Ficha - Convexidade

1. Mostre que os seguintes conjuntos são convexos.
   (a) Subespaços de $\mathbb{R}^d$
   (b) Conjuntos unitários $\{w_0 \in \mathbb{R}^d\}$
   (c) Hiperplanos: $H = \{w \in \mathbb{R}^d : a^T w = b\}$ (com $a \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}, b \in \mathbb{R}$)
   (d) Semi-espaço: $S = \{w \in \mathbb{R}^d : a^T w \leq b\}$
   (e) Bolas euclideanas: $B(w_c, r) = \{w \in \mathbb{R}^d : \|w - w_c\|_2 \leq r\}$ (com $w_c \in \mathbb{R}^d, r \in \mathbb{R}^+$)
   (f) Conjunto das matrizes semi-defindas positivas: $S = \{P \in \mathcal{M}_{\{n\times n\}} : w^T P w \geq 0, \forall w \in \mathbb{R}^n\}$.

2. Seja $D = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 : w_2 \geq 0\}$. Mostre que D é um conjunto convexo e represente graficamente o conjunto D.

3. Considere os conjuntos $D_1 = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 : w_2 \geq 0\}$ e $D_2 = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 : w_1 \geq w_2\}$. Mostre que $D = D_1 \cap D_2$ é um conjunto convexo e represente graficamente o conjunto D.

4. Mostre, utilizando a definição que as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são convexas.
   (a) $f(w) = w^2$
   (b) $f(w) = |w|$
   (c) $f(w) = \begin{cases} 1, & w = 0, \\ w^2, & w > 0. \end{cases}$

5. Mostre, utilizando o Teorema 3 que as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são convexas.
   (a) $f(w) = aw + b; \quad a, b \in \mathbb{R};\ a \neq 0.$
   (b) $f(w) = a^2 w + bw + c; \quad a \in \mathbb{R}^+;\ b, c \in \mathbb{R};\ a \neq 0.$
   (c) $f(w) = e^{aw}$, $a \in \mathbb{R}$.
   (d) $f(w) = w^a$ (definida em $\mathbb{R}^+$), $a \geq 1$ ou $a \leq 0$.
   (e) $f(w) = -w^a$ (definida em $\mathbb{R}^+$), $0 \leq a \leq 1$.

6. Represente graficamente as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e certifique-se visualmente que são convexas.
   (a) $F(w) = e^{aw}$, $a \in \mathbb{R}$.
   (b) $F(w) = -\log w$ (definida em $\mathbb{R}^+$).
   (c) $F(w) = w^a$ (definida em $\mathbb{R}^+$), $a \geq 1$ ou $a \leq 0$.
   (d) $F(w) = -w^a$ (definida em $\mathbb{R}^+$), $0 \leq a \leq 1$.
   (e) $F(w) = |w|^a$, $a \geq 1$.
   (f) $F(w) = w \log w$, (definida em $\mathbb{R}^+$).

7. Mostre, usando o Teorema 3 que $F(w_1, w_2) = \ln(e_1^w + e_2^w)$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, é uma função convexa.

8. Mostre, usando o Teorema 3 que a função quadrática $G(w) = \frac{1}{2} w^T Q w + c^T w + b$; ($Q$ é uma matriz simétrica $d \times d$, $c \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}$), $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, é:
   (a) Convexa se e só se a matriz Q é semi-definida positiva.
   (b) Estritamente convexa se e só se Q é definida positiva.
   (c) Côncava se e só se a matriz Q é semi-definida negativa.
   (d) Estritamente côncava se e só se Q é definida negativa.