljusblå i fig. 3) eftersom det är en spegling längs den reella axeln av segmentet $\omega \in (\infty, 0)$ (mörkblå i fig. 3).

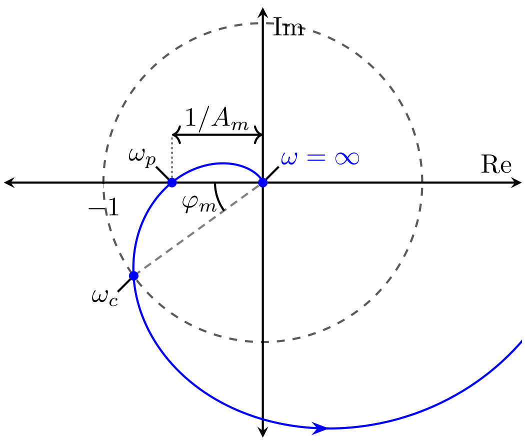
Det gäller att:

$$(\#\text{ poler till } G_c \text{ i HHP}) = (\#\text{ poler till } G_o \text{ i HHP}) + (\#\text{ varv Nyquistkurvan gör runt } -1)$$

Ofta antas att ($\#$ poler till G_o i HHP) $= 0$. För att räkna varv runt -1 kan man betrakta hur argumentet gentemot -1 ändras när kurvan genomlöpes. Notera att varv i negativ riktning (medsols) ger negativt bidrag; i de enklaste fallen sker detta dock aldrig.

Med de vanliga antagandena gäller alltså "G_c är stabil omm -1 inte omslutes av Nyquistkurvan".

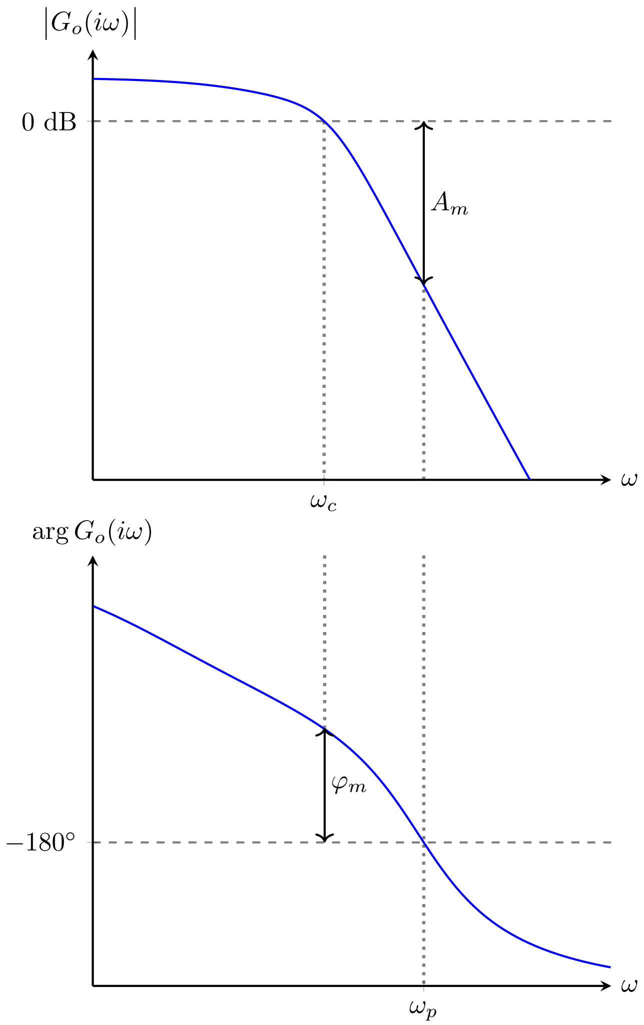
Nyquist - beteckningar



Figur 4: Vanliga beteckningar för en Nyquistkurva.

- ω_c: skärfrekvens (*crossover frequency*) - när Nyquistkurvan skär enhetscirkeln, dvs. $\left|G_o(i\omega_c)\right| = 1$.
- φ_m: fasmarginal (*phase margin*) - vinkeln mellan den negativa reella axeln och punkten där enhetscirkeln skärs. Om skärningen sker ovanför den reella axeln så blir φ_m negativ, och -1 omsluts då av Nyquistkurvan.
- ω_p: fasskärfrekvens (*phase crossover frequency*) - när Nyquistkurvan skär den negativa realaxeln, dvs. $\arg G_o(i\omega_p) = -180°$.
- A_m: amplitudmarginal (*gain margin*) - $1/A_m$ definieras som avståndet till punkten där Nyquistkurvan skär den negativa reella axeln. Namnet "amplitudmarginal" får tydligare betydelse när vi tittar på Bodediagrammet fig. 5.

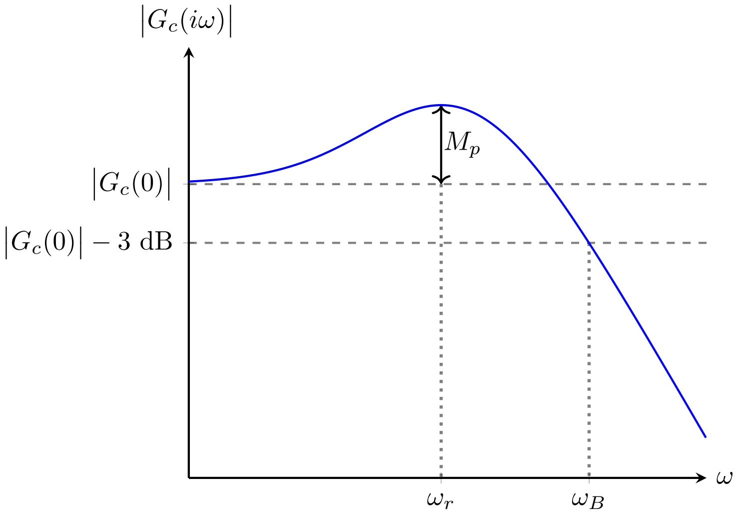
Bodediagram



Figur 5: Bodediagram av G_o, med samma beteckningar som i fig. 4.

