UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Žan Grad

TEORIJA UMERITVENIH POLJ, YANG–MILLS–HIGGSOVE ENAČBE IN SPINSKE STRUKTURE NA LORENTZOVIH MNOGOTEROSTIH

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. Sašo Strle

Ljubljana, 2020

Zahvala

Težko je našteti vse ljudi, brez katerih to delo nikdar ne bi nastalo. Hvala prijateljem; brez vas bi to magistrsko delo nastalo mnogo prej. Hvala družini za čustveno in materialno podporo.

Največja zahvala gre mentorju Sašu. Namenil si mi toliko časa in volje, da ne vem, kako ti bom to kadarkoli uspel povrniti. Hvala za pronicljive in žlahtne diskusije o geometriji ter svetu matematike. Pedagoške metode, ki se jih poslužuješ, so naravnost genialne. Upam, da so ti bili moji fizikalni vpogledi zabavni, če že ne koristni.

Kazalo

Program dela

V delu natančno predstavite temelje glavnih svežnjev, povezav in pridruženih vektorskih svežnjev. Pridobljeno teorijo uporabite v kontekstu fizikalnega opisa osnovnih gradnikov materije – bozonov in fermionov.

Za preučevanje bozonov vpeljite Hodge-$\star$ operator in sorodni pojem kodiferenciala na pridruženem vektorskem svežnju. Natančno izpeljite Yang–Millsove enačbe, jih fizikalno interpretirajte in pokažite, kako se izražajo ob sklopitvi s skalarnim poljem. Fermione obravnavajte tako, da preko preučevanja Lorentzove grupe uvedete glavni spin sveženj dane Lorentzove mnogoterosti. Z uporabo variacijskega principa izpeljite Diracovo enačbo spinorskega polja na poljubni Lorentzovi mnogoterosti, ki dopušča spinsko strukturo, in obravnavajte sklopitev spinorskega polja z umeritvenim poljem.

Osnovna literatura:

- M. J. Hamilton, *Mathematical Gauge Theory*, Springer International Publishing, Cham, 2017.
- D. Bleecker, *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Boston, 1981.
- G. L. Naber, *Topology, Geometry and Gauge fields*, Springer, New York, 2011.
- H. B. Lawson in M.-L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.
- T. Friedrich, *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, Graduate Studies in Mathematics **25**, American Mathematical Society, Providence, 2000.
- S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

Podpis mentorja:

Teorija umeritvenih polj, Yang–Mills–Higgsove enačbe in spinske strukture na Lorentzovih mnogoterostih

Povzetek

Teorija umeritvenih polj ponuja geometrijsko bogat teoretičnofizikalni skelet, v katerem simetrije narekujejo interakcije. V pričujočem delu začnemo pri osnovah glavnih svežnjev in natančno predstavimo splošen pojem povezave na njih. Pokažemo, da povezava naravno porodi pojma ukrivljenosti in kovariantnega odvoda na pridruženem vektorskem svežnju glede na dano upodobitev strukturne Liejeve grupe, raziščemo njune lastnosti ter natančno definiramo pojem umeritvenega polja ter njegove jakosti. Pri tem izrazimo vpliv umeritvenih transformacij nanju in pokažemo, kako lahko ukrivljenost na glavnem svežnju identificiramo z diferencialno formo, ki ima vrednosti v adjungiranem svežnju.

Ukrivljenost povezave je – skupaj s Hodge-$\star$ operatorjem, vnanjim kovariantnim odvodom in variacijskim principom – osnova naše razprave o Yang–Millsovi teoriji, ki jo interpretiramo kot teorijo interakcije polja umeritvenih bozonov (tj. nosilcev fundamentalnih fizikalnih sil) s samim sabo. V tem kontekstu pokažemo umeritveno invariantnost Yang–Millsovega Lagrangiana in izpeljemo Yang–Millsovo enačbo, ki jo skupaj z Bianchijevo identiteto interpretiramo kot posplošitev Maxwellovih enačb. Z umestitvijo posplošenega Klein–Gordonovega Lagrangiana v ta kontekst izpeljemo Yang–Mills–Higgsove enačbe, ki opisujejo interakcijo polja umeritvenih bozonov s skalarnim poljem. Posledica teh enačb je proslavljeni Brout–Englert–Higgsov mehanizem, ki ga na kratko orišemo.

Skozi fizikalno motivirano študijo Lorentzove grupe in njenega univerzalnega krova nazadnje naravno vpeljemo koncept spinske strukture na Lorentzovo mnogoterost – to nam omogoča, da umestimo Levi–Civitajevo afino povezavo na pridružen spinorski sveženj, kar nam dalje omogoča, da natančno definiramo Diracov operator na Lorentzovi mnogoterosti. S pridobitvijo osnovnih lastnosti Cliffordovega množenja dokažemo sebiadjungiranost Diracovega operatorja glede na skalarni produkt, ki ga porodi Diracova hermitska forma. Z uporabo variacijskega računa rigorozno izpeljemo Diracovo enačbo na spinski Lorentzovi mnogoterosti. Za konec orišemo konstrukcijo spoja glavnega spin svežnja z glavnim umeritvenim svežnjem in povemo, kako nas to privede do nehomogene Yang–Millsove enačbe, ki v fiziki opisuje interakcije fermionov z umeritvenimi polji.

Math. Subj. Class. (2020): 22E43, 22E70, 53B30, 53C05, 53C07, 53C10, 53C25, 53C27, 53C50, 53C80, 58A10, 58E15, 70S15, 70S05

Ključne besede: simetrija, glavni sveženj, umeritev, povezava, ukrivljenost, pridružen vektorski sveženj, upodobitev Liejeve grupe, vzporedni prenos, kovariantni vnanji odvod, bozoni, Hodge-$*$ operator, kodiferencial, Yang–Millsova teorija, Lagrangian, variacijski princip, Klein–Gordonova enačba, fermioni, Diracova enačba, Lorentzova grupa, spin grupa, spinorsko polje, Cliffordovo množenje, Diracov operator, interakcija

Gauge field theory, Yang–Mills–Higgs equations and spin structures on Lorentzian manifolds

Abstract

Gauge field theory provides a geometrically rich theoretico-physical framework in which symmetries dictate interactions. We begin the present work by examining the fundamental properties of principal bundles and introduce on them the general notion of a connection. We show that the latter naturally gives rise to the concept of curvature; furthermore, given a representation of the structure Lie group, we conceive the notion of a covariant derivative on the associated vector bundle. We precisely define gauge fields, express the influence of gauge transformations on them and show how curvature on a principal bundle may be identified with a differential form with values in the adjoint bundle.

