Implementación Digital y Sintonización de Controladores en Tiempo Discreto

Andrés Mora [1]

[1]Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile

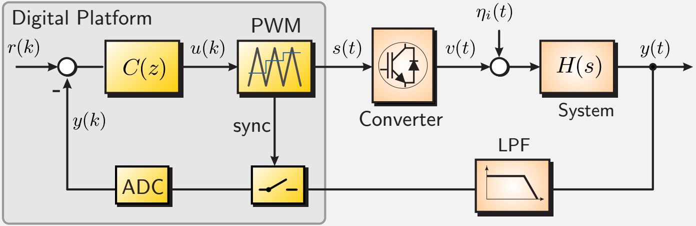
Primavera, 2019

Contents

Contents

Implementación Digital [1]

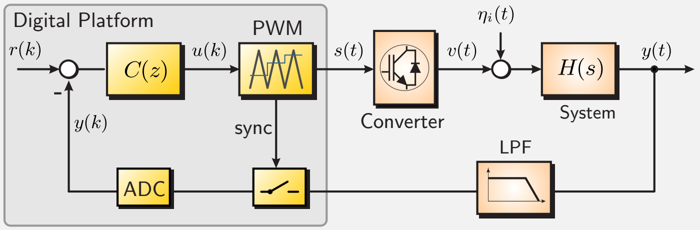
Implementación Digital de Control Lineal y PWM



- La planta esta constituida por el convertidor, el sistema y el filtro pasabajos para evitar *aliasing*.
- El modulador no solo se utiliza para sintetizar la tensión deseada, sino que también para sincronizar todo el proceso digital (mediciones, ejecución de algoritmos y calculo de actuaciones).
- Define frecuencia de muestreo f_s (relacionada con frecuencia de *carrier* f_{cr})
- Se requiere conocer modelo discreto de la planta vista por el procesador $H(z)$.

Implementación Digital [1]

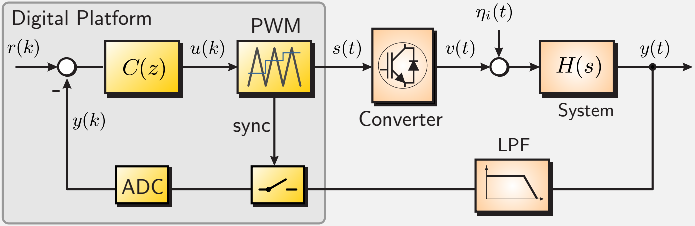
Implementación Digital de Control Lineal y PWM



- La planta esta constituida por el convertidor, el sistema y el filtro pasabajos para evitar *aliasing*.
- El modulador no solo se utiliza para sintetizar la tensión deseada, sino que también para sincronizar todo el proceso digital (mediciones, ejecución de algoritmos y calculo de actuaciones).
- Define frecuencia de muestreo f_s (relacionada con frecuencia de *carrier* f_{cr})
- Se requiere conocer modelo discreto de la planta vista por el procesador $H(z)$.

Implementación Digital [1]

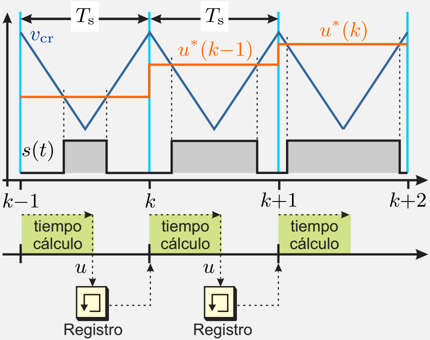
Implementación Digital de Control Lineal y PWM



- La planta esta constituida por el convertidor, el sistema y el filtro pasabajos para evitar *aliasing*.
- El modulador no solo se utiliza para sintetizar la tensión deseada, sino que también para sincronizar todo el proceso digital (mediciones, ejecución de algoritmos y calculo de actuaciones).
- Define frecuencia de muestreo f_s (relacionada con frecuencia de *carrier* f_{cr})
- Se requiere conocer modelo discreto de la planta vista por el procesador $H(z)$.

