



南京大學

研究生畢業論文
(申請碩士學位)

論文題目	关联电子系统的泛函重整化群研究
作者姓名	万源
学科、专业方向	理论物理学
研究方向	关联电子系统
指导教师	王强华教授

二零零九年五月

学 号: **MG0622010**

论文答辩日期: 年 月 日

指 导 教 师: (签 字)

Dissertation for Master of Science

**Instabilities of Correlated Electronic
Systems: A Functional Renormalization
Group Study**

Yuan Wan

**Supervised by Professor Qiang-Hua Wang
Theoretical Physics**

National laboratory of Solid State Microstructure & Department
of Physics, Nanjing University

May, 2009

南京大学研究生毕业论文中文摘要首页用纸

毕业论文题目: 关联电子系统的泛函重整化群研究

理论物理学 专业 2006 级硕士生姓名: 万源

指导教师(姓名、职称): 王强华教授

摘 要

关联电子系统中诸多失稳通道之间的激烈竞争是关联电子系统研究中的一个长期问题。关联电子系统中存在着电子结构、自旋/轨道自由度以及电子-电子/电子-声子相互作用之间的互动,这使得我们分析关联系统中可能存在的长程序极为困难。本文将描述如何将Wilson重整化群的观点移植到对费米系统的研究中去,并从泛函重整化群的角度,分析排斥型Hubbard模型以及自旋失配的吸引型Hubbard模型中存在的不稳定性。

在引言中,本文对泛函重整化方法作一概述。引言在简单介绍其历史发展的同时,从各个角度讨论其在研究关联电子系统中的独特意义,并简介其在物理学各分支的运用。在第一章中,本文介绍泛函重整化的基本框架并导出Wetterich方程。与此同时,本文还将比较Wilson- Polchinski方案和Wetterich方案。在第二章中,作为一个案例,本文运用泛函重整化去处理零温下正方格点Hubbard模型。本文将分析零温下正方格点上的Hubbard模型中反铁磁与超导的竞争,并给出零温下Hubbard模型的相图。在第三章中,本文将分析自旋失配的吸引型Hubbard模型中存在的诸多竞争序: s 波FFLO超导序、 $p + ip$ 波超导序、 s 波电荷密度波序以及 d 波自旋密度波序。最后,我们将指出一些进一步发展的可能方向。

南京大学研究生毕业论文英文摘要首页用纸

THESIS: Instabilities of Correlated Electronic Systems: A
 Functional Renormalization Group Study

SPECIALIZATION: Theoretical Physics

POSTGRADUATE: Yuan Wan

MENTOR: Professor Qiang-Hua Wang

Abstract

One of the long-standing problems in the study of correlated electronic system is the fierce competition between various unstable channels. The interplay between fermiology, spin/orbital degrees of freedom and electron-electron/electron-phonon interaction makes the analysis of possible long-range orders developed in such systems an extremely difficult task. In this dissertation, I describe how we can translate the idea of Wilsonian renormalization group into the research of fermionic systems, and analyze possible instabilities of the repulsive Hubbard model and the spin-imbalanced attractive Hubbard model from the perspective of the functional renormalization group.

In the introduction part, I describe the historical development of the functional renormalization group (FRG) method, and discuss its important role in the study of correlated electronic systems. Besides, I briefly summarize its applications in various branches of physics. In the first chapter, I describe the whole formulation of the FRG, and derive the Wetterich equation, which plays the central role in the FRG method. Meanwhile, I make a comparison between the Wilson-Polchinski formulation and the Wetterich formulation. In the third chapter, as a case study, I analyze the repulsive Hubbard model on square lattice by using FRG method. I elucidate the competition between the antiferromagnetism and d-wave superconductivity in this system at zero temperature, and give the zero temperature phase diagram. In the fourth chapter, I analyze the various low-temperature instabilities of the spin-imbalanced attractive Hubbard model, including s-wave FFLO state, p+ip-wave superconducting state, s-wave charge density wave state and d-wave spin density wave state. Finally, I briefly discuss the possible development in this area.

目 录

Chinese Abstract	i
Abstract	ii
第一章 引言：重整化与关联电子系统	1
1.1 重整化群简述	1
1.2 泛函重整化群：从Wilson到Wetterich	2
1.3 重整化群与关联电子系统	3
第二章 泛函重整化方案与Wetterich方程的导出	7
2.1 Wilson-Polchinski方程的路径积分导出	7
2.2 Wetterich方程的路径积分导出	11
2.3 Wetterich方程的图形导出	16
2.4 Wetterich方案的简单应用： $U(N)$ Landau-Ginzburg模型	20
第三章 正方格点上的Hubbard模型	24
3.1 重整化群与费米液体	24
3.2 Wetterich方程用于Hubbard模型	29
3.3 Hubbard模型的零温相图	35
第四章 正方格点上自旋失配的吸引型Hubbard模型	41
4.1 研究背景	41
4.2 计算方案	43
4.3 自旋失配吸引型Hubbard模型的零温相图	44
第五章 结论	49
参考文献	50
致谢	54

第一章 引言：重整化与关联电子系统

1.1 重整化群简述

重整化群是在上个世纪60年代末70年代初发展出来的理解临界现象的工具和理论框架[1][2]。重整化群的基本思想就是，迭代地积掉系统中的高能自由度，写下一系列的低能有效理论，然后分析系统在迭代操作下的行为。这个思想可以追溯到在Born-Oppenheimer近似中高能电子自由度与低能的原子核自由度的分离，经L. Kadanoff和K. G. Wilson等人而在临界现象这一领域取得突破[3]。重整化群可以说是革命性的，它的观念改变了70年代以后物理学的面貌：一方面，以前几乎无法理解的临界现象中的普适性成为完全可以理解甚而可以从理论上计算的。另一方面，新的观念不断受到重整化群的启发而涌现出来。高能物理中，如果没有重整化就没有近自由这一重要的概念的发展。特别地，重整化群的思想使得我们重新审视场论的可重整性，并产生出了有效场论这个观念[4]：不可重整场论并未无用，它可以看作是某一特定能标下的有效场论。特别是在凝聚态系统中，我们即便能够对系统作某种完全微观的描述，我们仍然没有办法对系统的性质作任何的预言。例如，虽然我们知道晶格本身就是原子核的某种Wigner晶体，但是我们在没有任何前提的情况下难以作出对系统性质的预言。相反，如果换到低能去写下一个以晶格长度为截断长度的有效理论，则我们可以得到关于声子以及电声相互作用的诸多知识。正如R. Shankar指出的[5]：

Even when one knows the theory at a microscopic level, there is often a good reason to deliberately move away to an effective theory... Progress is often made by moving away from the fundamental and looking for effective theories.

更为值得一提的是，在凝聚态理论中，重整化群扮演了极其重要的角色。一方面，我们利用重整化群这一工具可以处理一些常规微扰论难以把握的问题，并深化我们对凝聚态系统的认识。例如，在研究Kondo问题时，低温下常规的微扰论在每一级发散，而运用发展出来的重整化群技术我们可以规避发散，比较满意地解决Kondo问题[6]。如果辅之以数值重整化群技术，则Kondo问题可以得到完全的解决[7]。在研究一维金属系统时，常规的微扰论无法同时把握粒子-粒子散射通道和粒子-空穴散射通道的奇异性，而只有在使用重整化群技

术[8]或者在某些情况下与之等价的Parquet近似[9]，我们才能均衡把握一维系统中的手征对称[10][11]，得到正确的Luttinger行为。另一方面，在重整化群以前发展出来的凝聚态理论也只有通过重整化才能真正理解其中包涵的物理思想。例如，在正常费米液体中，利用重整化群我们可以发现，由于相空间的限制，粒子之间的相互作用只有前向散射通道是边缘耦合，这保证了费米液体是一个稳定不动点，而且单单使用前向散射幅度就足以描写费米液体。而对于存在吸引相互作用的费米系统，由于此时零总动量的散射通道，即BCS通道，是边缘有关耦合，这就意味着费米液体所代表的不动点已经不再稳定，从而暗示了寻求新基态/真空的必要性[12]。可见，重整化群以及所提供给我们的，不仅是一种微扰方法的改进，更是我们理解问题的一种全新方式。

重整化并非只有一种实现方案。除了早期的以Callan-Symanzik方程或者Iliopoulos-Itzykson-Martin方程为基础的场论重整化群方案以外，还存在K. G. Wilson本人提出的更直截了当的动量壳重整化群方案，以及L. Kadanoff提出的实空间重整化方案[13]。本文将要使用的是一种基于Wilson方案的改进形式，即泛函重整化群[14]。泛函重整化群直接导出有效相互作用泛函或者有效作用泛函随重整化参数的跑动的严格方程，并利用这个严格方程来计算各耦合参数的重整化流。泛函重整化与前述的重整化方案物理上等价，但是由于其重整化流方程是严格的，所以保留了超越常规的圈图展开的可能性。

1.2 泛函重整化群：从Wilson到Wetterich

本节对泛函重整化群做一简述。早在K. G. Wilson提出动量壳重整化群之后，K. G. Wilson等人就提出了一种更一般的计算重整化流的方法[13]。原始的方案是，利用微扰论，逐级计算耦合常数所对应的 β 函数。而后来的方案则是先将场变量拆分为快场和慢场。然后直接定义一个有效相互作用泛函¹，这个有效相互作用泛函是慢场的相互作用顶点的生成泛函。利用路径积分，可以直接导出该泛函随重整化参数的流动，即严格重整化群方程（Exact Renormalization Group Equation）。这样做的好处是两方面的：一方面，可以使用软截断。原始的方法按照涨落的波长大小来区分快慢场，数学上表现为截断函数是一个阶跃函数，这被称为硬截断。硬截断由于引入了奇异性，给计算带来一些困难。而后来的方案则是将场变量分解成快慢场之和，数学上表现为截断函数不再是一个奇异的阶跃函数而是一个平滑化的阶跃函数，这被称为软截断。软截断规避了硬截断的困难。另一方面，由于直接处理的是一个严格的方程，这给超越

¹请注意这里的有效相互作用泛函不同于场论中的有效势（Effective Potential）。

常规的圈图展开带来了可能。常规的圈图展开在这里相当于用幂级数展开势泛函，但是，我们也可以使用一些非多项式形式的试探形式（Ansatz），这就有可能计入一些非微扰效应。后来，J. Polchinski用更加简洁的形式重新导出了这个严格重整化群方程，并用于证明 ϕ^4 场论的可重整性[15]。因此，这个方程又被称为Wilson-Polchinski方程。

相比于常规的方法，Wilson-Polchinski方程固然具有一些优点，但是也具有很多不足。首先，在Wilson-Polchinski方案中，关于传播子的信息丢失了，即我们无法从有效相互作用泛函中读出传播子的信息，除非我们事先引入一个外源，并研究外源的流动。其次，实际计算表明，在临界现象中最为重要的反常维的计算结果强烈依赖于截断函数的选取，而且没有一个先验的原则指导我们选择何种截断函数。相比之下，常规的 ϵ 展开具有一定之规，原则上按部就班逐级完成高圈图的计算，反常维的结果可以得到改善[16]。最后，虽然Wilson-Polchinski方案在低阶很容易再现场论重整化方案的单圈结果，但是在高阶很难重现场论重整化方案的高圈图计算的结果。因此，Wilson-Polchinski方程尚有改进的余地。

一个新的思路就是不去研究这个势泛函的流动，而是研究场论上人们更关心的有效作用泛函，即顶角函数的生成泛函，的流动。这就是所谓的“有效平均作用”方法(Effective Average Action)，或者说Wetterich方案[17][18][14]。Wetterich方案依然将场变量分为快慢场，但是研究的是快场的有效作用而非慢场的有效相互作用。这相当于给场引入一个红外截断，然后分析顶角函数随截断的跑动，当红外截断跑到0则相当于求出了真实系统的顶角函数。相比于Wilson-Polchinski方案，Wetterich方案有不少改进。Wetterich方案可以直接读出传播子和顶角函数。实用上，Wetterich方案不仅能够逐级重现场论重整化的结果，还可以利用有效作用的非微扰试探形式进行非微扰计算。例如，利用Wetterich方案计算 ϕ^4 场论的反常维，其结果已足以和7圈的 ϵ 展开相比。而在无序系统的重整化群计算中，由于流向存在内禀的非解析性，所以非微扰的Wetterich方案成为必需[19]。此外，Wetterich方案也用于研究规范场论[20]。

1.3 重整化群与关联电子系统

本节阐述在关联电子系统的研究中，重整化群研究的独特意义。在关联电子系统中，常规的微扰论计算往往存在着严重地发散。以零温正方格点上的半满Hubbard模型为例，在只有最近邻跳跃时，零总动量的粒子-粒子圈图 $\chi_{pp}(0)$ 和

动量转移为 (π, π) 的粒子-空穴圈图 $\chi_{ph}(\vec{Q})$ 均为对数的平方发散，从而微扰论的每一级都有发散的可能[21][22]。这个双对数发散是由于费米面附近的模式带来的。在重整化计算中，由于所有对模式的求和都存在红外截断，这种发散不再出现。从而 β 函数成为有限。

特别值得指出的是，在重整化群的计算中，即便是对 β 函数作微扰展开，也对应着在常规微扰论中对某一类图形的无穷求和。以 ϕ^4 场论为例，对 β 函数的单圈计算，相当于在常规微扰论中计入了无穷多个多圈图形[23]。另一方面，从数学的观点看，由于在重整化群的计算中，一次只积掉一小部分自由度，所以可以预期，在此时作微扰展开，其效果要比一开始就试图积掉全部自由度并作微扰展开效果要好。

在关联电子系统中，存在着多种通道的失稳。还是以零温正方格点上的半满Hubbard模型为例，由于系统中存在的嵌套结构，系统中同时存在着向超导和反铁磁序失稳的可能性。此时，常规的微扰论往往顾此失彼。如果采取BCS型的梯形图求和，则只计入了粒子-粒子散射通道的效应，这将夸大超导涨落，而如果采取零声型的梯形图求和，则只计入了粒子-空穴通道的效应，这将夸大反铁磁涨落。相反，在后面我们将看到，运用Wetterich方程进行重整化计算时，我们将自动同时计入粒子-粒子和粒子-空穴散射的效应，并无偏颇地（on equal footing）计入超导涨落和反铁磁涨落的效应[24]。

前面简单总结了在关联电子系统研究中重整化群方法的独特意义。这里将对该方法在具体模型中的运用，以及该方法的发展作一简单评述。

泛函重整化被广泛地运用于研究高温超导体方面。D. Zanchi等人从Wilson-Polchinski方案的泛函重整化群出发，研究了正方格点上只有最近邻跳跃项 t 的Hubbard模型。他们发现，在半满填充附近，系统具有反铁磁序；当逐步减小电子填充时，系统进入d波超导相[25]。而稍后C. Honerkamp等人从Wetterich方案出发研究了正方格点上带次近邻跳跃 t' 的Hubbard模型[26]。除了得到与D. Zanchi等人相似的结果外，他们还发现，在反铁磁涨落主导的区域和d波超导涨落主导的区域之间，还存在一个所谓的“鞍点散射区”，即Brillouin区鞍点之间的Umklapp散射起主导作用。他们认为，此区域反铁磁与超导均不会成序，从而可以与高温超导体中的赝能隙区相联系。W. Metzner等人运用泛函重整化研究了Hubbard模型中的自发旋转对称破缺[27]。他们通过分析前向散射振幅发现，正方格点上Hubbard模型的费米面具有发生变形的趋势，即发生d波对称的Pomeranchuk转变的趋势。他们认为，这种强烈的“软费米面”涨落可能是高温超导体中电阻率按温度的幂律变化的原因[28]。H. C.

Fu等人研究了电声子相互作用对Hubbard模型配对的影响。他们发现， B_{1g} 对称的声子模式能够增强 d 波配对，但是其他的模式均抑制 d 波配对[29]。与此同时，他们发现 B_{1g} 声子能够诱导出 d 对称的，调制波矢为 $(\pi/2, \pi/2)$ 的电荷密度波[30]。A. A. Katanin等人用泛函重整化研究了电子型的高温超导体[31]。他发现，反铁磁能隙函数在所谓“热点”（hot spot），即费米面与磁Brillouin区相交的点，上最大，而在布里渊区对角线上消失。有趣的是，超导能隙也并不是简单遵循 d 波形式，而是在 B_{1g} 通道具有高阶谐波。泛函重整化技术也被用于计算Hubbard模型中电子的自能。计算表明，在正常态，在费米面上的热点处电子谱函数打开一个能隙，而在节点方向上谱函数具有良好准粒子的行为[32][33]。此外，在过掺杂区，泛函重整化群方法计算得到的电子散射率随温度变化的行为与实验符合地很好[34]。

除了研究高温超导体，泛函重整化群技术也被用于其它方面。C. Honerkamp等人从理解钠钴氧化物超导电性的角度，研究了三角格点上的Hubbard模型[35]。而S. W. Tsai等人研究了各向异性三角格点上的Hubbard模型，并讨论了其与有机物超导体的关系[36]。在冷原子研究方面，C. Honerkamp等人研究了半满 $SU(N)$ Hubbard模型，并指出当 $N < 3$ 时反铁磁相是稳定的，而 $N > 3$ 时环流相，或者广义 d 密度波相，是稳定的[37]。C. Honerkamp还研究了石墨格点上的Hubbard模型[38]。最近，泛函重整化群也被用到了铁基超导体的研究中以探讨其中反铁磁涨落与超导关系[39][40]。P. Jakubczyk等人用泛函重整化重新研究了关联电子系统中的磁性量子相变，给出了从高温高斯型行为到零温高斯型行为的渡越[41][42]，超越了基于传统RG的Hertz-Millis理论[43][44]。特别值得一提的是，W. Metzner的研究组将泛函重整化用于研究量子点与一维系统，并得到了和数值方法定量上一致的结果[45][46][47]。

在理论工具的发展方面，C. Honerkamp等人提出，除了使用常规的动量截断以外，还可以使用温度本身[48]以及相互作用强度[49]作为截断参数。使用温度作为截断参数，除了直接能够给出给定物理温度下系统的行为外，还能够解决常规的重整化方案难以顾及铁磁涨落的困难。实际上，C. Honerkamp等人发现，对于正方格点上的Hubbard模型， t'/t 较大时存在铁磁涨落与 p 波超导的竞争[48][50]。使用相互作用强度作为截断参数，计算相对简单，但是由于其不是一个真正的截断，已经不再是真正的重整化群。

R. Gersch等人还将泛函重整化推广到对称破缺的情形[51]。往常的泛函重整化群计算只能局限在正常相，通过计算极化率来判断主导的不稳定通道，无法判断多种长程序共存的情况，也无法计算实际的序参量大小。补救的措施

就是，当截断流动到某一给定的大小时，使用顶角函数作为有效相互作用，进行平均场的计算，从而对零温相做出判断[52]。新的方案利用Wetterich方案计算自能的正常和反常部分，从而对序参量的大小作出直接计算，也能研究多序共存的情况[53][54]。此外，A. Katanin改进了原来的Wetterich方程，使之满足Ward-Takahashi等式[55]。M. Salmhofer则发展了一种Wick编序的泛函重整化方案，这种新方案具有良好的上下界性质，被用于证明场论的可重整性[56]。