Together with the notions of the Hodge-$\star$ operator, the exterior covariant derivative and the variational principle, the curvature of a connection is the basis for the Yang–Mills theory, which we physically interpret as the theory of self-interaction of the gauge boson fields (i.e. the carriers of fundamental forces). In this context, we prove gauge invariance of the Yang–Mills Lagrangian and derive the Yang–Mills equation, which we interpret, together with the Bianchi identity, as a generalization of the Maxwell's equations. By including the Klein–Gordon Lagrangian into this theory, we derive the Yang–Mills–Higgs equations, which describe the interaction of gauge boson fields and scalar fields. A consequence of these equations is the celebrated Brout–Englert–Higgs mechanism; we provide a short sketch thereof.

Through a physically motivated study of the Lorentz group and its universal cover, we naturally introduce the notion of a spin structure on a Lorentz manifold. The latter enables us to induce from the affine Levi–Civita connection the covariant derivative on the associated spinor bundle, which further enables us to precisely define the Dirac operator on a Lorentz manifold. By acquiring the basic properties of the Clifford multiplication, we prove self-adjointness of the Dirac operator with respect to the hermitian Dirac form. By means of the variational principle, we arrive to the Dirac equation on a spin Lorentz manifold. We conclude our investigation by splicing the principal spin bundle with the principal gauge bundle and sketch how this tool is used to describe interactions of fermions with gauge fields.

Math. Subj. Class. (2020): 22E43, 22E70, 53B30, 53C05, 53C07, 53C10, 53C25, 53C27, 53C50, 53C80, 58A10, 58E15, 70S15, 70S05

Keywords: symmetry, principal bundle, gauge, connection, curvature, associated vector bundle, representation of a Lie group, parallel transport, covariant exterior derivative, bosons, Hodge-$*$ operator, codifferential, Yang–Mills theory, Lagrangian, variational principle, Klein–Gordon equation, fermions, Dirac equation, Lorentz group, spin group, spinor field, Clifford multiplication, Dirac operator, interaction

1 Uvod

Namen tega dela je rigorozno opisati z modernejšimi topološkimi in geometrijskimi orodji teoretični okvir za osnovne interakcije med *umeritvenimi bozoni* (tj. nosilci fundamentalnih sil), *skalarnimi bozoni* (primer je Higgsov bozon) in *fermioni* (oprijemljiva snov, npr. elektroni, kvarki) v fiziki. Te tri vrste osnovnih delcev, ki jih bomo v pričujočem besedilu konceptualno razsvetlili, bomo z nadpomenko imenovali *materija*. Potrebno predznanje za gladko razumevanje tega besedila je:

- multilinearna algebra – s posebnim poudarkom na antisimetričnih tenzorjih in vnanjem produktu,
- teorija gladkih mnogoterosti – s posebnim poudarkom na vektorskih svežnjih, diferencialnih formah in integraciji,
- (psevdo) Riemannova diferencialna geometrija,
- splošna teorija Liejevih grup in njihovih upodobitev.

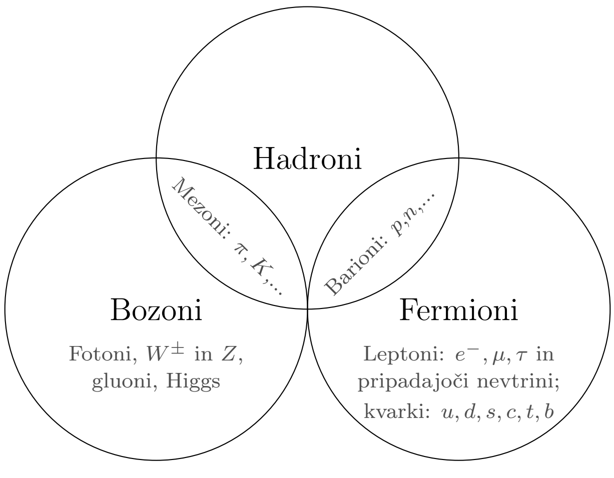
V kolikor bralec s temi tematikami ni domač ali pa bi želel v danem trenutku osvežiti svoje znanje, priporočamo vire [10], [11] in [14] – pogosto se bomo sklicevali na tam dokazane rezultate. Bralcu bo prišlo prav tudi skromno poznavanje osnov moderne fizike, saj bomo (že v naslednjem odstavku) v obzir vzeli določene motivacijske fizikalne primere; lahko jih preskoči in se osredotoči le na striktno matematični del, vendar bo s tem prikrajšan za fizikalno interpretacijo, ki pri abstraktnem matematičnem diskurzu razblini suhoparnost in, kar je še posebej pomembno, pridoda k razumevanju narave.

