SF1693 PDE
Mina lösningar till teorifrågor

Leo Trolin

07/03-2024

En av dessa frågor kommer komma som uppgift 5 på tentan, enligt kursens Canvassida. Här har jag gjort egna (försök till) lösningar. Det är skrivet för egen inlärning, men kanske kan det komma till nytta för någon annan!

1. Härled värmeledningsekvationen.

Låt $u(\boldsymbol{x}, t)$ vara temperaturen definierat för ett område $\Omega \ni \boldsymbol{x}$. Vi tittar på beteendet i ett delområde $V \subset \Omega$. Vi har även en källa $f(\boldsymbol{x}, t)$ som tillför (eller tar bort) värme i detta område. Den totala värmen $H(t)$ ges av

$$H(t) = \int_V c\rho u \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \implies \dot{H}(t) = \int_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \ \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

där c är materialets värmekapacitet och ρ är densiteten. Men, den totala värmens förändring $\dot{H}$ måste vara lika med inflödet av värme vid ∂V, plus värme skapat av källan f. Alltså:

$$\dot{H}(t) = -\int_{\partial V} q \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \ \mathrm{d}s + \int_V f \ \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

där q är "värmeflödet" och $\hat{\boldsymbol{n}}$ är en utåtriktad normalvektor. Enligt Fouriers lag gäller $q = -\kappa \nabla u$ för konduktiviteten κ (med ∇ menas endast derivering i $\boldsymbol{x}$, ej t). Med detta får vi

$$\dot{H}(t) = \int_{\partial V} \kappa \nabla u \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \ \mathrm{d}s + \int_V f \ \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

och genom divergenssatsen

$$\begin{aligned} \dot{H}(t) &= \int_V \operatorname{div}(\kappa \nabla u) \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_V f \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \iff \int_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} &- \operatorname{div}(\kappa \nabla u) - f \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0. \end{aligned}$$

Eftersom detta ska gälla för ett godtyckligt V måste integranden vara konstant 0, vilket ger oss värmeledningsekvationen:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\kappa \nabla u) = f$$

För att få en enklare ekvation kan vi sätta konstanterna $c = \rho = 1$ och betrakta fallet där vi bara har en rumsvariabel $\boldsymbol{x} = x$, vilket ger värmeledningsekvationen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

2. Formulera en explicit finit differensmetod för en värmeledningsekvation och bevisa ett relaterat stabilitetsvillkor.

Vi tar en enkel version av värmeledningsekvationen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, && x \in (0,1),\ t \in (0,1) && \text{(PDE)} \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0, && t \in [0,1] && \text{(RV)} \\ &u(x,0) = g(x), && x \in (0,1) && \text{(BV)} \end{aligned}$$

Inför diskretiseringar:

$$\begin{aligned} &x_m := m\Delta x, && m = 0, 1, \ldots, M, && \Delta x := \frac{1}{M} \\ &t_n := n\Delta t, && n = 0, 1, \ldots, N, && \Delta t = \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Vi betecknar vår approximation i dessa punkter som $u_{m,n} \approx u(x_m, t_n)$. Vidare approximerar vi derivator enligt

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x_m, t_n) &\mapsto \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n) &\mapsto \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{\Delta x^2}\end{aligned}$$

Nu stoppar vi in approximationerna i (PDE):

$$\begin{aligned}&\frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{\Delta t} - \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{\Delta x^2} = 0 \\ \iff &u_{m,n+1} = \underbrace{\frac{\Delta t}{\Delta x^2}}_{=:\lambda}\left(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,m}\right) + u_{m,n} \\ \iff &u_{m,n+1} = \lambda(u_{m+1,n} + u_{m-1,n}) + (1-2\lambda)u_{m,n} \qquad (*)\end{aligned}$$

Den explicita finita differensmetoden ges alltså av

$$\begin{cases}(*), & m = 1, \ldots, M-1,\ n = 0, \ldots, N-1 \\ u_{0,n} = u_{M,n} = 0, & n = 0, \ldots, N \\ u_{m,0} = g(x_m), & m = 0, \ldots, M\end{cases}$$

Låt oss nu undersöka stabilitet. Alltså vill vi hitta ett villkor så att

$$\max_m |u_{m,n+1}| \leq \max_m |u_{m,n}|$$

för att försäkra oss om att normen av lösningen u inte exploderar när tiden växer. Notera att för något $\bar{m}$ gäller

$$\begin{aligned}\max_m |u_{m,n+1}| &= |u_{\bar{m},n+1}| = |\lambda(u_{\bar{m}+1,n} + u_{\bar{m}-1,n}) + (1-2\lambda)u_{\bar{m},n}| \\ &\leq \lambda |u_{\bar{m}+1,n}| + \lambda |u_{\bar{m}-1,n}| + |1-2\lambda||u_{\bar{m},n}| \\ &\leq \left(2\lambda + |1-2\lambda|\right) \max_m |u_{m,n}|\end{aligned}$$

så vi får stabilitet om $2\lambda + |1-2\lambda| \leq 1 \iff \lambda \leq \frac{1}{2}$.

3. Formulera och härled d'Alemberts lösningsformel.

Vi utgår från vågekvationen

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), && x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 && \text{(PDE)} \\ &u(x,0) = \phi(x), && x \in \mathbb{R} && \text{(BV1)} \\ &\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), && x \in \mathbb{R} && \text{(BV2)}\end{aligned}$$

Vi kan faktorisera deriveringsoperatorerna i (PDE) som

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0 \qquad (*)$$

Fortsättningsvis inför vi variablerna $\xi := x + ct$ och $\eta := x - ct$. Enligt kedjeregeln gäller

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = c\frac{\partial}{\partial \xi} - c\frac{\partial}{\partial \eta}\end{aligned}$$

Dessa stoppar vi in i $(*)$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)u &= \left(c\frac{\partial}{\partial \xi}-c\frac{\partial}{\partial \eta}-c\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\right)\left(c\frac{\partial}{\partial \xi}-c\frac{\partial}{\partial \eta}+c\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\right)u \\ &= \left(-2c\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(2c\frac{\partial}{\partial \xi}\right)u = 0 \\ &\implies \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}u = 0\end{aligned}$$

