

Capítulo 2

Sistemas Muestreados

2.1 Introducción

Se presentan los sistemas de tiempo discreto (muestreados) enfatizando algunas características estructurales que son importantes para el control por computador.

Estudiamos cómo representar un sistema de tiempo continuo después de muestrearse. Lo hacemos tanto en términos de variables de estado como de función de transferencia. El resultado es un sistema muestreado conocido como su equivalente con retención de orden 0, ZOH. Además, estudiamos cómo recuperar el sistema continuo que al muestrearse, da por resultado un ZOH dado.

En general se estudia el sistema de la Fig. 2.1, sin considerar lo que ocurre entre muestras:

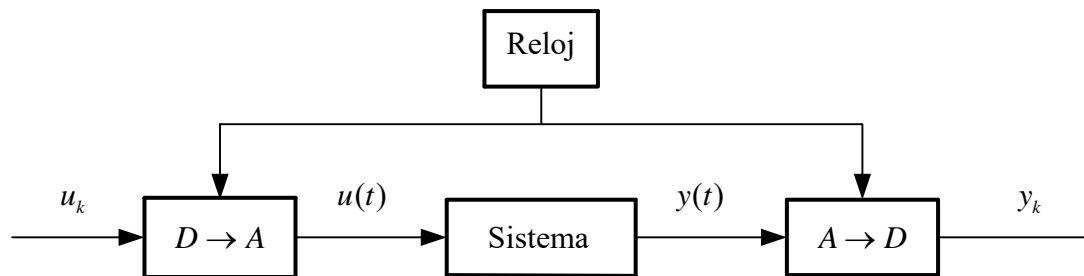


Figura 2.1: Muestreo de un sistema de tiempo continuo.

2.2 Variables de Estado

Resolución de la Ecuación de Estado

Sea el sistema continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Al aplicar Transformación de Laplace

$$sX(s) - x(0_-) = AX(s) + BU(s)$$

Luego

$$[sI - A]X(s) = x(0_-) + BU(s)$$

$$X(s) = [sI - A]^{-1}x(0_-) + [sI - A]^{-1}BU(s)$$

Con T. Laplace inversa

$$x(t) = \Phi(t - 0_-)x(0_-) + \int_{0_-}^t \Phi(t - v)Bu(v)dv$$

OBS Φ depende del intervalo $t - 0_-$.

Ahora bien, al definir el instante inicial como t_0 , la solución queda

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - v)Bu(v)dv \quad (*)$$

En el control digital, la actuación normalmente es continua a trazos

$$u(t) = u(kh), \quad \text{para } kh \leq t < kh + h$$

Para $t_0 = kh$ y $t = kh + h$, con h : periodo de muestreo, (*) queda:

$$x_{k+1} = \Phi(h)x_k + \left[\int_{kh}^{kh+h} \Phi(kh + h - v)dv \right] Bu_k$$

Aquí, $\Phi(h) = L^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} \Big|_{t=h}$. Sin embargo,

$$\int_{kh}^{kh+h} \Phi(kh + h - v)dvB = - \int_h^0 \Phi(\rho)d\rho B = \int_0^h \Phi(w)dwB = \Gamma(h)$$

Con ello, el sistema muestreado (que es exacto para $t = kh$) queda finalmente

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi(h)x_k + \Gamma(h)u_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{aligned}$$

OBS En este texto preferimos la notación con subíndice (x_k) en lugar de paréntesis ($x(k)$), para denotar una señal de tiempo discreto. Esto no se aplica a funciones comunes de tiempo discreto.

Propiedades de Φ y Γ

$$\Phi = e^{Ah}, \quad \Gamma = \int_0^h e^{As} dsB$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t)}{dt} &= A\Phi(t) = \Phi(t)A \\ \frac{d\Gamma(t)}{dt} &= \Phi(t)B \end{aligned}$$

Luego, Φ y Γ satisfacen

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Phi(t) & \Gamma(t) \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(t) & \Gamma(t) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí, I es $(m|m)$ con m : número de entradas. Luego, $\Phi(h)$ y $\Gamma(h)$ cumplen

$$\begin{pmatrix} \Phi(h) & \Gamma(h) \\ 0 & I \end{pmatrix} = \exp \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} h \right\}$$

Ejemplo 2.1: Muestreo de un integrador doble

$$y = \int \int u dt dt \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = u$$

Primero se representa en variables de estado:

Sean: $\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \frac{dy}{dt} \end{cases}$, entonces: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$.

Luego,

$$\Phi = \mathbf{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\} \Big|_{t=h} = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}^{-1} \right\} \Big|_{t=h} = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix} \right\} \Big|_{t=h} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \int_0^h \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ds \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \int_0^h \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} h^2 / 2 \\ h \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{pmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^2 / 2 \\ h \end{pmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{pmatrix} + (0) u_k$$

OBS En Matlab, el comando “expm” calcula Φ . Más ayuda con “help expm”.

OBS En Matlab, el comando “c2d” calcula Φ y Γ . Más ayuda con “help c2d”.

OBS En Maple, el comando “exponential” calcula Φ y Γ algebraicamente.

Muestreo de Sistemas con Retardo de Tiempo τ ($0 < \tau \leq h$)

Para este retardo a la entrada del sistema tenemos la situación que muestra la **Fig. 2.2**:

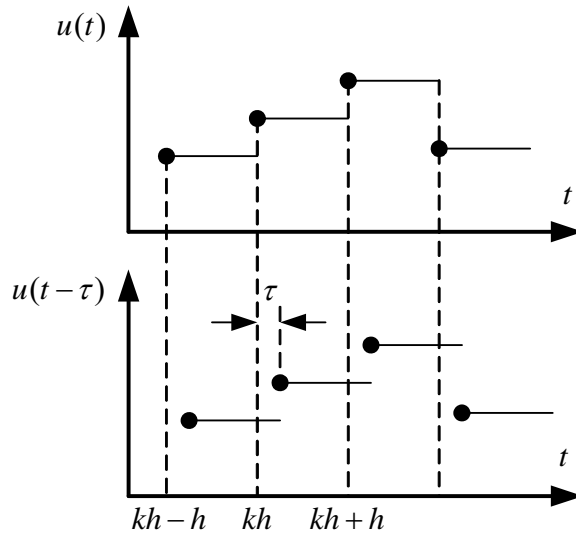


Figura 2.2: Muestreo de un sistema con retardo de tiempo.