Implementación Digital [1]

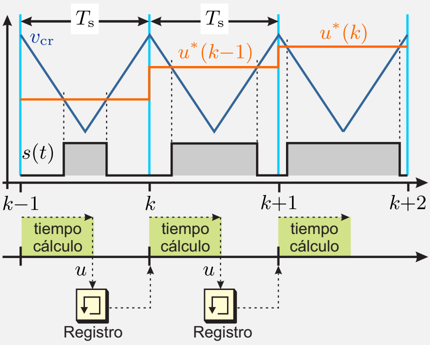
Delay sistema digital



- Muestreo y cómputo no puede realizarse en un tiempo igual a cero.
- La actuación se almacena en un registro a la espera de la siguiente interrupción.
- Sistema digital inherentemente incorpora un retardo asociado al periodo de muestreo T_s.
- La actuación que se aplica durante $k+1 < t \leq k+2$ se determina con las mediciones realizadas en el instante k.
- Esto se modela como un retardo de transporte e^{-sh} que en el plano z es directamente z^{-1}.
- Se define $z \triangleq e^{sh}$.

Implementación Digital [1]

Delay sistema digital



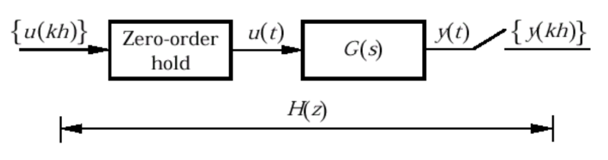
- Muestreo y cómputo no puede realizarse en un tiempo igual a cero.
- La actuación se almacena en un registro a la espera de la siguiente interrupción.
- Sistema digital inherentemente incorpora un retardo asociado al periodo de muestreo T_s.

- La actuación que se aplica durante $k+1 < t \leq k+2$ se determina con las mediciones realizadas en el instante k.
- Esto se modela como un retardo de transporte e^{-sh} que en el plano z es directamente z^{-1}.
- Se define $z \triangleq \mathrm{e}^{sh}$.

Contents

The Pulse-Transfer Function [2]

Muestreo de sistema continuo $G(s)$ [3]

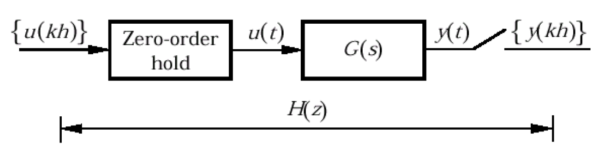


- Es posible diseñar controlador en tiempo continuo y luego discretizar el controlador para su implementación en tiempo discreto (dominio z).
- **Para diseñar el controlador directamente en** z, se requiere conocer modelo de la planta vista por el procesador $H(z)$.
- $H(z)$ es conocida como *Pulse-Transfer Function* (PTF) y caracteriza las respuesta discreta del sistema.
- Una forma de hacerlo es calculando TZ de $\mathcal{L}^{-1}\{H_{zoh}(s)G(s)\}$ según

$$H(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-hs}}{s}G(s)\right\} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

The Pulse-Transfer Function [2]

Muestreo de sistema continuo $G(s)$ [3]

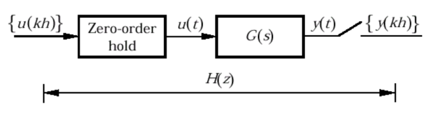


- Es posible diseñar controlador en tiempo continuo y luego discretizar el controlador para su implementación en tiempo discreto (dominio z).
- **Para diseñar el controlador directamente en** z, se requiere conocer modelo de la planta vista por el procesador $H(z)$.
- $H(z)$ es conocida como *Pulse-Transfer Function* (PTF) y caracteriza las respuesta discreta del sistema.
- Una forma de hacerlo es calculando TZ de $\mathcal{L}^{-1}\{H_{zoh}(s)G(s)\}$ según

$$H(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1 - e^{-hs}}{s} G(s)\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