Detta har lösningen

$$u = f(\xi) + g(\eta) = f(x+ct) + g(x-ct) \tag{$**$}$$

Nu återstår att använda begynnelsevillkoren. Dessa ger:

$$\begin{aligned}&(\text{BV1}) \implies f(x)+g(x)=\phi(x) \qquad \implies f'(x)+g'(x)=\phi'(x)\\ &(\text{BV2}) \implies cf'(x)-cg'(x)=\psi(x) \implies f'(x)-g'(x)=\frac{1}{c}\psi(x)\\ &\implies f'=\frac{1}{2}\left(\phi'+\frac{1}{c}\psi\right), \quad g'=\frac{1}{2}\left(\phi'-\frac{1}{c}\psi\right)\end{aligned}$$

Vi integrerar båda och betecknar den oberoende variabeln som s för tydlighetens skull:

$$\begin{aligned}f(s) &= \frac{1}{2}\phi(s)+\frac{1}{2c}\int_0^s \psi(y)\ \mathrm{d}y + A\\ g(s) &= \frac{1}{2}\phi(s)-\frac{1}{2c}\int_0^s \psi(y)\ \mathrm{d}y + B\end{aligned}$$

Vi bestämmer A och B genom (BV1):

$$\phi(s) = f(s)+g(s) = \frac{1}{2}\phi(s)+\frac{1}{2}\phi(s)+A+B \implies A+B=0$$

Nu stoppar vi in uttrycken för f och g i $(**)$ tillsammans med $A+B=0$ och får:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2}\phi(x+ct)+\frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}\psi(y)\ \mathrm{d}y+\frac{1}{2}\phi(x-ct)-\frac{1}{2c}\int_0^{x-ct}\psi(y)\ \mathrm{d}y+(A+B)\\ &= \frac{\phi(x+ct)+\phi(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x-ct}\psi(y)\ \mathrm{d}y\end{aligned}$$

vilket är d'Alemberts lösningsformel!

4. Formulera och härled en maximumprincip för värmeledningsekvationen och använd detta för att visa entydighet av lösningar.

Vi har värmeledningsekvationen

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, && x\in(0,\ell),\ t\in(0,T) && \text{(PDE)}\\ &u(0,t)=g(t),\ u(\ell,t)=h(t), && t\in[0,T] && \text{(RV)}\\ &u(x,0)=g(x), && x\in(0,\ell) && \text{(BV)}\end{aligned}$$

Maximumprincipen säger att om u löser värmeledningsekvationen ovan så antar $u(x,t)$ sitt maximala värde antingen för $t=0$ eller $x=0$ eller $x=\ell$.

Bevis av maximumprincipen:
Bilda $v(x,t)=u(x,t)+\varepsilon x^2$ för något $\varepsilon>0$. Välj M som maxvärdet av u på randen; alltså $u(x,t)\leq M$ för $x=0$, $x=\ell$ och $t=0$. Vi vill visa att $v(x,t)\leq M+\varepsilon\ell^2$ eftersom det är ekvivalent med $u(x,t)\leq M+\varepsilon(\ell^2-x^2)$. I så fall, eftersom ε var godtyckligt och ℓ^2-x^2 är ickenegativt, skulle vi kunna dra slutsatsen $u(x,t)\leq M$ vilket är vad vi vill visa.

Det är tydligt att $v(x,t) \leq M + \varepsilon\ell^2$ för $x = 0$, $x = \ell$ och $t = 0$. Det återstår att visa att samma sak gäller även för inre punkter till v, vilket vi gör genom att visa att v inte kan ha en inre maxpunkt. Antag att v har en inre maxpunkt (x_*, t_*). Då gäller $\frac{\partial v}{\partial t}(x_*, t_*) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_*, t_*) = 0$ och $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_*, t_*) \leq 0$. Men, notera att

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}(x_*, t_*) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_*, t_*)}_{\geq 0} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_*, t_*) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_*, t_*) - 2\varepsilon = -2\varepsilon < 0$$

vilket ger motsägelse, så v kan inte ha en inre maxpunkt!

Vi borde också verifiera att v inte har en maxpunkt där $t_* = T$ och $x_* \in (0, \ell)$. I så fall skulle samma krav gälla som för inre maxpunkter, förutom att $\frac{\partial v}{\partial t}(x_*, t_*) \geq 0$ och vi får samma olikhet som ovan vilket ger motsägelse. ■

Entydighet av lösningar:
Antag att två funktioner u_1 och u_2 löser problemet med källterm, alltså:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Bilda skillnaden $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Då gäller:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}, && x \in (0,\ell),\ t \in (0,T) \\ &w(0,t) = w(\ell,t) = 0, && t \in [0,T] \\ &w(x,0) = 0, && x \in (0,\ell) \end{aligned}$$

Nu ger maximumprincipen att w antar sitt maximum på $x = 0$ eller $x = \ell$ eller $t = 0$. Men på dessa ställen är $w = 0$. Alltså gäller $w \leq 0$. På samma sätt ger minimumprincipen (som kan visas genom att sätta $w \mapsto -w$ och använda maximumprincipen) att $w \geq 0$. Totalt gäller $w = 0$ på hela området, vilket medför $u_1 = u_2$. ■

5. Visa att energin bevaras för vågekvationen och använd detta för att visa entydighet av lösningar.

Vi utgår ifrån vågekvationen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, && x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 && \text{(PDE)} \\ &u(x,0) = \phi(x), && x \in \mathbb{R} && \text{(BV1)} \\ &\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), && x \in \mathbb{R} && \text{(BV2)} \end{aligned}$$

Energin bevaras:
Bilda energin

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \, \mathrm{d}x$$

Vi behöver visa att tidsderivatan av energin är noll:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \, \mathrm{d}x$$

och vi utför partiell integration på den andra termen:

