Licenciatura em Ciências da Computação

COMPUTABILIDADE E COMPLEXIDADE

4. Introdução à Teoria da Complexidade

José Carlos Costa

Dep. Matemática
Universidade do Minho
Braga, Portugal

1º semestre 2025/2026

Definição

Sejam $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ funções. Diz-se que $g(n)$ *é de ordem* $f(n)$, e escreve-se $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$ ou $g(n)$ é $\mathcal{O}(f(n))$, se existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq g(n) \leq c\, f(n).$$

Ou seja,

$$\mathcal{O}(f(n)) = \{g(n) : \exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \; \forall n \geq n_0, \; 0 \leq g(n) \leq c\, f(n)\}$$

é a classe das funções que são "limitadas superiormente pela função f(n)".

Exemplo 1

Sejam $f(n) = n^2 + 5n + 2$ e $g(n) = n^2$.

- $g(n)$ é $\mathcal{O}(f(n))$. De facto,

$$\forall n \geq 0, \quad 0 \leq n^2 \leq n^2 + 5n + 2.$$

Portanto,

$$\forall n \geq 0, \quad 0 \leq g(n) \leq 1\, f(n).$$

Ou seja, para deduzir que $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$ basta tomar $c = 1$ e $n_0 = 0$ na definição de $\mathcal{O}(f(n))$.

- Por outro lado, $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$. De facto, para cada $n \geq 1$ tem-se

$$\begin{aligned} 0 \leq f(n) &= n^2 + 5n + 2 \\ &\leq n^2 + 5n^2 + 2n^2 \\ &= 8n^2 \\ &= 8g(n). \end{aligned}$$

Tem-se portanto que $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$. Pode-se assim dizer que $f(n)$ e $g(n)$ são funções da mesma ordem de grandeza.

Poder-se-ia ainda verificar que:

- $n^2 + 5n + 2$ não é $\mathcal{O}(n)$;
- $n^2 + 5n + 2$ é $\mathcal{O}(n^3)$;
- n^3 não é $\mathcal{O}(n^2 + 5n + 2)$.

Mais geralmente, para funções polinomiais é válido o seguinte resultado.

Proposição

Seja $f(n)$ um polinómio de grau k. Então,

1. $f(n)$ não é $\mathcal{O}(n^j)$ para todo o $j < k$.
2. $f(n)$ é $\mathcal{O}(n^k)$ e n^k é $\mathcal{O}(f(n))$.
3. $f(n)$ é $\mathcal{O}(n^\ell)$ e n^ℓ não é $\mathcal{O}(f(n))$ para todo o $\ell > k$.

Consideremos agora também funções não polinomiais.

Exemplo 2

Sejam $f(n) = n^3$ e $g(n) = 2^n$, e note-se que

n	0	1	2	3	$\cdots$	8	9	10	11	12	$\cdots$
$f(n)$	0	1	8	27	$\cdots$	512	729	1000	1331	1728	$\cdots$
$g(n)$	1	2	4	8	$\cdots$	256	512	1024	2048	4096	$\cdots$

- $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$. Basta notar que,

$$\forall n \geq 10, \quad 0 \leq f(n) \leq 1\, g(n).$$

- $g(n)$ não é $\mathcal{O}(f(n))$.

n	10	20	30	40	50	100	200
$\lfloor log_2(n) \rfloor$	3	4	4	5	5	6	7
n	10	20	30	40	50	100	200
n^2	100	400	900	1 600	2 500	10 000	40 000
n^3	1 000	8 000	27 000	64 600	125 000	1 000 000	8 000 000
2^n	1 024	1 048 576	1.0×10^9	1.1×10^{12}	1.1×10^{15}	1.2×10^{30}	1.6×10^{60}
$n!$	3 628 800	2.4×10^{18}	2.6×10^{32}	8.1×10^{47}	3.0×10^{64}	$> 10^{157}$	$> 10^{374}$

Proposição

Sejam $k \in \mathbb{N}_0$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 1$. Então,

1. $log_a(n)$ é $\mathcal{O}(n)$ e n não é $\mathcal{O}(log_a(n))$.
2. n^k é $\mathcal{O}(a^n)$ e a^n não é $\mathcal{O}(n^k)$.
3. a^n é $\mathcal{O}(n!)$ e $n!$ não é $\mathcal{O}(a^n)$.