第二章 泛函重整化方案与Wetterich方程的导出

2.1 Wilson-Polchinski方程的路径积分导出

如前节所述，Wilson-Polchinski方程是第一个被导出的泛函重整化方程。在本节，我将介绍如何以现代的形式导出这个方程[14][47]。为了保持形式的简洁和概念的清晰，我们将对实标量场导出这个方程，将之推广到玻色场或者费米场的推导将是直截了当的。我们要研究的一个一般的实标量场的模型由下述配分函数表达：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2}(\phi, \mathcal{C}_0^{-1} \phi) - \mathcal{V}[\phi]} \quad (2.1)$$

其中 ϕ 是实标量场， \mathcal{V} 是相互作用，而 \mathcal{C}_0 是传播子，符号 (\dots, \dots) 代表对所有内部指标求和，宛如一个内积。请注意，这里积分测度已经除掉了自由场对应的配分函数，以后不作声明均是如此。

首先我们引入快场和慢场的定义。按照Wilson的动量壳重整化方案，在引入截断 Λ 以后，所有满足 $k < \Lambda$ 的激发模式都被当作低能自由度或者说慢场，所有满足 $k > \Lambda$ 的激发模式都被当作高能自由度或者说快场；随后，快场被积掉而慢场被保留。如前文所述，这种硬截断会带来一些问题：从实空间或者说Kadanoff的角度来理解，就是这种硬截断带来了实空间中的振荡，从而导致只保留局域相互作用的重整化群计算的准确性降低。因此，使用软截断对保证重整化群计算的有效性实属必需。我们观察到下述恒等式：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(a+b)}} \int_{\mathcal{R}} dz e^{-\frac{z^2}{2(a+b)} - V(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \iint_{\mathcal{R}^2} dx dy e^{-\frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b} - V(x+y)} \quad (2.2)$$

受此启发，我们可以构造两个场变量 $\phi_>$ 和 $\phi_<$ ，使得其传播子分别为 $\mathcal{C}_<$ 和 $\mathcal{C}_>$ ，并且满足 $\mathcal{C}_< + \mathcal{C}_> = \mathcal{C}_0$ 。于是：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi_< \mathcal{D}\phi_> e^{-\frac{1}{2}(\phi_<, \mathcal{C}_<^{-1} \phi_<) - \frac{1}{2}(\phi_>, \mathcal{C}_>^{-1} \phi_>) - \mathcal{V}[\phi_< + \phi_>]} \quad (2.3)$$

$$= \int \mathcal{D}\phi_< e^{-\frac{1}{2}(\phi_<, \mathcal{C}_\Lambda^{-1} \phi_<)} \int \mathcal{D}\phi_> e^{-\frac{1}{2}(\phi_>, \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \phi_>) - \mathcal{V}[\phi_< + \phi_>]} \quad (2.4)$$

我们选择 $\mathcal{C}_< = (1 - \chi_\Lambda) \mathcal{C}_0 \triangleq \mathcal{C}_\Lambda$ ，从而 $\mathcal{C}_> = \chi_\Lambda \mathcal{C}_0 \triangleq \mathcal{D}_\Lambda$ 。其中 $\chi_\Lambda(k)$ 是我们选择的截断函数，其在 $k \rightarrow 0$ 时趋于0，而在 $k \rightarrow \infty$ 时趋于1，在 $k = \Lambda$ 附近光滑。如

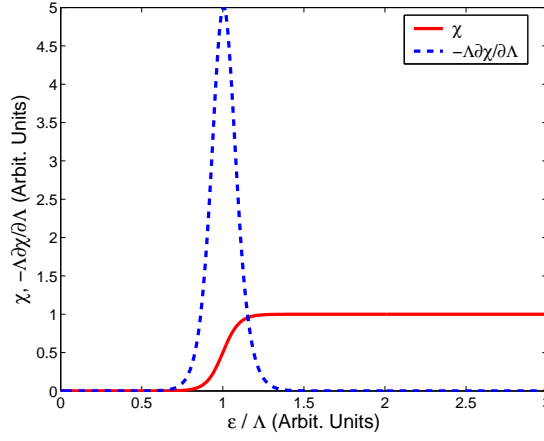


图 2.1 截断函数与截断函数的一阶导数。其中红色实线代表截断函数，而蓝色虚线代表截断函数的一阶导数。这里我们选取了 $\alpha = 0.1$ 。

果我们选取 χ 为阶跃函数，则自动退化到硬截断。一个合适的选择是：

$$\chi_\Lambda(\epsilon) = \frac{1}{\exp(\frac{\Lambda-\epsilon}{\alpha\Lambda}) + 1} \quad (2.5)$$

这里 ϵ 为涨落模式的能量。容易看出这个函数类似于费米分布函数，可以认为是台阶函数的平滑化。其中 $\alpha > 0$ 为任意可调参数，这个数值越大则函数越平滑，这个数值越小则越尖锐。图 2.1 为这个函数与其对截断参数的一阶导数的行为。我们可以看到，截断函数的一阶导数在截断能量附近取最大值，如果取 $\alpha \rightarrow 0$ 则退化为 δ 函数。

于是 $\phi_<$ 主要对应于低能模式为慢场，而 $\phi_>$ 主要对应于高能模式为快场。进而我们可以定义慢场的有效相互作用：

$$e^{-\mathcal{V}_\Lambda[\phi_<]} = \int \mathcal{D}\phi_> e^{-\frac{1}{2}(\phi_>, \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \phi_>) - \mathcal{V}[\phi_< + \phi_>]} \quad (2.6)$$

在导出有效相互作用的重整化群方程之前，我们先导出 \mathcal{V}_Λ 的一个非常简洁优美的表达式。按照定义我们有：

$$e^{-\mathcal{V}_\Lambda[\chi]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2}(\phi, \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \phi) - \mathcal{V}[\phi + \chi]} \quad (2.7)$$

引入一个同时和 ϕ 与 χ 耦合的源 η ，则：

$$e^{-\mathcal{V}_\Lambda[\chi]} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2}(\phi, \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \phi) - \mathcal{V}[\phi + \chi] + (\eta, \phi + \chi)} \quad (2.8)$$

于是相互作用可以利用对源 η 的导数移出积分号外：

$$e^{-\mathcal{V}_\Lambda[\chi]} = \lim_{\eta \rightarrow 0} e^{-\mathcal{V}[\frac{\delta}{\delta\eta}]} \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2}(\phi, \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \phi) + (\eta, \phi + \chi)} \quad (2.9)$$

剩下的部分可以直截了当地积掉：

$$e^{-\mathcal{V}_\Lambda[\chi]} = \lim_{\eta \rightarrow 0} e^{-\mathcal{V}[\frac{\delta}{\delta\eta}]} e^{\frac{1}{2}(\eta, \mathcal{D}_\Lambda \eta)} e^{(\eta, \chi)} \quad (2.10)$$

将 χ 看成 η 的源，则我们有：

$$e^{-\mathcal{V}_\Lambda[\chi]} = e^{\frac{1}{2}(\frac{\delta}{\delta\chi}, \mathcal{D}_\Lambda \frac{\delta}{\delta\chi})} \lim_{\eta \rightarrow 0} e^{-\mathcal{V}[\frac{\delta}{\delta\eta}]} e^{(\eta, \chi)} \quad (2.11)$$

完成对 η 的求导并取极限，我们得到了 \mathcal{V}_Λ 一个非常简洁表达式：

$$e^{-\mathcal{V}_\Lambda[\chi]} = e^{\frac{1}{2}(\frac{\delta}{\delta\chi}, \mathcal{D}_\Lambda \frac{\delta}{\delta\chi})} e^{-\mathcal{V}[\chi]} \quad (2.12)$$

在进行进一步计算之前，我们看下在图形语言（diagrammar）的意义下 \mathcal{V}_Λ 的意义[2][47]。我们如果按照幂级数展开 \mathcal{V}_Λ ，则得到了慢场的各级有效相互作用。我们知道如果按幂级数展开相互作用的指数将重现所有阶的相互作用顶点，每一个顶点都被外场 χ 封闭。按幂级数展开微分算子的指数将重现所有的内线。微分算子对顶点上的外场的作用将会去掉外场并用相应的内线连接这些点。于是我们得到了这样的图形之和：这些图形重现了一个以 \mathcal{D}_Λ 为内线， \mathcal{V} 为顶点的场论的图形展开，其中不包括那些外点直接与内线相连的图形¹，并且所有的外点均被外场 χ 封闭。最后，求对数的运算将挑选出所有的连通图形。因此我们得到对应于 n 点有效相互作用的第 p 阶费曼图形的规则：画下所有包含 n 个外点， p 个相互作用顶点的连通图，去掉其中外点直接连接到快场的内线的图形，并计入相应的对称因子。下面给出了一个四外点的例子，其中左边的图形是允许的，而右边是不允许的。

现在我们导出慢场的势的重整化群方程，即 \mathcal{V}_Λ 随 Λ 跑动的方程。为此，我们只需要在2.12中对 Λ 求偏导：

$$-\dot{\mathcal{V}}_\Lambda e^{-\mathcal{V}_\Lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\delta\chi}, \dot{\mathcal{D}}_\Lambda \frac{\delta}{\delta\chi} \right) e^{-\mathcal{V}_\Lambda} \quad (2.13)$$

¹注意，这不等同于场论中我们熟悉的截腿图形，截腿图形的外点不能连接到任何一个自能子图，而这里连接到自能子图则是允许的，只要外点不直接连接到内线上。

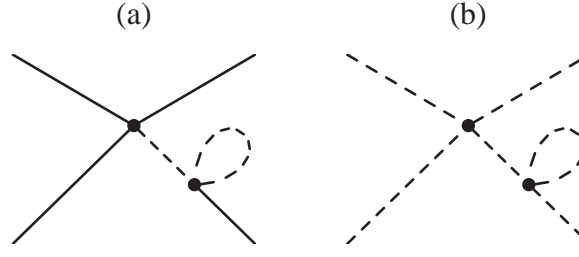


图 2.2 四点有效相互作用包含的一个图形。其中(a)为允许的图形，而(b)为不允许的图形。图中虚线代表快场的内线，而实线表示相互作用顶角直接连接到外点上。

将上式的右边展开：

$$-\dot{\mathcal{V}}_{\Lambda} e^{-\mathcal{V}_{\Lambda}} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\mathcal{D}}_{\Lambda} \frac{\delta^2 \mathcal{V}_{\Lambda}}{\delta \chi^2}) e^{-\mathcal{V}_{\Lambda}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \mathcal{V}_{\Lambda}}{\delta \chi}, \dot{\mathcal{D}}_{\Lambda} \frac{\delta \mathcal{V}_{\Lambda}}{\delta \chi} \right) e^{-\mathcal{V}_{\Lambda}} \quad (2.14)$$

整理之，我们得到：

$$\dot{\mathcal{V}}_{\Lambda} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\mathcal{D}}_{\Lambda} \frac{\delta^2 \mathcal{V}_{\Lambda}}{\delta \chi^2}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \mathcal{V}_{\Lambda}}{\delta \chi}, \dot{\mathcal{D}}_{\Lambda} \frac{\delta \mathcal{V}_{\Lambda}}{\delta \chi} \right) \quad (2.15)$$

这就是著名的Wilson-Polchinski方程。这里值得强调的是，这个方程是一个严格的方程，不包含任何近似。注意这里出现的传播子是 $\dot{\mathcal{D}}_{\Lambda}$ ，所以这里的传播子对应的模式主要是 $\epsilon \approx \Lambda$ 的那些模式，即截断能量附近的那些模式。这一点可以通过观察图2.1的行为来看出。

方程2.15是一个泛函微分方程，即里面既包含了常微分又包含了泛函导数。对于这种类型的方程一般没有严格解法。这里我们按常规思路将 \mathcal{V}_{Λ} 按幂级数展开，展开的各阶系数对应于相应的慢场的各级相互作用顶点：

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\Lambda}[\chi] &= V_0 + \frac{1}{1!} \int dx_1 V_1(x_1) \chi(x_1) + \frac{1}{2!} \iint dx_1 dx_2 V_2(x_1, x_2) \chi(x_1) \chi(x_2) \\ &+ \frac{1}{3!} \iiint dx_1 dx_2 dx_3 V_3(x_1, x_2, x_3) \chi(x_1) \chi(x_2) \chi(x_3) + \cdots \end{aligned} \quad (2.16)$$

这里展开的各阶系数 $V_n, n = 0, 1, 2, \dots$ 为慢场的相互作用顶角函数，其均为截断参数 Λ 的函数。注意这里的顶角函数对自变量 x_1, x_2, \dots 的置换均为对称。我们将上式带入2.15，则可以得到各阶相互作用顶角的重整化群流。为此我们

对2.15两边求泛函导数并取 $\chi \rightarrow 0$ 的极限，则可得到下述的方程链：

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_0 &= \frac{1}{2} \iint dz_1 dz_2 \dot{\mathcal{D}}_\Lambda(z_1, z_2) V_2(z_1, z_2) \\
 \dot{V}_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \iint dz_1 dz_2 \dot{\mathcal{D}}_\Lambda(z_1, z_2) V_4(x_1, x_2, z_1, z_2) + \cdots \\
 \dot{V}_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{2} \iint dz_1 dz_2 \dot{\mathcal{D}}_\Lambda(z_1, z_2) V_6(x_1, x_2, x_3, x_4, z_1, z_2) \\
 &+ \frac{1}{2} \iint dz_1 dz_2 V_4(x_1, x_2, x_3, z_1) \dot{\mathcal{D}}_\Lambda(z_1, z_2) V_2(z_2, x_4) \\
 &+ \cdots
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

这里 \cdots 代表对顶角函数宗量的所有可能置换。注意这里我们假定了系统具有 Z_2 对称，并不存在奇数阶的相互作用。此方程链可以用图形语言表达：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left(\bullet \right) &= \frac{1}{2} \left(\text{loop} \right) \\
 \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left(\text{line} \right) &= \frac{1}{2} \left(\text{line with loop} \right) + \cdots \\
 \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left(\text{cross} \right) &= \frac{1}{2} \left(\text{cross with loop} \right) + \frac{1}{2} \left(\text{cross with internal line} \right) + \cdots \\
 \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left(\text{cross with line} \right) &= \frac{1}{2} \left(\text{cross with line and loop} \right) + \frac{1}{2} \left(\text{cross with line and internal line} \right) + \cdots
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

在2.18中，虚线为快场的传播子，而 \cdots 代表所有可能的置换。我们注意到，所有的方程都只包含了一根内线 $\dot{\mathcal{D}}_\Lambda$ 。这个特征由D. Zanchi等人作出了一个简单的说明：由于每一根内线对应于被积掉的自由度 $d\Lambda$ ，而一阶常微分方程的右边只收集正比于 $d\Lambda$ 的项，所以所有的图形都只有一根内线[25]。

2.2 Wetterich方程的路径积分导出

本节导出Wetterich方程。类似于前面一节，我们这里只对实标量场给出推导，对其他场的推导则是直截了当的。我们同样考虑类似于2.1的模型：

$$\mathcal{Z}[\eta] = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2}(\phi, \mathcal{Q}_\Lambda, \phi) - \mathcal{V}[\phi] + (\phi, \eta)} \tag{2.19}$$

其中 \mathcal{Q}_Λ 是传播子的逆，而 Λ 为红外截断参数。我们可以选择 $\mathcal{Q}_\Lambda = \chi_\Lambda^{-1} \mathcal{Q}_0$ 。这里我们评述下各种重整化群方案中的截断。在常规的动量壳重整化群，或者相关的Wilson-Polchinski方案中我们引入的是一个紫外截断。而在Wetterich方案中我们使用的是红外截断。表面上看这二者不同。在前一种方案中我们需要积掉快场，但实际上这里慢场的紫外截断恰好成为快场的红外截断。由于在Wetterich方案中我们不明显引入快慢场的区分，或者说我们直接研究快场，所以这二者是等价的。

定义Helmholtz自由能，或者连通格林函数的发生泛函：

$$\mathcal{W}_\Lambda[\eta] = \ln \mathcal{Z}[\eta] \quad (2.20)$$

于是场的经典期望：

$$\bar{\phi} \triangleq \langle \phi \rangle = \frac{\delta \mathcal{W}_\Lambda}{\delta \eta} \quad (2.21)$$

从而我们可引入Legendre变换，定义Gibbs自由能，或者顶角函数的发生泛函：

$$\Gamma_\Lambda[\bar{\phi}] = (\eta, \bar{\phi}) - \mathcal{W}_\Lambda \quad (2.22)$$

Wetterich方程描述的就是 Γ_Λ 随红外截断 Λ 的跑动。

在推导Wetterich方程之前先导出 \mathcal{W}_Λ 的流动。为此我们对2.20两边取 Λ 的导数：

$$\frac{\partial \mathcal{W}_\Lambda}{\partial \Lambda} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \Lambda} \quad (2.23)$$

上式右边为：

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \Lambda} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\phi - \frac{1}{2}(\phi, \dot{\mathcal{Q}}_\Lambda \phi) e^{-\frac{1}{2}(\phi, \mathcal{Q}_\Lambda \phi) - \mathcal{V}[\phi] + (\eta, \phi)} \quad (2.24)$$

这里的 $\dot{\mathcal{Q}}_\Lambda$ 是 \mathcal{Q}_Λ 对 Λ 的导数。利用外源将 $-1/2(\phi, \dot{\mathcal{Q}}_\Lambda \phi)$ 移出积分号外：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \Lambda} &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\delta \eta}, \dot{\mathcal{Q}}_\Lambda \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2}(\phi, \mathcal{Q}_\Lambda \phi) - \mathcal{V}[\phi] + (\eta, \phi)} \right] \\ &= -e^{-\mathcal{W}_\Lambda[\eta]} \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\delta \eta}, \dot{\mathcal{Q}}_\Lambda \frac{\delta}{\delta \eta} \right) e^{\mathcal{W}_\Lambda[\eta]} \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left(\dot{\mathcal{Q}}_\Lambda \frac{\delta^2 \mathcal{W}_\Lambda}{\delta \eta^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \mathcal{W}_\Lambda}{\delta \eta}, \dot{\mathcal{Q}}_\Lambda \frac{\delta \mathcal{W}_\Lambda}{\delta \eta} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

这里我们使用了泛函偏导的链式法则。我们从而得到了 \mathcal{W}_Λ 满足的方程：

$$\frac{\partial \mathcal{W}_\Lambda}{\partial \Lambda} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\mathcal{Q}}_\Lambda \frac{\delta^2 \mathcal{W}_\Lambda}{\delta \eta^2}) - \frac{1}{2} (\frac{\delta \mathcal{W}_\Lambda}{\delta \eta}, \dot{\mathcal{Q}}_\Lambda \frac{\delta \mathcal{W}_\Lambda}{\delta \eta}) \quad (2.26)$$

这个方程将是我们推导的基础。

作为进一步推导的预备我们导出 Γ_Λ 和 \mathcal{W}_Λ 之间的两个关系。首先导出 $\dot{\Gamma}_\Lambda$ 和 $\dot{\mathcal{W}}_\Lambda$ 之间的关系。首先对2.22两边取对 Λ 的导数：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_\Lambda}{\partial \Lambda} &= (\bar{\phi}, \frac{\partial \eta}{\partial \Lambda}) - \frac{\partial \mathcal{W}_\Lambda}{\partial \Lambda} - (\frac{\delta \mathcal{W}_\Lambda}{\delta \eta}, \frac{\partial \eta}{\partial \Lambda}) \\ &= (\bar{\phi}, \frac{\partial \eta}{\partial \Lambda}) - \frac{\partial \mathcal{W}_\Lambda}{\partial \Lambda} - (\bar{\phi}, \frac{\partial \eta}{\partial \Lambda}) \\ &= -\frac{\partial \mathcal{W}_\Lambda}{\partial \Lambda} \end{aligned} \quad (2.27)$$