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}x + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

och vi antar att utböjningen u är 0 vid $\pm\infty$, så u:s derivator är även 0 vilket gör att den andra termen ovan försvinner:

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}_{= 0 \text{ per (PDE)}} \, \mathrm{d}x$$

$$= 0$$

■

Entydighet av lösningar:
Antag att två funktioner u_1 och u_2 löser vågekvationen. Bilda skillnaden $w = u_1 - u_2$. Då gäller:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}, && x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\
&w(x,0) = 0, && x \in \mathbb{R} \\
&\frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = 0, && x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Vi ser även från det första begynnelsevillkoret att $\frac{\partial w(x,0)}{\partial x} = 0$. Därmed är energin för w vid $t = 0$ lika med 0. Enligt energins bevarande är då energin konstant 0. Detta ger att $\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = 0$ för alla t (och x). Vi kan skriva om w som

$$w(x,t) = \int_0^t \underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}(x,\tau)}_{=0}\ \mathrm{d}\tau + \underbrace{w(x,0)}_{=0} = 0$$

Så, w är konstant 0 vilket medför $u_1 = u_2$. ■

6. Härled en representationsformel för värmeledning med källterm i $[0,T] \times \mathbb{R}$.

Vi har värmeledningsekvationen med källterm f:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), && x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T] && \text{(PDE)} \\
&u(x,0) = \phi(x), && x \in \mathbb{R} && \text{(BV)}
\end{aligned}$$

Enligt representationsformeln är lösningen:

$$u(x,t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y)\ \mathrm{d}y}_{\text{(I1)}} + \underbrace{\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-s)}} f(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s}_{\text{(I2)}}$$

Vi behöver nu verifiera att detta verkligen löser problemet.

Vi börjar med att kontollera begynnelsevillkoret. Den andra integralen (I2) försvinner när $t = 0$, så denna ignorerar vi. För att undersöka (I1) behöver vi däremot jobba med gränsvärden. Vi antar att ϕ uppfyller Lipschitzvillkoret $\left|\phi(x) - \phi(y)\right| \leq C|x-y|$ för något C. Då får vi:

$$\left|u(x,t) - \phi(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} (\phi(y) - \phi(x))\ \mathrm{d}y\right| \leq C\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} |x-y|\ \mathrm{d}y\right|$$

och vi gör variabelbytet $z = (x-y)/\sqrt{t}$:

$$= C\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{z^2}{4}} z\sqrt{t}(-\sqrt{t}\ \mathrm{d}z)\right| = C\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{t}\ \mathrm{d}z\right| \to 0 \text{ när } t \to 0$$

så (BV) är uppfyllt.

Vi fortsätter med att kontrollera (PDE). Låt oss börja med att derivera (I1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y)\ \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \frac{(x-y)^2}{4kt^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} + \frac{4\pi k}{-2(4\pi kt)^{3/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\right)\phi(y)\ \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \left(\frac{(x-y)^2}{4kt^2} - \frac{1}{2t}\right)\phi(y)\ \mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\phi(y)\ \mathrm{d}y = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-(x-y)}{2kt}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\phi(y)\ \mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-1}{2kt}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}+\left(\frac{-(x-y)}{2kt}\right)^2 e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\phi(y)\ \mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\left(\frac{(x-y)^2}{4kt^2}-\frac{1}{2t}\right)\phi(y)\ \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

så vi ser att om vi sätter in (I1) i VL (PDE) så får vi 0. Vi fortsätter med att derivera (I2):

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-s)}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-s)}}f(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s
$$

Använd analysens fundamentalsats tillsammans med kedjeregeln:

$$
=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-s)}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-s)}}f(y,s)\ \mathrm{d}y\Bigg|_{s=t}+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-s)}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-s)}}f(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s
$$

Den första termen får vi tolka som ett gränsvärde där $s\to t$, dvs $(t-s)\to 0$. Enligt samma beräkningar som vid analysen av (BV) blir den termen då $f(x,t)$:

$$
=f(x,t)+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-s)}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-s)}}f(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s
$$

Denna integrand liknar integranden (I1), förutom förskutning i tiden. Enligt tidigare beräkningar vet vi att $\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{I1})=\frac{1}{k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathrm{I1})$, så samma sak måste gälla för (I2):

$$
\begin{aligned}
=&f(x,t)+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-s)}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-s)}}f(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s\\
=&f(x,t)+\frac{1}{k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathrm{I2})
\end{aligned}
$$

så (PDE) är uppfylld.

7. Formulera och bevisa en ekvivalens mellan partiella differentialekvationers variationsform och minimeringsform.

Låt A vara en bilinjär form och L vara en linjär form (över ett funktionsrum V). Antag att A är symmetrisk, och $A(v,v)\geq 0\ \forall v\in W$. Då gäller att (var) $\iff$ (min), där:

$$
\begin{aligned}
&(\text{var}):\ \text{Bestäm } u\in V \text{ så att } A(u,v)=L(v)\ \forall v\in V.\\
&(\text{min}):\ \text{Bestäm } u\in V \text{ så att } F(u)\leq F(v)\ \forall v\in V \text{ där } F(v):=\frac{1}{2}A(v,v)-L(v).
\end{aligned}
$$

(var) $\implies$ (min):
Antag att $u\in V$ uppfyller (var). Tag ett $w\in V$ och ett $\varepsilon\in\mathbb{R}$ och bilda $v=u+\varepsilon w$. Vi ska nu visa att $F(u)\leq F(v)$.

$$
\begin{aligned}
F(v)=F(u+\varepsilon w)&=\frac{1}{2}A(u+\varepsilon w,u+\varepsilon w)-L(u+\varepsilon w)\\
&=\frac{1}{2}\Big(A(u,u)+2\varepsilon A(u,w)+\varepsilon^2A(w,w)\Big)-L(u)-\varepsilon L(w)\\
&=\underbrace{\frac{1}{2}A(u,u)-L(u)}_{=F(u)}+\varepsilon\underbrace{\big(A(u,w)-L(w)\big)}_{=0\text{ per (var)}}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\underbrace{A(w,w)}_{\geq 0}\geq F(u)
\end{aligned}
$$