Por lo tanto

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t - \tau)$$

$$x_{k+1} = e^{Ah} x_k + \int_{kh}^{kh+h} e^{A(kh+h-s')} Bu(s' - \tau) ds'$$

Al separar la integral en estímulos de valor constante

$$\begin{aligned} &= \int_{kh}^{kh+\tau} e^{A(kh+h-s')} B ds' u_{k-1} + \int_{kh+\tau}^{kh+h} e^{A(kh+h-s')} B ds' u_k \\ &= \Gamma_1 u_{k-1} + \Gamma_0 u_k \end{aligned}$$

Luego

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma_0 u_k + \Gamma_1 u_{k-1}, \quad \Phi = e^{Ah}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi & \Gamma_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k$$

El estado adicional aumenta el orden en 1. Además, $s = kh + h - s'$ da:

$$\Gamma_0 = \int_{kh+\tau}^{kh+h} e^{A(kh+h-s')} B ds' = - \int_{h-\tau}^0 e^{As} ds B = \int_0^{h-\tau} e^{As} ds B$$

También, $s = kh + \tau - s'$ da:

$$\Gamma_1 = \int_{kh}^{kh+\tau} e^{A(kh+h-s')} B ds' = - \int_{\tau}^0 e^{A(h-\tau+s)} ds B = e^{A(h-\tau)} \int_0^{\tau} e^{As} ds B$$

Ejemplo 2.2: Integrador doble con retardo de tiempo τ ($0 < \tau \leq h$)

Modelo continuo:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t - \tau)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Modelo discreto:

$$\Phi = e^{Ah} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0 = \int_0^{h-\tau} e^{As} ds B = \begin{pmatrix} \frac{(h-\tau)^2}{2} \\ h-\tau \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_1 = e^{A(h-\tau)} \int_0^{\tau} e^{As} ds B = \begin{pmatrix} 1 & h-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\tau^2}{2} \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \left(h - \frac{\tau}{2} \right) \\ \tau \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{pmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h & \tau(h-\tau/2) \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ u_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (h-\tau)^2/2 \\ h-\tau \\ 1 \end{pmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ u_{k-1} \end{pmatrix}$$

OBS La matriz de transición ahora incluye un valor propio (polo) en $z = 0$, debido al retardo.

Muestreo de Sistemas con Retardo de Tiempo ($\tau > h$)

Si $\tau = (d-1)h + \tau'$, $0 < \tau' \leq h$, con d entero, entonces tenemos

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma_0 u_{k-(d-1)} + \Gamma_1 u_{k-d}$$

Γ_0 y Γ_1 son como antes, reemplazando τ por τ' . La descripción de estado queda:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_{k-(d-1)} \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi & \Gamma_1 & \Gamma_0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-d} \\ \vdots \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k$$

Para $d > 0$, aparecen d estados adicionales.

El polinomio característico es $\lambda^d A(\lambda)$, donde $A(\lambda)$ es el polinomio característico de Φ .

Ejemplo 2.3: Integrador doble con retardo de tiempo ($2h < \tau \leq 3h$)

Modelo continuo:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t - \tau)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Modelo discreto:

$$\tau = (d-1)h + \tau', \text{ implica } d=3 \text{ y } 0 < \tau' \leq h.$$

Además

$$\Phi = e^{Ah} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma_0 = \begin{pmatrix} \frac{(h-\tau')^2}{2} \\ h-\tau' \end{pmatrix}, \Gamma_1 = \begin{pmatrix} \tau' \left(h - \frac{\tau'}{2} \right) \\ \tau' \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi & \Gamma_1 & \Gamma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-3} \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-3} \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \end{pmatrix}$$

OBS Debido al retardo, la matriz de transición ahora incluye 3 valores propios (polos) en $z = 0$.

2.3 Funciones de Transferencia

Cálculo de $H(z)$ dado $G(s)$

La representación en variables de estado no es única, pero conduce siempre a la misma función de transferencia $H(z)$. Otra forma de obtener $H(z)$ es calcular directamente el ZOH a partir de $G(s)$, la función de transferencia del sistema continuo, como ilustra la **Fig. 2.3**.

Como la entrada al sistema continuo dentro de un lazo digital está normalmente compuesta de escalones, se usa el procedimiento siguiente:

1. Calcular $Y(s)$, la respuesta a escalón de $G(s)$,
2. Muestrear la respuesta a escalón obtenida $Y(kh)$,
3. Determinar $Y(z)$, la T. Zeta correspondiente,
4. Obtener $H(z)$, dividiendo por la T. Zeta de un escalón.

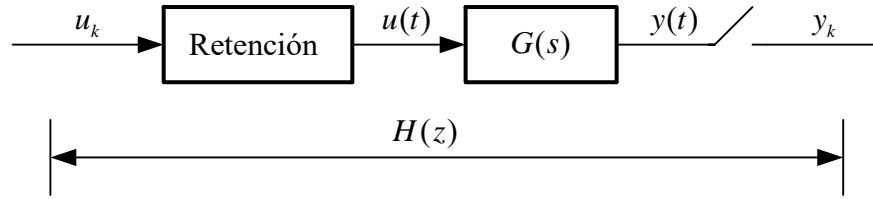


Figura 2.3: Equivalente con retención de orden 0, ZOH.

Formalmente se tiene:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} \Rightarrow Y(z) = \mathbf{Z}\left\{\left\{\mathbf{L}^{-1}\{Y(s)\}\right\}_{t \Rightarrow kh}\right\}$$

$$\Rightarrow H(z) = \{1 - z^{-1}\}Y(z)$$

Con esta receta se puede construir una tabla para diversos $G(s)$. Vea por ejemplo:

Neuman, C.P. and C.S. Baradello (1979). "Digital transfer functions for microcomputer control". IEEE-T on SMC-9, pp. 856-860.