可见， Γ_Λ 的重整化群流和 \mathcal{W}_Λ 的重整化群流是直接相关的。我们再导出 Γ_Λ 和 \mathcal{W}_Λ 的泛函导数之间的关系。由于 Γ_Λ 是 \mathcal{W}_Λ 的Legendre变换：

$$\eta(x) = \frac{\delta \Gamma_\Lambda[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}(x)} \quad (2.28)$$

两边对 $\eta(y)$ 取泛函导数：

$$\frac{\delta \eta(x)}{\delta \eta(y)} = \int dz \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}(x) \delta \bar{\phi}(z)} \frac{\delta \bar{\phi}(z)}{\delta \eta(y)} \quad (2.29)$$

然而我们有基本的关系：

$$\frac{\delta \eta(x)}{\delta \eta(y)} = \delta(x - y) \quad (2.30)$$

这是因为按定义 $\eta(x)$ 作为 η 的泛函将只依赖于场在 x 点的值。将上式以及 ϕ 的定义带入，我们有：

$$\delta(x - y) = \int dz \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}(x) \delta \bar{\phi}(z)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}_\Lambda[\eta]}{\delta \eta(z) \delta \eta(y)} \quad (2.31)$$

用简洁的记号可以写作：

$$\frac{\delta^2 \mathcal{W}_\Lambda}{\delta \eta^2} = \left(\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\phi}^2} \right)^{-1} \quad (2.32)$$

现在我们来完成导出Wetterich方程的最后一步。利用2.26和2.27我们可以得

到:

$$\frac{\partial \Gamma_\Lambda}{\partial \Lambda} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\mathcal{Q}}_\Lambda \frac{\delta^2 \mathcal{W}_\Lambda}{\delta \eta^2}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \mathcal{W}_\Lambda}{\delta \eta}, \dot{\mathcal{Q}}_\Lambda \frac{\delta \mathcal{W}_\Lambda}{\delta \eta} \right) \quad (2.33)$$

利用2.32我们得到了Wetterich方程的最终表达式:

$$\frac{\partial \Gamma_\Lambda}{\partial \Lambda} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\mathcal{Q}}_\Lambda (\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\phi}^2})^{-1}) + \frac{1}{2} (\bar{\phi}, \dot{\mathcal{Q}}_\Lambda \bar{\phi}) \quad (2.34)$$

类似于2.15, 方程2.34是一个泛函微分方程, 这里我们将 Γ_Λ 按幂级数展开, 展开的各阶系数对应于相应的顶角函数:

$$\begin{aligned} \Gamma_\Lambda[\bar{\phi}] &= \Gamma_0 + \frac{1}{1!} \int dx_1 \Gamma_1(x_1) \bar{\phi}(x_1) + \frac{1}{2!} \iint dx_1 dx_2 \Gamma_2(x_1, x_2) \bar{\phi}(x_1) \bar{\phi}(x_2) \\ &+ \frac{1}{3!} \iiint dx_1 dx_2 dx_3 \Gamma_3(x_1, x_2, x_3) \bar{\phi}(x_1) \bar{\phi}(x_2) \bar{\phi}(x_3) + \cdots \end{aligned} \quad (2.35)$$

这里展开的各阶系数 $\Gamma_n, n = 0, 1, 2, \dots$ 为顶角函数, 其均为截断参数 Λ 的函数。注意这里的顶角函数对自变量 x_1, x_2, \dots 的置换均为对称。我们将上述展开带入2.34中, 导出各个顶角函数随重整化的流动。为此我们对2.34两边逐次求 $\bar{\phi}$ 的泛函导数。但是这里的困难是在2.34中包含一个泛函导数的逆。这里我们明显定义这个逆为:

$$\int dx_2 \mathcal{A}(x_1, x_2) \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\phi}(x_2) \delta \bar{\phi}(x_3)} = \delta(x_1, x_3) \quad (2.36)$$

两边对 $\bar{\phi}$ 取泛函导数, 则得到:

$$\int dx_2 \frac{\delta \mathcal{A}(x_1, x_2)}{\delta \bar{\phi}(x)} \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\phi}(x_2) \delta \bar{\phi}(x_3)} + \int dx_2 \mathcal{A}(x_1, x_2) \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\phi}(x) \delta \bar{\phi}(x_2) \delta \bar{\phi}(x_3)} = 0 \quad (2.37)$$

两边同乘以 $\mathcal{A}(x_3, x_4)$, 然后对 x_3 积分则有:

$$\frac{\delta \mathcal{A}(x_1, x_2)}{\delta \bar{\phi}(x)} + \iint dx_2 dx_3 \mathcal{A}(x_1, x_2) \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\phi}(x) \delta \bar{\phi}(x_2) \delta \bar{\phi}(x_3)} \mathcal{A}(x_3, x_4) = 0 \quad (2.38)$$

于是有:

$$\frac{\delta \mathcal{A}(x_1, x_2)}{\delta \bar{\phi}(x)} = - \iint dx_2 dx_3 \mathcal{A}(x_1, x_2) \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\phi}(x) \delta \bar{\phi}(x_2) \delta \bar{\phi}(x_3)} \mathcal{A}(x_3, x_4) \quad (2.39)$$

我们同时定义：

$$\mathcal{G}_\Lambda(x_1, x_2) \triangleq \lim_{\phi \rightarrow 0} \mathcal{A}(x_1, x_2) \quad (2.40)$$

$$\mathcal{S}_\Lambda(x_1, x_4) \triangleq \int dx_2 dx_3 \mathcal{G}_\Lambda(x_1, x_2) \dot{\mathcal{Q}}_\Lambda(x_2, x_3) \mathcal{G}_\Lambda(x_3, x_4) \quad (2.41)$$

很明显，由于 \mathcal{G}_Λ 是两点顶角函数的逆，从而正是两点格林函数；而 \mathcal{S}_Λ 被称为单能标格林函数。这个称呼源自于其中包含了对截断参数的求导。如果我们假定 $\mathcal{G}_\Lambda = \mathcal{Q}_\Lambda^{-1}$ ，带入对单能标格林函数的定义中，我们得到：

$$\mathcal{S}_\Lambda = \mathcal{Q}_\Lambda^{-1} \dot{\mathcal{Q}}_\Lambda \mathcal{Q}_\Lambda^{-1} = \frac{\partial \mathcal{Q}_\Lambda^{-1}}{\partial \Lambda} = \dot{\mathcal{C}}_\Lambda = \dot{\chi}_\Lambda \mathcal{C}_0 \quad (2.42)$$

出现了截断函数的一阶导数，正说明了单能标格林函数的意义。

有了这些准备工作，我们可以直接通过对2.34逐阶求泛函导数来求出顶角函数的流动：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \Lambda} &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\mathcal{Q}}_\Lambda \mathcal{G}_\Lambda) \\ \frac{\partial \Gamma_2(x_1, x_2)}{\partial \Lambda} &= \frac{1}{2} \iint dz_1 dz_2 \Gamma_4(x_1, x_2, z_1, z_2) \mathcal{S}_\Lambda(z_1, z_2) + \dot{\mathcal{Q}}_\Lambda + \cdots \\ \frac{\partial \Gamma_4(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \Lambda} &= \frac{1}{2} \iint dz_1 dz_2 \Gamma_6(x_1, x_2, x_3, x_4, z_1, z_2) \mathcal{S}_\Lambda(z_1, z_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \iiint dz_1 dz_2 dz_3 dz_4 \Gamma_4(x_1, x_2, z_1, z_2) [\mathcal{G}_\Lambda(z_1, z_3) \mathcal{S}_\Lambda(z_2, z_4) \\ &\quad + \mathcal{S}_\Lambda(z_1, z_3) \mathcal{G}_\Lambda(z_2, z_4)] \Gamma_4(z_3, z_4, x_3, x_4) + \cdots \end{aligned} \quad (2.43)$$

类似于前面的2.17，这里的 \cdots 表示对内部宗量做一切可能的置换，同时我们假定了模型具有 Z_2 对称，不存在奇数阶的顶角。我们引入自能 $\Sigma = \Gamma_2 - \mathcal{Q}_\Lambda$ 则上述方程链可改写为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \Lambda} &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{\mathcal{Q}}_\Lambda \mathcal{G}_\Lambda) \\ \frac{\partial \Sigma(x_1, x_2)}{\partial \Lambda} &= \frac{1}{2} \iint dz_1 dz_2 \Gamma_4(x_1, x_2, z_1, z_2) \mathcal{S}_\Lambda(z_1, z_2) + \cdots \\ \frac{\partial \Gamma_4(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \Lambda} &= \frac{1}{2} \iint dz_1 dz_2 \Gamma_6(x_1, x_2, x_3, x_4, z_1, z_2) \mathcal{S}_\Lambda(z_1, z_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \iiint dz_1 dz_2 dz_3 dz_4 \Gamma_4(x_1, x_2, z_1, z_2) [\mathcal{G}_\Lambda(z_1, z_3) \mathcal{S}_\Lambda(z_2, z_4) \\ &\quad + \mathcal{S}_\Lambda(z_1, z_3) \mathcal{G}_\Lambda(z_2, z_4)] \Gamma_4(z_3, z_4, x_3, x_4) + \cdots \end{aligned}$$

$$+ \mathcal{S}_\Lambda(z_1, z_3) \mathcal{G}_\Lambda(z_2, z_4)] \Gamma_4(z_3, z_4, x_3, x_4) + \dots \quad (2.44)$$

同样，类似于2.18我们可以引入图形语言来表达前面的方程链：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Lambda} (\text{•}) &= \frac{1}{2} (\text{• with a dashed loop}) \\ \frac{\partial}{\partial \Lambda} (\text{—•—}) &= \frac{1}{2} (\text{—•— with a dashed loop}) + \dots \\ \frac{\partial}{\partial \Lambda} (\text{X}) &= \frac{1}{2} (\text{X with a dashed loop}) + \frac{1}{2} (\text{X with a wavy loop}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\text{X with a dashed loop and a wavy loop}) + \dots \end{aligned} \quad (2.45)$$

这里虚线代表 \mathcal{S}_Λ ，而波浪线代表 \mathcal{G}_Λ 。注意到这组方程链具有一个显著的单圈特征，即所有的图形都只包含单圈图。这个显著地不同于前面Wilson-Polchinski方程的图形表示，后者所有的图形都只出现了一根内线。我们可以列出一张表格，对比Wilson-Polchinski 方案和Wetterich方案：

项目	Wilson-Polchinski	Wetterich
泛函	有效相互作用泛函	有效作用泛函
图形展开	“截腿”连通图	1PI图形
图形拓扑	单根内线	单圈图
内线	$\dot{\mathcal{D}}_\Lambda$	\mathcal{S}_Λ 和 \mathcal{G}_Λ

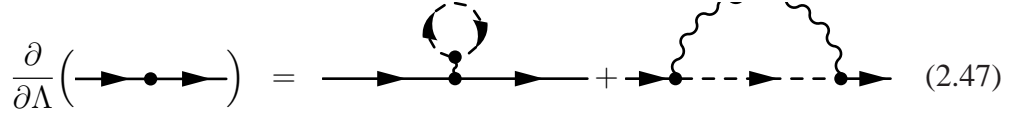
2.3 Wetterich方程的图形导出

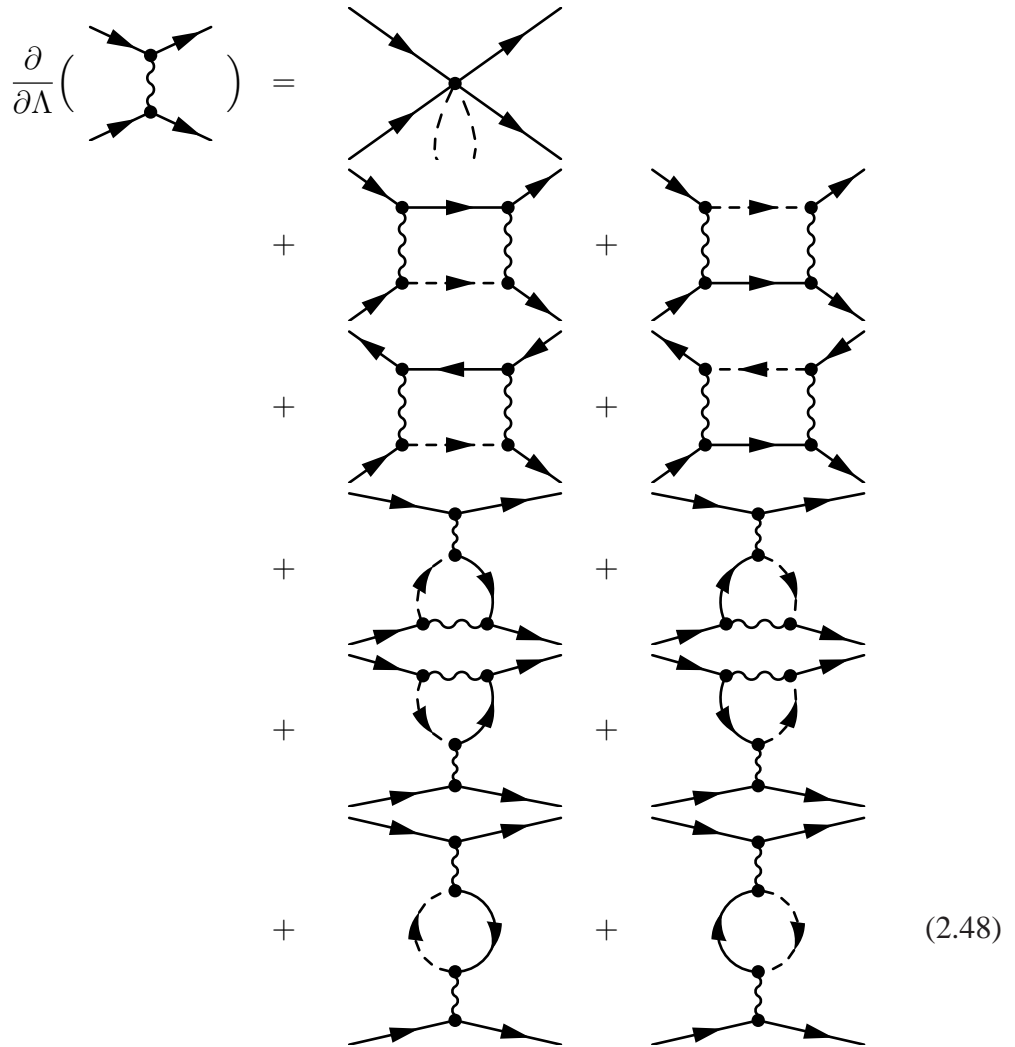
本节讨论如何利用对费曼图的分析导出Wetterich方程链，即方程2.44。这里值得指出的是，对于Wilson-Polchinski方程，D. Zanchi等人在文献[25]中给出了一个基于费曼图的导出；对于Wetterich方程，就本人知识范围尚未见到文献中有基于费曼图的导出。在本节中，为了便于后面的分析，以及避开计算对称因子的麻烦，我们将不再考虑实标量场，而考虑一个具有 $U(N)$ 对称的场论。这样的

一个模型，其四点顶角函数的忠实表示为：

$$\Gamma_4 = \text{diagram} \quad (2.46)$$


我们按照前面一节的精神写下自能和四点顶角函数的重整化方程：

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} \left(\text{diagram} \right) = \text{diagram} + \text{diagram} \quad (2.47)$$


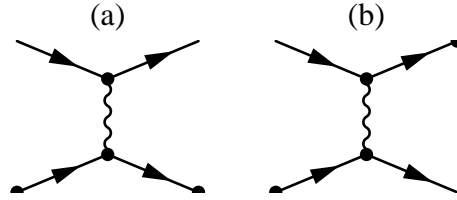
$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} \left(\text{diagram} \right) = \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} \quad (2.48)$$


其中虚线代表单能标格林函数 Q_Λ ，而内线中的实线代表格林函数 G_Λ ，所有的相互作用线代表相应的顶角函数。

本节任务就是通过对费曼图的分析导出2.47和2.48。我们的基本思想就

是：给定任意一个1PI图形，其中所有的内线都包含一个能标参数 Λ 。对该图形求 Λ 的一阶导数，那么结果就是对其中的某一根内线求 Λ 的一阶导数，并遍历所有的内线。于是，顶角函数对能标的一阶导数，对应于所有1PI图形并在一切可能的位置将内线替换为内线的一阶导数。下一步就是将这个图形展开重新表达为顶角函数。考虑任意一个某根内线被替换的 m 阶角图形，如果我们将这根内线拿掉（割断）并替换为外点，按照1PI的定义，剩下的部分定是一个连通的 $m+2$ 阶图形。该图形一定又能够被低阶的顶角函数表示出来。收集所有的可能的表示，剔除多余的和不可能的，并将原来的内线的一阶导数替换回去，则我们得到了一个封闭（顶角表达顶角的意义下）的方程链，此即按顶角函数展开的Wetterich方程。

首先我们来分析2.47。我们注意到，如果对一个自能图求一阶导数，那么结果还是一个自能型的图形，但是在一切可能的位置把 C_Λ 替换成 \dot{C}_Λ 。如果我们形式上拿掉这个被替换的内线，或者说把这根内线割断，那么我们剩下的就是一个四点连通图。这样就只有两种可能：



其中两个端点的圆点代表被割断的部分。注意这里的四根外腿中，只有加圆点的才可能包含自能子图；如若不然，则重新封闭这个图形，得到的自能子图的外腿包含了单粒子可约的部分，所以这是不可能的。而缀加自能子图的方式也是有限的，实际上，只有三种可能：完全没有缀加，只在一根外腿上缀加自能子图，以及在两根外腿上都缀加自能子图。于是，这三者的贡献之和为

$$\begin{aligned}
 & \dot{C}_\Lambda + \dot{C}_\Lambda \Sigma \mathcal{G}_\Lambda + \mathcal{G}_\Lambda \Sigma \dot{C}_\Lambda + \mathcal{G}_\Lambda \Sigma \dot{C}_\Lambda \Sigma \mathcal{G}_\Lambda \\
 = & (1 + \mathcal{G}_\Lambda \Sigma) \dot{C}_\Lambda (1 + \Sigma \mathcal{G}_\Lambda) \\
 = & (1 + \mathcal{G}_\Lambda \Sigma) C_\Lambda^{-1} \dot{C}_\Lambda C_\Lambda^{-1} (1 + \Sigma \mathcal{G}_\Lambda) \\
 = & (C_\Lambda^{-1} + \mathcal{G}_\Lambda \Sigma C_\Lambda^{-1}) \dot{C}_\Lambda (C_\Lambda^{-1} + C_\Lambda^{-1} \Sigma \mathcal{G}_\Lambda) \\
 = & \mathcal{G}_\Lambda \dot{C}_\Lambda \mathcal{G}_\Lambda = S_\Lambda
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