(min) $\implies$ (var):
Antag att $u \in V$ uppfyller (min). Tag ett $v \in V$. Vi ska nu visa att $A(u,v) = L(v)$. Låt $g(\varepsilon) = F(u+\varepsilon v)$. Enligt (min) har g ett minimum vid $\varepsilon = 0$, och alltså gäller $g'(0) = 0$. Vi beräknar derivatan av g:

$$\begin{aligned} & g(\varepsilon) = \frac{1}{2}A(u,u) - L(u) + \varepsilon\big(A(u,v) - L(v)\big) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 A(v,v) \\ \implies & g'(\varepsilon) = A(u,v) - L(v) + \varepsilon A(v,v) \\ \implies & g'(0) = A(u,v) - L(v) \end{aligned}$$

$$\implies 0 = A(u,v) - L(v)$$

■

8. Formulera och bevisa en sats om finita elementmetodens optimala approximation av lösningen $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ till $-u''(x) = f(x)$ i $x \in (0,1)$ med randvillkoren $u(0) = u(1) = 0$ i energinorm.

Låt oss börja med att skriva om problemet på variationsform. Låt

$$V = \left\{ v : [0,1] \to \mathbb{R} : \int_0^1 v(x)^2 + v'(x)^2 \, \mathrm{d}x < \infty,\ v(0) = v(1) = 0 \right\}$$

Tag en testfunktion $v \in V$, multiplicera med den i ODEn och integrera för att få:

$$\int_0^1 -u''(x)v(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x) \, \mathrm{d}x$$

Vi skriver om VL med partiell integration:

$$\mathrm{VL} = \Big[-u'(x) \underbrace{v(x)}_{=0} \Big]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x) \, \mathrm{d}x$$

och får:

$$\underbrace{\int_0^1 u'(x)v'(x) \, \mathrm{d}x}_{=: A(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f(x)v(x) \, \mathrm{d}x}_{=: L(v)}$$

Variationsformen lyder nu "Bestäm $u \in V$ så att $A(u,v) = L(v)$ $\forall v \in V$".

Vi fortsätter med att formulera den finita elementmetodens variationsform. Låt

$$V_h = \left\{ v \in V : v \text{ på } ((i-1)h, ih) \text{ är linjär för } i = 1, \ldots, \frac{1}{h} \right\}.$$

Då lyder finita elementmetoden "Bestäm $u_h \in V_h$ så att $A(u_h, v) = L(v)$ $\forall v \in V_h$".

Enligt sats om bästa approximation gäller då

$$\|u - u_h\| \leq \min_{v \in V_h} \|u - v\|$$

med energinormen

$$\|v\| := \sqrt{A(v,v)}.$$

Bevis:
Låt u och u_h lösa respektive variationsform och ta något $v \in V_h$.

$$\|u - u_h\|^2 = A(u - u_h, u - u_h) = A(u - u_h, u - v + v - u_h) = A(u - u_h, u - v) + A(u - u_h, v - u_h)$$

Notera att $v - u_h = w$ för något $w \in V_h$. Därmed gäller $A(u - u_h, w) = A(u,w) - A(u_h, w) = L(w) - L(w) = 0$. Totalt har vi nu att

$$\|u - u_h\|^2 = A(u - u_h, u - v)$$

och med Cauchy-Schwarz:

$$
\begin{aligned}
&\leq \sqrt{A(u-u_h,u-u_h)}\sqrt{A(u-v,u-v)} = \|u-u_h\|\|u-v\| \\
\implies &\|u-u_h\| \leq \|u-v\|
\end{aligned}
$$

■

9. Formulera och bevisa en uppskattning av interpolationsfel med kontinuerliga och styckvis linjära funktioner på intervallet $[0,1]$.

Låt $v(x) \in V$ vara en funktion i funktionsrummet V. Låt V_h vara ett ändligdimensionellt delrum till V av styckvis linjära funktioner, på intervallen (x_i, x_{i+1}) där $h = \max_i(x_{i+1}-x_i)$. Låt interpoleringen $\pi : V \to V_h$ ges av

$$\pi v(x) = \sum_{i=1}^{N} v(x_i)\phi_i(x)$$

där $\{\phi_i\}$ är en bas för V_h. Då gäller

$$\|v-\pi v\|_{L^2} \leq \sqrt{\int_0^1 h^4 v''(x)^2 \, \mathrm{d}x}$$

Bevis:
Låt oss börja med att undersöka $\left\|v'-(\pi v)'\right\|_{L^2}$, på intervallet (x_i, x_{i+1}). Enligt medelvärdesatsen finns för varje $x \in (x_i, x_{i+1})$ ett $\xi \in (x_i, x_{i+1})$ så att $v'(\xi) = (\pi v)'(x)$. Då gäller

$$v'(x) - (\pi v)'(x) = v'(x) - v'(\xi) = \int_\xi^x v''(s) \, \mathrm{d}s$$

så

$$
\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(v'(x)-(\pi v)'(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_\xi^x v''(s)\, \mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}x \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x-\xi| \int_\xi^x (v''(s))^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \\
&\leq h \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_\xi^x (v''(s))^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \leq h \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v''(s))^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \\
&\leq h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v''(s))^2 \, \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

Nu är vi redo att undersöka $v - \pi v$. Vi har att

$$v(x) - \pi v(x) = \int_{x_i}^x (v-\pi v)'(s) \, \mathrm{d}s$$

så

$$
\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} (v(x)-\pi v(x))^2 \, \mathrm{d}x &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_i}^x (v-\pi v)'(s)\, \mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}x \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x-x_i| \int_{x_i}^x (v-\pi v)'(s)^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x-x_i| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v-\pi v)'(s)^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x-x_i| \, h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v''(s))^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \\
&\leq h^3 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v''(s))^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \leq h^4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v''(s))^2 \, \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

Vi kan nu summera alla intervall enligt

$$
\begin{aligned}
\|v-\pi v\|_{L^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v(x)-\pi v(x))^2 \, \mathrm{d}x} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} h^4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v''(s))^2 \, \mathrm{d}s} \\
&= \sqrt{h^4 \int_0^1 (v''(s))^2 \, \mathrm{d}s}
\end{aligned}
$$

■

10. Bevisa en feluppskattning av finita elementmetoden för $-u''(x) = f(x)$ i $x \in (0,1)$ med randvillkoren $u(0) = u(1) = 0$.