Pri obravnavi osnovnih – klasičnih ali kvantnih – fizikalnih konceptov imamo vedno opravka z nekakšnim poljem, tj. s funkcijo, ki ima za domeno neko mnogoterost, ki ustreza našemu okolju – primera sta evklidski prostor $\mathbb{R}^4$ in prostor Minkowskega; slednjega bomo obelodanili v razdelku 1.1. Omenjena funkcija ponavadi zavzema vrednosti v nekem vektorskem prostoru – pogosto sta to $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ – in je vedno rešitev nekega sistema parcialnih diferencialnih enačb (s tem se omejimo na fizikalno smiselna polja); za primer lahko vzamemo elektromagnetno polje, ki je rešitev Maxwellovih enačb, ali pa valovno funkcijo v kvantni mehaniki, ki je rešitev Schrödingerjeve enačbe. Če okolje modeliramo z (ukrivljenim) prostorom-časom, potem je domena te funkcije Einsteinova mnogoterost, tj. štirirazsežna psevdo Riemannova mnogoterost (M, g) s signaturo $(1, 3)$, ki reši Einsteinovo enačbo.* Tako mnogoterost v splošnem pojmujemo kot *okolje*. Tedaj kodomena te preslikave ni več nujno vektorski prostor, ampak njegova posplošitev: vektorski sveženj. *Polja* so v splošnem torej prerezi vektorskih svežnjev, ki ustrezajo rešitvi nekega sistema parcialnih diferencialnih enačb. Kot bomo videli, poseben primer takega scenarija ponuja opis elektromagnetnega polja na Lorentzovi mnogoterosti – v tem primeru elektromagnetno polje namreč opišemo z diferencialno 2-formo, torej s kovariantnim antisimetričnim 2-tenzorskim poljem – drugače rečeno: z gladkim prerezom svežnja antisimetričnih kovariantnih 2-tenzorjev na M.

*Einsteinova enačba (homogena, z ničelno kozmološko konstanto) je $\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Rg = 0$, kjer je Ric Riccijevo tenzorsko polje, R pa skalarna ukrivljenost; s to enačbo se torej omejimo na fizikalno smiselno okolje. To predpostavko bomo izpuščali, saj je v naši razpravi ne bomo zares potrebovali.

Pozoren bralec bo opazil, da smo pri zadnjem odstavku implicitno naredili naslednjo predpostavko: psevdo Riemannova mnogoterost, ki opisuje našo okolico, je neodvisna od materije in njenih interakcij; v tem besedilu se bomo matematično ukvarjali le s takimi poenostavljenimi opisi materije. Na tej točki omenimo, da je možno z nekaj poznavanja Einsteinove splošne teorije relativnosti le-to poenotiti s teorijo umeritvenih polj – glej npr. [2, poglavje 9], vendar tega ne priporočamo v branje, dokler bralcu niso jasne osnove "klasične" Yang–Millsove teorije, ki bo osrednji del naše razprave v 3. poglavju. Kljub obstoju omenjene teorije poenotenja pa t. i. *problema velikega poenotenja* splošne teorije relativnosti s kvantno fiziko ne smatramo kot rešenega; razlog je v tem, da omenjena obstoječa teorija ne napove vrednosti določenih univerzalnih konstant, kot je na primer razmerje med jakostjo gravitacijske in električne sile med protonom in elektronom, ki je približno 10^{-40}. V ta namen so fiziki poskušali že marsikaj, med drugim tudi nadgraditi koncept polja, ki smo ga navedli v prejšnjem odstavku, v operatorje na prerezih vektorskih svežnjev. Taki nadgraditvi koncepta polja v "operatorsko polje" fiziki imenujejo *kvantizacija*, tozadevnemu preučevanju pa *kvantna teorija polja*. Mi se bomo v tem besedilu omejili na t. i. *klasično teorijo polja* – naša polja bodo zgolj običajni prerezi vektorskih svežnjev in ne operatorji na njih. Razlog za to tiči tudi v dejstvu, da je kvantna teorija polja zloglasno matematično nerigorozna teorija.

Osvetlimo na kratko še razliko med bozoni in fermioni. Definicijska razlika med bozoni in fermioni v standardnem modelu fizike osnovnih delcev je ta, da so bozoni *nosilci fundamentalnih sil* (t. i. umeritveni bozoni: foton, šibka bozona $W^{\pm}$ in Z, gluon), fermioni pa *nedeljivi gradniki oprijemljive snovi* (t. i. kvarki in leptoni); pri tem obstaja v naravi poleg navedenih bozonov tudi en *skalarni bozon* (t. i. Higgsov bozon), s katerim se lahko sklopijo bodisi umeritveni bozoni bodisi fermioni. Pripomnimo, da je možno čisto matematično – in splošneje, kot smo to naredili v prejšnji povedi – definirati bozone in fermione s konceptom *Fockovega prostora* (glej npr. [20]), čemur se bomo izognili, saj za našo razpravo to ne bi koristilo. Ta koncept je v fiziki v splošnem pomemben, saj v naravi obstajajo tudi delci, ki so sestavljeni iz večih kvarkov, ki jih skupaj drži močna jedrska sila – imenujemo jih hadroni (osnovna primera sta proton in nevtron). Ti delci se obnašajo bodisi kot bozoni, bodisi kot fermioni. To ilustrativno ponazorimo z Vennovim diagramom na sliki 1.



Slika 1: Eksperimentalno dognana kategorizacija bozonov in fermionov.

Nedeljivi bozoni (tj. taki, ki niso sestavljeni iz večih kvarkov) se torej razvrščajo na umeritvene bozone in Higgsov bozon, nedeljivi fermioni pa na *leptone* (elektron, mion, tauon in za vsakega od njih po en nevtrino) in *kvarke* (up, down, strange, charm, top, bottom). Fermione razvrstimo na kvarke in leptone zaradi eksperimentalnega dejstva, da leptoni interagirajo le preko elektromagnetne in šibke jedrske sile, kvarki pa tudi preko močne jedrske sile.

Če se vrnemo k matematični razpravi, si zdaj zastavimo naslednja vprašanja:

- Ali lahko umeritvene bozone, skalarni bozon in fermione predstavimo s prerezi nekih vektorskih svežnjev?
- Če je odgovor na prvo vprašanje pritrdilno, prerezi *katerih* vektorskih svežnjev jim ustrezajo?
- Kako na ustreznih vektorskih svežnjih iz odgovora na drugo vprašanje modeliramo interakcije?

