Detta är en sammanställning av satser, definitioner och några metoder. Jag har valt att hoppa över en del definitioner och satser för att jag inte anser att de är nödvändiga för praktiska beräkningar, eller för att de är mycket lika teorin i envariabelanalysen. Detta dokument fungerar förhoppningsvis som en kompakt samling av det man behöver kunna inför tentamen.

Introduktion (F1-2)

Def: **Komplement**: Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Då definieras komplementet till Ω som

$$\Omega^c := \left\{x \in \mathbb{R}^n : x \notin \Omega\right\}.$$

Def: **Öppet klot**: Ett öppet klot med centrum i $a \in \mathbb{R}^n$ och radie $r > 0$ definieras som

$$B_r(a) := \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\right\}.$$

Def: **Inre-/Yttre-/Randpunkt**: Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Då definieras en punkt $a \in \mathbb{R}^n$ som...

- ...en inre punkt till Ω om det finns ett öppet klot $B_r(a)$ sådant att $B_r(a) \subset \Omega$.
- ...en yttre punkt till Ω om det finns ett öppet klot $B_r(a)$ sådant att $B_r(a) \subset \Omega^c$.
- ...en randpunkt till Ω om det för varje $B_r(a)$ gäller att $B_r(a) \cap \Omega \neq \emptyset$ och $B_r(a) \cap \Omega^c \neq \emptyset$.

Def: **Randen**: Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Då definieras randen till Ω som

$$\partial\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ är en randpunkt till } \Omega\}.$$

Def: **Öppen/Sluten**: Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Då definieras Ω som...

- ...öppen om $\partial\Omega \cap \Omega = \emptyset$.
- ...sluten om $\partial\Omega \cap \Omega^c = \emptyset$.

Def: **Konvergens (gränsvärde)**: Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \bar{D} = D \cup \partial D$. Då säger vi att $f(x)$ konvergerar mot $A \in \mathbb{R}^p$ då x går mot a om

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta : \left|f(x) - A\right| < \epsilon, \quad \text{för varje } x \in D : 0 < |x - a| < \delta.$$

Def: Vi säger att $f(x) \to B$ då $|x| \to \infty$ om

$$\forall \epsilon > 0, \exists \omega : \left|f(x) - B\right| < \epsilon, \quad \text{för varje } x : |x| > \omega.$$

Def: **Kontinuitet**: Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$. Då säger vi att f är kontinuerlig i $x = a$ om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Def: **Bågvis sammanhängande**: Vi säger att en mängd Ω är bågvis sammanhängande om det för varje par av punkter $a, b \in \Omega$ finns en kontinuerlig funktion $t \mapsto x(t)$ där

$$x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b, \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Derivata (F3-6)

Def: **Partiell derivata**: Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ och a vara en inre punkt till D. Då definierar vi en partiell derivata till f som

$$f'_{x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h}$$

om gränsvärdet existerar och då säger vi att f är partiellt deriverbar med avseende på x_j i punkten a.

Def: **Differentierbarhet**: Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ och a vara en inre punkt till D. Då säger vi att f är differentierbar i a om det finns konstanter $A_1, A_2, \dots, A_n$ och en funktion $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sådana att

$$f(a+h) - f(a) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \cdots + A_n h_n + |h|\,\rho(h), \quad \rho(h) \to 0 \text{ då } h \to 0.$$

Sats: Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ vara differentierbar. Då gäller det att f är partiellt deriverbar med

$$A_j = f'_{x_j}(a).$$

Def: **Klassen C^k**: Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ vara öppen. Då säger vi att $f \in C^k(D)$ om $f : D \to \mathbb{R}$ har partiella derivator upp till och med ordning k som alla är kontinuerliga.

Sats: Låt $f \in C^1(D)$. Då gäller det att f är differentierbar.

Sats: **Kedjeregeln**: Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara differentierbar och $g = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ där $g_i(t)$ är deriverbar. Då gäller

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'_{x_1}(g(t)) \cdot g'_1(t) + \cdots + f'_{x_n}(g(t)) \cdot g'_n(t)$$

Def: **Gradient**: Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara partiellt deriverbar i punkten x. Då definierar vi gradienten av f i punkten x som

$$(\nabla f)(x) = (\operatorname{grad} f)(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Def: **Riktningsderivata**: Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$. Då definierar vi riktningsderivata som

$$f'_v(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Sats: Låt f vara differentierbar och v vara en enhetsvektor. Då gäller

$$f'_v(a) = (\nabla f)(a) \cdot v$$

Sats: Gradienten $(\nabla f)(a)$ pekar i den riktning i vilken f växer snabbast i punkten a. Den maximala tillväxten är $\big|(\nabla f)(a)\big|$.