Cálculo de $H(z)$ dado $G(s)e^{-(Th-\tau)s}$

Ahora se considera la obtención del ZOH, $H(z)$, para un sistema con retardo de tiempo $G(s)e^{-(Th-\tau)s}$. Note que el retardo es $=Th-\tau$, $0 \leq \tau < h, T \in \mathbb{Z}$. (Antes, el retardo era $= (d-1)h + \tau' = dh - (h-\tau')$).

El procedimiento anterior se adapta para quedar como sigue:

1. Calcular la respuesta a escalón de $G(s)$ sin retardo: $y(t) = \mathbf{L}^{-1}\{G(s)/s\}$,
2. Adelantar la función anterior para $t + \tau$: $y(t + \tau)$,
3. Muestrear y determine la T. Zeta correspondiente: $Y(z, \tau)$,
4. Dividir por la T. Zeta de un escalón: $Y(z, \tau)(z-1)/z$,
5. Agregar T polos en 0.

Formalmente se tiene:

$$\Rightarrow H(z) = Y(z, \tau) \left\{ \frac{z-1}{z^{T+1}} \right\}$$

Así se construye una tabla para sistemas con un retardo $=Th-\tau$.

OBS Para un retardo igual a 0, hacer: $T = \tau = 0$ (antes se necesitaba: $d = 0; \tau' = h$).

OBS Para recuperar $G(s)$ dado $H(z)$, basta con seguir el procedimiento en sentido inverso.

Procedimiento con Maple

```
with(intrinsics):
zhold := proc(G,h,T,tau)
local yc,yz;
yc := invlaplace(G/s,s,t);
yc := subs(t = k*h + tau, yc);
yz := simplify(ztrans(yc,k,z));
return(simplify(((z-1)/z^(T+1)*yz)));
end;
```

Ejemplo 2.4: Obtención algebraica de ZOH con Maple

Sea un sistema de primer orden:

```
> read(`c:/path/zhold.txt`):
```

```
> G:=1/(s+1);
```

$$G := \frac{1}{s+1}$$

```
> zhold(G,h,T,tau);
```

$$\frac{\left(e^{\left(\frac{1}{2}\tau+h \right)} z - e^{\left(\frac{1}{2}\tau \right)} - z e^{\left(-\frac{1}{2}\tau+h \right)} + e^{\left(-\frac{1}{2}\tau+h \right)} \right) e^{\left(-\frac{1}{2}\tau-h \right)} z^{(-T)}}{-z + e^{(-h)}}$$

Entonces, para un retardo de 2.6 [s]: ($T = 3$, $\tau = 0.4$):

```
> zhold(G,1,3,0.4);
```

$$\frac{0.3297z + 0.3024}{(z - 0.3679)z^3}$$

Con el procedimiento indicado se construye la **Tabla 2.1** siguiente:

Tabla 2.1: Modelos ZOH para Sistemas con Retardo de Tiempo Fraccional

(retardo = $Th - \tau$, $0 \leq \tau < h, T \in \mathbb{R}$)

1. $\boxed{G(s) = \frac{1}{s} e^{-(Th-\tau)s}}$. Entonces: $H(z) = \frac{h + \tau(z-1)}{z^T(z-1)}$.

2. $\boxed{G(s) = \frac{1}{s^2} e^{-(Th-\tau)s}}$. Entonces: $H(z) = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^T(z-1)^2}$, donde:

$$b_1 = \frac{\tau^2}{2}, \quad b_2 = \frac{h^2 + 2\tau(h-\tau)}{2}, \quad b_3 = \frac{(h-\tau)^2}{2}$$

3. $G(s) = e^{-(Th-\tau)s}$. Entonces: $H(z) = z^{-T}$

4. $G(s) = \frac{a}{s+a} e^{-(Th-\tau)s}$. Entonces: $H(z) = \frac{z(1-e^{-a\tau}) + (e^{-a\tau} - e^{-ah})}{z^T(z - e^{-ah})}$

5. $G(s) = \frac{a}{s(s+a)} e^{-(Th-\tau)s}$. Entonces: $H(z) = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^T(z-1)(z-e^{-ah})}$, donde:
 $b_1 = \frac{\tau a + e^{-a\tau} - 1}{a}$, $b_2 = \frac{e^{-ah} + ah + 1 - 2e^{a\tau} - \tau a(1 + e^{-ah})}{a}$, $b_3 = \frac{e^{-a\tau} - ah - e^{-ah}(1 - \tau a)}{a}$

6. $G(s) = \frac{a^2 e^{-(Th-\tau)s}}{(s+a)^2}$. Entonces: $H(z) = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^T(z - e^{-ah})^2}$, donde:
 $b_1 = 1 - (1 + a\tau)e^{-a\tau}$, $b_2 = -2e^{-ah} + (1 + a\tau)e^{-a\tau} + (1 - ah + a\tau)e^{-a(h+\tau)}$
 $b_3 = e^{-2ah} + (ah - a\tau - 1)e^{-a(h+\tau)}$

7. $G(s) = \frac{se^{-(Th-\tau)s}}{(s+a)^2}$. Entonces: $H(z) = \frac{(z-1)(b_1 z + b_2)}{z^T(z - e^{-ah})^2}$, donde:
 $b_1 = \tau e^{-a\tau}$; $b_2 = (h - \tau)e^{-a(h+\tau)}$

8. $G(s) = \frac{ab}{(s+a)(s+b)} e^{-(Th-\tau)s}$, $a \neq b$. Entonces: $H(z) = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^T(z - e^{-ah})(z - e^{-bh})}$, donde:
 $b_1 = \frac{b(1 - e^{-a\tau}) - a(1 - e^{-b\tau})}{b - a}$, $b_2 = \frac{be^{-a\tau}(1 + e^{-bh}) - ae^{-b\tau}(1 + e^{-ah})}{b - a} - e^{-ah} - e^{-bh}$
 $b_3 = \frac{ae^{-ah-b\tau} - be^{-a\tau-bh}}{b - a} + e^{-(a+b)h}$