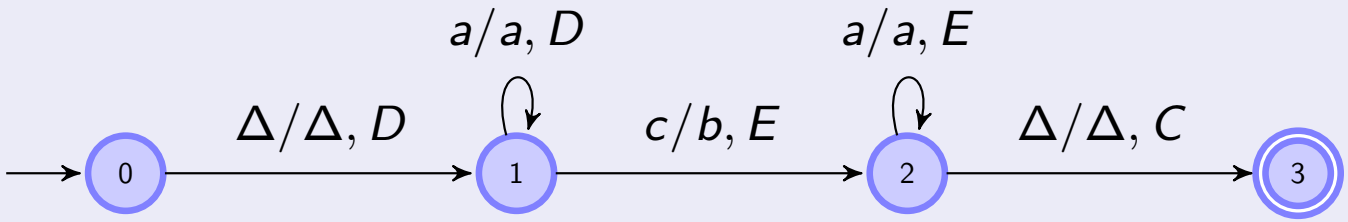
Definição [Complexidade temporal de uma MT]

Seja $\mathcal{T}$ uma máquina de Turing que pára sempre (ou seja, $\mathcal{T}$ é um algoritmo). A *complexidade temporal* de $\mathcal{T}$ é a função $tc_{\mathcal{T}} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$tc_{\mathcal{T}}(n) = \max\{m_u : \begin{array}{l} u \text{ é uma palavra de comprimento } n \text{ e} \\ m_u \text{ é o número de passos que } \mathcal{T} \text{ executa} \\ \text{(até parar) quando é iniciada com } u\}. \end{array}$$

Exemplo 3

Seja $\mathcal{T}$ a seguinte máquina de Turing sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$,

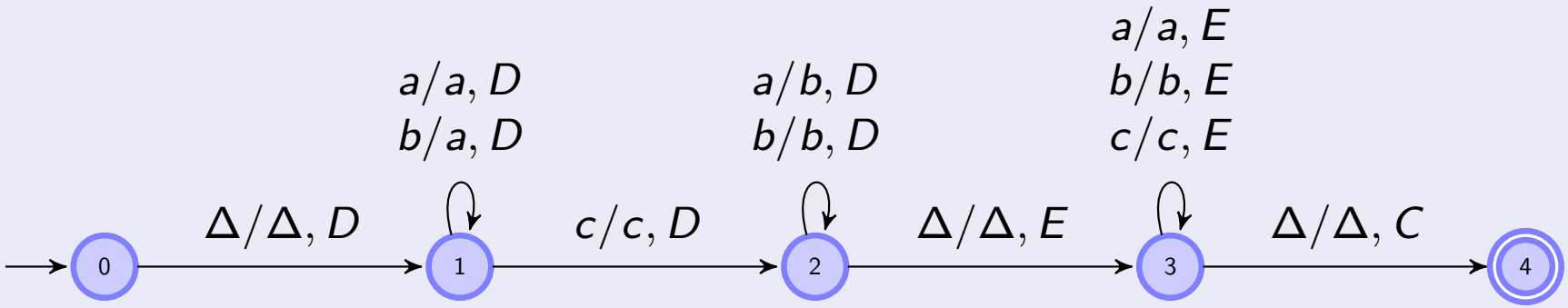


A função de complexidade temporal da máquina $\mathcal{T}$ é definida, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, por

$$tc_{\mathcal{T}}(n) = 2n + 1.$$

Problema 4.1

Seja $\mathcal{T}$ a seguinte máquina de Turing sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$,



Determine a função de complexidade temporal da máquina $\mathcal{T}$.

Definição [Complexidade temporal de MT não-determinista]

Seja $\mathcal{T}$ uma MT não-determinista que pára sempre. A *complexidade temporal* de $\mathcal{T}$ é a função $tc_{\mathcal{T}} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definida, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, por

$$tc_{\mathcal{T}}(n) = \max\{m_u : \begin{array}{l} m_u \text{ é o maior número de computações que} \\ \text{podem ser efetuadas por } \mathcal{T} \text{ quando iniciada} \\ \text{com uma palavra } u \text{ de comprimento } n\}. \end{array}$$

Definição

Sejam $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ uma função (total) e L uma linguagem. Diz-se que L é *aceite em tempo determinista* (resp. *não-determinista*) $f(n)$ se existe um algoritmo determinista (resp. não-determinista) $\mathcal{T}$ tal que:

- $\mathcal{T}$ aceita L;
- $tc_{\mathcal{T}}(n)$ é $\mathcal{O}(f(n))$.