The Pulse-Transfer Function [2]

Muestreo de sistema continuo $G(s)$



- Forma analítica

$$H(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-\mathrm{e}^{-hs}}{s}G(s)\right\} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \qquad (1)$$

- Consideremos una planta de primer orden $G(s) = 1/(\tau s + 1)$. Entonces, según Tabla 2.3 en [3]

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}\frac{1-\mathrm{e}^{-h/\tau}}{z-\mathrm{e}^{-h/\tau}}$$

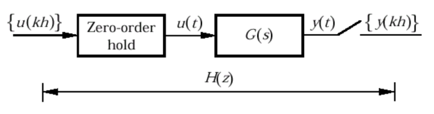
.

- De acuerdo con (1), la TF en el dominio z vista por el sistema digital es

$$\frac{1}{\tau s+1} \longrightarrow H(z) = \frac{1-\mathrm{e}^{-h/\tau}}{z-\mathrm{e}^{-h/\tau}} \qquad (2)$$

The Pulse-Transfer Function [2]

Muestreo de sistema continuo $G(s)$



- Forma analítica

$$H(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-\mathrm{e}^{-hs}}{s}G(s)\right\} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \tag{1}$$

- Consideremos una planta de primer orden $G(s) = 1/(\tau s + 1)$. Entonces, según Tabla 2.3 en [3]

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}\frac{1-\mathrm{e}^{-h/\tau}}{z-\mathrm{e}^{-h/\tau}}$$

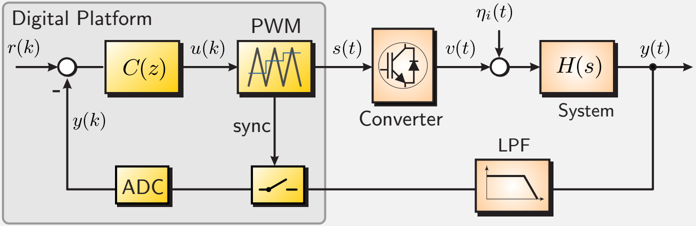
.

- De acuerdo con (1), la TF en el dominio z vista por el sistema digital es

$$\frac{1}{\tau s+1} \longrightarrow H(z) = \frac{1-\mathrm{e}^{-h/\tau}}{z-\mathrm{e}^{-h/\tau}} \tag{2}$$

The Pulse-Transfer Function [2]

Implementación Digital de Control Lineal y PWM



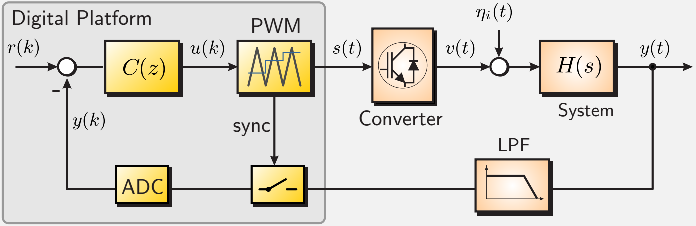
- En caso de utilizar filtro *antialiasing* ($f_c \leq f_s/2$), este también tiene que incluirse para obtener $H(z)$. En este caso $G(s) = H(s)F(s)$
- Afortunadamente, en MATLAB existe una herramienta (`c2d`) que permite calcular directamente $H(z)$ a partir de $G(s)$.
- La aproximación ZOH de un PI tiene la forma

$$C(s) = k_c \frac{(\tau_c s + 1)}{\tau_c s} \longrightarrow C(z) = k_c \frac{z - n_c}{z - 1} \quad (3)$$

donde $n_c = 1 - h/\tau_c$.