9. $G(s) = \frac{(s+c)}{(s+a)(s+b)} e^{-(Th-\tau)s}$, $a \neq b$. Entonces: $H(z) = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^T(z - e^{-ah})(z - e^{-bh})}$, donde:
 $b_1 = \frac{(c/a - 1)(1 - e^{-a\tau}) - (c/b - 1)(1 - e^{-b\tau})}{b - a}$,
 $b_2 = \frac{(c/a - 1)[e^{-a\tau} - e^{-ah} - (1 - e^{-a\tau})e^{-bh}] - (c/b - 1)[e^{-b\tau} - e^{-bh} - (1 - e^{-b\tau})e^{-ah}]}{b - a}$
 $b_3 = \frac{(c/b - 1)(e^{-b\tau} - e^{-bh})e^{-ah} - (c/a - 1)(e^{-a\tau} - e^{-ah})e^{-bh}}{b - a}$

10. $G(s) = \frac{w_0^2 e^{-(Th-\tau)s}}{s^2 + 2\xi w_0 s + w_0^2}$, $\xi < 1$. Entonces: $H(z) = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^T(z^2 + a_1 z + a_2)}$, donde:
 $a_1 = -2e^{-\xi w_0 h} \cos wh$; $a_2 = e^{-2\xi w_0 h}$; $b_1 = 1 - e^{-\xi w_0 \tau} [\cos w\tau + \frac{\xi w_0}{w} \sin w\tau]$

$$b_2 = e^{-\xi w_0 \tau} \left[\cos w\tau + \frac{\xi w_0}{w} \sin w\tau \right] + e^{-\xi w_0 (h+\tau)} \left[\cos w(h-\tau) - \frac{\xi w_0}{w} \sin w(h-\tau) \right] - 2e^{-\xi w_0 h} \cos wh$$

$$b_3 = e^{-2\xi w_0 h} - e^{-\xi w_0 (h+\tau)} \left[\cos w(h-\tau) - \frac{\xi w_0}{w} \sin w(h-\tau) \right]; \quad w = w_0 \sqrt{1-\xi^2}$$

11. $G(s) = \frac{se^{-(Th-\tau)s}}{s^2 + 2\xi w_0 s + w_0^2}, \quad \xi < 1$. Entonces: $H(z) = \frac{(z-1)(b_1 z + b_2)}{z^T(z^2 + a_1 z + a_2)}$, donde:

$$a_1 = -2e^{-\xi w_0 h} \cos wh; \quad a_2 = e^{-2\xi w_0 h}$$

$$b_1 = \frac{1}{w_0} \sin w\tau; \quad b_2 = \frac{1}{w_0} e^{-\xi w_0 h} \sin(wh - w\tau); \quad w = w_0 \sqrt{1-\xi^2}$$

12. $G(s) = \frac{a^2 e^{-(Th-\tau)s}}{s^2 + a^2}$. Entonces: $H(z) = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^T(z^2 - 2z \cos ah + 1)}$, donde:

$$b_1 = 1 - \cos a\tau; \quad b_2 = \cos a\tau - 2 \cos ah + \cos(ah - a\tau); \quad b_3 = 1 - \cos(ah - a\tau)$$

13. $G(s) = \frac{se^{-(Th-\tau)s}}{s^2 + a^2}$. Entonces: $H(z) = \frac{(z-1)(b_1 z + b_2)}{z^T(z^2 - 2z \cos ah + 1)}$, donde:

$$b_1 = \frac{1}{a} \sin a\tau; \quad b_2 = \frac{1}{a} \sin(ah - a\tau)$$

14. $G(s) = \frac{ae^{-(Th-\tau)s}}{s^2(s+a)}$. Entonces: $H(z) = \frac{b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4}{z^T(z-1)^2(z-e^{-ah})}$, donde:

$$b_1 = \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau}{a} + \frac{1-\beta}{a^2}, \quad \beta = e^{-a\tau}; \quad b_4 = -\frac{(h-\tau)^2 \gamma}{2} - \frac{(h-\tau)\gamma}{a} + \frac{\beta - \gamma}{a^2}$$

$$b_2 = \frac{h^2 + \tau[2h - \tau(2+\gamma)]}{2} - \frac{h + \tau\gamma}{a} + \frac{3\beta - \gamma - 2}{a^2}, \quad \gamma = e^{-ah}$$

$$b_3 = \frac{h^2(1-\gamma) + \tau[-2h(1+\gamma) + \tau(1+2\gamma)]}{2} + \frac{h(1+\gamma) - \tau(1+2\gamma)}{a} - \frac{\beta + 1 - 2\gamma}{a^2}$$

Polos y ceros muestreados

Los polos de un sistema generan sus modos naturales. Por ejemplo, con un polo en $z = a$, la respuesta a impulso del sistema contiene un modo natural de la forma a^k .

Los ceros de un sistema ponderan los modos naturales de la respuesta del sistema. Por ejemplo, con un cero en $z = a$, el sistema bloquea un modo forzante de la forma a^k . Ver [Apéndice 2.1](#).

OBS Si $\text{g.r.}\{G(s)\} = d > 0$ (nuevo d), entonces usualmente $\text{g.r.}\{H(z)\} = 1$. Para comprenderlo, recuerde que las respuestas de $G(s)$ y $H(z)$ son idénticas en los instantes de muestreo. Si las condiciones iniciales son 0, entonces en $H(z)$ la primera muestra es 0, pero la segunda no.

Como consecuencia, $\lim_{n \rightarrow \infty} |H(z)| = 1$. Pueden ocurrir excepciones si el sistema es de fase no mínima o porque posee un retardo de tiempo. En esos casos la respuesta a impulso del sistema discreto puede valer 0 para más muestras iniciales y en consecuencia $\lim_{n \rightarrow \infty} |H(z)| > 1$.