Da je odgovor na prvo vprašanje pritrdilno, je teza tega magistrskega dela, ki jo bomo vseskozi poskušali potrditi. Videli bomo, da se odgovor na drugo vprašanje za vse tri vrste materije razlikuje; namignimo še, da ima odgovor na tretje vprašanje opraviti s pojmom kovariantnega odvoda. Odgovori na zastavljena vprašanja so medsebojno prepletena – videli bomo, da lahko teorijo umeritvenih polj predstavimo z naslednjim korespondenčnim diagramom pojmov.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}\text{Liejeve grupe}\\ \text{(abstraktne simetrijske grupe)}\end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c}\text{Upodobitve}\\ \text{na vektorskih prostorih}\end{array} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Glavni svežnji} & \longrightarrow & \begin{array}{c}\text{Pridruženi vektorski svežnji in njihovi prerezi}\\ \text{(polja skalarnih bozonov in fermionov)}\end{array} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\begin{array}{c}\text{Povezave na glavnih svežnjih}\\ \text{(polja umeritvenih bozonov)}\end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c}\text{Kovariantni odvod}\\ \text{(interakcije/sklopitve)}\end{array}
\end{array} \tag{$\star$}$$

Zaenkrat še ne vidimo, zakaj bi potrebovali v našem opisu Liejeve grupe in glavne svežnje – vpeljave glavnega svežnja tudi ne bomo fizikalno motivirali, marveč matematično, saj se v matematičnem kontekstu pojavlja bolj naravno. Zgodovinsko gledano sta teoriji umeritvenih polj in svežnjev nastajali sočasno – C. N. Yang je leta 1977 o tem zapisal:[25]

> *Maxwell's equations and the principles of quantum mechanics led to the idea of gauge invariance. Attempt to generalize this idea, motivated by physical concepts of phases, symmetry, and conservation laws, led to the theory of non-abelian gauge fields. That non-abelian gauge fields are conceptually identical to ideas in the beautiful theory of fibre bundles, developed by mathematicians without reference to the physical world, was a great marvel to me. In 1975 I discussed my feelings with Chern, and said "this is both thrilling and puzzling, since you mathematicians dreamed up these concepts out of nowhere." He immediately protested: "No, no. These concepts were not dreamed up. They were natural and real."*

Pojasnimo, kako je delo organizirano. V začetku 2. poglavja bomo najprej vpeljali koncept glavnega svežnja, si ogledali nekaj osnovnih primerov in raziskali njihove osnovne lastnosti. S pomočjo teorije upodobitev Liejevih grup in njihovih gladkih delovanj na gladke mnogoterosti bomo tvorili koncept pridruženega vektorskega svežnja, kar nam bo v kasnejših poglavjih omogočilo razpravo o poljih skalarnih bozonov in fermionov. Po pridruženih vektorskih svežnjih pride na vrsto zelo pomemben koncept povezave na glavnem svežnju (in njene ukrivljenosti), ki nam bo nekoliko kasneje v tem poglavju omogočil razpravo o kovariantnem odvodu na pridruženem vektorskem svežnju, pri čemer bomo potrebovali tudi predhodno razvit pojem vzporednega prenosa. S tem bomo pridobili vsa orodja, ki so navedena v diagramu ($\star$). Za konec prvega poglavja si bomo še ogledali, kako lahko ukrivljenost povezave identificiramo z globalno diferencialno formo na bazni mnogoterosti glavnega svežnja z vrednostmi v adjungiranem svežnju.

Slednje je osnova za rigorozno diskusijo o Yang–Millsovi teoriji v 3. poglavju. Ker bomo zanjo potrebovali nekaj orodij, jih bomo uvodoma razvili – ključen pojem pri tem so diferencialne forme z vrednostmi v danem vektorskem svežnju. S kombiniranjem kovariantnega odvoda (omenjenega v prejšnjem odstavku) in običajnega vnanjega odvoda bomo pridobili koncept kovariantnega vnanjega odvoda na diferencialnih formah z vrednostmi v danem vektorskem svežnju; po drugi strani nam bo uporaba Hodge-$\star$ operatorja omogočila uvedbo pojma kovariantnega kodiferenciala, ki je v nekem smislu dualen kovariantnemu vnanjemu odvodu. Definirali bomo Yang–Millsov Lagrangian, preverili njegovo umeritveno invariantnost in skozi variacijski princip ter uporabo omenjene dualnosti izpeljali Yang–Millsovo enačbo; le-ta skupaj z Bianchijevo identiteto tvori posplošitev Maxwellovih enačb na primere neabelovih strukturnih grup. Na koncu poglavja bomo opisali interakcijo skalarnega bozona z umeritvenim poljem in pridobili Yang–Mills–Higgsove enačbe; pri tem bomo videli tudi, prerez katerega vektorskega svežnja je polje skalarnega Higgsovega bozona in nakazali, kako s t. i. spontanim zlomom simetrije nekateri umeritveni bozoni pridobijo maso preko Higgsovega mehanizma.

Opremljeni z jezikom teorije umeritvenih polj se bomo z namenom opisa fermionov spustili v 4. in zadnje poglavje; kmalu po zgodovinskemu uvodu in fizikalni vpeljavi Diracove enačbe sledi vrh dramskega trikotnika tega magistrskega dela – preučevanje komponent za povezanost Lorentzove grupe in njenega univerzalnega krova, ki nam omogoči vpeljavo pojma spinske strukture na Lorentzovi mnogoterosti. Slednja nam skupaj s spinorsko upodobitvijo omogoča identifikacijo fermionov s prerezi spinorskega svežnja. Omogoča pa nam tudi umestitev Levi–Civitajeve afine povezave na spinorski sveženj, ki je osnova vpeljave Diracovega operatorja. Pokazali bomo, da je le-ta sebiadjungiran glede na Diracovo hermitsko formo, s tem pa bo na dlani izpeljava (z variacijskim principom) Diracove enačbe na Lorentzovi mnogoterosti. Za konec bomo še orisali, kako s spojem glavnega spin svežnja in umeritvenega svežnja opišemo interakcijo med fermionom in umeritvenim poljem; specifično bomo to naredili za interakcijo elektrona z umeritvenim poljem fotonov, med osnovne primere pa sodi tudi sklopitev nukleona s šibkim umeritvenim poljem.[†]

[†]Interakcije med fermioni in skalarnimi bozoni (t. i. interakcija Yukawe) ne bomo opisali – bralec jo lahko najde v [6, poglavje 8.8].