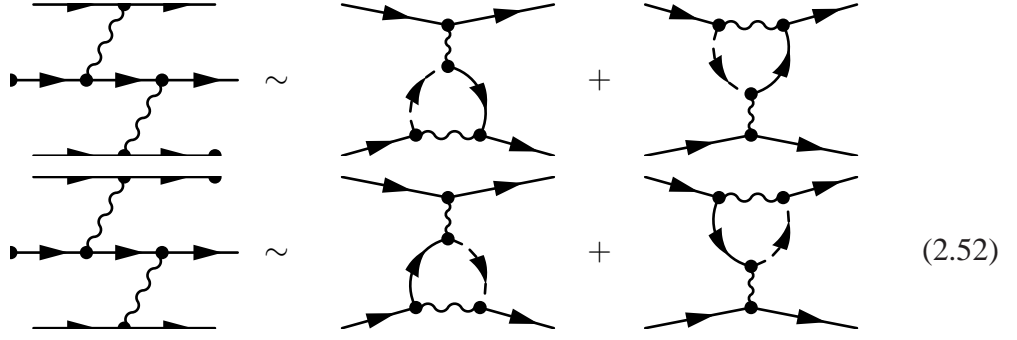
正是单能标格林函数。将这个部分补回去，则正好得到了2.47，如下图所示：

$$(2.50)$$

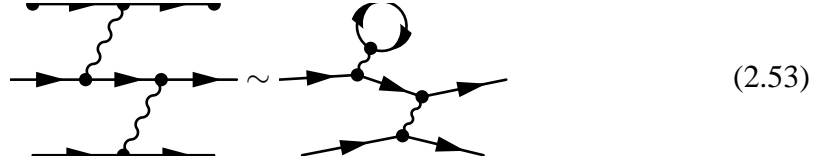
接下来我们分析2.48。类似地考虑，我们需要割断一个四点1PI图形。我们得到的将是一个六点连通图。这个六点连通图要么是1PI图形，要么是1PR图形。如果是前者，则属于如下情况：

$$(2.51)$$

其中外腿上的圆点代表被割断的部分。其他的情形均与此等价。所以仿照上面的分析，我们就得到了2.48的第一个图形。如果这个六点连通图形是1PR图形，那么其一定可以用两个四点1PI图形表示。仔细分析可以发现如果不计入编号则只有如下五种可能：



同样，加点的外腿代表被割断的部分。如果我们将割断的部分补回，则得到了2.48的后面十个图形。这里左边每一项对应于右边两项是因为计入了编号。注意，有些割断的方式，或者说“加点”的方式是不可能的，原因是将割断的内线补回后得到的不是四点1PI图形。例如下面的图形就是不可能的：



因为我们得到了一个四点1PR图形。综上，我们导出了2.48的第二式。按照类似的精神我们还可以导出Wetterich方程链的后几式，这里就不再赘述。

2.4 Wetterich方案的简单应用： $U(N)$ Landau-Ginzburg模型

这里作为一个简单的案例，我们用Wetterich方案来处理 $U(N)$ Landau-Ginzburg模型。 $U(N)$ Landau-Ginzburg模型的欧几里得作用量由下式给出：

$$\mathcal{S}[\psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha] = \sum_\alpha \int dx \left(|\nabla \psi_\alpha(x)|^2 + m |\psi_\alpha(x)|^2 \right) + \frac{g}{2} \int dx \left(\sum_\alpha |\psi_\alpha(x)|^2 \right)^2 \quad (2.54)$$

其中 α 为分量指标，可以取遍从1到N的值。很明显， $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$ 具有 $U(N)$ 对称。 m 为场的质量，而 g 为自耦合。这个模型具有广泛的应用。描述超导转变的 $U(1)$ Landau-Ginzburg模型属于这个模型的特例。其中 $N \rightarrow \infty$ 的极限可以严格求解；而如果我们取 $N \rightarrow 0$ 的极限，则对应于自规避随机行走模型的场论描述[57]。这个模型本身，则是对常规的 ϕ^4 模型的推广，如果我们取 $N = 1/2$ 则退化为常规的实标量 ϕ^4 模型。物理上，我们也可以认为该模型描写了一种具有N个核自旋态的玻色原子的超流转变。

我们运用Wetterich方案来计算 $U(N)$ LG模型的重整化群流。我们选择截断函

数为硬截断，因为这里硬截断不会引起问题。那么，直接利用2.44的第三式，我们可以用图形语言写下 m 和 g 的重整化方程：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial m}{\partial \Lambda} &= \text{tadpole diagram} + \text{bubble diagram} \\
 \frac{\partial g}{\partial \Lambda} &= \text{four-point diagrams} + \text{tadpole diagram}
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Figure 2.55 shows the graphical representation of the renormalization equations for the mass m and coupling g . The first equation for $\frac{\partial m}{\partial \Lambda}$ consists of a tadpole diagram (a loop attached to a single external line) and a bubble diagram (a loop between two external lines). The second equation for $\frac{\partial g}{\partial \Lambda}$ consists of four diagrams: two four-point diagrams (one with two internal lines and one with two internal vertices), a tadpole diagram, and a bubble diagram.

其中每一个图形的两根内线一者为格林函数为一者单能标格林函数，所以每一个图形实际上代表两项的贡献。这里我们忽略所有的四点顶角函数对动量的依赖，也忽略所有高于四阶的顶点，这是因为其在三维tree level都是无关项。则上述方程可以化为：

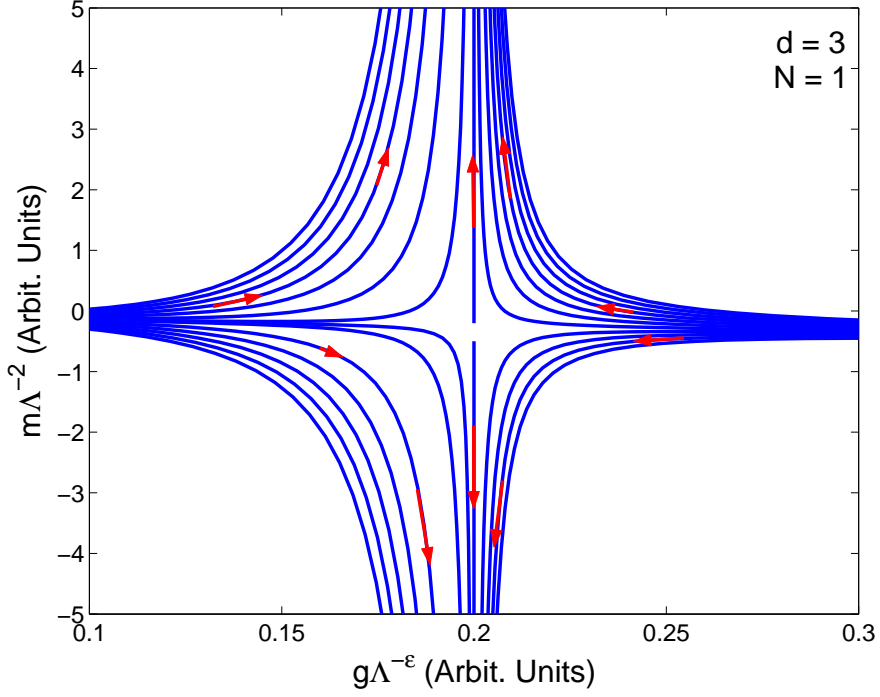
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial m}{\partial \Lambda} &= (N+1) \frac{\partial L_1(\Lambda)}{\partial \Lambda} g \\
 \frac{\partial g}{\partial \Lambda} &= -(N+4) \frac{\partial L_2(\Lambda)}{\partial \Lambda} g^2
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

其中第一式的系数 N 源自于2.55中第一行第一个tadpole图形，而第二式的系数 N 源自于2.55第二行最后一个bubble图形。这里 $L_{1,2}(\Lambda)$ 分别为tadpole和bubble图的贡献，即

$$\begin{aligned}
 L_1(\Lambda) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \chi_\Lambda(k) \mathcal{C}_0(k) \\
 L_2(\Lambda) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \chi_\Lambda^2(k) \mathcal{C}_0^2(k)
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

于是我们可以写下：

$$\frac{\partial m}{\partial \Lambda} = -(N+1) \frac{\Lambda^{d-1}}{\Lambda^2 + m} g$$

图 2.3 三维 $U(1)$ Landau-Ginzburg模型的重整化流。

$$\frac{\partial g}{\partial \Lambda} = (N+4) \frac{\Lambda^{d-1}}{(\Lambda^2 + m)^2} g^2 \quad (2.58)$$

这里我们忽略了一些无关系数，因为它们都可以吸收到 m, g 的定义中去。为了得到临界指数我们必须研究无量纲的 \tilde{m}, \tilde{g} 的重整化流动。由简单的量纲分析我们知道：

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= \frac{m}{\Lambda^2} \\ \tilde{g} &= \frac{g}{\Lambda^{4-d}} = \frac{g}{\Lambda^\epsilon} \\ t &= \ln(\Lambda_0/\Lambda) \end{aligned} \quad (2.59)$$

带入前面的方程，我们得到了无量纲的 \tilde{m}, \tilde{g} 满足的方程：

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{m}}{dt} &= 2\tilde{m} + (N+1) \frac{\tilde{g}}{1+\tilde{m}} \approx 2\tilde{m} + (N+1)\tilde{g} - (N+1)\tilde{g}\tilde{m} \\ \frac{d\tilde{g}}{dt} &= \epsilon\tilde{g} - (N+4) \frac{\tilde{g}^2}{(1+\tilde{m})^2} \approx \epsilon\tilde{g} - (N+4)\tilde{g}^2 \end{aligned} \quad (2.60)$$

这里方程的右边我们只保留到二次项。图2.3在 (\tilde{m}, \tilde{g}) 平面绘出了上述方程给出

的重整化流，这里我们选取 $N = 1, d = 3$ 。我们可以清楚地看到存在一个临界不动点，即Wilson-Fisher不动点。容易计算出Wilson-Fisher不动点的位置为：

$$\begin{aligned}\tilde{m}_* &= \frac{N+1}{2}\tilde{g}_* = \frac{(N+1)\epsilon}{2(N+4)} \\ \tilde{g}_* &= \frac{\epsilon}{N+4}\end{aligned}\tag{2.61}$$

故而不不动点附近的稳定性矩阵为：

$$\begin{aligned}M_* &= \begin{pmatrix} 2 - (N+1)\tilde{g}_* & (N+1)(1 - \tilde{m}_*) \\ 0 & \epsilon - 2(N+4)\tilde{g}_* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - \frac{N+1}{N+4}\epsilon & (N+1) - \frac{(N+1)^2}{2(N+4)}\epsilon \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.62}$$

于是我们得到临界指数 ν 为：

$$\nu = \frac{1}{2 - \frac{N+1}{N+4}\epsilon} = \frac{1}{2} + \frac{N+1}{4(N+4)}\epsilon\tag{2.63}$$

这里我们只保留正比于 ϵ 的项。可见，我们重现了Wilson和Fisher的经典结果[23]。如果我们取 $N \rightarrow \infty$ ，则我们得到：

$$\nu = \frac{1}{2 - \epsilon} = \frac{1}{d - 2}\tag{2.64}$$

正是大N展开的经典结果[57]。

第三章 正方格点上的Hubbard模型

3.1 重整化群与费米液体

在讨论如何运用重整化群来分析关联体系之前我们先从一般的观点出发来分析巡游费米系统，或者说费米液体。费米液体的显著特征是存在费米面，即零激发能量的流形。这一点不同于常规对玻色系统的分析，在那里零能量激发只存在于零动量点上。于是，不同于对玻色系统逐步向零动量点重整，这里我们需要向费米面重整；不同于玻色系统在重整化操作完毕后只能得到一个平庸的理论，这里我们得到一个非平庸的描写费米面上激发的理论。

我们写下个自由费米系统的欧几里得作用量：

$$\mathcal{S} = \sum_{\sigma} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} (i\omega - \xi(\mathbf{k})) \bar{\psi}_{\sigma}(i\omega, \mathbf{k}) \psi_{\sigma}(i\omega, \mathbf{k}) \quad (3.1)$$

这里 $\xi(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k}) - \mu$ 为激发能或者说色散关系。这里为了简单起见我们不考虑激发能依赖于自旋指标的情形并限于讨论二维。为了便于讨论，我们选取等能线作为“径向”坐标，然后选择一套与之正交的曲线族，这样我们就得到了一套完备的坐标系统：

$$\mathcal{S} = \sum_{\sigma} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int d\theta d\epsilon J(\theta, \epsilon) (i\omega - \epsilon) \bar{\psi}_{\sigma}(i\omega, \epsilon, \theta) \psi_{\sigma}(i\omega, \epsilon, \theta) \quad (3.2)$$

这里 J 为Jacobian。如果系统是各向同性，则 θ 成为角度。我们假定在费米面上色散关系没有奇异性，那么在二维我们可以将Jacobian按幂级数展开：

$$J(\theta, \epsilon) = J_0(\theta) + J_1(\theta)\epsilon + \frac{1}{2}J_2(\theta)\epsilon^2 \dots \quad (3.3)$$

我们先考虑首项即：

$$\mathcal{S}_0 = \sum_{\sigma} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int d\theta \int_{-\Lambda}^{\Lambda} d\epsilon J_0(\theta) (i\omega - \epsilon) \bar{\psi}_{\sigma}(i\omega, \epsilon, \theta) \psi_{\sigma}(i\omega, \epsilon, \theta) \quad (3.4)$$

这里的 Λ 为紫外截断。现在积掉 $(\Lambda/b, \Lambda)$ 之间的自由度，则低能自由度的作用

量为：

$$S'_0 = \sum_{\sigma} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int d\theta \int_{-\Lambda/b}^{\Lambda/b} d\epsilon J_0(\theta)(i\omega - \epsilon) \bar{\psi}_{\sigma}(i\omega, \epsilon, \theta) \psi_{\sigma}(i\omega, \epsilon, \theta) \quad (3.5)$$

我们引入新的变量：

$$\begin{aligned} \epsilon' &= b\epsilon \\ \omega' &= b\omega \\ \psi'(\omega', \epsilon', \theta) &= b^{-\frac{3}{2}} \psi(\omega, \epsilon, \theta) \end{aligned} \quad (3.6)$$

则作用量能恢复到原来形式：

$$S'_0 = \sum_{\sigma} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int d\theta \int_{-\Lambda}^{\Lambda} d\epsilon' J_0(\theta)(i\omega' - \epsilon') \bar{\psi}'_{\sigma}(i\omega', \epsilon', \theta) \psi'_{\sigma}(i\omega', \epsilon', \theta) \quad (3.7)$$

由此可见，在最低阶树图水平（tree level），自由费米系统是一个动力学指标 $z = 1$ 的量子临界系统。现在我们考虑Jacobian的高阶展开项。容易发现，在3.6操作下， J_n 按如下变换：

$$J'_n(\theta) = b^{-n} J_n(\theta) \quad (3.8)$$

即除了 J_0 以外，其它项均属于无关项。故而我们可以在后面的分析中扔掉这些项。这个结果也是显然的，因为一般来说，对能量依赖的幂次越高则会越无关。

我们在tree level分析了自由部分以后，接着分析相互作用。我们考虑一个较一般的相互作用

$$S_{int} = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_3} \int \prod_{i=1}^3 d\omega_i d\epsilon_i d\theta_i V(1, 2, 3, 4) \bar{\psi}(1) \bar{\psi}(2) \psi(3) \psi(4) \quad (3.9)$$

这里的数字指标 i 是 $\omega_i \epsilon_i \theta_i$ 的简记形式。这里我们已经假定第四个指标是前三个指标的函数，使得动量守恒、能量守恒以及自旋守恒能够得到满足。基于前面分析的结论，我们忽略了Jacobian。同样我们可以引入一个紫外截断 Λ 。注意到如果 V 的四个指标如果不落在费米面上，则在重整化操作到某一步总可以使某

一个指标落在 Λ 以外，这样这一项就会被乘上一个指数小的截断函数，可见如果 V 的四个指标不同时落在费米面上则 V 就是无关项。反之，如果 V 的四个指标都落在费米面上，简单的量纲分析表明

$$V \sim \epsilon^{-3} \omega^{-3} \psi^{-4} \sim \Lambda^0 \quad (3.10)$$

可见此时 V 成为边缘耦合。注意到，动量守恒给可能的 V 很强的限制，具体说来只有两种情况。一种是散射前后，费米面上的粒子不动或者只是交换，这被称为前向散射，按R. Shankar的记号记作F；一种是散射前后费米面上粒子对的总动量均为0，这被称为BCS散射，按R. Shankar的记号记作V。综上，在tree level，只有前向散射或者BCS散射是边缘耦合，其它均为无关耦合[12]。我们可以写下：

$$\begin{aligned} F(\theta_1, \theta_2) &= V(\mathbf{k}_f(\theta_1), \mathbf{k}_f(\theta_2), \mathbf{k}_f(\theta_1), \mathbf{k}_f(\theta_2)) \\ V(\theta_1, \theta_2) &= V(\mathbf{k}_f(\theta_1), -\mathbf{k}_f(\theta_1), \mathbf{k}_f(\theta_2), -\mathbf{k}_f(\theta_2)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

下一步就是在单圈水平上分析这些边缘耦合。我们可以使用常规的动量壳方案来计算单圈水平的重整化流，这里为了简单起见我们运用Wetterich方案来计算。这里我们需要引入一个红外截断来正规化（regularize）所有的圈图。我们先分析所有的bubble图形：粒子-粒子bubble和粒子-空穴bubble。容易看出：

$$Q \sim \text{bubble} \sim N_f \quad (3.12)$$

$$Q \sim \text{bubble} \sim \begin{cases} N_f \ln(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}) & \text{if } Q = 0 \\ N_f & \text{if } Q \neq 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

其中 N_f 为费米面上的态密度 Λ 是红外截断，而 Λ_0 是带宽。其中3.13为对数发散当切仅当入射的粒子总动量为零。在单圈水平我们忽略所有高于四点的顶角。作为一个粗略地计算我们可以忽略在Wetterich方程中不包含发散子图的项，并忽略F和V所有对动量的依赖。先分析F。此时Wetterich方程中不包含发散子

图，所以我们有：

$$\frac{dF}{d\Lambda} = 0 \quad (3.14)$$

即前向散射在单圈水平依然是边缘耦合。在分析V。此时Wetterich方程中包含一个前向散射子图：

$$\frac{dV}{d\Lambda} = \text{[Diagram 1]} + \text{[Diagram 2]} \quad (3.15)$$

在忽略了V对动量的依赖后，我们得到：

$$\frac{dV}{d\Lambda} = N_f \frac{V^2}{\Lambda} \quad (3.16)$$

引入重整化时间 $t = \ln(\Lambda_0/\Lambda)$ 与无量纲耦合 $g = N_f V$ ，则有：

$$\frac{dg}{dt} = -g^2 \quad (3.17)$$

上述方程的解是：

$$g(t) = \frac{g(0)}{1 + g(0)t} \quad (3.18)$$

如果初始的相互作用为排斥，则我们可以看到此时前向散射为边缘无关耦合；如果初始相互作用为吸引，则此时前向散射为边缘有关耦合，且在 $t = -1/g(0)$ 时发散。现在我们来讨论这些结果的物理意义。考虑一个具有弱排斥相互作用的巡游费米系统。此时，根据前面的分析我们知道，只有F为边缘耦合。于是，对于这样一个系统只有前向散射是重要的，其它的初始相互作用无论多么强都不重要，使用前向散射振幅就足以描述这样的体系。这正是Landau费米液体的核心内容。再考虑一个具有弱吸引的巡游费米系统。此时，根据前面的分析，无论初始的吸引多么弱，V都会越来越重要。而且此时只有吸引的V最为重要。这暗示我们，原来的基态已经失稳，我们应当寻找新的基态。实际上就是BCS理论的核心内容。综上我们看到，Landau费米液体正是重整化群的临界点，这个临界点的结构可以使用前向散射振幅来描写。一个直观的图示可以参见图3.1。