Mapeo de polos $s \Rightarrow z$

Sean λ_i autovalores de A y w_i los correspondientes autovectores, entonces

$$(\lambda_i I - A)w_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i w_i = Aw_i \Leftrightarrow f(\lambda_i)w_i = f(A)w_i$$

donde $f(A)$ es un polinomio en A . Entonces, $f(\lambda_i)$ es un autovalor de $f(A)$ y w_i el correspondiente autovector. Luego, si $f(A)$ es

$$\begin{aligned} f(A) &= I + Ah + A^2 h^2 / 2! + \dots = \Phi \\ f(\lambda_i) &= 1 + \lambda_i h + \lambda_i^2 h^2 / 2! + \dots = \exp(\lambda_i h) \end{aligned}$$

Es decir, si λ_i es un autovalor de A , $\exp(\lambda_i h)$ es el correspondiente autovalor de Φ . Entonces, cada polo continuo s_i se mapea a $z_i = \exp(s_i h)$.

La relación no lineal entre los polos continuos y los polos discretos dificulta especificar en el plano zeta a los polos deseados. Un caso importante es el de un sistema de segundo orden, con

$$G(s) = \frac{w_0^2}{s^2 + 2\zeta w_0 s + w_0^2}$$

Los polos del ZOH son las raíces de $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$ ($a_1 = -2e^{-\zeta w_0 h} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} w_0 h)$, $a_2 = e^{-2\zeta w_0 h}$). Estas relaciones permiten especificar polos en el plano s y traducir los resultados al plano zeta.

Mapeo de ceros $s \Rightarrow z$

Entre instantes de muestreo, el estímulo de $H(z)$ es constante, no así el estímulo de $G(s)$. Luego, en general, si $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = d > 0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 1$ y aparecen $d - 1$ ceros en $H(z)$. Esto dificulta el mapeo de los ceros al pasar de s a z . Sin embargo, para un h pequeño $z_i \approx e^{s_i h}$. Ver [Apéndice 2.2](#). Luego, si $h \rightarrow 0$, $H(z) \rightarrow G(s)$ (naturalmente se tiene que $H(e^{j\omega h}) \rightarrow G(j\omega)$).

— Ejemplo 2.5: Las Respuestas en frecuencia $G(w)$ y $H(e^{j\omega h})$ —

Sea
$$G(s) = \frac{5000(s+10)(s+20)}{(s+1)(s+50)(s+100)^2}$$

La Fig. 2.4 muestra las respuesta en frecuencia de $G(w)$ y $H(e^{jwh})$ para algunos valores de h . Las líneas verticales representan las frecuencias de Nyquist asociadas, $w_N = \pi / h$:

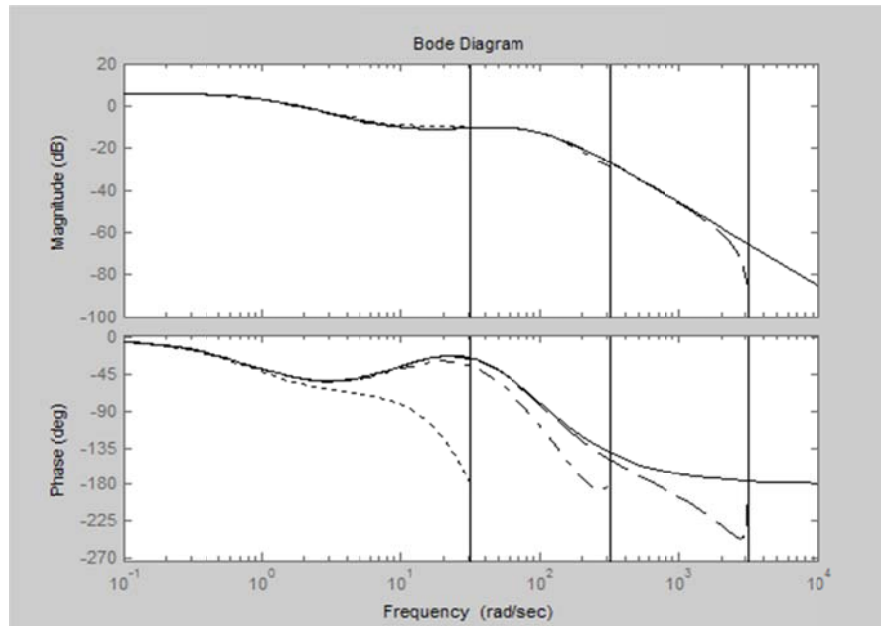


Figura 2.4: Respuestas en frecuencia continua y discreta para $h \rightarrow 0$.

OBS Se aprecia que la discrepancia en alta frecuencia tiende a desaparecer cuando $h \rightarrow 0$.

En alta frecuencia $G(s) \rightarrow K / s^d$, con $d = g.r.\{G(s)\}$. Luego, si $h \rightarrow 0$, los $d - 1$ ceros adicionales de $H(z)$ tienden a los ceros del ZOH de K / s^d , los que se ubican en las raíces de los polinomios Z_d mostrados en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2: Polinomios de ceros muestreados para $h \rightarrow 0$

d	Z_d
1	1
2	$z + 1$
3	$z^2 + 4z + 1$
4	$z^3 + 11z^2 + 11z + 1$
5	$z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1$

Ejemplo 2.6: Ceros de $H(z)$ cuando $h \rightarrow 0$

Suponga que $G(s)$ tiene 5 polos y 2 ceros. Entonces, para s grande

$$G(s) \rightarrow \frac{K}{s^3}$$

y su ZOH es

$$H(z) = \frac{h^3(z^2 + 4z + 1)}{6(z-1)^3}$$

Luego, para $h \rightarrow 0$ los $d-1=2$ ceros de muestreo tienden a las raíces del polinomio $z^2 + 4z + 1$.

OBS Al calcular las raíces de los polinomios de la **Tabla 2.2** para $g.r.\{G(s)\} > 2$, si h es suficientemente chico, entonces $H(z)$ resulta ser un sistema inversamente inestable (S.I.I.), porque:

$$z^2 + 4z + 1 = (z + 3.7321)(z + 0.2679)$$

$$z^3 + 11z^2 + 11z + 1 = (z + 9.8990)(z + 1)(z + 0.1010)$$

$$z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1 = (z + 23.2039)(z + 2.3225)(z + 0.4306)(z + 0.4031)$$

Sistemas con inversa inestable

Si $g.r.\{G(s)\} > 0 \Rightarrow g.r.\{H(z)\} > 0$. Luego, para una ganancia suficientemente alta, el lazo cerrado de un sistema muestreado es siempre inestable, porque una rama de su Lugar Geométrico de Raíces (LGR) siempre tenderá a $-\infty$, generando un polo inestable para el lazo cerrado. Como para $g.r.\{G(s)\} > 2$ y $h \rightarrow 0$, varios ceros se hacen inestables. Los ceros inestables son más frecuentes en los sistemas muestreados que en tiempo continuo y además su efecto es más severo.