Bodediagram som fig. 5 har två delar: amplitudkurva (överst) och faskurva (underst). Beloppkurvan visar $|G_o(i\omega)|$ i decibelskala (värden i dB ges av $20\log_{10}|G_o(i\omega)|$) mot $\omega \in (0, \infty)$ i log-skala (vanligtvis $\log_{10}$). Faskurvan visar argumentet mot $\omega \in (0, \infty)$ i log-skala. Dock är det inte riktigt argumentet, eftersom $\arg z \in (-\pi, \pi]$, utan vi låter kurvan gå bortom dessa gränser för att göra den kontinuerlig.

Bodediagrammet fig. 5 visar samma information som fig. 4, med samma värden ω_c, φ_m, ω_p och A_m markerade som här är enklare att avläsa. Notera att A_m kan avläsas som det markerade avståndet i den logaritmiska skalan, eftersom $A_m \overset{\text{def}}{=} |G_o(i\omega_p)|^{-1} \implies \log A_m = \log 1 - \log|G_o(i\omega_p)|$, och ger därför "hur mycket amplitud som kan adderas (logaritmiskt sett) vid ω_p innan Nyquistkurvan skär -1".



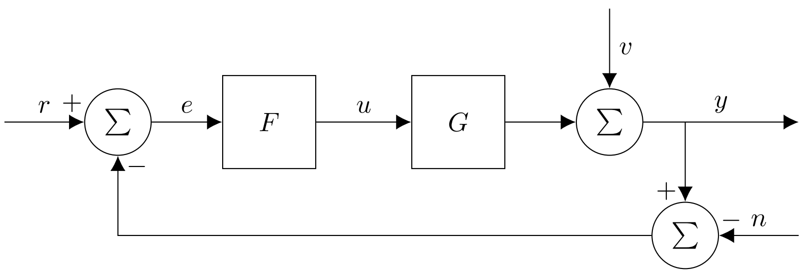
Figur 6: Bodediagram för ett slutet system G_c med vanliga beteckningar.

- M_p: resonanstopp (*peak resonance*) - hur mycket större $|G_c(i\omega)|$ blir än $|G_c(0)|$ som mest.
- ω_r: resonansfrekvens (*resonant frequency*, *peak frequency*) - det tal så att $|G_c(i\omega_r)| = M_p$.
- ω_B: bandbredd (*bandwidth*) - när amplituden sjunker under $\frac{1}{\sqrt{2}}|G_c(0)|$ ($\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3$ dB), dvs. det största tal så att $\omega \in [0, \omega_B] \implies |G_c(i\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}|G_c(0)|$.

Om vi samlar beteckningarna från fig. 2, fig. 4 och fig. 6 har vi följande ungefärliga förhållanden:

- $\omega_c \sim \omega_B \sim \dfrac{1}{T_r}$
- $\dfrac{1}{\varphi_m} \sim M_p \sim M$

Känslighet



Figur 7: System med utsignal- och mätstörning.

- v: utsignalstörning
- n: mätstörning

För dessa definierar vi funktionerna:

- S: känslighetsfunktionen - definierad enligt $S = \dfrac{1}{1+GF}$.
- T: komplementära känslighetsfunktionen - definierad enligt $T = \dfrac{GF}{1+GF}$.

I fig. 7 gäller då $Y = SV + TN + G_cR$. Notera att $T = G_c$ och att $S + T = 1$.

Robusthetskriteriet

Vi har ett verkligt system G^* och en modell G av detta system. Vi definierar det relativa modellfelet Δ_G så att $G^*(s) = G(s)\big(1 + \Delta_G(s)\big)$, alternativt $\Delta_G(s) = \dfrac{G^*(s) - G(s)}{G(s)}$.

Antag att vi har en regulator F som stabiliserar vårt modellerade system G. Löst uttryckt säger då Robusthetskriteriet att om

$$\big|\Delta_G(i\omega)\big| < \frac{1}{\big|T(i\omega)\big|} \quad \forall\omega$$

så kommer F även att stabilisera G^*.

Tillståndsmodeller

Grundläggande tillståndsmodell

En generell modell på tillståndsform skrivs som

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

där $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $D \in \mathbb{R}$. Till exempel om $n = 2$ blir tillståndsformen

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Du \end{aligned}$$

Detta kan skrivas om som en överföringsfunktion enligt

$$Y(s) = \underbrace{\Big(C(sI - A)^{-1}B + D\Big)}_{=G(s)} U(s)$$

Vidare gäller att systemets poler är lika med egenvärdena till A, så länge ingen kancellering sker när uttrycket ovan evalueras.

Tillståndsåterkoppling

Tillståndsåterkoppling bygger på att vi fysiskt kan avläsa tillstånden x och återkoppla med dessa, till skillnad från att återkoppla med y som tidigare. Här utgår vi från ett system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Vi sätter $u = -Lx + l_0 r$ där $L \in \mathbb{R}^{1\times n}$ och $l_0 \in \mathbb{R}$; alltså $u = -l_1 x_1 - \cdots - l_n x_n + l_0 r$.

För att placera poler väljer vi egenvärden till $A - BL$ (de sammanfaller vanligtvis) genom att välja L.

För att få önskad statisk förstärkning $G_c(0) = 1$ väljer vi $l_0 = \dfrac{-1}{C(A - BL)^{-1}B}$.