Låt oss börja med att skriva om problemet på variationsform. Låt

$$V = \left\{ v : [0,1] \to \mathbb{R} : \int_0^1 v(x)^2 + v'(x)^2 \, \mathrm{d}x < \infty, \; v(0) = v(1) = 0 \right\}$$

Tag en testfunktion $v \in V$, multiplicera med den i ODEn och integrera för att få:

$$\int_0^1 -u''(x)v(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x) \, \mathrm{d}x$$

Vi skriver om VL med partiell integration:

$$\text{VL} = \Big[-u'(x) \underbrace{v(x)}_{=0} \Big]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x) \, \mathrm{d}x$$

och får:

$$\underbrace{\int_0^1 u'(x)v'(x) \, \mathrm{d}x}_{=: A(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f(x)v(x) \, \mathrm{d}x}_{=: L(v)}$$

Variationsformen lyder nu "Bestäm $u \in V$ så att $A(u,v) = L(v)$ $\forall v \in V$".

Vi fortsätter med att formulera den finita elementmetodens variationsform. Låt

$$V_h = \left\{ v \in V : v \text{ på } ((i-1)h, ih) \text{ är linjär för } i = 1, \dots, \frac{1}{h} \right\}.$$

Då lyder finita elementmetoden "Bestäm $u_h \in V_h$ så att $A(u_h, v) = L(v)$ $\forall v \in V_h$".

En feluppskattning av finita elementmetoden är

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch$$

där C beror på u och normen ges av $\|v\|_V := \sqrt{\int_0^1 v(x)^2 + v'(x)^2 \, \mathrm{d}x}$.

Bevis av feluppskattning:
Låt $\pi : V \to V_h$ mappa funktioner i V till deras interpolerande funktion i V_h. Då vet vi att

$$\begin{aligned} \left\|(v - \pi v)'\right\|_{L^2} &\leq Ch, \\ \|v - \pi v\|_{L^2} &\leq Ch^2 \end{aligned}$$

Vi kommer även behöva följande egenskaper för A:

$$\begin{aligned} &\exists \alpha > 0 : \; \alpha \|v\|_V^2 \leq A(v,v) && \forall v \in V \\ &\exists C > 0 : \; |A(v,w)| \leq C \|v\|_V \|w\|_V && \forall v, w \in V \end{aligned}$$

Nu kör vi!

$$A(u - u_h, u - u_h) = A(u - u_h, u - \pi u + \pi u - u_h) = A(u - u_h, u - \pi u) + A(u - u_h, \pi u - u_h)$$

och $\pi u - u_h = v$ för något $v \in V$, så:

$$\begin{aligned} &= A(u - u_h, u - \pi u) + A(u - u_h, v) = A(u - u_h, u - \pi u) + A(u, v) - A(u_h, v) \\ &= A(u - u_h, u - \pi u) + L(v) - L(v) = A(u - u_h, u - \pi u) \end{aligned}$$

och med Cauchy-Schwarz:

$$
\begin{aligned}
&\leq \sqrt{A(u-u_h,u-u_h)}\sqrt{A(u-\pi u,u-\pi u)} \\
\implies \sqrt{A(u-u_h,u-u_h)} &\leq \sqrt{A(u-\pi u,u-\pi u)} \leq C\|u-\pi u\|_V = C\sqrt{\|u-\pi u\|_{L^2}^2+\left\|(u-\pi u)'\right\|_{L^2}^2} \\
&\leq C\sqrt{Ch^2+Ch} \leq \tilde{C}h
\end{aligned}
$$

Eftersom vi har

$$\alpha\|u-u_h\|_V^2 \leq A(u-u_h,u-u_h) \implies \|u-u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{1}{\alpha}A(u-u_h,u-u_h)}$$

så kan vi kombinera detta med resultatet ovan för att få olikheten vi vill bevisa. ■

11. Formulera och bevisa punktvis konvergens av Fourierserier.

Antag att f är 2π-periodisk och kvadratiskt integrerbar. Låt

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x, \quad S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

Antag att f är deriverbar i punkten x_0. Då konvergerar S_N i x_0, dvs.

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x_0) = f(x_0)$$

Bevis:
Antag att $x_0 = 0$ och $f(x_0) = 0$. Om inte så kan vi titta på $\tilde{f}(x) := f(x+x_0) - f(x_0)$.

Låt $g(x) = \frac{f(x)}{e^{ix}-1}$. Låt oss undersöka dess beteende i punkten $x = 0$, genom att Taylorutveckla:

$$\lim_{x\to 0}\left|g(x)\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{e^{ix}-1}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f'(0)x+o(x)}{ix+o(x)}\right| = \left|\frac{f'(0)}{i}\right| = \left|f'(0)\right|$$

vilket visar att $g(x)$ är begränsad och är därmed kvadratiskt integrerbar.

Vi betecknar Fourierkoefficienterna till g som d_n (definierad på motsvarande sätt som c_n). Då gäller:

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)(e^{ix}-1)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-i(n-1)x} - g(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= d_n - d_{n-1}
\end{aligned}
$$

Vi vill vidare visa att $|d_n| \to 0$ då $n \to \infty$. Enligt Bessels olikhet gäller

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x\right|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,\mathrm{d}x$$

Vi vet att g är kvadratiskt integrerbar, så enligt olikheten ovan måste serien $\sum d_n$ konvergera vilket visar $|d_n| \to 0$.