最后我们再来讨论一种特殊情况，即费米面存在嵌套结构。若嵌套波矢为 \mathbf{Q}_N ，则费米面上的一对电子同时转移大小为 \mathbf{Q}_N 的动量，则散射后电子还是

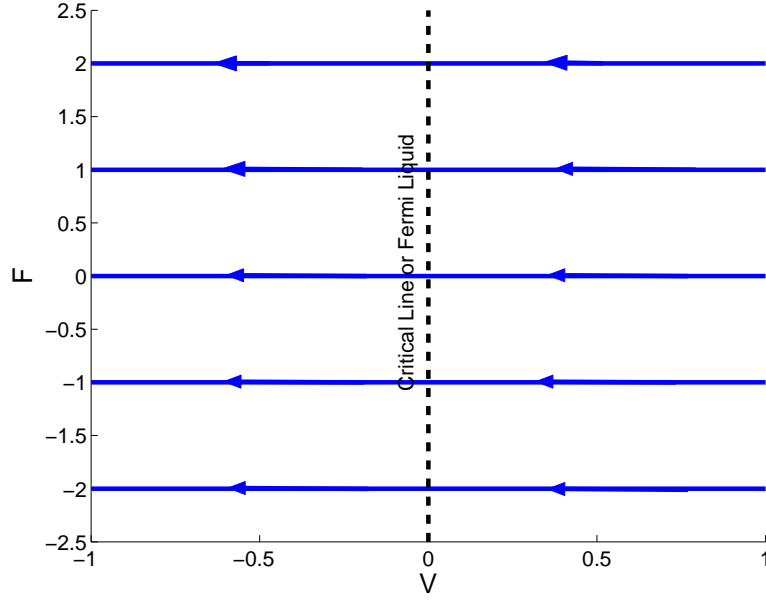


图 3.1 巡游费米系统的重整化流。其中虚线标出了临界流形，即费米液体的区域。

在费米面上，且满足动量守恒（因为总动量转移了一个倒格矢）。这就意味着除了前面的前向散射振幅和BCS散射振幅不是无关耦合以外，还存在一个嵌套散射振幅 W 也不是无关耦合[12]。我们写下：

$$W(\theta_1, \theta_2) = V(\mathbf{k}_f(\theta_1), \mathbf{k}_f(\theta_2), \mathbf{k}_f(\theta_1) + \mathbf{Q}_N, \mathbf{k}_f(\theta_2) + \mathbf{Q}_N)$$

如果费米面存在嵌套结构，则此时动量转移量为嵌套波矢的粒子-空穴图形也存在发散，即

$$\mathbf{Q}_N \sim \text{bubble diagram} \sim N_f \ln\left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}\right) \quad (3.20)$$

此时，我们必须也考虑粒子-空穴图形。仿照前面对 V 的分析，我们可以写下：

$$\frac{dW}{d\Lambda} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} = -N_f \frac{W^2}{\Lambda} \quad (3.21)$$

于是，如果初始的 W 为正，则其为边缘有关耦合；若初始的 W 为负，则其为边缘无关耦合。这恰好和 V 的行为相反。因此，我们可以看出，在存在费米面嵌

套的情况下费米液体也不是稳定的，而有流向电荷密度波或者自旋密度波的可能性。

实际上，前面的分析过于简化了。首先，三个通道严格来说并不能简单的拆分，某些散射过程实际上同时属于这三个通道；其次，前面的计算只考虑了首要(leading order)的发散，实际的计算必须要考虑次要的(next-leading-order)过程；最后，我们必须要考虑各个通道对动量的依赖。这就要求我们必须去研究一个具体的模型。

3.2 Wetterich方程用于Hubbard模型

本节使用Wetterich方案来分析正方格点上的Hubbard模型[26]。正方格点上的Hubbard模型是一个最简单的关联电子系统，因为其与磁性和高温超导的密切关系而被广泛研究[58]。其哈密顿量为：

$$\mathcal{H} = - \sum_{ij\sigma} t_{i,j} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} - \mu \mathcal{N} = - \sum_{ij\sigma} t_{i,j} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + \frac{U}{2} \sum_i n_i^2 - \mu' \mathcal{N} \quad (3.22)$$

这里我们将相互作用项改写为电荷-电荷相互作用，或者说改写为明显 $U(2) \times U(2)$ 不变的形式，这样做的好处是能够直接利用前面 $U(N)$ 场论的形式。我们选择截断函数为2.5的形式，并且取 $\alpha = 0.05$ 。在计算中，所有的自能都被忽略；在弱耦合区域这样的近似被后验地证明为合理。这样我们有：

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(i\omega, \mathbf{k}) &= \frac{\chi_\Lambda(\xi(\mathbf{k}))}{i\omega - \xi(\mathbf{k})} \\ \mathcal{S}(i\omega, \mathbf{k}) &= \frac{\dot{\chi}_\Lambda(\xi(\mathbf{k}))}{i\omega - \xi(\mathbf{k})} \end{aligned} \quad (3.23)$$

由于对自旋指标的 $U(2) \times U(2)$ 对称，四点耦合 Γ_4 与自旋无关。我们定义一个有效相互作用势：

$$V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = -\Gamma_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \Big|_{i\omega_{1,2,3}=\pi T} \quad (3.24)$$

这里的符号选择保证了在最低阶 \mathbf{V} 能够退化到裸相互作用。我们在计算中忽略顶角对频率的依赖，以及所有高于四点相互作用的顶角，这源自于在tree level这

些都是无关耦合。 V 的忠实表示是：

$$V = \begin{array}{c} \text{---} \mathbf{k}_2 \text{---} \text{---} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 \text{---} \\ | \\ \text{---} \mathbf{k}_1 \text{---} \text{---} \mathbf{k}_3 \text{---} \end{array} \quad (3.25)$$

于是我们可以写下 V 的重整化群方程：

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \mathcal{T}_{pp}[V] + \mathcal{T}_{ph,cross}[V] + \mathcal{T}_{ph,direct}[V] \quad (3.26)$$

其中 \mathcal{T}_{pp} 代表粒子粒子散射通道的贡献， $\mathcal{T}_{ph,cross}$ 代表粒子空穴散射交叉项的贡献，而 $\mathcal{T}_{ph,direct}$ 代表粒子空穴散射直接项的贡献。这三项的图形表示为：

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{pp} &= \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \\ \mathcal{T}_{ph,cross} &= \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \\ \mathcal{T}_{ph,direct} &= \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad (3.27) \end{aligned}$$

其中所有的内线都遍历 \mathcal{S}_Λ 和 \mathcal{G}_Λ 两种可能。于是我们得到数学表达式为：

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{pp} &= - \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \dot{\mathcal{L}}_{pp}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}) V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) V(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}, \mathbf{k}_3) \\ \mathcal{T}_{ph,cross} &= - \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \dot{\mathcal{L}}_{ph}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_2 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3) V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3, \mathbf{p}) V(\mathbf{p}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \\ \mathcal{T}_{ph,direct} &= - \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \dot{\mathcal{L}}_{ph}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3) [V(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3) V(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \\ &\quad + V(\mathbf{k}_1, \mathbf{p}, \mathbf{k}_3) V(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3, \mathbf{p}) - 2V(\mathbf{k}_1, \mathbf{p}, \mathbf{k}_3) V(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})] \end{aligned} \quad (3.28)$$

这里的 \mathcal{L} 为bubble的贡献:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{pp}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \frac{1 - f(\xi(\mathbf{p})) + f(\xi(\mathbf{p}'))}{\xi(\mathbf{p}) + \xi(\mathbf{p}')} \chi_{\Lambda}(\xi(\mathbf{p})) \chi_{\Lambda}(\xi(\mathbf{p}')) \\ \mathcal{L}_{ph}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \frac{f(\xi(\mathbf{p})) - f(\xi(\mathbf{p}'))}{\xi(\mathbf{p}) - \xi(\mathbf{p}')} \chi_{\Lambda}(\xi(\mathbf{p})) \chi_{\Lambda}(\xi(\mathbf{p}'))\end{aligned}\quad (3.29)$$

这里的 $f(\dots)$ 为费米函数。为了快速求解上述方程，我们还需要作进一步的近似。注意到，根据上一节的分析，只有费米面上电子之间的散射才是边缘项，而其他的则是无关项。所以我们可以对 \mathbf{V} 做投影，将动量投影到费米面上，具体说来就是假定相互作用只依赖于动量的方向，忽略其对动量大小的依赖。数学上就是：

$$V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \approx V(\mathbf{k}_f(\theta_1), \mathbf{k}_f(\theta_2), \mathbf{k}_f(\theta_3)) \triangleq V(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (3.30)$$

这里 $\mathbf{k}_f(\theta)$ 代表 θ 方向上费米动量。进而前面 \mathbf{V} 的方程可以化作：

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} V(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \mathcal{T}_{pp}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) + \mathcal{T}_{ph,cross}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) + \mathcal{T}_{ph,direct}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (3.31)$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{pp}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= - \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \dot{\mathcal{L}}_{pp}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}) \\ &\quad V(\theta_1, \theta_2, \theta(\mathbf{p})) V(\theta(\mathbf{p}), \theta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}), \theta_3) \\ \mathcal{T}_{ph,cross}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= - \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \dot{\mathcal{L}}_{ph}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_2 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3) \\ &\quad V(\theta_1, \theta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3), \theta(\mathbf{p})) V(\theta(\mathbf{p}), \theta_2, \theta_3) \\ \mathcal{T}_{ph,direct}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= - \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \dot{\mathcal{L}}_{ph}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3) \\ &\quad [V(\theta(\mathbf{p}), \theta_1, \theta_3) V(\theta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3), \theta_2, \theta(\mathbf{p})) \\ &\quad + V(\theta_1, \theta(\mathbf{p}), \theta_3) V(\theta_2, \theta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3), \theta(\mathbf{p})) \\ &\quad - 2V(\theta_1, \theta(\mathbf{p}), \theta_3) V(\theta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3), \theta_2, \theta(\mathbf{p}))] \quad (3.32)\end{aligned}$$

这里 $\theta(\mathbf{k})$ 为 \mathbf{k} 对应的方向。我们使用前面描述的坐标网来改写上面的方程：

$$\mathcal{T}_{pp}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = - \int dp d\theta J(p, \theta) \dot{\mathcal{L}}_{pp}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p})$$

$$\begin{aligned}
 & V(\theta_1, \theta_2, \theta) V(\theta, \theta(\mathbf{k}_f(\theta_1) + \mathbf{k}_f(\theta_2) - \mathbf{p}), \theta_3) \\
 \mathcal{T}_{ph, cross}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= - \int dp d\theta J(p, \theta) \dot{\mathcal{L}}_{ph}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_2 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3) \\
 & V(\theta_1, \theta(\mathbf{k}_f(\theta_2) + \mathbf{p} - \mathbf{k}_f(\theta_3)), \theta) V(\theta, \theta_2, \theta_3) \\
 \mathcal{T}_{ph, direct}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= - \int dp d\theta J(p, \theta) \dot{\mathcal{L}}_{ph}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3) \\
 & [V(\theta, \theta_1, \theta_3) V(\theta(\mathbf{k}_f(\theta_1) + \mathbf{p} - \mathbf{k}_f(\theta_3)), \theta_2, \theta) \\
 & + V(\theta_1, \theta, \theta_3) V(\theta_2, \theta(\mathbf{k}_f(\theta_1) + \mathbf{p} - \mathbf{k}_f(\theta_3)), \theta) \\
 & - 2V(\theta_1, \theta, \theta_3) V(\theta(\mathbf{k}_f(\theta_1) + \mathbf{p} - \mathbf{k}_f(\theta_3)), \theta_2, \theta)] \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

由于截断函数的作用，只有当 \mathbf{p} 位于费米面附近时被积函数才对积分有贡献，所以我们可以将 \mathbf{V} 中出现的 \mathbf{p} 都换成其对应的费米动量，则：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{pp}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= - \int dp d\theta J(p, \theta) \dot{\mathcal{L}}_{pp}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}) \\
 & V(\theta_1, \theta_2, \theta) V(\theta, \theta(\mathbf{k}_f(\theta_1) + \mathbf{k}_f(\theta_2) - \mathbf{k}_f(\theta)), \theta_3) \\
 \mathcal{T}_{ph, cross}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= - \int dp d\theta J(p, \theta) \dot{\mathcal{L}}_{ph}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_2 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3) \\
 & V(\theta_1, \theta(\mathbf{k}_f(\theta_2) + \mathbf{k}_f(\theta) - \mathbf{k}_f(\theta_3)), \theta) V(\theta, \theta_2, \theta_3) \\
 \mathcal{T}_{ph, direct}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= - \int dp d\theta J(p, \theta) \dot{\mathcal{L}}_{ph}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_3) \\
 & [V(\theta, \theta_1, \theta_3) V(\theta(\mathbf{k}_f(\theta_1) + \mathbf{k}_f(\theta) - \mathbf{k}_f(\theta_3)), \theta_2, \theta) \\
 & + V(\theta_1, \theta, \theta_3) V(\theta_2, \theta(\mathbf{k}_f(\theta_1) + \mathbf{k}_f(\theta) - \mathbf{k}_f(\theta_3)), \theta) \\
 & - 2V(\theta_1, \theta, \theta_3) V(\theta(\mathbf{k}_f(\theta_1) + \mathbf{k}_f(\theta) - \mathbf{k}_f(\theta_3)), \theta_2, \theta)]
 \end{aligned}$$

于是我们可以先完成对动量方向的积分，我们定义：

$$\begin{aligned}
 L_{pp}(\theta_1, \theta_2, \theta) &= \int dp J(p, \theta) \dot{\mathcal{L}}_{pp}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p}) \\
 L_{ph}(\theta_1, \theta_2, \theta) &= \int dp J(p, \theta) \dot{\mathcal{L}}_{ph}(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{k}_2) \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

从而我们可以将上述方程化为：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{pp}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= - \int d\theta L_{pp}(\theta_1, \theta_2, \theta) V(\theta_1, \theta_2, \theta) V(\theta, \theta(\mathbf{k}_f(\theta_1) + \mathbf{k}_f(\theta_2) - \mathbf{k}_f(\theta)), \theta_3) \\
 \mathcal{T}_{ph, cross}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= - \int d\theta L_{ph}(\theta_2, \theta_3, \theta) V(\theta_1, \theta(\mathbf{k}_f(\theta_2) + \mathbf{k}_f(\theta) - \mathbf{k}_f(\theta_3)), \theta) V(\theta, \theta_2, \theta_3)
 \end{aligned}$$

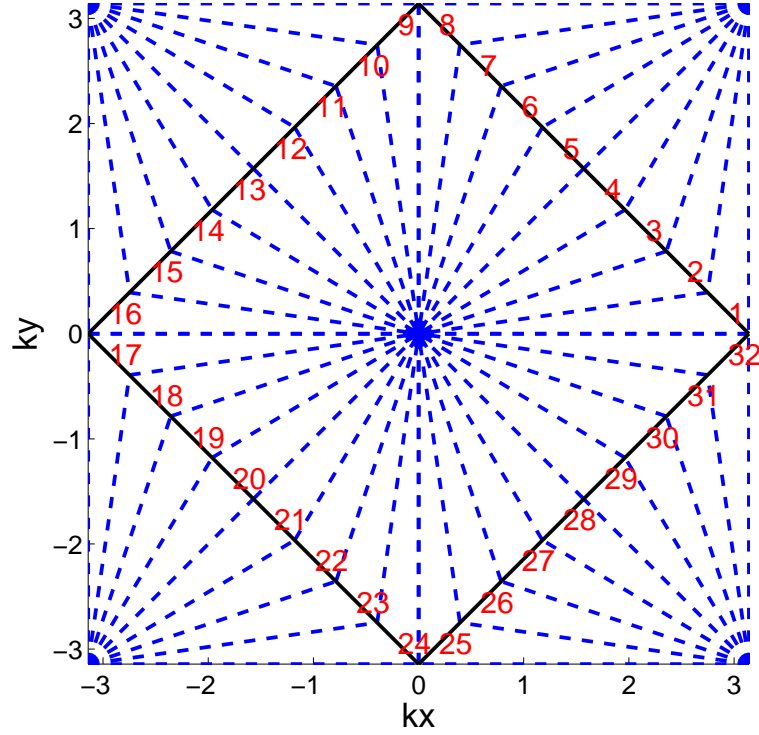


图 3.2 布里渊区的分区方案，这里的数字为每个区的编号。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{ph,direct}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = & - \int d\theta L_{ph}(\theta_1, \theta_3, \theta) [V(\theta, \theta_1, \theta_3) V(\theta(\mathbf{k}_f(\theta_1) + \mathbf{k}_f(\theta) - \mathbf{k}_f(\theta_3)), \theta_2, \theta) \\
 & + V(\theta_1, \theta, \theta_3) V(\theta_2, \theta(\mathbf{k}_f(\theta_1) + \mathbf{k}_f(\theta) - \mathbf{k}_f(\theta_3)), \theta) \\
 & - 2V(\theta_1, \theta, \theta_3) V(\theta(\mathbf{k}_f(\theta_1) + \mathbf{k}_f(\theta) - \mathbf{k}_f(\theta_3)), \theta_2, \theta)]
 \end{aligned} \quad (3.35)$$

上述方程组就是我们用来计算的最终形式。这里我们描述数值上如何处理正方格点上的Hubbard模型。我们把 θ 离散化，即将第一Brillouin区分成若干个块区，如图3.2所示。这里黑色实线代表磁布里渊区边界或者Umklapp线。将Umklapp线等分，然后将等分点分别与BZ中心和X点连接起来，这样就得到若干个小区域。每一个小区域被赋予一个编号。每一个小区域内的动量点被认为具有相同的 θ 。图3.2给出的是分为32块的例子。

我们使用四阶Runge-Kutta法求解前述的常微分方程组。如果将 θ 划分为N块，则未知元有 $N^3/8$ 个。这里我们已经考虑正方格点的 D_4 对称性。具体计算流程则是：先对动量方向积分计算 L ，然后计算 V 的变化量。具体的计算流程用赧代码表示：

1. do θ_1, θ_2

2. do θ (这里先计算 L , 然后储存下供后面使用。)
3. calculate $L_{pp}(\theta_1, \theta_2, \theta)$ 以及 $L_{ph}(\theta_1, \theta_2, \theta)$
4. end do θ
5. do θ_3 (注意只需要遍历BZ的1/8。)
6. 利用 $L_{pp}(\theta_1, \theta_2, \theta)$ 以及 $L_{ph}(\theta_1, \theta_2, \theta)$, 计算 $\mathcal{T}_{pp}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\mathcal{T}_{ph,cross}(\theta_3, \theta_2, \theta_1)$ 和 $\mathcal{T}_{ph,direct}(\theta_1, \theta_3, \theta_2)$
7. end do θ_3
8. end do θ_1, θ_2
9. 利用对称性恢复出全部 \mathcal{T}_{pp} , $\mathcal{T}_{ph,cross}$ 和 $\mathcal{T}_{ph,direct}$ 的值。
10. 计算出 $V(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 的变化量。

按此流程计算, 总计算量约比例于 N^3 , 直接了当的计算则计算量比例于 N^4 。¹

我们最后讨论如何使用泛函重整化来判断系统中存在的不稳定性。这里我们使用极化率来判断相应的不稳定性。如果系统的某长程序对应于算子 O 的凝聚, 则我们可以预期在进入该长程序之前极化率 $\chi \sim \langle T\{O(1)O(2)\} \rangle$ 必定发散。据此, 我们用重整化群方程计算出极化率的流动, 然后根据极化率的增长来定出首要的不稳定性。而为了计算极化率的流动, 我们写下如下的描写极化率流动的重整化群方程:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \chi_{pp}}{\partial \Lambda} &= \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \\
 \frac{\partial \chi_{ph}}{\partial \Lambda} &= \text{diagram 3} + \text{diagram 4}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

The diagrams represent the flow of the polarization function. Each diagram consists of a wavy line (representing a fermion) connected to a loop. The loop has two vertices, each with a wavy line extending outwards. The first two diagrams for $\partial \chi_{pp} / \partial \Lambda$ show the loop with a dashed line (representing a boson) and a solid line (representing a fermion). The first diagram has the dashed line on the left and the solid line on the right. The second diagram has the solid line on the left and the dashed line on the right. The next two diagrams for $\partial \chi_{ph} / \partial \Lambda$ show the loop with a dashed line and a solid line, but with different internal line connections and orientations.