1.1 Notacija

Kot omenjeno, je teorija gladkih mnogoterosti osnova naše razprave. V tem besedilu uporabljamo takšno notacijo, kot se uporablja v [10] in [14]. Črka n je ves čas rezervirana za razsežnost mnogoterosti M, ki ustreza našemu okolju – tj. neki psevdo Riemannovi mnogoterosti, kot smo jo pojmovali v prejšnjem razdelku. Z (M, g) bomo označevali splošno psevdo Riemannovo mnogoterost in pisali (M, η), ko imamo v mislih prostor Minkowskega (nekaj stvari o tem prostoru bomo navedli spodaj). Razen če omenimo drugače, bo črka G označevala abstraktno Liejevo grupo – grupo s strukturo gladke mnogoterosti, glede na katero sta množenje in invertiranje gladki operaciji. Njeno Liejevo algebro bomo označevali z $\mathfrak{g}$ in pojmovali kot tangentni prostor T_eG v nevtralnem elementu $e \in G$, prav tako pa bomo v frakturni pisavi označevali Liejeve algebre specifičnih Liejevih grup, kot je to v splošni navadi. Omenimo, da med T_eG in množico vseh levo invariantnih vektorskih polj na G obstaja kanonična identifikacija (glej [14, trditev 2.24]), ki jo bomo včasih uporabili brez dodatnih pripomb. Osnove o Liejevih algebrah Liejevih grup lahko bralec najde v [14, poglavje 2.2]. V splošnem bo ta vir vedno citiran, ko bomo potrebovali kak rezultat o Liejevih grupah.

V kolikor ne bo drugače omenjeno, bo simbol $\cong$ ustrezal algebraični izomorfnosti (npr. izomorfnosti vektorskih prostorov, algeber ali grup – tudi Liejevih grup, kar dodatno pomeni gladkost in gladkost inverza danega izomorfizma grup), simbol $\approx$ pa difeomorfnosti. Ohlapno rečeno bomo vseskozi delovali v gladki kategoriji, čeprav bi določene definicije in rezutate lahko napravili že v topološki kategoriji. Ko bomo potrebovali kakšen koncept, brez katerega ne bi mogli nadaljevati, ga bomo definirali, nato pa osnovne rezultate o njem privzeli in citirali literaturo.

Vseskozi privzemamo Einsteinovo sumacijsko konvencijo – ponazorimo jo na nekaj primerih. Naj bo V realen vektorski prostor razsežnosti $r \in \mathbb{N}$ in $(e_i)_i$ neka njegova baza. Če je $v \in V$ neki vektor, potem njegov razvoj bo bazi $(e_i)_i$ zapišemo kot

$$v = \sum_i v^i e_i =: v^i e_i$$

kjer so v^i koeficienti v razvoju vektorja v po bazi $(e_i)_i$. Če je V^* dualni prostor prostora V, potem $f \in V^*$ zapišemo kot

$$f = f_i e^i,$$

kjer $(e^i)_i$ označuje dualno bazo k bazi $(e_i)_i$, torej $e^i(e_j) = \delta^i_j$; tukaj δ^i_j označuje običajni Kroneckerjev simbol. *Sumacijska konvencija* torej pravi: vedno, ko se v nekem izrazu neki indeks pojavi dvakrat – enkrat zgoraj in enkrat spodaj – seštevamo po tem indeksu.

Naj bo zdaj $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ *psevdo skalarni produkt* na V, tj. taka bilinearna simetrična[‡] preslikava, za katero velja lastnost

$$\langle w, v \rangle = 0 \text{ za vse } w \in V \implies v = 0,$$

[‡]V primeru, ko je V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, namesto simetričnosti privzemamo seskvilinearnost, tj. linearnost v drugem in konjugirano linearnost v prvem argumentu.

ki jo imenujemo *neizrojenost*. Gre za posplošitev koncepta skalarnega produkta, v katerem namesto pozitivne definitnosti privzemamo Rieszovo lastnost; zaradi neizrojenosti je namreč preslikava $V \to V^*$, $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ injektivna, posledično pa je izomorfizem. Dalje, rečemo, da je baza $(e_i)_i$ za V *psevdo ortonormirana*, če velja $\langle e_i, e_i \rangle \in \{\pm 1\}$ za vse i in $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ za vse $i \neq j$. Izkaže se, da takšna baza vedno obstaja; še več, število vseh tistih vektorjev e_i, za katere velja $\langle e_i, e_i \rangle = -1$, je neodvisno od izbire psevdo ortonormirane baze $(e_i)_i$. Ta rezultat imenujemo *Sylvestrov izrek o vztrajnosti*, glej npr. [18, izrek 10.43]; omenjeno število bomo označevali s p in mu rekli *indeks* psevdo skalarnega produkta $\langle \cdot, \cdot \rangle$; včasih bomo rekli tudi, da je par $(r - p, p)$ njegova *signatura*.

Osnovni primer psevdo skalarnega produkta, ki ga bomo pogosto srečevali, je t. i. *psevdo skalarni produkt Minkowskega* na $\mathbb{R}^4$, ki je simetrična bilinearna preslikava $\eta \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. Na standardni bazi prostora $\mathbb{R}^4$, ki jo označimo z $(e_\mu)_{\mu=0}^3$, je η dana s predpisom

$$\eta(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{če je } \mu = \nu = 0, \\ -1 & \text{če je } \mu = \nu \in \{1, 2, 3\}, \\ 0 & \text{sicer,} \end{cases}$$

in razširjena na vso domeno po bilinearnosti. Očitno je, da je η neizrojena preslikava, saj iz enakosti $\eta(e_\mu, x) = 0$, ki velja za vse μ, očitno sledi $x = 0$. Posledično je za vsak $x \in \mathbb{R}^4$ preslikava $\mathbb{R}^4 \to (\mathbb{R}^4)^*$, dana s predpisom $x \mapsto \eta(x, \cdot)$, izomorfizem; opišimo ga natančneje. Naj bo $x = x^\mu e_\mu$. Potem je $\eta(x, \cdot) \in (\mathbb{R}^4)^*$, ta kovektor pa lahko razvijemo kot $\eta(x, \cdot) = x_\mu e^\mu$ po dualni bazi; ne glede na to, da imamo opravka s psevdo skalarnim produktom, dualnost še vedno pomeni $e^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu$. Če v to identiteto vstavimo e_ν, dobimo

$$x_\nu = x_\mu \delta^\mu_\nu = x_\mu e^\mu(e_\nu) = \eta(x, e_\nu) = x^\mu \eta(e_\mu, e_\nu) = x^\mu \eta_{\mu\nu}.$$

