
Ficha - Condições de otimalidade para problemas sem restrições

1. Considere a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(w) = 15 - 12w - 25w^2 + 2w^3.$$

- (a) Use as primeira e segunda derivadas para determinar o máximo local e mínimo local de F .
- (b) Mostre que F não tem nem um máximo global nem um mínimo global.

2. Considere a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(w) = 3w^3 + 7w^2 - 15w - 3.$$

Calcule todos os pontos estacionários desta função, e determine se são minimizantes locais e maximizantes locais. Esta função tem um máximo global ou um mínimo global?

3. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{3}w_1^3 + \frac{1}{2}w_1^2 + 2w_1w_2 + \frac{1}{2}w_2^2 - w_2 + 9.$$

Calcule todos os pontos estacionários desta função, e verifique se são minimizantes locais ou maximizantes locais. Esta função tem um máximo global ou um mínimo global?

4. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(w_1, w_2) = 8w_1^2 + 3w_1w_2 + 7w_2^2 - 25w_1 + 31w_2 - 29.$$

Calcule todos os pontos estacionários desta função, e verifique se são minimizantes locais e maximizantes locais. Esta função tem um máximo global ou um mínimo global?

5. Mostre que qualquer ponto da reta $w_2 - 2w_1 = 0$ é um minimizante de $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(w_1, w_2) = 4w_1^2 - 4w_1w_2 + w_2^2.$$

6. Verifique se o ponto $(0, -1)^T$ é minimizante da função

$$F(w_1, w_2) = w_1 + w_2 + \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) - \frac{w_1 + w_1^2 + w_1^3}{1 + w_1^4}.$$

Justifique.

7. Considere o problema:

$$\text{minimizar } F(w_1, w_2) = (w_2 - w_1^2)(w_2 - 2w_1^2).$$

- (a) Mostre que as condições necessárias de otimalidade são satisfeitas no ponto $(0, 0)^T$.
- (b) Mostre que a origem é um minimizante local de F para qualquer reta que passe na origem (que é, $w_2 = mw_1$).
- (c) Mostre que a origem não é um minimizante local de F (considere, por exemplo, curvas da forma $w_2 = kw_1^2$). Que conclusões se pode retirar a partir isto?

8. Considere o problema

$$\text{minimizar } F(w_1, w_2) = (w_1 - 2w_2)^2 + w_1^4.$$

Determine o mínimo de F . Verifique que a condição necessária de 2ª ordem para um minimizante local é satisfeita nesse ponto. Verifica a condição suficiente de 2ª ordem? Este ponto é um minimizante local estrito? é um minimizante global?

9. Seja

$$F(w_1, w_2) = 2w_1^2 + w_2^2 - 2w_1w_2 + 2w_1^3 + w_1^4.$$

Determine os minimizantes/maximizantes de F e indique que tipo de mínimos ou máximos são (local, global, estrito, etc).

10. Seja

$$F(w_1, w_2) = cw_1^2 + w_2^2 - 2w_1w_2 - 2w_2$$

onde c é um escalar.

- (a) Determine os pontos estacionários de F para cada valor de c .
- (b) Para que valores de c pode F ter um minimizante? Para que valores de c pode F ter um maximizante? Determine os minimizantes/maximizantes correspondentes a tais valores de c , e indique que tipo de mínimos ou máximos são (local, global, estrito, etc).

11. Para cada valor do escalar c , encontre o conjunto de todos os pontos estacionários da função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$F(w_1, w_2) = w_1^2 + w_2^2 + cw_1w_2 + w_1 + 2w_2.$$

Quais dos pontos estacionários são minimizantes globais?

Recordar: Alguns resultados de convexidade

- Quando a função objetivo F é uma função convexa e a região admissível \mathcal{D} é um conjunto convexo, uma solução local é também global.
- **Teorema** Seja \mathcal{D} um conjunto convexo aberto não vazio e $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então F é convexa se, e só se, para todo $w, \bar{w} \in \mathcal{D}$

$$F(w) \geq F(\bar{w}) + \nabla F(\bar{w})^T(w - \bar{w}).$$

- **Teorema** Seja \mathcal{D} um conjunto convexo aberto não vazio e $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável. Então F é uma função convexa se e só se a matriz hessiana $\nabla^2 F(w)$ de F é semi-definida positiva para todo $w \in \mathcal{D}$.

Recordar: Seja $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ uma matriz simétrica.

- A é semi-definida positiva se e só se os valores próprios de A são não negativos; OU
- A é semi-definida positiva se e só se os determinantes das submatrizes principais de A são não negativos.
- A é definida positiva se e só se os valores próprios de A são positivos; OU
- A é definida positiva se e só se os determinantes das submatrizes principais de A são positivos.
- A é indefinida se e só se não for nem semi-definida positiva nem semi-definida negativa.
- A é semi-definida negativa se e só se os valores próprios de A são não positivos; OU
- A é semi-definida negativa se e só se os determinantes das submatrizes principais de A de ordem ímpar forem não positivos, e os de ordem par forem não negativos.
- A é definida negativa se e só se os valores próprios de A são negativos; OU
- A é definida negativa se e só se os determinantes das submatrizes principais de A de ordem ímpar forem negativos, e os de ordem par forem positivos.