¹此处提到的诸多计算技巧均来自于C. Honerkamp教授通信。

同时我们依次写下代表超导、自旋序和电荷序的顶角函数。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left(\text{diagram 1} \right) &= \text{diagram 2} + \text{diagram 3} \\
 \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left(\text{diagram 1} \right) &= \text{diagram 2} + \text{diagram 3} \\
 \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left(\text{diagram 1} \right) &= \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

这里我们只保留了最低阶的顶角函数。其推导类似于前，要点在于我们将极化率看成相应外场的“自能”。

我们选取模型参数： $t' = -0.15t, t'' = -0.5t', U = 3t$ 。初始截断 $\Lambda = 4t$ 。计算当 V 的绝对值的最大值超过 $15t$ 时中止，因为此时已经远远超过了单圈近似的适用范围。所有计算都在温度为 $T = 0.01t$ 下进行。在计算中我们选取 $N = 48$ 。

3.3 Hubbard模型的零温相图

本节介绍我们使用泛函重整化计算Hubbard模型的结果。我们先介绍三个代表性的区域的结果，然后给出整体的相图。我们选取空穴浓度为 $x = 0.0$ ， $x = 0.16$ 和 $x = 0.26$ 的三个参数点分别介绍。图3.3给出了这三个代表点的费米面和极化率的流动。从费米面的特征上看，当系统处于半满时，费米面相对较平坦，具有一定程度的嵌套特征，虽然这种嵌套是不完全的。进一步引入空穴，费米面嵌套特征越来越差。但值得注意的是，此时一个新的特征涌现出来，这就是位于布里渊区M点的鞍点逐步从费米能下方靠近费米面，当掺杂浓度为 $x = 0.26$ 时，鞍点几乎就位于费米面上。此时的费米能几乎位于van Hove奇异点上。我们接着看计算出的极化率的结果。当系统处于半满时，反铁磁极化率随着重整化操作流动要远远快于d波超导极化率，此时系统内反铁磁涨落占优，这也就意味着系统最终会向反铁磁失稳。当空穴浓度 $x = 0.16$ 时，反

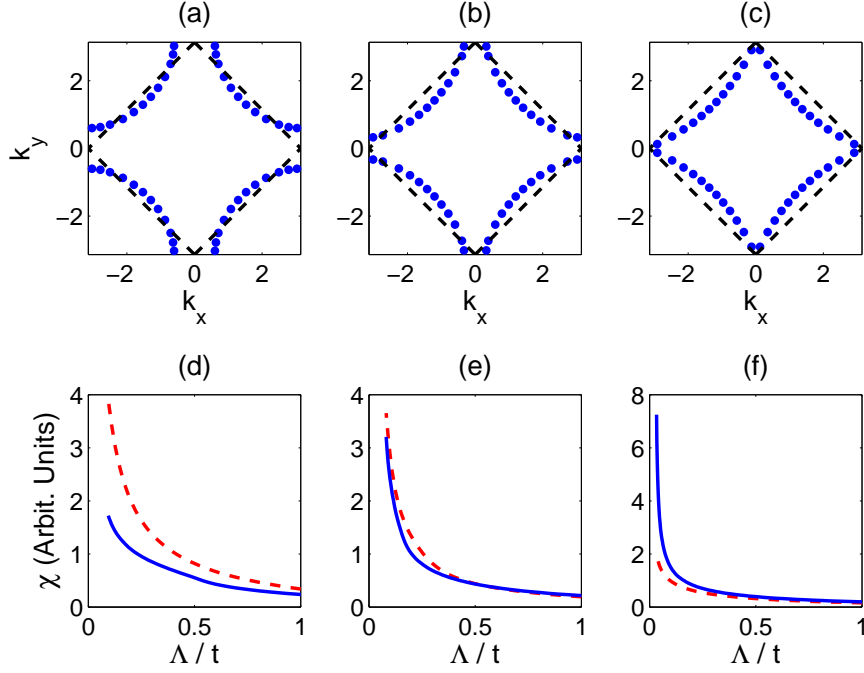


图 3.3 三个代表性空穴浓度的费米面和计算结果。第一列对应于半满填充，第二列对应于空穴浓度为16%，第三列对应于空穴浓度为26%。第一行为计算时选取的费米面上的代表点，第二行为极化率的流动。第二行红色虚线代表反铁磁极化率，而蓝色实线代表d波超导极化率。

铁磁和d波超导的极化率增长速度差不多，这表明此时系统内反铁磁序与d波超导序激烈竞争。当空穴浓度 $x = 0.26$ 时，系统内的d波超导极化率占优，此时系统最终会向d波超导相失稳。这里d波超导起源来自于Kohn-Luttinger机制[59]。Kohn和Luttinger通过简单分析表明，当系统内部处于强排斥时，有可能出现非常规对称的超导电性。从重整化群的观点看，就是粒子-空穴通道的散射固然为无关/边缘耦合，但是重整化群流动刚开始时粒子空穴通道的散射有可能将部分相互作用重整为吸引，这样BCS通道的粒子粒子散射就能够进一步将这种吸引效果“放大”，最终诱导出超导电性[12]。对于我们考虑模型来说，这里由于化学势处于van Hove奇异性的近邻，态密度的奇异性进一步放大了这里Kohn-Luttinger机制的效果。

我们接下来分析当系统处于半满时的有效相互作用。图3.4给出了部分计算结果。我们固定第三个动量位于费米面上第1号位置，变动其他两个动量。从子图(a)我们可以看出，这里有几个非常显著的特征：第一个特征是在 $|\theta_1 - \theta_2| = N/2$ 的位置出现了暗区即 V 为负，这个暗区对应于一对动量相反的电子，这个暗区来自于粒子粒子散射对相互作用的重整，使得BCS散射通道出现了一定的吸引相互作用。第二个特征是在 $\theta_{1,2} = 3\pi/4$ 时出现了亮区即 V 达到

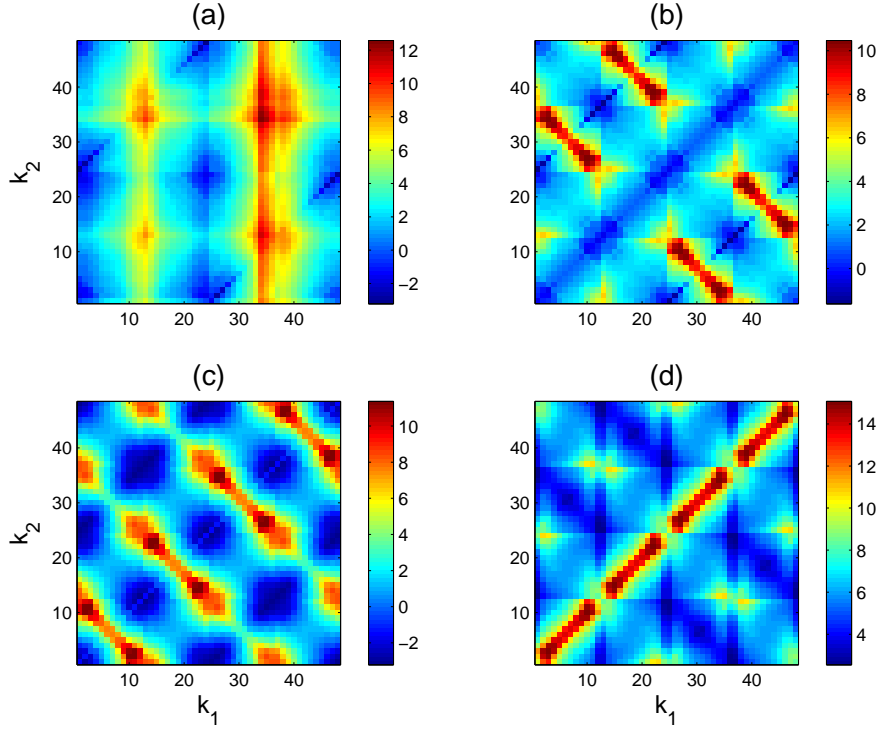


图 3.4 半满填充时的有效相互作用。(a)为第三个动量固定在第1号小块时的有效相互作用，(b)为前向散射振幅，(c)为BCS散射振幅，(d)为嵌套散射振幅。

较大的正值。注意到 $\theta_{1,2} = 34$ 位于费米面的热点（hot spot），即Umklapp线与费米面的交点，这个特征实际上对应于嵌套散射。第三个特征是 $\theta_{1,2} = 13$ 处的较弱的亮区。注意到 $\theta_{1,2} = 13$ 位于鞍点附近，这实际上对应于鞍点的散射。后两个特征的交叠区域构成了子图(a)中的亮斑。我们看到，此时最主要的散射是嵌套散射，这与前面极化率计算中表明的反铁磁涨落主导的结果是一致的。我们还在子图（b）、（c）和（d）中给出前向散射振幅、BCS散射振幅和嵌套散射振幅。前向散射振幅当 θ_1 与 θ_2 满足嵌套关系时最大，这实质上还是反映了嵌套散射的主导地位。我们同时注意到当 θ_1 与 θ_2 构成Cooper对时， V 在鞍点附近出现了变号。从费米液体理论的角度来看，一旦前向散射振幅出现了负号，这就意味着费米面的“弹性”为负，费米面会发生自发变形，即Pomeranchuk不稳定性。Metzner等人据此认为在半满的Hubbard模型中会出现Pomeranchuk不稳定性[27]。他们认为，这种不稳定的机制源自于鞍点之间的强烈散射，系统倾向于通过发生Pomeranchuk不稳定性来消除两个鞍点间的简并。但是Honerkamp等人通过详细计算表明这种不稳定性并不是主导的不稳定性[60]，前向散射为负更可能是反映了超导涨落的加强。BCS散射振幅表现出明显的d波对称特征，即

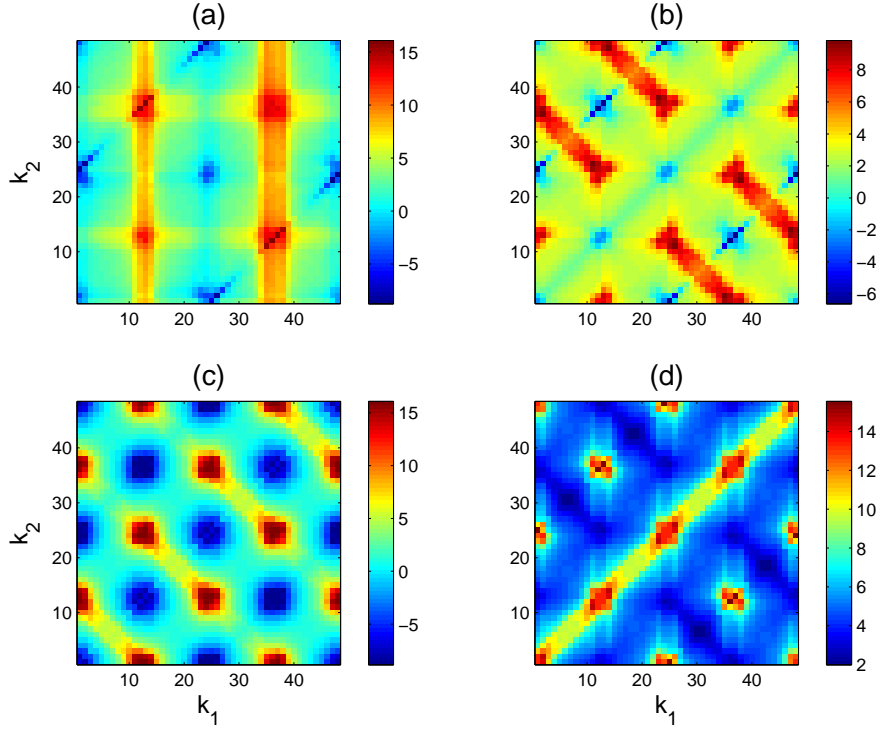
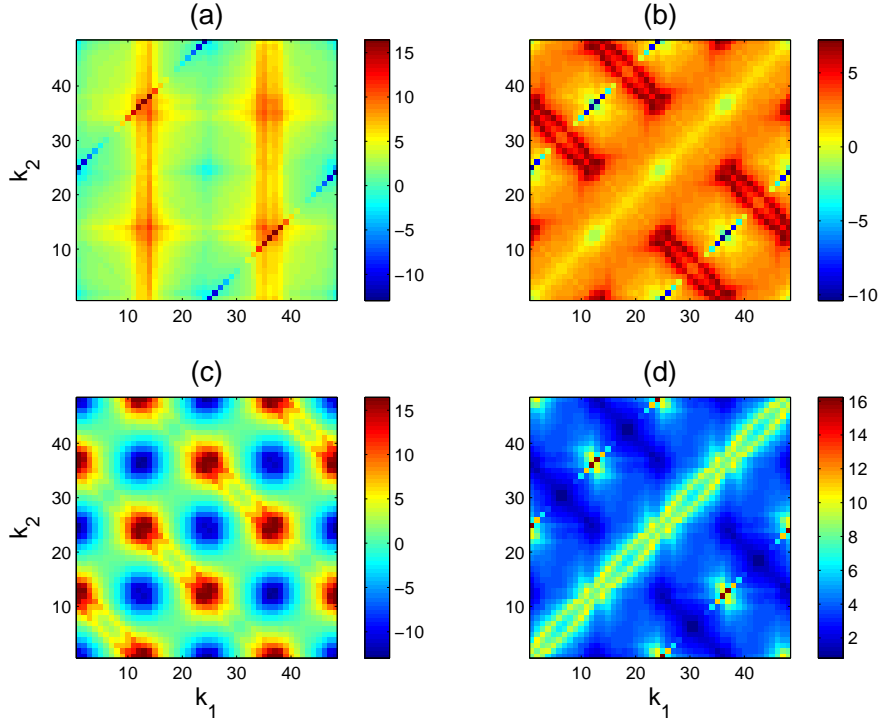


图 3.5 空穴浓度为16%时的有效相互作用。各子图意义同前图。

固定其中一个自变量变化另一个自变量时， V 的符号变化依次为正-负-正-负。这暗示着d波超导的涨落已经出现。嵌套散射振幅在 $\theta_1 = \theta_2$ 时最强。我们注意到，当入射动量均位于热点时散射振幅达到最强，而当位于鞍点附近时散射振幅最弱。由于此时反铁磁涨落占主导地位，我们称这个参数点及其近邻为反铁磁主导区[26]。

我们接下来分析 $x = 0.16$ 时的有效相互作用，即图3.5。同样我们先观察当 θ_3 固定在1号位置时的有效相互作用。与前面的半满填充的结果相比，这里我们注意到在原来的基础上出现了三点不同：首先是对应于BCS散射的暗区得到了加强，这意味着BCS散射得到了加强，或者说有效吸引相互作用变强。接着是原来对应于嵌套散射的亮区弱化，这反映了费米面的嵌套结构变差，不再支持嵌套散射。最后是出现了新特征：当 $\theta_{1,2}$ 位于鞍点附近时，出现了两组四个散射加强的条状区域。特别是在两组条状区域交叠处，即 $\theta_{1,2}$ 同时位于鞍点附近时排斥作用最强。这也就是说，此时鞍点之间的散射处于主导地位。观察前向散射振幅、BCS振幅和嵌套散射振幅，出现了相应的变化。前向散射振幅中原来对应于嵌套结构的亮区弱化，只有刚好位于热点的前向散射较强，同时鞍点之间的前向散射依然为负，但是绝对值变大。BCS通道的散射总体幅度增大且依然具有d波特征，这反映了d波超导涨落的增强。嵌套散射总体幅度与BCS散射


 图 3.6 $x = 0.26$ 时的有效相互作用。各子图意义同前图。

相当，但是嵌套结构被弱化，只有当 $\theta_{1,2}$ 均位于热点上时才较强。我们注意到鞍点的特征在嵌套散射振幅上也有体现，这对应于3.5中子图（d）在鞍点处的亮点。我们可以看到，在这个参数点以及近邻，鞍点之间的散射起主导作用，我们可以称之为鞍点散射主导区[26]。在这个区域，反铁磁与d波超导激烈地竞争。

我们最后分析 $x = 0.26$ ，即van Hove填充附近的有效相互作用，即图3.6。我们注意到与前面的结果相比，有效相互作用的嵌套散射与鞍点散射几乎消失。特别是吸引相互作用的幅度已经超过了排斥相互作用。有效相互作用中对应于BCS配对的部分的d波特征已经非常明显，即沿着 $|\theta_1 - \theta_2| = N/2$ 的线，相互作用依次是正-负-正-负。再观察前向散射振幅，我们注意到原来对应于嵌套特征的亮线劈裂为两条，这实际上说明原有的嵌套结构已经完全消失，而鞍点处的前向散射振幅为负，其幅度已经远远超过为正的部分。BCS散射的振幅为三者之中最大，而且d波对称的特征明显。嵌套散射鞍点处的特征依然保留且为最强，但是出现了新特征：即原来 $\theta_1 = \theta_2$ 的单根亮线劈裂为两条，这实际上反映了反铁磁涨落的波矢不再是 (π, π) ，也就是说出现了非公度的结构。但是值得指出的是，计算表明此时的非公度反铁磁不稳定性并不是主导的不稳定性。在这个参数区域及其近邻，主导不稳定性是d波超导不稳定性，系统最终会失稳到d波