Vidimo torej, da so koeficienti x_μ kovektorja $\eta(x, \cdot)$ enaki $\eta_{\mu\nu} x^\nu$. Po drugi strani, če je $\chi \in (\mathbb{R}^4)^*$ kovektor, potem obstaja natanko en $x \in \mathbb{R}^4$, da velja $\eta(x, \cdot) = \chi$; podoben razmislek kot zgoraj pokaže, da se koeficienti x^μ vektorja x ob danih koeficientih x_μ kovektorja $\chi = x_\mu e^\mu$ izražajo kot $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$, kjer je $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.[§] Torej lahko z η v nekem smislu dvigujemo in spuščamo indekse, pri čemer iz koeficientov vektorja pridobimo koeficiente kovektorja, določeni koeficienti pa se pri tem pomnožijo z -1.[¶] Če sta $x, y \in \mathbb{R}^4$, lahko v sumacijski konvenciji torej pišemo

$$\eta(x, y) = x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu.$$

Omenimo še, da grške črke označujejo indekse četvercev, torej tečejo po $(0, 1, 2, 3)$ (to v nekem smislu ustreza tako časovnemu kot tudi prostorskim indeksom), medtem ko za rimske črke včasih zahtevamo, da tečejo samo po $(1, 2, 3)$. Ko se bo to zgodilo, bomo to izrecno izpostavili.

[§] V primeru, ko baza $(e_\mu)_\mu$ ni psevdo ortonormirana, ta enakost ne velja. Če tedaj definiramo $g_{\mu\nu} := \eta(e_\mu, e_\nu)$, lahko bralec razmisli, da namesto $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ velja, da je $[g^{\mu\nu}]$ inverzna matrika matrike $[g_{\mu\nu}]$, kar lahko zapišemo kot $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$.

[¶] V primeru, ko namesto neizrojenosti privzemamo pozitivno definitnost, je dviganje in spuščanje indeksov trivialno; koeficienti vektorjev in pridruženih kovektorjev so enaki.

Preselimo se zdaj v domeno psevdo Riemannovih mnogoterosti; označimo s

$$T^{(0,2)}TM := T^*M \otimes T^*M = \coprod_{x \in M} T_x^*M \otimes T_x^*M$$

sveženj kovariantnih 2-tenzorjev na M – gre za vektorski sveženj, katerega vlakno nad $x \in M$ je vektorski prostor $T_x^*M \otimes T_x^*M$.[‖]

Psevdo Riemannova metrika g s signaturo $(n-p, p)$ na mnogoterosti M je gladek prerez $g\colon M \to T^{(0,2)}TM$ svežnja kovariantnih 2-tenzorjev, ki je v vsaki točki psevdo skalarni produkt s signaturo $(n-p, p)$. Paru (M, g) rečemo *psevdo Riemannova mnogoterost*, včasih pa g zamolčimo in ga razberemo iz konteksta. Označimo z $\mathfrak{X}(M)$ množico vseh vektorskih polj na mnogoterosti M; psevdo Riemannova metrika g na M tedaj inducira preslikavo $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, dano po točkah s predpisom $(X_x, Y_x) \mapsto g_x(X_x, Y_x)$. Zapisano preslikavo iz tega razloga ponavadi označimo kar z isto črko g. Standarden rezultat iz analize na mnogoterostih pove, da je prerez $g\colon M \to T^{(0,2)}TM$ gladek natanko tedaj, ko je $g(X, Y)$ gladka funkcija na M za vsaki dve vektorski polji $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Z umestitvijo pojma psevdo skalarnega produkta na gladko mnogoterost, kot smo to naredili v prejšnjem odstavku, pridobimo tudi ustrezno nomenklaturo; tako na primer rečemo, da je lokalno ogrodje[**] $(E_\mu)_\mu$ tangentnega svežnja psevdo Riemannove mnogoterosti *psevdo ortonormirano*, če ta terica v vsaki točki tvori psevdo ortonormirano bazo ustreznega tangentnega prostora. Podobno velja za preostale koncepte.

Preostale oznake in imena bomo osvežili takrat, ko jih bomo potrebovali. Bralcu se vnaprej opravičujemo za morebitne nekonsistentne oznake, lapsuse in slovnične napake.

[‖]Splošneje lahko definiramo tudi tenzorski produkt $E \otimes F$ poljubnih dveh vektorskih svežnjev E in F nad isto mnogoterostjo M (glej npr. [7, str. 13]). Je vektorski sveženj nad M, katerega vlakno nad $x \in M$ je $E_x \otimes F_x$. Ta koncept bomo na nekaj mestih potrebovali, zato privzemamo njegovo poznavanje.

[**]*Lokalno ogrodje* vektorskega svežnja E nad M ranga r je r-terica takih gladkih prerezov vektorskega svežnja E, ki so definirana na neki odprti podmnožici $U \subset M$ in v vsaki točki $x \in U$ tvorijo bazo vektorskega prostora E_x. Množico vseh prerezov vektorskega svežnja E označujemo z $\Gamma^\infty(E)$; kot navedeno, prereze tangentnega svežnja TM mnogoterosti M označujemo z $\mathfrak{X}(M) = \Gamma^\infty(TM)$.

2 Glavni svežnji

Začnimo s predstavitvijo osnov teorije glavnih svežnjev in splošnih povezav na njih in spoznajmo nekatere pomembne primere.