The Pulse-Transfer Function [2]

Implementación Digital de Control Lineal y PWM



- En caso de utilizar filtro *antialiasing* ($f_c \leq f_s/2$), este también tiene que incluirse para obtener $H(z)$. En este caso $G(s) = H(s)F(s)$
- Afortunadamente, en MATLAB existe una herramienta (`c2d`) que permite calcular directamente $H(z)$ a partir de $G(s)$.
- La aproximación ZOH de un PI tiene la forma

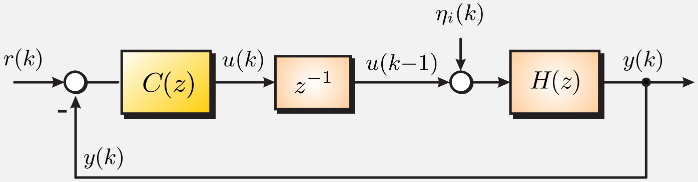
$$C(s) = k_c \frac{(\tau_c s + 1)}{\tau_c s} \longrightarrow C(z) = k_c \frac{z - n_c}{z - 1} \tag{3}$$

donde $n_c = 1 - h/\tau_c$.

Contents

Lazo de Corriente

Lazo Cerrado: PI + delay + Planta 1er orden



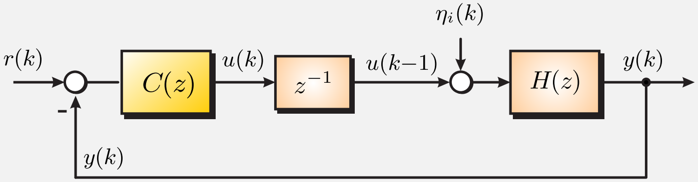
- Según (2), un sistema de 1er orden muestreado con ZOH tiene una FT $H(z) = \frac{n_o}{z-d_o}$, donde $d_o = \mathrm{e}^{-h/\tau_p}$ y $n_o = k_p(1-d_o)$.
- Si la frecuencia de muestreo f_s es mucho más rápida que los modos naturales **más rápidos del sistema** ($f_\mathrm{s} \gg 2\pi f_\mathrm{n}$).

$$H_{LC}(z) = \frac{k_c n_o (z - n_c)}{z^2 + (k_c n_o - d_o - 1)z + (d_o - k_c n_o n_c)} \quad (4)$$

- La ganancia de lazo cerrado para $\omega = 0$ es $H_{LC}(z{=}1) = 1$. Entonces no hay error en estado estacionario ($\Longrightarrow r(k) = y(k)$).
- ¿Cómo ajustar k_c y n_c dados ζ, ω_n y T_s?

Lazo de Corriente

Lazo Cerrado: PI + delay + Planta 1er orden



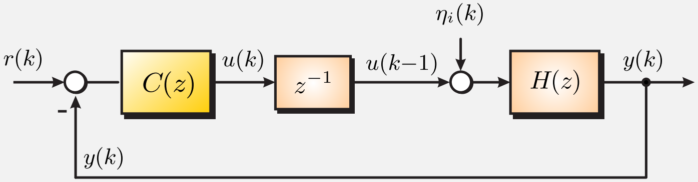
- Según (2), un sistema de 1er orden muestreado con ZOH tiene una FT $H(z) = \frac{n_o}{z-d_o}$, donde $d_o = \mathrm{e}^{-h/\tau_p}$ y $n_o = k_p(1-d_o)$.
- Si la frecuencia de muestreo f_s es mucho más rápida que los modos naturales **más rápidos del sistema** ($f_\mathrm{s} \gg 2\pi f_\mathrm{n}$).

$$H_{LC}(z) = \frac{k_c n_o (z - n_c)}{z^2 + (k_c n_o - d_o - 1)z + (d_o - k_c n_o n_c)} \tag{4}$$

- La ganancia de lazo cerrado para $\omega = 0$ es $H_{LC}(z{=}1) = 1$. Entonces no hay error en estado estacionario ($\Longrightarrow r(k) = y(k)$).
- ¿Cómo ajustar k_c y n_c dados ζ, ω_n y T_s?