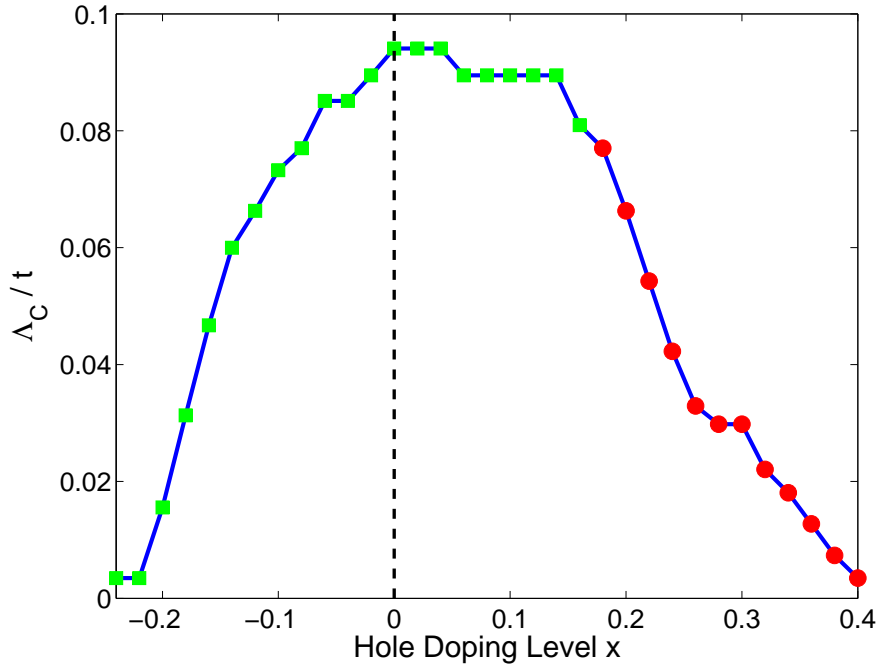


图 3.7 特征截断或者特征温度随掺杂浓度的变化。其中红色圆点代表d波超导涨落主导的区域，绿色方块代表反铁磁涨落主导的区域。

超导相。这个区域据此称为d波超导区[26]。

在分析完毕三个代表性的参数点后，我们给出正方格点上Hubbard模型的相图。前面提到，我们在系统流入强耦合时中止流动，此时的截断能量我们称之为特征截断能量。这个能量在某种程度上反映了系统内涨落的特征能标，我们也可以认为这个阶段能量标度于系统的相变温度。所以我们可以称呼这个阶段能量为特征温度[25]。我们在3.7中给出特征温度对空穴浓度的变化。空穴浓度为负代表电子掺杂。我们注意到随着系统偏离半满，特征温度都在下降，而当系统的空穴浓度大于18%时，系统主导的不稳定性为d波超导不稳定性，而小于此浓度时主导不稳定性为反铁磁不稳定性。当电子掺杂浓度大于22%或者空穴浓度大于40%时，系统的特征温度都不大于 $0.005t$ 。这里我们注意到从反铁磁到超导主导，系统的变化是连续过渡的。此外我们也注意到电子掺杂与空穴掺杂不对称。电子掺杂一侧反铁磁涨落总体上要强许多。这个相图的诸多特征均与高温超导体的相图相类似。

第四章 正方格点上自旋失配的吸引型Hubbard模型

4.1 研究背景

在超导的研究中有一个长期被关注的问题就是超导体对磁场的响应。通常的研究都忽略了磁场造成的Zeeman能只考虑磁场造成的轨道运动，这在磁场不强的情况下是完全合理的。这个方向的研究已经非常深入，并进入常规的教科书[61]。但是另一个方向的研究并非完全透彻，即在忽略磁场造成的轨道运动的情况下研究Zeeman能对超导的影响。我们考虑一个准二维（ ab 平面）的超导材料，如果磁场垂直于 ab 平面，则属于第一种情况；如果磁场平行于 ab 平面，由于材料是准二维的，我们可以完全忽略磁场造成的轨道运动而只考虑Zeeman能造成的影响。此后我们称这样的磁场为Zeeman场。我们知道常规的自旋单态超导体是互为自旋反演态的一对电子($\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow$)配对，时间反演对称保证了这一对电子能量的简并。然而，Zeeman劈裂造成了电子对($\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow$)能量不再简并，这就是说，Zeeman场造成的Zeeman劈裂具有拆对作用。我们据此可以推测一旦Zeeman场足够强，那么自旋单态超导将会消失；特别的我们可以预期Zeeman劈裂能和超导能隙相当时的磁场将会是导致超导消失的临界场，即Pauli极限场。对于没有自旋轨道耦合的自旋三重态配对，由于Cooper对携带一个自旋磁矩，所以引入Zeeman劈裂只会破坏三重态之间的简并而非配对电子之间能量简并，因此Zeeman劈裂不具有拆对作用。我们可以将Cooper对想象成一个 $S = 1$ 的自旋，此时引入Zeeman场会使这个自旋在自旋空间中自由转动，使之与Zeeman场的方向平行[62]。

但问题绝非如此简单。实际上进一步分析表明，在一定条件下此时自旋单态超导并不是直接在Zeeman场作用下消失，而是进入一种新状态。Fulde和Ferrell考虑了一种情况，即此时Zeeman场造成了超流，即超导序参量获得了一个在空间中转动的相位，而序参量的幅度不变，宛如一个行波，这种态破坏了时间反演对称和空间旋转和反演对称，但没有破坏空间平移对称[63]。Larkin和Ovchinnikov考虑了另一种可能，即此时Zeeman场造成了超导序参量幅度在空间中出现了自发调制，宛如一个驻波[64]。在序参量为零的地方为正常态，且由于Pauli顺磁性，出现了铁磁相。因此这样一个状态破坏了时间反演对称和空间旋转和平移对称。无论是前面两种情况的哪一种，配对电子的总动量都不是0。据此共性，我们将这两种状态合称为LOFF态。从微观机制上看，Zeeman场造成了自旋向上和自旋向下的两个电子的费米面不再重合，因

此总动量为零的电子对不是总在费米面上，然而，有可能某些总动量不为0的电子对同时位于费米面上，此时就有可能出现不稳定性，虽则此种不稳定性不是弱耦合不稳定性。这里也要指出LOFF态不是强Zeeman场下的超导体唯一可能的基态，也有可能出现相分离等等。但是，LOFF态本身由于其奇特的性质引起了广泛地关注和研究[65]。

在实验上实现强Zeeman场往往是困难的。一方面，我们可以估计出对于电子对1T大小的磁场只能造成0.01mV量级的Zeeman劈裂，而超导材料的能隙大约在1mV量级，所以强Zeeman场往往需要10T量级以上的磁场；另一方面，即便是准二维超导材料，加面内方向的磁场，其造成的电子轨道运动也往往难以忽略。最近由于实验技术的进步，人们能够在实验室里通过调控光学势阱里的超冷原子来研究这一现象。这里我们用具有核自旋双重态的原子来模拟电子。通过Feshbach共振使得原子之间具有吸引相互作用使之进入超流态。最为重要的实验上的便利就是冷原子中不同核自旋态的原子数目可调。因此，冷原子是一个较好地研究Zeeman场下超导/超流的平台。实验上的初步研究发现，在光学势阱约束下系统处于相分离的状态，没有看到LOFF态的迹象[66][67]。一般认为，不均匀的外势可能是造成相分离的原因。在理论方面，人们进行了广泛研究，代表性的工作如文献[68][69][70][71][72][73]。通过平均场计算可以发现，在弱耦合的情况下不存在LOFF态，这是由于LOFF态不是一个弱耦合不稳定性。在强耦合的条件下，存在一个区域，这区域内LOFF态是稳定的基态。此外，还存在一个相分离区。如果考虑一个正方光学晶格，则由于晶格的各向异性，则有可能出现d波对称的自旋密度波[74]或者p/d波对称的LOFF态[75]。由于这里诸多的不稳定性，一方面平均场没有考虑涨落的作用，另一方面某些费曼图部分求和可能对相应基态具有挑选作用，这里我们有必要考虑使用泛函重整化这一工具重新考察这个问题。

本章中我们研究一个正方格点上自旋失配的吸引型Hubbard模型的不稳定性，这里 $U < 0$ 。格点上的电子只有最近邻的跳跃。此时，由于存在费米面嵌套，除了单纯的超导态以外，还存在一些新的状态。当系统接近半满且自旋失配时，s波LOFF态为系统的首要不稳定性；当一种自旋的电子处于半满时系统处于电荷密度波态；当两种自旋的电子失配较严重，其一费米面为空穴型另一费米面为电子型时，系统处于d波对称自旋密度波态；当系统中一种自旋的电子非常稀少时，系统处于p波超流态。

4.2 计算方案

本节描述如何使用泛函重整化研究自旋失配的吸引型Hubbard模型。系统的哈密顿为：

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle ij \rangle \sigma} t_{i,j} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} - \sum_\sigma \mu_\sigma \mathcal{N}_\sigma = - \sum_{\langle ij \rangle \sigma} t_{i,j} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + \frac{U}{2} \sum_i n_i^2 - \sum_\sigma \mu'_\sigma \mathcal{N}_\sigma \quad (4.1)$$

这里与常规的Hubbard模型相比区别在于不同自旋的化学势不同。在此种情况下原来的自旋的 $SU(2)$ 对称被破坏，自旋空间的对称群变成了 $U(1)$ 。这也就意味着自旋向上和自旋向下之间的对称已经消失，但是单独一种自旋的粒子数守恒。因此，与前一章计算相比，我们需要考虑的有效相互作用顶角依赖于入射电子的自旋，即忠实表示为：

$$V(\mathbf{k}_1, \sigma_1, \mathbf{k}_2, \sigma_2, \mathbf{k}_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{k}_2, \sigma_2 & & \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3, \sigma_2 \\ & \nearrow \quad \nwarrow & \\ & \bullet & \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ \mathbf{k}_1, \sigma_1 & & \mathbf{k}_3, \sigma_1 \end{array} \end{array} \quad (4.2)$$

其他计算均与前一章相同，唯一需要注意的是每一根内线都携带自旋指标。我们选取 $U = -3t$ 并且只考虑最近邻的条约，其他条件均与前一章相同。在后面的计算中我们调节电子的化学势，观察系统中可能存在的不稳定性。

为了避免盲目计算，这里我们需要事先分析系统中可能存在哪些不稳定性。首先我们一定要考虑s波的LOFF态；其次，注意到费米面有嵌套的可能，所以一定要考虑电荷密度波的不稳定性；虽然系统中没有直接的同种自旋的相互作用，但是在微扰论的第二级我们必须考虑p波超导的不稳定性，如图4.2所示。实际上计算表明 $p_x + ip_y$ 配对为主要，这可能是因为其与模型本身的对称性相同。在后文中若不作说明p波配对均指 $p_x + ip_y$ 配对。

除了前述一些比较容易看出的可能不稳定性，还有一种相对隐蔽的不稳定性。我们知道，通过对某一自旋的电子作粒子-空穴变换可以将吸引型Hubbard模型和排斥型Hubbard模型相互联系起来。这里我们注意到，对于排斥型Hubbard模型，一个可能的不稳定是d波自旋单态配对，这里我们如果对自旋向下的电子作如此变换则得到：在吸引型Hubbard模型中存在着d对称的自旋

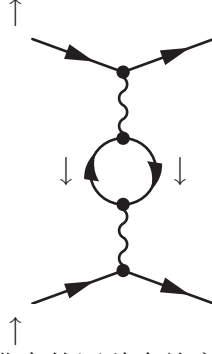


图 4.1 二级过程带来的同种自旋之间的有效相互作用。

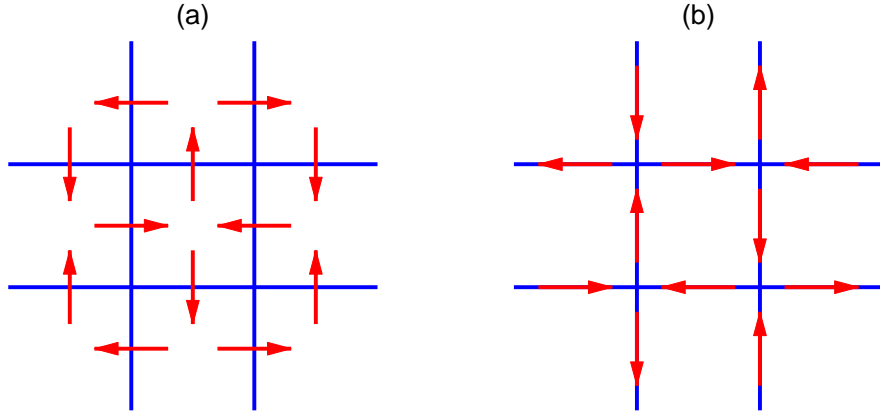


图 4.2 dSDW序与dCDW序。其中左图为dSDW序，右图为dCDW序。左边箭头代表自旋轨道耦合矢量的方向，右边箭头代表电流方向。

密度波。具体说来就是：

$$\langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \rangle \sim \cos(k_x) - \cos(k_y) \Rightarrow \langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},\downarrow} \rangle \sim \cos(k_x) - \cos(k_y) \quad (4.3)$$

这是对常规的dCDW序的推广。从实空间来看，这种序对应于某种键上自旋轨道耦合，如果我们采用文献[76]中的图示法，则如图4.2所示。

4.3 自旋失配吸引型Hubbard模型的零温相图

本节讨论几个具有代表性的结果。首先我们分析当两种自旋的电子的费米面略微失配时系统可能的不稳定性。我们选择 $\mu_\uparrow = -0.1, \mu_\downarrow = -0.2$ 。此时费米面如图4.3子图(a)所示，我们注意到自旋向上和自旋向下的电子的费米面几乎为两个同心圆。此时我们可以预期系统可能出现s波的LOFF态。具体极化率的计算见4.3的子图(b)(c)(d)。我们首先注意比较超导极化率、电荷密度波极化率和自旋密度波极化率，以s波超导极化率的最大值为高，这就意味着首要的不稳定性出现在s波超导这一通道。进一步观察s波超导极化率随动量的

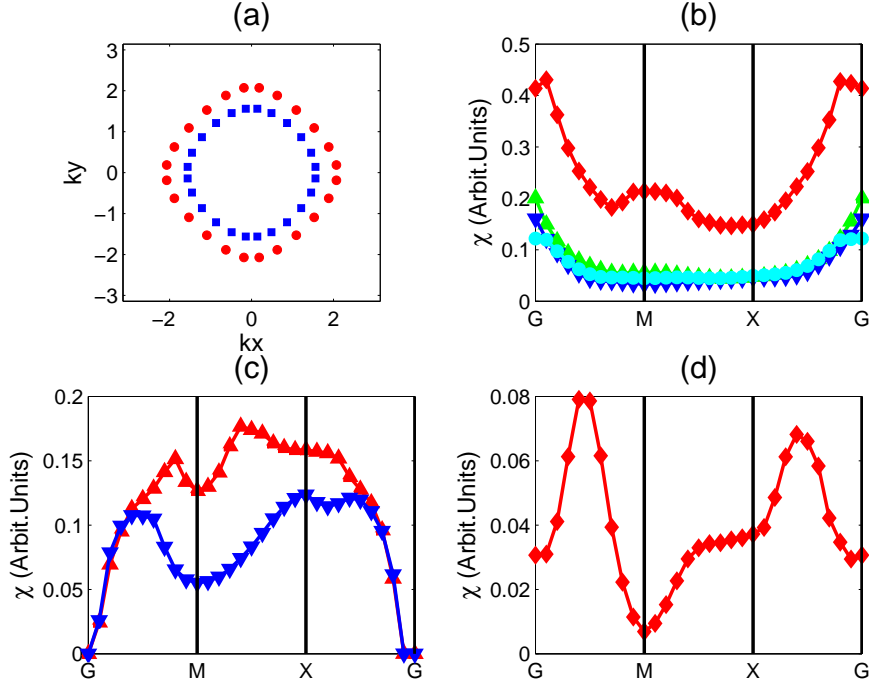


图 4.3 $\mu_{\uparrow} = -0.1, \mu_{\downarrow} = -0.2$ 时的计算结果。(a)为系统的费米面，其中红色圆点为自旋向上电子的费米面，蓝色方块为自旋向下电子的费米面。(b)为超导极化率在高对称方向上的变化。其中红色菱形为s波配对，绿色上三角为 $M = 1$ 的p波配对，蓝色下三角为 $M = -1$ 的p波配对，天蓝色圆点为 $M = 0$ 的p波配对。(c)为电荷密度波极化率在高对称方向上的变化。其中红色上三角为自旋向上的电子的密度波极化率，蓝色下三角为自旋向下的电子的密度波极化率。(d)为d波对称的自旋密度波的极化率在高对称方向上的变化。

变化，我们注意到在Brillouin区中沿着 $(0,0) \rightarrow (\pi,\pi) \rightarrow (\pi,0) \rightarrow (0,0)$ 这一围道，极大值出现在Brillouin区x轴方向。考虑到系统的四重旋转对称，实际上极大值出现在四个不等价的位置。这就意味着，的确，此时系统最有可能失稳到s波LOFF态。LOFF态的调制波矢为极化率极大值对应的波矢。但此时我们应当注意到，在Brillouin区对角方向存在一个局部的极大，这个极大只是略小于前面提到的极大值。这很有可能意味着，系统中存在两套共存的调制波矢不同的LOFF态。

如果我们进一步加大两种自旋的电子之间的失配，具体说来就是进一步减少自旋向下电子的数目，那么新情况就会出现。我们选择 $\mu_{\uparrow} = -0.1, \mu_{\downarrow} = -0.35$ 。此时结果如图4.4所示。和前面的结果相比，首要不稳定性依然出现在超导通道。但是我们注意到，一个显著的区别是，首要不稳定性为自旋向上的电子之间的零动量的p波配对，而前面提到的s波的LOFF态退居为次要不稳定性。这在简单的平均场框架下是不可理解的，因为我们的原始哈密顿中只存在自