2.1 Osnovne definicije in zgledi

Motivirajmo vpeljavo pojma glavnega svežnja. Lokalno ogrodje tangentnega svežnja TM gladke mnogoterosti M je definirano kot n-terica lokalnih prerezov tangentnega svežnja TM (tj. lokalno definirana vektorska polja), ki v vsaki točki tvorijo bazo tangentnega prostora nad to točko. Naravno vprašanje je, ali lahko tvorimo tak sveženj, da vsak njegov lokalni prerez ustreza nekemu lokalnemu ogrodju tangentnega svežnja. Nanj pritrdilno odgovorimo z naslednjim motivacijskim primerom.

Primer 2.1. Definirajmo

$$\begin{aligned} F_xM &:= \{(u_1, \ldots, u_n) \in (T_xM)^n \mid (u_1, \ldots, u_n) \text{ je baza prostora } T_xM\}, \\ F(M) &:= \coprod_{x \in M} F_xM, \end{aligned}$$

in naj bo $\pi \colon F(M) \to M$ dana s $\pi(u|_x) = x$, kjer smo z $u|_x = u = (u_1, \ldots, u_n)$ označili poljuben element množice F_xM. Dalje, naj bo $(U, \varphi = (x^i)_i)$ lokalna karta na M in $x \in U$ poljuben; potem je $(\partial_1|_x, \ldots, \partial_n|_x) =: \partial|_x$ baza za T_xM, zato lahko za poljuben $u \in F_xM$ pišemo

$$u_j = A(u)^i{}_j \partial_i|_x, \quad j = 1, \ldots, n,$$

za neka števila $A(u)^i{}_j$. Ta števila tvorijo preslikavo $A \colon \pi^{-1}(U) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, dano za vsak u z matriko $A(u) = [A(u)^i{}_j]_{i,j}$. Indeksiranje števil $A(u)^i{}_j$ je sugestivno, saj si $u|_x$ in $\partial|_x$ predstavljamo kot vrstico vektorjev; v zgornjem izrazu torej matrika $A(u)$ množi vrstico $\partial|_x$ z desne. To zapišemo kot $\partial|_x A(u)$, pri čemer poudarimo, da ne gre za nikakršno odvajanje preslikave $A \colon \pi^{-1}(U) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Tako je j-ti stolpec matrike $A(u)$ enak koeficientom v razvoju vektorja u_j po bazi $\partial|_x$.

Pokažimo, da množica $F(M)$ dopušča strukturo gladke mnogoterosti. Za poljubno lokalno karto (U, φ) na M definirajmo $\phi \colon \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ s predpisom

$$u \mapsto (\varphi(\pi(u)), A(u)),$$

kjer je A kot zgoraj. Definirali smo torej $\phi = (\varphi \circ \pi, A)$. Preslikava ϕ je očitno bijektivna, saj za vsaki dve bazi prostora T_xM obstaja natanko ena prehodna (obrnljiva) matrika med njima. Če je $(V, \vartheta = (y^i)_i)$ še ena lokalna karta na M in je $\theta \colon \pi^{-1}(V) \to \vartheta(V) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ analogno definirana kot ϕ, potem za vse $(\vec{x}, A) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ velja

$$\begin{aligned} \theta \circ \phi^{-1}(\vec{x}, A) &= \theta(\partial|_{\varphi^{-1}(\vec{x})} A) = \theta\left(A^i{}_j \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi^{-1}(\vec{x})} \right) \\ &= \theta\left(A^i{}_j \frac{\partial y^k}{\partial x^i}(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial y^k}\bigg|_{\varphi^{-1}(\vec{x})} \right) = \theta\left([D(\vartheta \circ \varphi^{-1})_{\vec{x}} A]^k{}_j \frac{\partial}{\partial y^k}\bigg|_{\varphi^{-1}(\vec{x})} \right) \\ &= (\vartheta \circ \varphi^{-1}(\vec{x}), D(\vartheta \circ \varphi^{-1})_{\vec{x}} A), \end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi tretji enačaj uporabili verižno pravilo. Torej je $\theta \circ \phi^{-1} = (\vartheta \circ \varphi^{-1} \circ \mathrm{pr}_1, L_{D(\vartheta\circ\varphi^{-1})_{\vec{x}}} \circ \mathrm{pr}_2)$, ki je očitno gladka preslikava z gladkim inverzom $\phi \circ \theta^{-1}$. Po [10, lema 1.35] smo s tem dokazali, da na $F(M)$ obstaja natanko ena struktura gladke mnogoterosti, v kateri je $(\pi^{-1}(U), \phi)$ lokalna karta na $F(M)$ za vsako lokalno karto (U, φ) na M.

Za definicijo glavnega svežnja sta ključni še naslednji opažanji. Preslikava

$$F(M) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cdot} F(M), \quad (u, A) \mapsto u \cdot A$$

je gladko delovanje grupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ na $F(M)$ glede na zapisano gladko strukturo na $F(M)$, saj v lokalnih kartah ϕ in θ kot zgoraj velja

$$((\vec{x}, A), B) \overset{(\phi^{-1}, \mathrm{id})}{\longmapsto} (\partial|_{\varphi^{-1}(\vec{x})}A, B) \overset{\cdot}{\mapsto} \partial|_{\varphi^{-1}(\vec{x})}AB \overset{\theta}{\mapsto} (\vartheta \circ \varphi^{-1}(\vec{x}), D(\vartheta \circ \varphi^{-1})_{\vec{x}}AB).$$

Drugo opažanje pa je, da je preslikava $\pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, dana kot $u \mapsto (\pi(u), A(u))$, difeomorfizem, kar je jasno iz definicije karte ϕ na $F(M)$. Zanjo velja

$$A(u \cdot B) = A(u)B$$

za vse $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, saj velja $(u \cdot B)_j = B^i{}_j u_i = B^i{}_j A(u)^k{}_i \partial_k|_x = [A(u)B]^k{}_j \partial_k|_x$. ♦