Lazo de Corriente

Lazo Cerrado: PI + delay + Planta 1er orden



- Según (2), un sistema de 1er orden muestreado con ZOH tiene una FT $H(z) = \frac{n_o}{z-d_o}$, donde $d_o = \mathrm{e}^{-h/\tau_p}$ y $n_o = k_p(1-d_o)$.
- Si la frecuencia de muestreo f_s es mucho más rápida que los modos naturales **más rápidos del sistema** ($f_\mathrm{s} \gg 2\pi f_\mathrm{n}$).

$$H_{LC}(z) = \frac{k_c n_o (z - n_c)}{z^2 + (k_c n_o - d_o - 1)z + (d_o - k_c n_o n_c)} \qquad (4)$$

- La ganancia de lazo cerrado para $\omega = 0$ es $H_{LC}(z{=}1) = 1$. Entonces no hay error en estado estacionario ($\Longrightarrow r(k) = y(k)$).
- ¿Cómo ajustar k_c y n_c dados ζ, ω_n y T_s?

Lazo de Corriente

FT Lazo cerrado para PI + planta primer orden

$$H_{LC}(z) = \frac{k_o(z-n_c)}{z^2+(k_o-d_o-1)z+(d_o-k_on_c)}$$

- Consideremos el sistema en tiempo continuo

$$\frac{\omega_{\mathrm{n}}^2}{s^2+2\zeta\omega_{\mathrm{n}}s+\omega_{\mathrm{n}}^2} \tag{5}$$

Los polos del sistema discreto correspondiente estan dados por

$$z^2+a_1z+a_2=0 \tag{6}$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= -\,2\mathrm{e}^{-\zeta\omega_{\mathrm{n}}T_{\mathrm{s}}}\cos\left(\omega_{\mathrm{n}}T_{\mathrm{s}}\sqrt{1-\zeta^2}\right) \\ a_2 &= \mathrm{e}^{-2\zeta\omega_{\mathrm{n}}T_{\mathrm{s}}} \end{aligned}$$

- Entonces los parámetros deseados serán:

$$k_c = \frac{a_1+d_o+1}{n_o} \quad ; \quad n_c = \frac{d_o-a_2}{a_1+d_o+1} \tag{7}$$

Lazo de Corriente

FT Lazo cerrado para PI + planta primer orden

$$H_{LC}(z) = \frac{k_o(z - n_c)}{z^2 + (k_o - d_o - 1)z + (d_o - k_o n_c)}$$

- Consideremos el sistema en tiempo continuo

$$\frac{\omega_{\mathrm{n}}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_{\mathrm{n}} s + \omega_{\mathrm{n}}^2} \tag{5}$$

Los polos del sistema discreto correspondiente estan dados por

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \tag{6}$$

donde

$$a_1 = -\,2\mathrm{e}^{-\zeta\omega_{\mathrm{n}}T_{\mathrm{s}}}\cos\left(\omega_{\mathrm{n}}T_{\mathrm{s}}\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

$$a_2 = \mathrm{e}^{-2\zeta\omega_{\mathrm{n}}T_{\mathrm{s}}}$$

- Entonces los parámetros deseados serán:

$$k_c = \frac{a_1 + d_o + 1}{n_o} \quad ; \quad n_c = \frac{d_o - a_2}{a_1 + d_o + 1} \tag{7}$$

Contents

Lazo de Velocidad: $H(z)$ de un integrador

- Lazo de velocidad en FOC la planta es $G(s) = k_\omega / s$, donde

$$k_\omega = \frac{p}{J} k_T L_m i^*_{mr}$$

- Entonces, según Tabla 2.3 en [3]

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{k_\omega}{s^2}\right\} = k_\omega \frac{zh}{(z-1)^2}$$

.

- De acuerdo con (1), la TF en el dominio z vista por el sistema digital de un integrador es:

$$\frac{k_\omega}{s} \longrightarrow H(z) = \frac{h}{z-1} \tag{8}$$

- Notar que esta PTF tiene la misma forma que la PTF de un sistema de primer orden (2).