A classe destas linguagens é denotada por $DTIME(f(n))$ (resp. $NTIME(f(n))$). Note-se que $DTIME(f(n)) \subseteq NTIME(f(n))$.

Podemos agora definir duas classes de complexidade importantes:

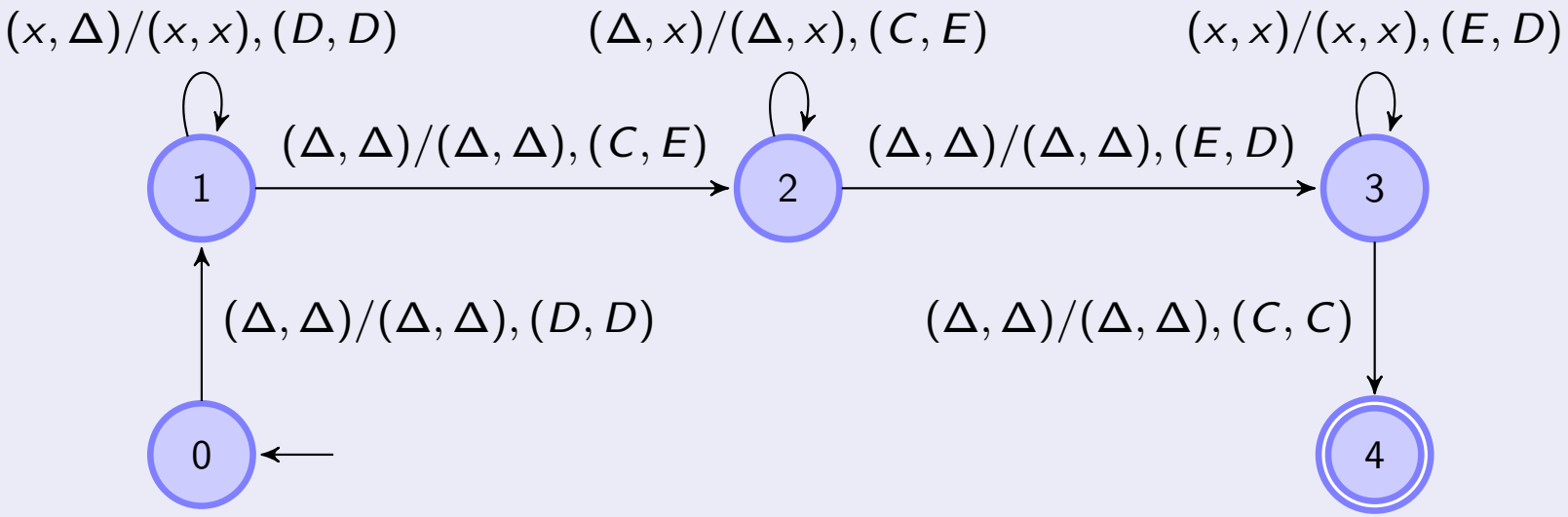
$$P = \bigcup_{k \geq 0} DTIME(n^k) \quad \text{e} \quad NP = \bigcup_{k \geq 0} NTIME(n^k).$$

Seven Millennium Problems from Clay Mathematics Institute

- ...
- $P = NP$?

Exemplo 4

A máquina de Turing $\mathcal{T}$ com duas fitas, onde $x \in \{a, b\} = A$,



aceita a linguagem $L = \{u \in A^* : u = u^I\}$ das palavras capicua sobre A. Como se pode verificar, tem-se para todo o $n \in \mathbb{N}_0$

$$tc_{\mathcal{T}}(n) = 3(n+1) + 1 = 3n + 4.$$

Logo $L \in DTIME(3n+4) = DTIME(n)$. Ou seja, L é aceite por $\mathcal{T}$ em tempo linear.

Observação

- A noção de complexidade espacial será agora indicada para máquinas de Turing com mais do que uma fita. Seja $\mathcal{T}$ uma destas máquinas e suponhamos que a 1^a fita é apenas de leitura. Se em vez de contarmos o número de passos dados por $\mathcal{T}$, contarmos o número de células das fitas de trabalho que a MT utiliza, define-se a função $sc_{\mathcal{T}}$, de *complexidade espacial* de $\mathcal{T}$.

- Pode-se ainda definir as classes de complexidade $DSPACE(f(n))$ e $NSPACE(f(n))$ de forma análoga àquela apresentada para as classes de complexidade $DTIME(f(n))$ e $NTIME(f(n))$.