OBS El resultado del Ejemplo 2.6 es general: Si $g.r.\{G(s)\} > 2$, $H(z)$ es S.I.I. para $h \rightarrow 0$. Ver S.R. Weller, et al. (2001). "Sampling Zeros and the Euler-Frobenius Polynomials", IEEE-TAC, Vol. 46, No. 2, pp. 340-343.

OBS El texto de K.J. Astrom and B. Wittenmark (Computer Controlled Systems, 3rd. Edition, 1997) dice que si $G(s)$ es S. I. I., $H(z)$ no siempre es S.I.I.. La afirmación parece teóricamente válida, porque en principio es posible lograr para un $H(z)$ estable, una ganancia a frecuencia 0 negativa mediante un cero estable en el eje real negativo del plano zeta. Sin embargo, el ejemplo 2.18 del texto A&W sólo funciona si se muestrea mucho más lento (cada 1.25 [s]) que lo indicado por el criterio de la sección 2.11 de este capítulo (que recomienda de 0.033 a 0.083 [s]). Al muestrear tan lento desaparece en $H(z)$ la parte inicial inversa de la respuesta a escalón de $G(s)$. En consecuencia, falta construir un ejemplo que esté a estar bien muestreado.

2.4 Selección de h

Para evitar el doblaje de las frecuencias mayores a la de Nyquist, es necesario aplicar un filtro antidoblaje y muestrear bien. A continuación se propone un criterio empírico para elegir h .

Definición TIEMPO DE LEVANTAMIENTO T_r : La Fig. 2.5 muestra la respuesta a escalón unitario de un sistema trabajando sobre su punto de operación. T_r es el intervalo entre los interceptos con los niveles del 0% y del 100% de la recta tangente a la pendiente máxima.

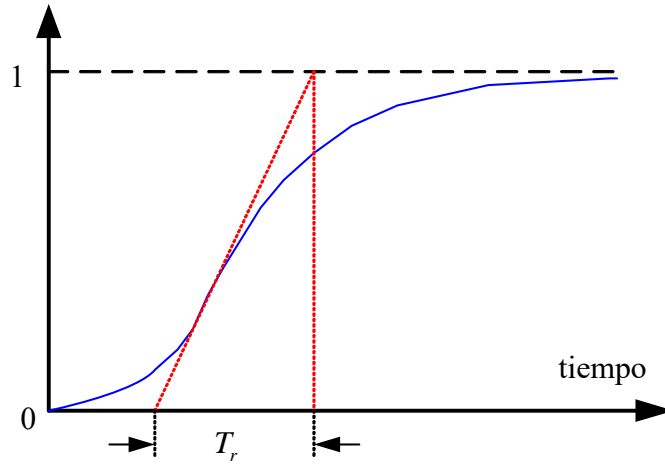


Figura 2.5: Estimación del tiempo de levantamiento.

Selección de h : El periodo de muestreo h debe satisfacer $T_r / 10 \leq h \leq T_r / 4$.

OBS Para un sistema de primer orden, T_r coincide con la constante de tiempo. Para un sistema de segundo orden sin cero, $T_r = w_0^{-1} e^{\varphi / \tan \varphi}$, con $\xi = \cos \varphi$. Ver **Apéndice 2.3**. En un caso práctico, conviene estimar T_r con el algoritmo descrito en el **Apéndice 2.4**.

Ejemplo 2.7: Selección del periodo de muestreo

Sea la respuesta a escalón de un proceso igual a $y(t) = \sin t$.

(a) Por el teorema de Nyquist se deben tomar mínimo 2 muestras por periodo (w_{sN}), para recuperar una señal con filtraje pasabajos. ¿A qué periodo de muestreo corresponde?

Esto significa: $f_{sN} = \frac{w_{sN}}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow h_{Nyquist} = \frac{1}{f_{sN}} = \pi \approx 3.14[s]$

(b) Si se muestrea la señal según el criterio del tiempo de levantamiento T_r , ¿A cuántas muestras por periodo corresponde?

Para $y(t) = \sin t$ la máxima derivada está en $t = 0$, donde $y(t) \approx t$. Luego, $T_r = 2$ (desde 0% (-1) hasta 100% (+1)). El criterio da: $h = 0.2[s] \sim 0.5[s]$.

Es decir, $w_s = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{0.5} \approx 12.6 \sim \frac{2\pi}{0.2} \approx 31.3 [\text{muestras/periodo}]$.

OBS El Ejemplo 2.7 ilustra que la frecuencia de muestreo recomendada en control es mucho más alta que la teóricamente necesaria para reconstruir una señal muestreada. La regla empírica recomendada para el control por computador se basa en extensa experiencia, pero no mucha teoría.

2.5 Recuperación del Sistema de Tiempo Continuo

Sea el sistema muestreado

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

¿Cómo recuperar el sistema de tiempo continuo, es decir, recuperar A y B ? Si $\Phi(t)$ no tiene autovalores reales negativos, A y B pueden obtenerse de

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \ln \left\{ \begin{pmatrix} \Phi(h) & \Gamma(h) \\ 0 & I \end{pmatrix} \right\}$$

La ecuación anterior plantea algunas preguntas: ¿Es posible que $\Phi(h)$ tenga autovalores reales negativos? ¿Qué significa? ¿Existen las A y B correspondientes? ¿Pueden recuperarse?