Lazo de Velocidad: $H(z)$ de un integrador

- Lazo de velocidad en FOC la planta es $G(s) = k_\omega/s$, donde

$$k_\omega = \frac{p}{J} k_T L_m i_{mr}^*$$

- Entonces, según Tabla 2.3 en [3]

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{k_\omega}{s^2}\right\} = k_\omega \frac{zh}{(z-1)^2}$$

.

- De acuerdo con (1), la TF en el dominio z vista por el sistema digital de un integrador es:

$$\frac{k_\omega}{s} \longrightarrow H(z) = \frac{h}{z-1} \tag{8}$$

- Notar que esta PTF tiene la misma forma que la PTF de un sistema de primer orden (2).

Lazo de Velocidad

FT Lazo cerrado para PI + Integrador

$$H_{LC}(z) = \frac{k_o(z - n_c)}{z^2 + (k_o - d_o - 1)z + (d_o - k_o n_c)} \quad ; \quad d_o = 1$$

- Entonces utilizando (7) con $d_o = 1$ y $n_o = hk_\omega$, los parámetros deseados para el PI de velocidad serán:

$$k_c = \frac{a_1 + 2}{hk_\omega} \quad ; \quad n_c = \frac{1 - a_2}{a_1 + 2} \tag{9}$$

- Si consideramos que la salida del PI es la referencia de torque T_e^*, entonces $n_0 = h/J$ y los parámetros deseados serán:

$$k_c = J\frac{a_1 + 2}{h} \quad ; \quad n_c = \frac{1 - a_2}{a_1 + 2} \tag{10}$$

Lazo de Velocidad

FT Lazo cerrado para PI + Integrador

$$H_{LC}(z) = \frac{k_o(z-n_c)}{z^2+(k_o-d_o-1)z+(d_o-k_o n_c)} \quad ; \quad d_o = 1$$

- Entonces utilizando (7) con $d_o = 1$ y $n_o = hk_\omega$, los parámetros deseados para el PI de velocidad serán:

$$k_c = \frac{a_1+2}{hk_\omega} \quad ; \quad n_c = \frac{1-a_2}{a_1+2} \tag{9}$$

- Si consideramos que la salida del PI es la referencia de torque T_e^*, entonces $n_0 = h/J$ y los parámetros deseados serán:

$$k_c = J\frac{a_1+2}{h} \quad ; \quad n_c = \frac{1-a_2}{a_1+2} \tag{10}$$

Lazo de Velocidad: Comentarios finales

- Considerando que se desprecia el polo en el origen, la respuesta real del sistema será levemente diferente a la esperada por diseño (siempre que $f_{\mathrm{s}} \gg 2\pi f_{\mathrm{n}}$).
- El método de diseño se enfoca en asignar los polos de lazo cerrado del sistema controlado y no considera los ceros de lazo cerrado.
- Sin embargo, permite una sencilla parametrización de los controladores en términos de la frecuencia de muestreo (altamente relacionada con las pérdidas del convertidor), coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural no amortiguada.
- Para un diseño más acabado, se sugiere utilizar la herramienta *rltool* de MATLAB.

References

- R. P. Aguilera, P. Acuna, G. Konstantinou, S. Vazquez, and J. I. Leon, "Chapter 2 - basic control principles in power electronics: Analog and digital control design," in *Control of Power Electronic Converters and Systems* (F. Blaabjerg, ed.), pp. 31 – 68, Academic Press, 2018.
- K. Ogata, *Discrete-Time Control Systems (2nd Edition)*. Pearson, 1995.
- K. J. Astrom and B. Wittenmark, *Basic Control Principles in Power Electronics*. Prentice Hall, 2002.

Implementación Digital y Sintonización de Controladores en Tiempo Discreto

Andrés Mora [1]

[1]Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile

Primavera, 2019