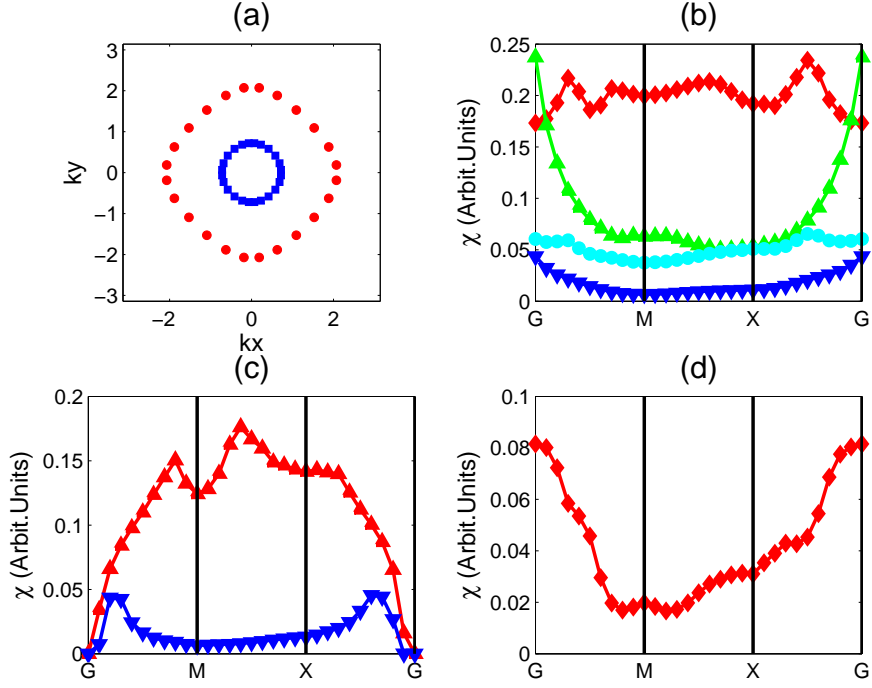
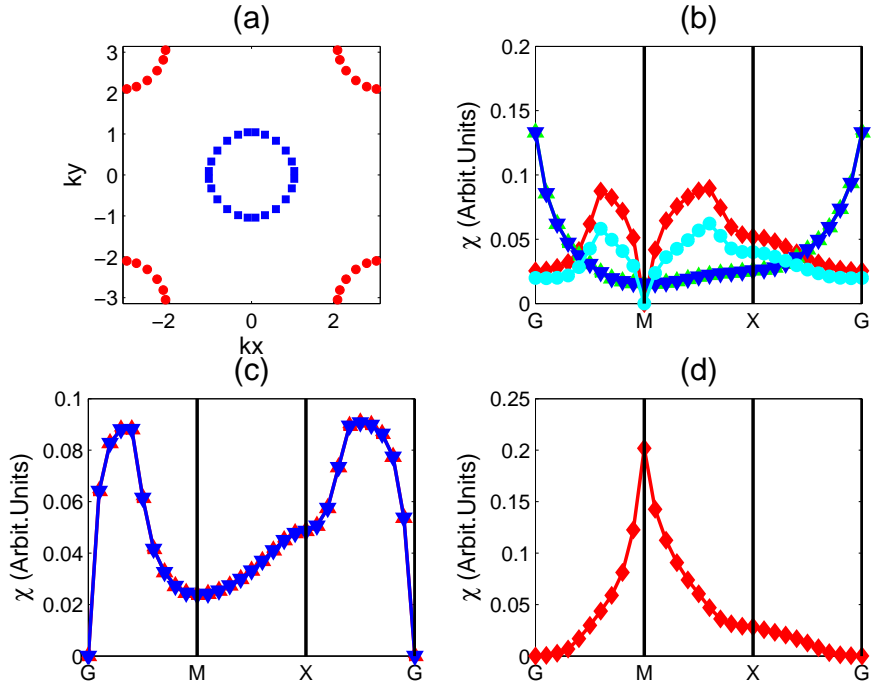
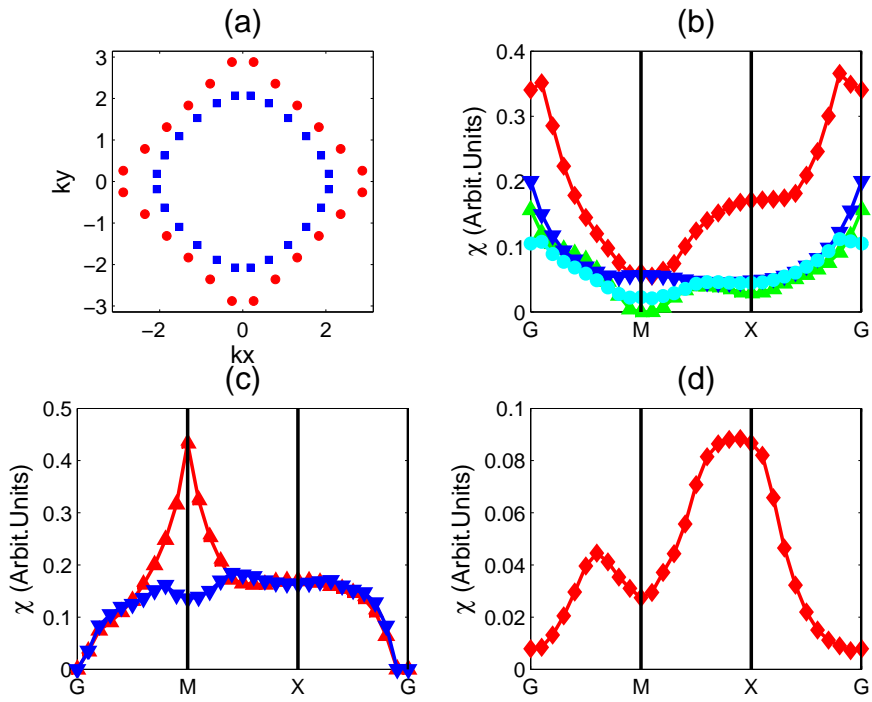


图 4.4 $\mu_{\uparrow} = -0.1, \mu_{\downarrow} = -0.35$ 时的计算结果。标注均同前。

旋向上和自旋向下电子之间的吸引相互作用，而不存在同种自旋的电子之间的吸引相互作用。实际上这里的p波配对的起源于前文提到的二级过程，即自旋向上（下）的电子通过自旋向下（上）的电子作为媒介产生间接的吸引相互作用。这里由于自旋向上的电子具有较大的费米面，或者说较大的费米面态密度，所以p波配对首先在自旋向上的电子之间发生。但是这里我们也要注意，s波LOFF态的极化率只是略小于p波超导极化率，所以两相共存是非常可能的。

在前文中我们提到，排斥型Hubbard模型中的d波超导序蕴含着在吸引型Hubbard模型中存在着一个可能的d波对称的自旋密度波。我们选择 $\mu_{\uparrow} = 0.3, \mu_{\downarrow} = -0.3$ ，此时系统的首要不稳定性正是d波对称的自旋密度波。观察图4.5，我们可以发现，首要不稳定性不再是超导，而是d对称的自旋密度波。为了理解为何在此条件下会出现d对称自旋密度波，我们只需要注意到，对于一个空穴浓度为 x 的排斥型Hubbard模型，作粒子-空穴变换后恰好变换为自旋向上电子数为 $1 - x$ ，自旋向下电子数为 $1 + x$ 的吸引型Hubbard模型，即当前考虑的情况。既然前者的可能基态为d波超导，那么后者的可能基态就是d对称的自旋密度波。

我们知道，对于一个半满的吸引型Hubbard模型，其基态为s波超导态和电荷


 图 4.5 $\mu_{\uparrow} = 0.3, \mu_{\downarrow} = -0.3$ 时的计算结果。标注均同前。

 图 4.6 $\mu_{\uparrow} = 0.0, \mu_{\downarrow} = -0.1$ 时的计算结果。标注均同前。

密度波共存。一旦系统偏离半满，则系统的基态立刻成为s波超导态。这里我们考虑一个略微不同的情况，即自旋向上的电子处于半满，即自旋向上电子的费米面具有完美的嵌套结构，而自旋向下的电子略微偏离半满。计算结果如图4.6所示。我们注意到这里的首要不稳定通道是自旋向上的电子的电荷密度波序。由于自旋失配，系统成超导序的趋势被压制，然而由于自旋向上的电子的嵌套依然完美，所以电荷密度波就成为了首要不稳定性。

如上所述，我们考察了四种典型的情况，系统的首要不稳定通道分别是s波LOFF序，p波超导序，d自旋密度波序和电荷密度波序。可见，自旋失配的吸引型Hubbard模型其相图结构是相当丰富的。但是，由于这里方法上的缺陷，我们只能判断首要不稳定性，而无法真正深入到对称破缺相中去，因而不能判断多项共存的情况。此外，文献中提议的相分离在目前框架下还无法考虑。进一步的工作可以考虑结合泛函重整化群与平均场[52]，或者直接在对称破缺相计算重整化流[51]，来研究多相共存的情形。

第五章 结论

在引言中，本文对泛函重整化方法作一概述。引言在简单介绍其历史发展的同时，从各个角度讨论其在研究关联电子系统中的独特意义，并简介其具体运用。

在第二章中，本文介绍了泛函重整化的Wilson-Polcinski方案，并从路径积分导出Wilson-Polchinski方程。同时，本文介绍了Wetterich方案，并分别从路径积分和图形展开的方案来导出Wetterich方程。本文还比较了Wilson-Polchinski方案和Wetterich方案。其中对Wetterich方程的图形推导尚属首次报道。在第二章的最后，作为一个例子我们运用Wetterich方案研究了 $U(N)$ 模型的重整化。

在第三章中，作为一个案例，本文运用泛函重整化去处理零温下正方格点Hubbard模型。本文分析了零温下正方格点上的Hubbard模型中反铁磁与超导的竞争，并给出零温下Hubbard模型的相图。随着不断引入空穴，系统中的反铁磁成序的趋势逐步被压制，而d波超导序逐步增强，系统依次经历了反铁磁主导区，鞍点散射区和d波超导主导区。

在第四章中，本文将分析自旋失配的吸引型Hubbard模型中存在的诸多竞争序。当系统不同自旋的电子的费米面略有失配且不具嵌套特征时，系统的主导失稳通道是s波FFLO超导序；当系统的失配较严重时，在少数自旋的电子做媒介传递吸引相互作用，系统的主导失稳通道是多数自旋电子的p波超导序；当系统中两种自旋的电子填充分别为电子型和空穴型时，主导失稳通道是d波自旋密度波序。当有一种自旋电子处于半满时，系统的主导失稳通道是电荷密度波序。

作为进一步发展的方向，如前文所述，我们可以考虑直接在对称破缺相计算，从而讨论排斥型Hubbard模型中反铁磁序和超导序序参量的具体大小，以及二者的可能共存。对于吸引型Hubbard模型，Gersch等人[53]考虑了没有自旋失配的情形中超导序参量的大小与临界转变温度。我们可以考虑将这个计算推广到自旋失配的情形。最后，我们也可以考虑将自能的反馈效果包含到重整化群计算中。

参考文献

- [1] D. J. Amit. *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena*. World Scientific, 2nd edition, 2002.
- [2] J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 4th edition, 2002.
- [3] K. G. Wilson. *Rev. Mod. Phys.*, 55:583, 1983.
- [4] J. Polchinski. Effective field theory and the fermi surface. Theoretical Advanced Study Institute, 1992.
- [5] R. Shankar. Effective field theory in condensed matter physics. Boston Colloquium for the Philosophy of Science, 1996.
- [6] P. W. Anderson. *J. Phys. C*, 3:2436, 1970.
- [7] K. G. Wilson. *Rev. Mod. Phys.*, 47:773, 1975.
- [8] J. Sólyom. *Adv. Phys.*, 28:201, 1979.
- [9] Yu. A. Buchkov, L. P. Gorkov, and I. E. Dzyaloshinskii. *Sov. Phys. JETP*, 23:489, 1966.
- [10] C. Di Castro and W. Metzner. *Phys. Rev. Lett*, 67:3852, 1991.
- [11] W. Metzner and C. Di Castro. *Phys. Rev. Lett*, 69:1703, 1992.
- [12] R. Shankar. *Rev. Mod. Phys*, 66:129, 1994.
- [13] C. Domb and M. S. Green, editors. *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 6th. Academic Press, 1976.
- [14] B. Delamotte. arXiv: cond-mat/0702365.
- [15] J. Polchinski. *Nucl. Phys. B*, 231:269, 1984.
- [16] K. G. Wilson and J. Kogut. *Phys. Rep.*, 12:75, 1974.
- [17] C. Wetterich. *Nucl. Phys. B*, 252:529, 1991.
- [18] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich. *Phys. Rep.*, 363:223, 2002.
- [19] K. J. Wiese. Why one needs a functional renormalization group to survive in a disordered world. In *Proceedings of the 22nd IUPAP International Conference on Statistical Physics*, 2005.

-
- [20] H. Gies. Introduction to the functional rg and applications to gauge theories. ECT School on Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems, 2006.
 - [21] H. J. Schulz. *Europhys. Lett.*, 4:609, 1987.
 - [22] I. Dzyaloshinskii. *Sov. Phys. JETP*, 66:848, 1987.
 - [23] I. Herbut. *A Mordern Approach to Critical Phenomena*. Cambridge University Press, 1st edition, 2007.
 - [24] B. Binz, D. Baeriswyl, and B. Douçot. *Ann. Phys. (Lepzig)*, 12:704, 2003.
 - [25] D. Zanchi and H. J. Schulz. *Phys. Rev. B*, 61:13609, 2000.
 - [26] C. Honerkamp, M. Salmhofer, N. Furukawa, and T. M. Rice. *Phys. Rev. B*, 63:035109, 2001.
 - [27] C. J. Halboth and W. Metzner. *Phys. Rev. Lett.*, 85:5162, 2000.
 - [28] Luca Dell’Anna and Walter Metzner. *Phys. Rev. Lett.*, 98:136402, 2007.
 - [29] C. Honerkamp, H. C. Fu, and D. H. Lee. *Phys. Rev. B*, 75:014503, 2007.
 - [30] H. C. Fu, C. Honerkamp, and D. H. Lee. *Europhys. Lett.*, 75:146, 2006.
 - [31] A. A. Katanin. *Phys. Rev. B*, 74:174523, 2006.
 - [32] A. A. Katanin and A. P. Kampf. *Phys. Rev. Lett.*, 93:106406, 2004.
 - [33] D. Rohe and W. Metzner. *Phys. Rev. B*, 71:115116, 2005.
 - [34] M. Ossadnik, C. Honerkamp, T. M. Rice, and M. Sigrist. *Phys. Rev. Lett.*, 101:256405, 2008.
 - [35] C. Honerkamp. *Phys. Rev. B*, 68:104510, 2003.
 - [36] S. W. Tsai and J. B. Marston. *Can. J. Phys.*, 79:1463, 2001.
 - [37] C. Honerkamp and W. Hofstetter. *Phys. Rev. Lett.*, 92:170403, 2004.
 - [38] C. Honerkamp. *Phys. Rev. Lett.*, 100:146404, 2009.
 - [39] F. Wang, H. Zhai, Y. Ran, A. Vishwanath, and D. H. Lee. *Phys. Rev. Lett.*, 100:047005, 2009.
 - [40] C. Platt, C. Honerkamp, and W. Hanke. arXiv: 0903.1963.
 - [41] P. Jakubczyk, P. Strack, A. A. Katanin, and W. Metzner. *Phys. Rev. B*, 77:195120, 2008.
 - [42] P. Jakubczyk. *Phys. Rev. B*, 79:125115, 2009.
 - [43] J. A. Hertz. *Phys. Rev. B*, 14:1165, 1976.

-
- [44] A. J. Millis. *Phys. Rev. B*, 48:7183, 1993.
- [45] S. Andergassen, T. Enss, V. Meden, W. Metzner, U. Schollwöck, and K. Schöhammer. *Phys. Rev. B*, 70:075102, 2004.
- [46] S. Andergassen, T. Enss, C. Karrasch, and V. Meden. A gentle introduction to the functional renormalization group: the kondo effect in quantum dots. In *Proceedings of the Les Houches Summer School Session LXVI*, 2006.
- [47] T. Enss. *Renormalization, Conservation Laws and Transport in Correlated Electron Systems*. PhD thesis, Max-Planck-Institut für Festkörperforschung, 2005.
- [48] C. Honerkamp and M. Salmhofer. *Phys. Rev. B*, 64:184516, 2001.
- [49] C. Honerkamp, D. Rohe, S. Andergassen, and T. Enss. *Phys. Rev. B*, 70:235115, 2004.
- [50] C. Honerkamp and M. Salmhofer. *Phys. Rev. Lett.*, 87:187004, 2001.
- [51] R. Gersch, C. Honerkamp, D. Rohe, and W. Metzner. *Eur. Phys. J. B*, 48:349, 2005.
- [52] J. Reiss, D. Rohe, and W. Metzner. *Phys. Rev. B*, 75:075110, 2007.
- [53] R. Gersch, J. Reiss, and C. Honerkamp. *New J. Phys.*, 8:320, 2006.
- [54] R. Gersch, C. Honerkamp, and W. Metzner. *New J. Phys.*, 10:045003, 2008.
- [55] A. A. Katanin. *Phys. Rev. B*, 70:115109, 2004.
- [56] M. Salmhofer. *Renormalization: An Introduction*. Springer, 1998.
- [57] S. K. Ma, editor. *Modern Theory of Critical Phenomena*. Benjamin, 1976.
- [58] A. Montorosi, editor. *The Hubbard Model*. World Scientific, 1992.
- [59] W. Kohn and J. M. Luttinger. *Phys. Rev. Lett*, 15:525, 1965.
- [60] C. Honerkamp, M. Salmhofer, and T. M. Rice. *Euro. Phys. J. B*, 27:127, 2002.
- [61] Michael Tinkham, editor. *Introduction to Superconductivity*. Dover Publications, 2nd edition edition, 2004.
- [62] V. P. Mineev and K. Samokhin, editors. *Introduction to Unconventional Superconductivity*. Gordon and Breach, 1999.
- [63] P. Fulde and R. A. Ferrell. *Phys. Rev.*, 135:A550, 1964.
- [64] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov. *Sov. Phys. JETP*, 20:762, 1965.
- [65] R. Casalbuoni and G. Nardulli. *Rev. Mod. Phys.*, 76:263, 2004.

- [66] M. W. Zwierlein, A. Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle. *Science*, 311:492, 2006.
- [67] G. B. Partridge, W. Li, R. I. Kamar, Y. a. Liao, and R. G. Hulet. *Science*, 311:503, 2006.
- [68] C. H. Pao, S.-T. Wu, and S. K. Yip. *Phys. Rev. B*, 73:132506, 2006.
- [69] D. T. Son and M. A. Stephanov. *Phys. Rev. A*, 74:013614, 2006.
- [70] D. E. Sheehy and L. Radzihovsky. *Phys. Rev. Lett.*, 96:060401, 2006.
- [71] M. Mannarelli, G. Nardulli, and M. Ruggieri. *Phys. Rev. A*, 74:033606, 2006.
- [72] Hui Hu and Xia-Ji Liu. *Phys. Rev. A*, 73:051603(R), 2006.
- [73] N. Yoshida and S.-K. Yip. *Phys. Rev. A*, 75:063601, 2007.
- [74] Hiromasa Tamaki, Kazumasa Miyake, and Yoji Ohashi. arXiv: 0903.1491.
- [75] S. Rombouts. arXiv: 0902.1450.
- [76] C. J. Wu, J. Zaanen, and S.-C. Zhang. *Phys. Rev. Lett.*, 95:247007, 2005.

致 谢

在攻读硕士学位的道路上，我并不是独自前行。这里我要感谢我的亲人、老师和同学对我的帮助和鼓励。没有他们，我的研究生生涯恐怕会黯淡无光，毫无生气。特别地，我想感谢：

- 首先要感谢我的父母，没有他们的养育和支持、鼓励，不会有我的存在，我更不会完成学业。这份学位论文就是献给他们的——虽然与他们的伟大奉献相比，这份简陋的作品显得卑微，但是我还是希望借这样一个机会表达我对他们无私的爱和奉献的感恩之情。
- 在近三年的研究生学习期间，我有幸得到了我的导师王强华教授的指导。他非凡的洞察力，广博的学识和严谨的治学态度无不让人钦佩；他的谆谆教诲，悉心指导和奖掖提携无不让人感戴。在跟随教授的学习过程中，我不仅学到了物理学知识，更重要的是学到了治学研究的方法。我希望这样一份简陋的作品不至令他失望。
- 在我编写数值计算代码时，泛函重整化的专家，Würzburg大学的Carsten Honerkamp教授毫无保留地分享了他的经验。他不仅帮助我提高了代码效率，还让我领略到了真正的学者风范。
- 在南京大学物理系求学期间，我有机会能够和我的同学们讨论和交流学习心得。他们对许多问题的独特见解以及丰富知识对我多有助益。

最后，我还希望感谢那些并不直接和学术研究有关的朋友们。和他们一起度过的那些时光未来将会是我一生中最为美好的回忆。

Publication List

1. Da Wang, **Yuan Wan** and Qiang-Hua Wang, *Theory of tunnelling into a multi-band superconductor: decoherence and interference*, [Arxiv: 0901.1419](#). Accepted for publication on Phys. Rev. Lett.
2. **Yuan Wan** and Qiang-Hua Wang, *Pairing symmetry and properties of iron-based high temperature superconductors*, [Europhys. Lett. **85**, 57007\(2009\)](#).
3. **Yuan Wan**, Hai-Dong Lü, Hong-Yan Lu and Qiang-Hua Wang, *Impurity resonance states in electron-doped high- T_c superconductors*, [Phys. Rev. B **77**, 064515\(2008\)](#).
4. Fei Tan, **Yuan Wan** and Qiang-Hua Wang, *Theory of high-energy features in single-particle spectra of hole-doped cuprates*, [Phys. Rev. B **76**, 054505\(2007\)](#).