- Note-se que $DTIME(f(n)) \subseteq DSPACE(f(n))$ e que $NTIME(f(n)) \subseteq NSPACE(f(n))$.

Definição

Consideremos linguagens $L_1 \subseteq A_1^*$ e $L_2 \subseteq A_2^*$. Diz-se que L_1 *é polinomialmente redutível a* L_2 (ou que L_1 *se reduz a* L_2 *em tempo polinomial*), e escreve-se $L_1 \leq_p L_2$, se existe uma função $f : A_1^* \to A_2^*$ tal que:

i) para cada $u \in A_1^*$, $u \in L_1$ se e só se $f(u) \in L_2$;

ii) a função f é computável em tempo polinomial (ou seja, f é calculada por um algoritmo cuja função de complexidade temporal é $\mathcal{O}(n^k)$ para algum $k \in \mathbb{N}$).

Teorema

Sejam L_1, L_2 e L_3 linguagens.

1. Se $L_1 \leq_p L_2$ e $L_2 \leq_p L_3$, então $L_1 \leq_p L_3$.
2. Se $L_1 \leq_p L_2$ e $L_2 \in P$, então $L_1 \in P$.

Exemplo 5

Consideremos as linguagens

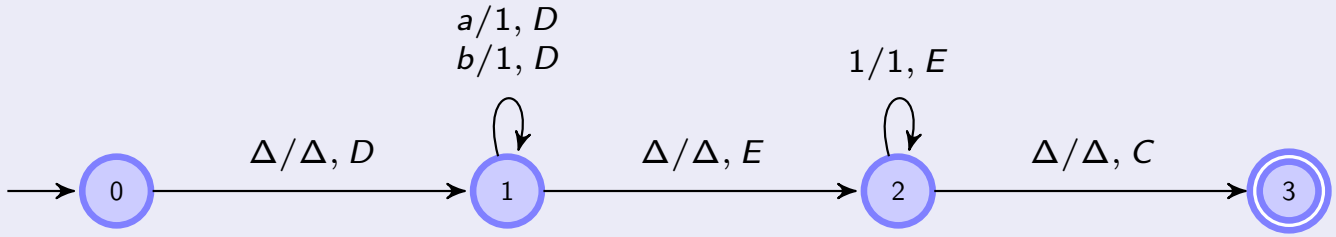
- $L_1 = \{u \in A_1^* : |u| \text{ é par}\}$ sobre o alfabeto $A_1 = \{a, b\}$, e
- $L_2 = \{1^{2n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ sobre o alfabeto $A_2 = \{1\}$.

A linguagem L_1 é polinomialmente redutível a L_2. De facto, consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} f: & A_1^* & \longrightarrow & A_2^* \\ & u & \longmapsto & 1^{|u|} \end{array} .$$

i) Seja $u \in A_1^*$. Tem-se $u \in L_1 \Leftrightarrow |u|$ é par $\Leftrightarrow 1^{|u|} \in L_2 \Leftrightarrow f(u) \in L_2$.

ii) A função f é computada em tempo polinomial pelo seguinte algoritmo $\mathcal{T}$



pois, como se verifica facilmente, $tc_{\mathcal{T}}(n) = 2n + 3$ para todo o $n \in \mathbb{N}_0$, donde a função de complexidade temporal de $\mathcal{T}$ é $\mathcal{O}(n)$.

Definição

Uma linguagem L diz-se:

- *NP-difícil* se $L' \leq_p L$ para toda a linguagem $L' \in NP$;
- *NP-completa* se L é NP-difícil e $L \in NP$.

Teorema

Sejam L e K linguagens.

1. Se L é NP-difícil e $L \leq_p K$, então K é NP-difícil.
2. Se L é NP-completa, então $L \in P$ se e só se $P = NP$.

O próximo teorema representa um marco histórico, pois nele foi identificado pela primeira vez um problema NP-completo.

Teorema [Cook,1971]

O problema *SAT*, de decidir se uma fórmula lógica em forma normal conjuntiva admite alguma valoração das variáveis que a satisfaça, é NP-completo.

O resultado seguinte é uma consequência imediata dos dois últimos teoremas.

Corolário

$P = NP$ se e só se $SAT \in P$.

Vários outros problemas (milhares deles) foram entretanto identificados como sendo NP-completos, tais como:

- Problema do caixeiro viajante;
- Problema do ciclo hamiltoniano;
- Problema da soma dos subconjuntos;
- Problema da mochila;
- Problema da Torre de Hanói;
- Jogo do 15.