Nu är vi redo att undersöka S_N:

$$S_N(0) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^0 = \sum_{n=-N}^{N}(d_n - d_{n-1}) = d_N - d_{-N-1} \to 0 \text{ när } N \to \infty$$

■

12. Formulera och bevisa Lax-Milgrams sats.

Låt V vara ett Hilbertrum med norm $\|\cdot\|_V$ och låt A vara en bilinjär form och L vara en linjär form. Antag att

- A är symmetrisk: $A(v,w) = A(w,v)\ \forall v,w \in V$.
- A är V-elliptisk: $\exists \alpha > 0 : A(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2\ \ \forall v \in V$.
- A är kontinuerlig: $\exists C : \big|A(v,w)\big| \leq C\|v\|_V\|w\|_V\ \ \forall v,w \in V$.
- L är kontinuerlig: $\exists \Lambda : \big|L(v)\big| \leq \Lambda\|v\|_V\ \ \forall v \in V$.

Då har variationsproblemet "Bestäm $u \in V$ så att $A(u,v) = L(v)\ \forall v \in V$" en unik lösning u, som uppfyller $\|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$.

Bevis:
Vi kommer att jobba med energinormen $\|v\| := \sqrt{A(v,v)}$ (och anta att konstanterna i villkoren på A och L gäller för denna normen). Detta är okej eftersom det är en ekvivalent norm med $\|\cdot\|_V$ då ellipticitet och kontinuitet av A ger

$$\sqrt{\alpha}\|v\|_V \leq \|v\| \leq \sqrt{C}\|v\|_V$$

För att visa existens av u kommer vi lösa det ekvivalenta minimeringsproblemet "Bestäm $u \in V$ så att $F(u) \leq F(v)\ \forall v \in V$" där $F(v) := \frac{1}{2}A(v,v) - L(v)$.

Låt $\beta = \inf_{v\in V} F(v) \in \mathbb{R}$. Detta infimum existerar eftersom

$$F(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - L(v) \leq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \Lambda\|v\|$$

vilket är en andragradsekvation med minimum Λ.

Per existens av infimum vet vi att det finns en följd $\{v_i\}$ så att $F(v_i) \searrow \beta$. Vi vill nu visa att $\{v_i\}$ är en Cauchyföljd i V. Vi gör detta genom att studera $\left\|\frac{v_i - v_j}{2}\right\|^2$ för några $i,j \geq N$ och använder parallellogramlagen:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{v_i - v_j}{2}\right\|^2 &= \frac{1}{2}\|v_i\|^2 + \frac{1}{2}\|v_j\|^2 - \left\|\frac{v_i + v_j}{2}\right\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|v_i\|^2 - L(v_i) + \frac{1}{2}\|v_j\|^2 - L(v_j) - \left(\left\|\frac{v_i + v_j}{2}\right\|^2 - 2L\left(\frac{v_i+v_j}{2}\right)\right) \\
&= F(v_i) + F(v_j) - 2F\left(\frac{v_i+v_j}{2}\right) \\
&\geq F(v_i) + F(v_j) - 2\beta \to 0 \text{ när } N \to \infty
\end{aligned}$$

vilket visar att $\{v_i\}$ är en Cauchyföljd. Eftersom V är ett Hilbertrum måste alltså $\{v_i\}$ konvergera mot något som vi kallar u.

Vidare vill vi visa att u verkligen löser problemet, dvs. att $F(u) = \beta$:

$$\begin{aligned}
\big|F(v_i) - F(u)\big| &= \left|\frac{1}{2}\left(\|v_i\|^2 - \|u\|^2\right) - L(v_i - u)\right| = \left|\frac{1}{2}A(v_i - u, v_i + u) - L(v_i - u)\right| \\
&\leq \big|A(v_i - u, v_i + u)\big| + \big|L(v_i - u)\big| \\
&\leq C\underbrace{\|v_i - u\|}_{\to 0}\ \underbrace{\|v_i + u\|}_{\text{begränsad}}\ + \Lambda\underbrace{\|v_i - u\|}_{\to 0} \to 0 \text{ när } i \to \infty
\end{aligned}$$

Vi har nu visat existens av lösning!

Vi fortsätter med att visa $\|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$:

$$\begin{aligned}
&\alpha\|u\|_V^2 \leq A(u,u) = L(u) \leq \Lambda\|u\|_V \\
\implies &\alpha\|u\|_V^2 \leq \Lambda\|u\|_V \implies \|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}
\end{aligned}$$

Avslutningsvis visar vi entydighet. Antag att det finns en annan lösning u_*. Bilda $w = u_* - u$. Då gäller för godtyckligt $v \in V$ att

$$\begin{aligned}
A(w,v) &= A(u_*,v) - A(u,v) = L(v) - L(v) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Speciellt för $v = w$ får vi

$$\begin{aligned} 0 &= A(w,w) \geq \alpha \|w\|_V^2 \\ \implies 0 &= \|w\|_V \implies u = u_* \end{aligned}$$

■

13. Formulera Lax-ekvivalenssats och visa ett exempel på att stabilitet och konsistens medför konvergens för en numerisk metod som approximerar en partiell differentialekvation.

Detta exempel förstår jag inte särskilt bra, så förvänta dig inte något supertydligt här... min lösning är sannolikt inte tillräcklig för att få alla poäng.

Antag att vi har ett linjärt rättställt problem $Lu = f$ (där u är okänd), och en motsvarande approximation u_h som uppfyller $L_h u_h = f_h$. Då är (stabilitet och konsistens) ekvivalent med (konvergens). Dessa begrepp definieras enligt:

- Stabilitet: $\left\|L^{-1}\right\| \leq C$ och $\left\|L_h^{-1}\right\| \leq C\ \forall h$.
- Konsistens: $L_h \to L$ och $f_h \to f$ när $h \to 0$.
- Konvergens: $u_h \to u$ när $h \to 0$.