De las relaciones básicas se tiene que polos en s y z se relacionan según $z = e^{sh}$. Por ejemplo, un par de polos complejos conjugados en $s = a \pm jb$, $a, b \in \mathbb{R}$, da lugar a un par de polos en $z = e^{sh} = e^{(a \pm jb)h} = e^{ah} e^{\pm jbh}$. Estos polos están sobre el eje real negativo si $bh = n\pi$, $n = 1, 3, 5, \dots$

Luego, $h = \pi / b$ se genera un polo doble en $z = -e^{ah}$. Por lo tanto, un par de polos complejos en s situados a la frecuencia de Nyquist ($w_N = \pi / h$) se mapea a un polo doble en z sobre el eje real negativo. Esto se ilustra en la **Fig. 2.6**:

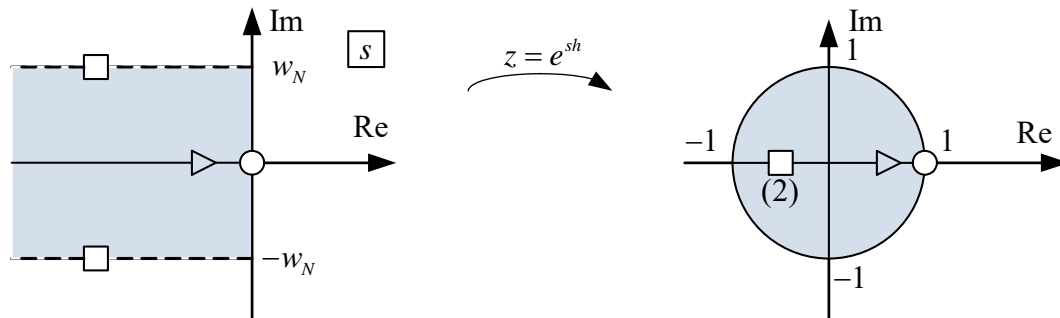


Figura 2.6: Mapeo de un polo de Nyquist.

Pero hay un problema. El polo doble en z genera los modos $(-e^{\sigma h})^k$ y $k(-e^{\sigma h})^k$. Los modos de tiempo continuo (de $G(s)$ en rojo) y muestreados (de $H(z)$ en azul) se muestra en la **Fig. 2.7**.

Como las respuestas continua y discreta coinciden en los instantes de muestreo, el modo $k(-e^{\sigma h})^k$ no puede existir y se fuerza una cancelación polo-cero en $H(z)$, reduciendo su orden.

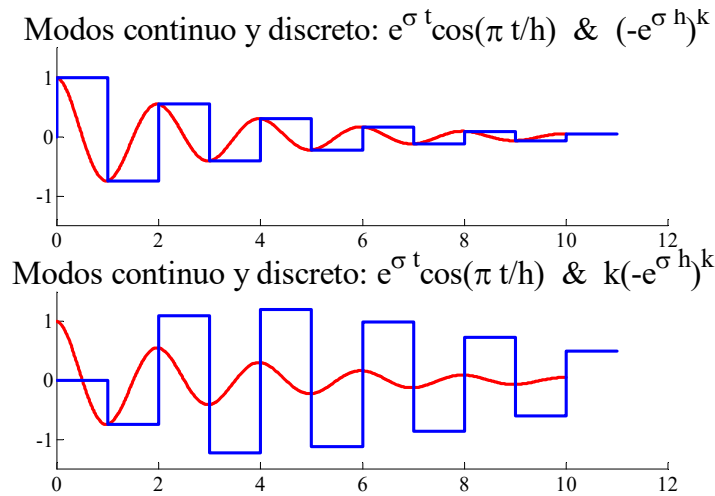


Figura 2.7: Modos continuo (rojo) y discreto (azul) de un polo de Nyquist.

Ejemplo 2.8: Cancelación de un polo de Nyquist

Sea la transferencia de Laplace:

$$G(s) = w_0^2 \frac{as + 1}{s^2 + 2\xi w_0 s + w_0^2}$$

Al muestrear polos situados a la frecuencia de Nyquist $w = \pi / h$, el ZOH es

$$H(z) = \frac{(1 + e^{-\xi w_0 h})(z + e^{-\xi w_0 h})}{(z + e^{-\xi w_0 h})^2} = \frac{1 + e^{-\xi w_0 h}}{z + e^{-\xi w_0 h}}$$

OBS Sin importar el valor de a (asociado al cero continuo), el sistema muestreado produce un cero en z para forzar la coincidencia de la respuesta discreta con la continua.

Como primer resultado tenemos que un sistema discreto de primer orden, con un polo sobre el eje real negativo, proviene de muestrear un sistema continuo de segundo orden con polos complejos situados en la frecuencia de Nyquist.

¿Es posible un polo doble en z ? Por extensión del argumento anterior, un polo doble en z sobre el eje real negativo proviene de muestrear, dos pares de polos complejos situados a la frecuencia de Nyquist. Esta vez se han forzado dos cancelaciones polo-cero.

¿Son posibles otras cancelaciones? Naturalmente, porque un par de polos complejos en $s = a \pm jb$ $a, b \in \mathbb{R}$ se mapea a un par de polos en $z = e^{sh} = e^{(a \pm jb)h} = e^{ah} e^{\pm jbh}$. Ambos polos en z están sobre el eje real positivo si $bh = n\pi$ $n = 0, 2, 4, \dots$. Es decir, $h = 2\pi / b$ genera un polo doble en $z = e^{ah}$.

OBS Polos en s fuera de la franja 0, también pueden forzar cancelaciones sobre el eje real positivo del plano z .

Ejemplo 2.9: Polos de Nyquist

Sea

$$H(z) = \frac{z-1}{(z+0.8)^2}$$

¿Qué $G(s)$ al muestrearse con retención de orden 0 puede dar lugar a $H(z)$?

A partir de nuestro análisis podemos decir:

- (a) $G(s)$ es de 4^{to} orden con todos sus polos en la frecuencia de Nyquist.
- (b) $G(s)$ tiene todos sus polos en $s = (\ln 0.8 \pm j\pi) / h$.
- (c) Como $H(1) = 0$, $G(s)$ tiene un cero en $s = 0$.
- (d) $G(s)$ puede tener (o no) más ceros.

Finalmente:

$$G(s) = \frac{Ks(as^2 + bs + 1)}{(s - (\ln 0.8 \pm j\pi) / h)^2} = \frac{Ks(as^2 + bs + 1)}{[(s - (\ln 0.8) / h)^2 + \pi^2 / h^2]^2}$$

OBS Los parámetros a, b, K y h muestran la estructura general que puede tener $G(s)$.