Def: **Nivåyta**: Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Då definierar vi en nivåyta (eller nivåkurva, i det tvådimensionella fallet) som

$$\big(f(x) = C\big) := \big\{x \in D : f(x) = C\big\}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Det följer att $(\nabla f)(x)$ är ortogonal mot nivåytan.

Sats: Låt $f \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Då gäller

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Vektorvärda funktioner (F8-10)

Def: **Längden av en kurva**:

$$\int_\gamma ds := \int_0^{L_\gamma} ds = L_\gamma$$

där

$$L_\gamma = \int_a^b \big|x'(t)\big|\, dt$$

för någon parametrisering $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ av kurvan γ.

Def: **Funktionalmatris**: Låt $f : D \to \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$. Då definierar vi funktionalmatrisen för f i punkten a som

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a) = f'(a) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}.$$

Sats: **Kedjeregeln (för funktionalmatriser)**: Låt $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ och $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Då gäller

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t).$$

Def: **Funktionaldeterminant**: Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. Då definierar vi funktionaldeterminanten för f i punkten a som

$$\frac{d(f_1, \ldots, f_n)}{d(x_1, \ldots, x_n)}(a) := \det f'(a).$$

Sats: **Kedjeregeln (för funktionaldeterminanter)**: Låt $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Då gäller

$$\frac{d(y \circ x)}{d(t)} = \frac{d(y)}{d(x)} \cdot \frac{d(x)}{d(t)}.$$

Sats: **Inversa funktionssatsen**: Låt $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ vara öppen, $f \in C^1(D)$, $a \in D$. Då gäller att om $\det(f'(a)) \neq 0$, så finns omgivningar U runt a och V runt $f(a)$ sådana att $f : U \to V$ är bijektiv och inversen $f^{-1} : V \to U$ är $C^1(V)$.

Sats: **Implicita funktionssatsen**: (för d=2; analogt i högre dimensioner): Låt $F \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ och $(a, b) \in D$ så att $F(a, b) = K$, $K \in \mathbb{R}$ är en nivåkurva. Då gäller att om $F'_y(a, b) \neq 0$ så finns en omgivning U kring (a, b) där restriktionen av nivåkurvan definierar en C^1-funktion $y = y(x)$. Dessutom gäller

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}.$$

Optimering (F7 & F11-12)

Sats: **Taylors formel**: (i fallet $d = 2$): Låt $F \in C^3(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in D$. Då gäller

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f'_1(a, b)h + f'_2(a, b)k$$
$$+\frac{1}{2}\left(f''_{11}(a, b)h^2 + 2f''_{12}(a, b)hk + f''_{22}(a, b)k^2\right) + \left|(h, k)\right|^3 B(h, k)$$

där B är en begränsad funktion i en omgivning av origo.

Def: **Lokal extrempunkt**: Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Då säger vi att f har ett lokalt maximum i $a \in D$, om $f(x) \leq f(a)$ för alla x i någon boll runt a.

Lokalt minimum definieras analogt. Lokala maximum och minimum kallas tillsammans för lokala extrempunkter.

Sats: Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ha ett lokalt extremvärde i en inre punkt a och låt f vara partiellt deriverbar i a. Då gäller

$$(\nabla f)(a) = 0.$$

Def: **Stationär punkt**: Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Då definierar vi en stationär punkt $a \in D$ som en punkt som uppfyller

$$(\nabla f)(a) = 0.$$

Metod: **Lokala min/max**: Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ och $a \in D$ vara en stationär punkt. För att avgöra karaktären av denna punkt så studerar vi den kvadrastiska formen

$$Q(h,k) = f''_{11}(a)h^2 + 2f''_{12}(a)hk + f''_{22}k^2.$$

Det gäller att om...

- ...Q är positivt definit så är $f(a)$ ett lokalt minimum.
- ...Q är negativt definit så är $f(a)$ ett lokalt maximum.
- ...Q är indefinit så är $f(a)$ en sadelpunkt.
- ...Q är positivt/negativt semidefinit så behövs mer studier.

Metod: **Optimering på kompakt mängd**: Låt $f : K \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och $K \subset \mathbb{R}^n$ vara kompakt. För att finna det största och minsta värden f antar på K behöver följande punkter jämföras:

- Stationära punkter
- Ej deriverbara punkter
- Randen

Metod: **Optimering på obegränsad mängd**: Låt $f : \Omega \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vara sluten men obegränsad. Då kan Ω delas upp i en kompakt mängd K och $\Omega \setminus K$. På den kompakta mängden K kan f undersökas med metoden ovan, och på $\Omega \setminus K$ får f undersökas med någon annan metod, till exempel med gränsvärden.