Exempel:
Betrakta värmeledningsekvationen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), && x \in \mathbb{R},\ t > 0 && \text{(PDE)} \\ &u(x,0) = u_0(x), && x \in \mathbb{R} && \text{(BV)} \end{aligned}$$

med approximation enligt finit differens:

$$u_{n,m+1} = (1-2\lambda)u_{n,m} + \lambda(u_{n+1,m} + u_{n-1,m})$$

där $u_{n,m} \approx u(x_n, t_m)$ och $x_n = n\Delta x$, $t_m = m\Delta t$ och $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

Vi utvidgar detta så att det gäller för alla x, för teoretisk analys:

$$U(x,n+1) = (1-2\lambda)U(x,n) + \lambda(U(x+\Delta x) + U(x-\Delta x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Nu kan vi ta Fouriertransform av detta i x-led:

$$\begin{aligned} \hat{U}(\omega, n+1) &= (1-2\lambda)\hat{U}(\omega,n) + \lambda\left(\hat{U}(\omega,n)e^{i\Delta x\omega} + \hat{U}(\omega,n)e^{-i\Delta x\omega}\right) \\ &= \underbrace{\left(1 - 2\lambda + 2\lambda\cos(\Delta x\omega)\right)}_{=:\hat{G}}\hat{U}(\omega,n) \end{aligned}$$

Itererat har vi alltså $\hat{U}(\omega, n+1) = \hat{G}^{n+1}\hat{u}_0(\omega)$.

Vi behöver också den exakta lösningsoperatorn (för ett tidssteg). Vi får detta genom att ta Fouriertransformen av (PDE) och (BV) för att få:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) = -\omega^2\hat{u}(\omega,t) \\ &\hat{u}(\omega,0) = \hat{u}_0(\omega) \end{aligned}$$

som har lösning

$$\hat{u}(\omega,t) = e^{t\omega^2}u_0(\omega)$$

Vi kan därmed definiera $\hat{H} = e^{-\Delta t\omega^2}$ så att

$$\hat{u}(\omega, t+\Delta t) = \hat{H}\hat{u}(\omega,t)$$

Vi är nu redo att analysera påståendena i Lax-ekvivalenssats genom att jobba i Fourierdomänen.

Stabilitet:
Problemet är stabilt om $\left\|\hat{G}\right\|, \left\|\hat{H}\right\|$ är begränsade.

Konsistens:
För konstistens krävs $\left\|(\hat{G}-\hat{H})\hat{u}_0\right\| \to 0$ när t.ex. $\Delta t \to 0$.

$$\left\|(\hat{G}-\hat{H})\hat{u}_0\right\| = \left\|\left(1-2\lambda+2\lambda\cos(\Delta x\omega)-e^{-\Delta t\omega^2}\right)\hat{u}_0\right\|$$

och låt $y = \Delta t\omega^2$:

$$= \left\|\left(1-2\lambda+2\lambda\cos\sqrt{y/\lambda}-e^{-y}\right)\hat{u}_0\right\|$$

Om $y \leq 1$ kan vi Taylorutveckla som

$$= \left\|\left(1-\lambda+2\lambda(1-y/\lambda+O(y^2))-(1-y+O(y^2))\right)\hat{u}_0\right\| = \left\|O(y^2)\hat{u}_0\right\| \leq \left\|C\Delta t^2\omega^4\hat{u}_0\right\|$$

Om $y > 1$ istället så är hela uttrycket begränsat av en konstant, och därmed speciellt $\leq C\Delta t^2\omega^4$. Totalt har vi nu att

$$\left\|(\hat{G}-\hat{H})\hat{u}_0\right\| \leq \left\|C\Delta t^2\omega^4\hat{u}_0\right\| \leq C\Delta t^2\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}u_0\right\|$$

Konvergens:
Vi vill visa att $\|u-U\| \to 0$ när t.ex. $\Delta t \to 0$. Vi väljer normen som L^2-normen och utnyttjar då Parsevals relation:

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\|u-U\|_{L^2} &\leq \left\|\hat{u}-\hat{U}\right\|_{L^2} = \left\|(\hat{U}^n-\hat{G}^n)\hat{u}_0\right\|_{L^2} \\ &= \left\|(\hat{G}^{n-1}+\hat{G}^{n-2}\hat{H}+\cdots+\hat{H}^{n-1})(\hat{G}-\hat{H})\hat{u}_0\right\|_{L^2} \\ &\leq \underbrace{\left\|\hat{G}^{n-1}+\hat{G}^{n-2}\hat{H}+\cdots+\hat{H}^{n-1}\right\|_{L^\infty}}_{\text{begränsad enligt stabilitet}} \underbrace{\left\|(\hat{G}-\hat{H})\hat{u}_0\right\|_{L^2}}_{\to 0 \text{ enligt konsistens}}\end{aligned}$$

14. Formulera och bevisa en maximumprincip för harmoniska funktioner.

Jag väljer formulera detta i $\mathbb{R}^2$.

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara öppen, sammanhängande och begränsad. Antag att $u(x,y)$ uppfyller $-\Delta u = 0$ i Ω, där $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$. Då gäller:

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

Bevis:
Låt $v(x,y) = u(x,y) + \varepsilon(x^2+y^2)$ för något $\varepsilon > 0$. Antag att v har en inre maxpunkt (x_*, y_*). Då måste det gälla att

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_*,y_*) \leq 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_*,y_*) \leq 0,$$

Men,

$$\Delta v = \Delta u + \varepsilon(2+2) = 0 + 4\varepsilon > 0$$

så detta är omöjligt! Alltså måste v anta sitt max på randen $\partial\Omega$; beteckna punkten som detta max antas med $(x_*, y_*) \in \partial\Omega$. Notera nu att

$$u(x,y) \leq v(x,y) \leq v(x_0,y_0) = u(x_0,y_0) + \varepsilon\left\|(x_0,y_0)\right\|^2 \leq u(x_0,y_0) + \varepsilon\ell^2 \leq \max_{(x,y)\in\partial\Omega} u(x,y) + \varepsilon\ell^2$$

där konstanten ℓ är maxavståndet till randen $\partial\Omega$ från origo. Eftersom detta gäller för alla $\varepsilon > 0$ måste vi ha

$$u(x,y) \leq \max_{(x,y)\in\partial\Omega} u(x,y)$$

och då x, y i VL är godtyckliga så gäller speciellt

$$\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}} u(x,y) \leq \max_{(x,y)\in\partial\Omega} u(x,y)$$