Ejemplo 2.10: Resultados en Matlab

Para el mismo caso del Ejemplo 2.9, el comando d2c de Matlab da:

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
Results may be inaccurate. RCOND = 1.315210e-019.

$$G(s) \approx \frac{1.3062 \cdot 10^7 [s - 0.01153] [(s + 0.2215)^2 + 3.1350^2]}{[(s + 0.2215)^2 + 3.1350^2] [(s + 1.2232)^2 + 3.1343^2]}$$

OBS $G(s)$ tiene grado relativo 1, lo que es correcto. Tiene un cero en $s \approx 0$, lo que es aproximado. Después de cancelar, $G(s)$ queda de orden 2. Es posible que la respuesta de Matlab puede ser una aproximación de la verdadera para alguna combinación de los parámetros a, b, K, h .

Las conclusiones anteriores pueden interpretarse con una representación de estado. Considere el sistema ($\xi < 1$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & -2\xi w_0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ w_0^2 \end{pmatrix}, C = (1 \quad a), D = (0)$$

Para la frecuencia de Nyquist, el ZOH es

$$\Phi = \begin{pmatrix} -e^{-\xi w_0 h} & 0 \\ 0 & -e^{-\xi w_0 h} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 + e^{-\xi w_0 h} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$H(z) = C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma = \frac{1 + e^{-\xi w_0 h}}{z + e^{-\xi w_0 h}}$$

El análisis por transferencias indica que diferentes sistemas continuos dan el mismo sistema muestreado. En variables de estado podemos construir estos sistemas. La idea puede desarrollarse formalmente como sigue:

$$(A, B, C) \xrightarrow{w_N} (\Phi, \Gamma, C), \Phi \text{ es una matriz escalar}$$

Una transformación de estado da:

$$(TAT^{-1}, TB, CT^{-1}) \xrightarrow{w_N} (\Phi, T\Gamma, CT^{-1})$$

Eligiendo T tal que $T\Gamma = \Gamma$:

$$(TAT^{-1}, TB, CT^{-1}) \xrightarrow{w_N} (\Phi, \Gamma, CT^{-1})$$

Finalmente, para cualquier $CT^{-1} \neq C$, un sistema diferente es:

$$(TAT^{-1}, TB, C) \xrightarrow{w_N} (\Phi, \Gamma, C)$$

Para recuperar un sistema de orden mayor se recurre a la expansión en fracciones parciales.

Ejemplo 2.11: Recuperación de un sistema de orden 4

Considere un sistema continuo con transferencia

$$G(s) = \frac{416.5623(s+0.2126)(s+0.939)(s+4.997)}{(s+1)(s+5)(s^2+12.97s+51.95)}$$

Existe un par de polos a la frecuencia de Nyquist para $h=1$. El ZOH resulta ser:

$$H(z) = \frac{1.4169(z-0.005988)(z-0.2856)}{(z-0.3679)(z-0.006738)(z+0.001524)}$$

Sólo como información, la recuperación con el comando d2c de Matlab entrega:

$$G(s) = \frac{7.4866(s+5.109)(s+1.357)}{(s+1)(s+5)(s+6.487)}$$

OBS La ganancia estática y los polos en -1 y -5 se recuperan; el resto no es correcto.

Para recuperar el sistema de tiempo continuo a partir del sistema muestreado, y si los polos a frecuencias mayores que la de Nyquist se eliminaron con un filtraje antidoblaje, procedemos así:
Dado que:

- El muestreo es lineal respecto a los residuos en s .
- La expansión en fracciones parciales y la diagonalización matricial son operaciones similares.
- Las representaciones de bajo orden son numéricamente mejores.

Se propone entonces el procedimiento siguiente:

- 1^a ¿Transferencia? determine una expansión en fracciones parciales. Vaya a 2.
- 1^b ¿Variables de Estado? determine una representación diagonalizada.
- 2 Separe el resultado en Partes 1 y 2 como sigue:
 - Parte 1: Sin polos a la frecuencia de Nyquist (recuperación completa).
 - Parte 2: Sólo polos a la frecuencia de Nyquist (se pierden los ceros en $s \neq 0$).
- 3 Aplique comando d2c a la Parte 1 y aplique comando d2c corregido a la Parte 2.

Ejemplo 2.12: Recuperación de un sistema de orden 4 – Continuación

Expandiendo en fracciones parciales el $H(z)$ del ejemplo 2.11, se obtiene

$$H(z) = \frac{0.4156z - 0.03654}{(z - 0.3679)(z - 0.006738)} + \frac{1}{z + 0.001524}$$

y la segunda fracción tiene un polo real negativo. Aplicamos entonces d2c a cada fracción:

$$\hat{G}(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 5)} + \frac{6.4866(s + 8.008)}{s^2 + 12.97s + 51.95}$$

De la segunda fracción retenemos polos y ganancia estática, pero se pierde el valor de α :

$$\hat{G}(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 5)} + \frac{51.95(\alpha s + 1)}{s^2 + 12.97s + 51.95}$$

OBS Como verificación (sólo para los fines del ejemplo), al realizar una expansión directa sobre $G(s)$, se obtiene $\alpha = 8$. El resto coincide con lo efectivamente recuperado.

2.6 Resumen

Se ha calculado el equivalente con retención de orden 0, ZOH, tanto en variables de estado como en funciones de transferencia para sistemas con retardo de tiempo en la entrada. Se ha construido una tabla analítica de ZOH para sistemas con retardo de tiempo. Se ha tratado el mapeo de polos y de ceros de s a z , donde la ubicación de los últimos se puede anticipar sólo para $h \rightarrow 0$. Se ha hecho notar que los sistemas con inversa inestable, son más comunes en los ZOH que en tiempo continuo. Se ha presentado un criterio empírico para seleccionar el periodo de muestreo y un algoritmo eficiente para estimarlo en la práctica. Finalmente, se ha aclarado el problema de la recuperación del sistema de tiempo continuo a partir del ZOH.