Apéndice 7.2

Estabilidad en las aproximaciones

$$H(z) = G(s')$$

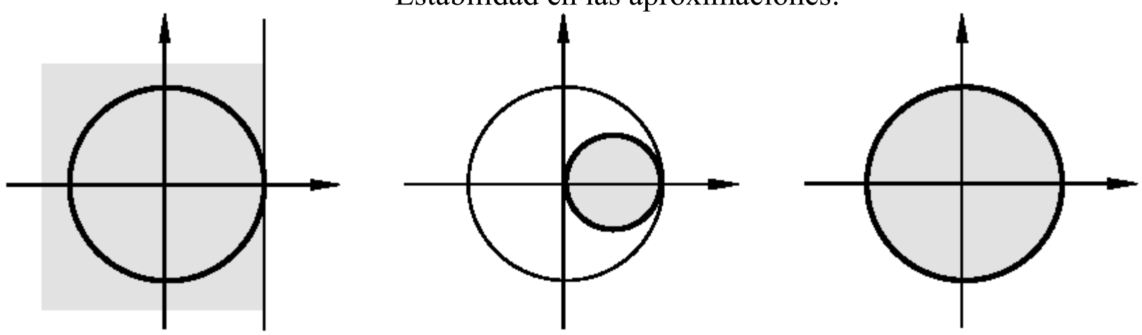
Derivadas aproximadas

$s' = \dfrac{z-1}{h}$ (Diferencia hacia delante u Euler)

$s' = \dfrac{z-1}{hz}$ (Diferencia hacia atrás)

$s' = \dfrac{2}{h}\dfrac{z-1}{z+1}$ (Transformación bilineal o Tustin)

Estabilidad en las aproximaciones:



Euler	Hacia atrás	Tustin

<u>Diferencia hacia delante</u> Sean $s' = \sigma + jw$ y $z = x + jy$, $\sigma, w, x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que al aproximar una ecuación diferencial por diferencias hacia delante, $s' = \dfrac{z-1}{h}$, el eje jw del plano s se mapea a la recta círculo $1 + jy$ del plano z. Explique el resultado.

<u>Solución:</u>

$$s' = jw = \frac{z-1}{h} \Leftrightarrow z = 1 + jwh$$

Como el mapeo es conforme, el semiplano izquierdo del plano s se mapea al lado izquierda de la recta $1 + jy$.
Entonces, al aproximar una ecuación diferencial por diferencias hacia atrás:
1) Un polo continuo inestable se mapea a un polo discreto inestable, pero
2) Un polo continuo estable puede mapearse a un polo discreto inestable o a uno estable, dependiendo de h.
Es decir, esta aproximación preserva la inestabilidad, pero no preserva la estabilidad.

<u>Diferencia hacia atrás</u> Sean $s' = \sigma + jw$ y $z = x + jy$, $\sigma, w, x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que al aproximar una ecuación diferencial por diferencias hacia atrás, $s' = \dfrac{z-1}{hz}$, el eje jw del plano s se mapea al círculo $(x-0.5)^2 + y^2 = 0.5^2$ del plano z. Explique el resultado.

<u>Solución:</u>

$$s' = jw = \frac{z-1}{hz} \Leftrightarrow z = \frac{1}{1-jwh} \Leftrightarrow z = x + jy = \frac{1+jwh}{1+w^2h^2} = \frac{1}{1+w^2h^2} + j\frac{wh}{1+w^2h^2}$$

Entonces:

$$(x-0.5)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{1+w^2h^2} - 0.5\right)^2 + \left(\frac{wh}{1+w^2h^2}\right)^2$$
$$= \frac{\left(1-0.5(1+w^2h^2)\right)^2 + w^2h^2}{(1+w^2h^2)^2} = \frac{1-(1+w^2h^2)+0.25(1+w^2h^2)^2 + w^2h^2}{(1+w^2h^2)^2} = 0.25$$

Como el mapeo es conforme, el semiplano izquierdo del plano s se mapea al interior del círculo $(x-0.5)^2 + y^2 = 0.5^2$.
Entonces, al aproximar una ecuación diferencial por diferencias hacia atrás:
1) Un polo continuo estable se mapea a un polo discreto estable, pero
2) Un polo continuo inestable puede mapearse a un polo discreto inestable o a uno estable, dependiendo de h.
Es decir, esta aproximación preserva la estabilidad, pero no preserva la inestabilidad.

<u>Tustin</u> Sean $s' = \sigma + jw$ y $z = x + jy$, $\sigma, w, x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que al aproximar una ecuación diferencial por Tustin, $s' = \dfrac{2}{h}\dfrac{z-1}{z+1}$, el eje jw del plano s se mapea al círculo unitario del plano z. Explique el resultado.

<u>Solución:</u>

$$s' = jw = \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z = \frac{-2-jwh}{-2+jwh} \Leftrightarrow z = x + jy = \frac{4-w^2h^2}{4+w^2h^2} + j\frac{4wh}{4+w^2h^2}$$

Entonces:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{4-w^2h^2}{4+w^2h^2}\right)^2 + \left(\frac{4wh}{4+w^2h^2}\right)^2$$
$$= \frac{\left(16-8w^2h^2+w^4h^4\right)+16w^2h^2}{(4+w^2h^2)^2} = \frac{16+8w^2h^2+w^4h^4}{(4+w^2h^2)^2} = 1$$

Como el mapeo es conforme, el semiplano izquierdo del plano s se mapea al interior del círculo $x^2 + y^2 = 1^2$.
Entonces, al aproximar una ecuación diferencial por diferencias hacia atrás:
1) Un polo continuo estable se mapea a un polo discreto estable, pero
2) Un polo continuo inestable se mapea a un polo discreto inestable, independiente de h.
Es decir, esta aproximación preserva tanto la estabilidad como la inestabilidad.

Nótese que en todas las aproximaciones, las respuestas en frecuencia del sistema continuo y del sistema discreto son diferentes.