■

15. Formulera och härled Poisson representationsformel för harmoniska funktioner i en cirkel.

Vi utgår från Laplace ekvation på en cirkel:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0, && x^2+y^2 < a^2 && \text{(PDE)} \\ u(x,y) &= h(x,y), && x^2+y^2 = a^2 && \text{(RV)} \end{aligned}$$

Vi skriver om detta i polära koordinater:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0, && r < a && \text{(PDE)} \\ &u(a,\theta) = h(\theta), && \forall\theta && \text{(RV)} \end{aligned}$$

Vi ansätter en variabelseparation: $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, där Θ. Vi kräver ytterligare att u måste vara begränsad. Insättning i (PDE) ger:

$$\begin{aligned} &R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0 \\ \iff &-r^2\frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} \quad = \lambda \end{aligned}$$

Om $\lambda > 0$:

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda \implies \Theta(\theta) = Ae^{\sqrt{\lambda}\theta} + Be^{\sqrt{\lambda}\theta}$$

som inte är periodisk för några A, B, förutom den triviala lösningen $A = B = 0$.

Om $\lambda = 0$:

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \implies \Theta(\theta) = A\theta + B$$

som är 2π-periodisk om $A = 0$. Vi har alltså en lösning $\Theta(\theta) = B$.

Om $\lambda < 0$:

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda \implies \Theta(\theta) = A\cos(\sqrt{-\lambda}\theta) + B\sin(\sqrt{-\lambda}\theta)$$

som är 2π-periodisk om $\sqrt{-\lambda} = n$, $n \in \mathbb{N}$ ($n = 0$ ger åter den konstanta lösningen liksom $\lambda = 0$). Så, vi har $\lambda = -n^2$ och lösningar $\Theta(\theta) = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)$.

Ekvationen för R blir

$$\begin{aligned} &-r^2\frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = -n^2 \\ \iff &r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0 \end{aligned}$$

Ansätt $R(r) = r^\alpha$:

$$\begin{aligned} &r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - n^2r^\alpha = 0 \\ \iff &(\alpha^2 - n^2)r^\alpha = 0 \implies \alpha = \pm n \end{aligned}$$

Men, vi vill inte ha negativa α eftersom $R(r) = r^{-n}$ ej är begränsad i $r = 0$, så därför tar vi bara $R(r) = r^n$.

Eftersom (PDE) är homogen och linjär kan vi ta en linjärkombination av alla lösningar vi har hittat för att få:

$$u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)$$

som vi kan skriva om på komplex form:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n e^{in\theta}$$

Nu vill vi bestämma c_n med hjälp av (RV). Vi stoppar in $r = a$:

$$h(\theta) = u(a,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} c_n e^{in\theta}$$

enligt ortogonalitet får vi då

$$c_n = \frac{1}{a^{|n|} 2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) e^{-in\varphi} \, \mathrm{d}\varphi$$

som vi stoppar in i lösningen:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in(\theta-\varphi)} h(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi$$

Vi tittar på serien för sig:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in(\theta-\varphi)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n} e^{in(\theta-\varphi)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n} e^{in(\varphi-\theta)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} e^{i(\theta-\varphi)}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} e^{i(\varphi-\theta)}\right)^n = 1 + \frac{\frac{r}{a} e^{i(\theta-\varphi)}}{1 - \frac{r}{a} e^{i(\theta-\varphi)}} + \frac{\frac{r}{a} e^{i(\varphi-\theta)}}{1 - \frac{r}{a} e^{i(\varphi-\theta)}} \\
&= \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta-\varphi) + r^2}
\end{aligned}$$

Genom att stoppa in detta i lösningen erhåller vi Poissons formel:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta-\phi) + r^2} h(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi$$

16. Formulera och härled medelvärdesegenskapen för harmoniska funktioner.

Låt u vara en harmonisk funktion på en cirkel. Då är värdet av u i origo lika med medelvärdet av u på cirkelns omkrets.

Bevis:
Antag att cirkeln har radie a, och att $u(a,\theta) = h(\theta)$. Då gäller enligt Poissons formel:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - ar\cos(\theta-\varphi) + r^2} h(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi$$

Vi utvärderar detta i $r = 0$:

$$u(0,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{a^2} h(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi$$

vilket ger just medelvärdet på cirkelns omkrets. ■

17. Visa att δ-funktionen är en distribution och att $e^{-x^2/(4t)}/(\sqrt{4\pi t})$ konvergerar svagt (dvs i distributionsmening) mot δ-funktionen när $t \to 0+$.

Vi definierar δ som, för $\phi \in \mathcal{S}$:

$$\delta[\phi] := \phi(0)$$

Den är linjär enligt

$$\delta[c_1\phi_1 + c_2\phi_2] = (c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x))\Big|_{x=0} = c_1\phi_1(0) + c_2\phi_2(0) = c_1\delta[\phi_1] + c_2\delta[\phi_2]$$

och kontinuerlig eftersom för testfunktioner ϕ_m som uppfyller $\phi_m \to \phi$ så gäller

$$\delta[\phi_m] = \phi_m(0) \xrightarrow{m\to\infty} \phi(0) = \delta[\phi]$$

Definiera nu distributioner f_t som

$$f_t[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} \phi(x)\ \mathrm{d}x$$

Vi vill visa att $f_t[\phi] \to \phi(0)\ \forall\phi$ när $t \to 0+$.

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} \phi(x)\ \mathrm{d}x - \phi(0)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} \big(\phi(x) - \phi(0)\big)\ \mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} \big|\phi(x) - \phi(0)\big|\ \mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} C|x|\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Låt $y = \frac{x}{\sqrt{2t}}$:

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-y^2/2} C\left|y\sqrt{2t}\right| (\sqrt{2t}\ \mathrm{d}y) = 2C\sqrt{t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-y^2/2} |y|\ \mathrm{d}y \\
&= O(\sqrt{t}) \to 0 \text{ när } t \to 0+
\end{aligned}$$

$\blacksquare$