Metod: **Optimering med bivilkor (Lagrangemultiplikator)**: Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(D)$. För att finna extrempunkter på f som uppfyller bivilkoret $g(x) = 0$ där $g \in C^1(D)$ ansätts

$$(\nabla f)(x) = \lambda(\nabla g)(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

För flera bivilkor ansätts istället

$$(\nabla f)(x) = \lambda_1(\nabla g_1)(x) + \lambda_2(\nabla g_2)(x) + \dots, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathbb{R}.$$

Dubbelintegraler (F13-17)

I början av detta kapitel utelämnar jag anmärknigsvärt många definitioner och satser, för att inte fokusera på den tunga teorin bakom dubbelintegraler.

Sats: Låt f vara en integrerbar funktion över en rektangel $\Delta = [a,b] \times [c,d]$. Då gäller, om högerleden är definierade:

$$\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Sats: Låt $f : D \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$ där $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerliga. Då gäller att f är integrerbar och

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Sats: **Variabelbyte**: Låt $D, E \subset \mathbb{R}^2$ och $g : E \to D$ vara en bijektion. Då gäller, för $x = g(t)$:

$$\iint_D f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \iint_E f(g_1(t_1,t_2), g_2(t_1,t_2)) \left| \frac{d(x_1,x_2)}{d(t_1,t_2)} \right| dt_1dt_2$$

givet att integralerna är definierade och funktionaldeterminanten inte är 0.

Def: **Generaliserad integral, ickenegativ**: Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara öppen och $f : \Omega \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig med $f(x,y) \geq 0 \; \forall (x,y) \in \Omega$. Då säger vi att $I = \iint_\Omega f(x,y)dxdy$ är konvergent om mängden

$$M = \left\{ \iint_D f(x,y)dxdy : D \subset \Omega, D \text{ är kompakt} \right\}$$

är uppåt begränsad, och i så fall definierar vi värdet $I := \sup M$. Annars säger vi att dubbelintegralen är divergent.

Sats: I $\mathbb{R}^n$ gäller, för $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} &\iint_{|x|>1} \frac{1}{|x|^\alpha} dx && \text{är konvergent omm } \alpha > n. \\ &\iint_{0<|x|<1} \frac{1}{|x|^\alpha} dx && \text{är konvergent omm } \alpha < n. \end{aligned}$$

Sats: **Jämförelsesats för dubbelintegraler**: Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sådana att $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ för varje $(x,y) \in \Omega$ där $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Då gäller:

$$\begin{aligned} \iint_\Omega g(x,y)dxdy \text{ konvergent} &\implies \iint_\Omega f(x,y)dxdy \text{ konvergent,} \\ \iint_\Omega f(x,y)dxdy \text{ divergent} &\implies \iint_\Omega g(x,y)dxdy \text{ divergent.} \end{aligned}$$

Def: **Generaliserad integral, växlande tecken**: Låt $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Inför

$$f^+(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & f(x,y) \geq 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \qquad f^-(x,y) := \begin{cases} 0, & f(x,y) \geq 0 \\ -f(x,y), & \text{annars} \end{cases}.$$

Då definierar vi dubbelintegralen med en integrand med växlande tecken som

$$\iint_\Omega f(x,y) = \iint_\Omega f^+(x,y)dxdy - \iint_\Omega f^-(x,y)dxdy$$

om båda dubbelintegralerna i högerledet är konvergenta. Annars säger vi att vänsterledet är divergent.

Def: **Area av buktig yta**: Låt Y vara en yta i $\mathbb{R}^3$ med någon parametrisering $r = r(s,t)$, $(s,t) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Då definierar vi arean $\mu(Y)$ av Y som

$$\begin{aligned} \mu(Y) &:= \iint_Y dS \quad \text{där } dS := \left| r'_s \times r'_t \right| dsdt \\ &= \iint_D \left| r'_s \times r'_t \right| dsdt. \end{aligned}$$

Enligt sats är denna oberoende av parametrisering.

Kurvintegraler (F18-20)

Def: **Kurvintegral**: Låt $F : D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ och $\gamma \subset D$ vara en kurva med någon parametrisering $r : [\alpha, \beta] \to \gamma$. Då definierar vi

$$\int_\gamma F \cdot dr := \int_\alpha^\beta F(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

och enligt sats är denna oberoende av parametrisering. Dessutom, med $F = (P,Q)$; $dr = (dx, dy)$; $T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$; $ds = |r'(t)| \, dt$, så har vi flera former av alternativ notation:

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_\gamma P dx + Q dy = \int_\alpha^\beta \big(F(r(t)) \cdot T(t)\big) ds.$$

Def: **Positiv orientering (kurvor)**: Låt $\gamma = \partial D$ vara randen till en mängd D. Vi säger att γ är positivt orienterad om mängden D är på vänster sida när γ genomlöps.

Sats: **Greens formel**: Låt $F = (P, Q)$, $F : D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ vara kompakt. Låt $\gamma = \partial D$ vara en styckvis C^1-kurva med positiv orientering. Då gäller

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Def: **Potential**: Låt $F = (P, Q)$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$, Ω öppen. Vi säger att det finns en potential $U : \Omega \to \mathbb{R}$ till F om

$$F = \nabla U.$$

I så fall säger vi att F är ett potentialfält eller ett konservativt fält.

Sats: Låt $F = (P, Q)$ vara ett vektorfält med potentialen U i det öppna området Ω. Låt $\gamma \subset \Omega$ vara en orienterad kurva. Då gäller

$$\int_\gamma F \cdot dr = U(b) - U(a)$$

där $a, b \in \mathbb{R}^2$ är start- och slutpunkt på γ. Speciellt följer det att kurvintegralen är oberoende av vägen.

Sats: Låt $F = (P, Q)$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$, F kontinuerlig, Ω öppen och bågvis sammanhängande. Då gäller det att om kurvintegralen $\int_\gamma F \cdot dr$ är oberoende av vägen så har F en potential i Ω.

Sats: Låt fältet $F = (P, Q)$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ha en potential $U \in C^2(\Omega)$. Då gäller

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Sats: Låt $F = (P, Q) \in C^1(\Omega)$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$, Ω öppen och enkelt sammanhängande. Då gäller att om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ så har F en potential i Ω.

Med enkelt sammanhängande menas att Ω är bågvis sammanhängande, och att varje sluten kurva i Ω avgränsar ett område helt inneslutet i Ω.

Flödesintegraler (F21-23)

Def: **Positiv orientering (ytor)**: Låt $Y \subset \mathbb{R}^3$ vara en yta med parametrisering $r : D \to Y$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Vi säger att den positiva sidan är den sidan dit $N(s, t) = r'_s \times r'_t$ pekar. Notera att detta beror på val av parametrisering.

Def: **Flödesintegral**: Låt $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ och $Y \subset \Omega$ vara en yta med parametrisering $r : D \to Y$, $D \subset \mathbb{R}^2$ med enhetsnormal $N = \frac{r'_s \times r'_t}{|r'_s \times r'_t|}$. Då definieras flödesintegralen som

$$\iint_Y (u \cdot N) dS := \iint_D u(r(s, t)) \cdot (r'_s \times r'_t) dsdt, \qquad dS = |r'_s \times r'_t|\, dsdt.$$

Def: **Divergens**: Låt $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $u \in C^1$. Då definieras divergensen av u som

$$\operatorname{div} u := \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Sats: **Divergenssatsen**: Låt $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $u \in C^1$. Låt $K \subset \mathbb{R}^3$ vara ett kompakt område med en rand ∂K som består av en eller flera C^1-ytor orienterade med utåtriktad normal. Då gäller

$$\iint_{\partial K} u \cdot N dS = \iiint_K \operatorname{div}(u) dx_1 dx_2 dx_3$$

Def: **Källfri**: Låt u vara ett vektorfält. Då säger vi att u är källfritt om $\operatorname{div} u = 0$.

Def: **Rotation**: Låt $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $u \in C^1$. Då definierar vi rotationen av u som vektorfältet

$$\operatorname{rot} u := \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).$$

Uttrycket kan kommas ihåg som '$\nabla \times u$'.

Def: **Virvelfri**: Låt u vara ett vektorfält. Då säger vi att u är virvelfritt om $\operatorname{rot} u = 0$.

Sats: **Stokes sats**: Låt $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vara öppen, $u \in C^1$. Låt Y vara ett orienterat ytstycke med en orienterad rand ∂Y, med en enhetsnormal N och tangentvektor T. Då gäller

$$\int_{\partial Y} u \cdot dr = \iint_Y (\operatorname{rot} u) \cdot N dS$$

där $N \times T$ pekar in mot Y i varje punkt på randen.