Definicija 2.2. Naj bo M gladka mnogoterost in G Liejeva grupa. *Glavni sveženj nad M z Liejevo grupo G* (tudi: *glavni G-sveženj nad M*) je trojica $(P, \pi, \cdot)$, kjer je:

i) P gladka mnogoterost (imenujemo jo *totalni prostor*),
ii) $P \times G \xrightarrow{\cdot} P$ gladko desno delovanje Liejeve grupe G na mnogoterost P,
iii) $\pi\colon P \to M$ gladka surjekcija (imenujemo jo *sveženjska projekcija*), za katero velja $\pi(u\cdot g) = \pi(u)$ za vse $u \in P, g \in G$ (rečemo, da *delovanje ohranja vlakna*),

in velja *lokalna trivialnost*: za vsak $x \in M$ obstaja okolica U v M in *G-ekvivarianten difeomorfizem*

$$\psi = (\pi, \varphi)\colon \pi^{-1}(U) \to U \times G,$$

tj. tak difeomorfizem $\psi = (\pi, \varphi)$, za katerega velja $\varphi(u \cdot g) = \varphi(u)g$ za vse $g \in G$. Paru (U, ψ) tedaj rečemo *lokalna trivializacija.* V primeru, ko obstaja G-ekvivarianten difeomorfizem $\psi\colon P \to M \times G$, rečemo, da je glavni sveženj *trivialen.*

Opomba 2.3. V uporabi sta naslednja zapisa za glavni sveženj:

$$\pi\colon P \xrightarrow{G} M \quad \text{in} \quad G \to P \xrightarrow{\pi} M.$$

Iz lokalne trivialnosti glavnega svežnja je jasno, da velja $\dim P = \dim M + \dim G$, preslikava π pa je submerzija.

Opomba 2.4. Preslikavo $P \times G \xrightarrow{\cdot} P$ označimo z m; za vsak $g \in G$ porodi difeomorfizem $r_g\colon P \to P$, $r_g(u) = u \cdot g$ z inverzom $r_g^{-1} = r_{g^{-1}}$. Za vsak $u \in P$ porodi tudi gladko preslikavo $\ell_u\colon G \to P$, $\ell_u(g) = u \cdot g$. Preslikavi, ki ustrezata levemu in desnemu množenju z elementom g v Liejevi grupi G bomo označevali z L_g in R_g.

Opomba 2.5. Za dan $u \in P$ iz pogoja $\pi(u \cdot g) = \pi(u)$ sledi, da je $\mathrm{Orb}_G(u) \subset \pi^{-1}\pi(u)$, iz ekvivariantnosti pa tudi obratna inkluzija, saj iz $v \in \pi^{-1}\pi(u)$ sledi $\pi(v) = \pi(u)$ in tedaj za neki $g \in G$ velja $(\pi(u), \varphi(u)) = (\pi(v), \varphi(v)g) = (\pi(v), \varphi(v \cdot g))$, kar implicira $u = v \cdot g$. Torej je

$$\mathrm{Orb}_G(u) = \pi^{-1}\pi(u), \tag{2.1}$$

za vse $u \in P$, kar imenujemo *tranzitivnost delovanja na vlaknih.* Iz tega sledi še, da je preslikava $\bar{\pi}\colon P/G \to M$, ki je podana s predpisom $\bar{\pi}(\mathrm{Orb}_G(u)) = \pi(u)$, bijekcija.

Ekvivariantnost zagotavlja tudi prostost delovanja. Res, če je $u = u \cdot g$, potem je $\varphi(u) = \varphi(u \cdot g) = \varphi(u)g$, iz česar sledi $g = e$.

Primer 2.6 (Trivialni sveženj)**.** Če je M gladka mnogoterost in G Liejeva grupa, lahko njun produkt $P := M \times G$ naravno opremimo s strukturo glavnega svežnja. Za sveženjsko projekcijo π namreč vzamemo projekcijo na prvi faktor $\mathrm{pr}_1\colon P \to M$, $(x, g) \mapsto x$, ki je gladka surjekcija. Desno delovanje G na P je dano s predpisom $(x, g)\cdot h := (x, gh)$, ki je gladko zaradi gladkosti množenja v G. Na ta način delovanje očitno ohranja vlakna, sveženj pa je globalno (in ne le lokalno) trivialen, torej je res glavni sveženj. ♦

Primer 2.7. Motivacijski primer 2.1 pokaže, da je

$$\pi\colon F(M) \xrightarrow{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})} M$$

glavni $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-sveženj, ki ga imenujemo *sveženj ogrodij gladke mnogoterosti M*. Podobno lahko v splošnejšem primeru $\mathbb{F}$-vektorskega svežnja E nad M ranga $r \in \mathbb{N}$ tvorimo *sveženj ogrodij vektorskega svežnja E*, katerega strukturna grupa je enaka $\mathrm{GL}(r, \mathbb{F})$. ♦

Primer 2.8 (Univerzalni krov krožnice)**.** Naj bo preslikava $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$ dana kot $\pi(t) = \mathrm{e}^{i2\pi t}$ in naj grupa $\mathbb{Z}$ deluje (z desne) na $\mathbb{R}$ s predpisom $(t, k) \mapsto t + k$. Obe preslikavi sta očitno gladki, jasna je tudi surjektivnost π, pa tudi, da velja $\pi(t + k) = \pi(t)$ za vse $t \in \mathbb{R}$ ter $k \in \mathbb{Z}$.

Naj bo $U = S^1 \setminus \{-1\}$ in naj bo preslikava $\phi\colon \pi^{-1}(U) = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2}) \to U \times \mathbb{Z}$ dana s predpisom $\phi(t) = (\mathrm{e}^{i2\pi t}, [t])$, kjer je $[t]$ celoštevilska zaokrožitev števila t. Ker je druga komponenta te preslikave konstantna na komponentah za povezanost, je ϕ gladka preslikava. Njen inverz je $\phi^{-1}(\mathrm{e}^{i2\pi t}, k) = k + t$, kjer je število t enolično določen s pogojem $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; ker je ϕ^{-1} gladka, je ϕ difeomorfizem, ki pa je očitno $\mathbb{Z}$-ekvivarianten.

Naj bo zdaj še $V = S^1 \setminus \{1\}$ in naj bo preslikava $\theta\colon \pi^{-1}(V) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to V \times \mathbb{Z}$ dana s predpisom $\theta(t) = (\mathrm{e}^{i2\pi t}, \lfloor t \rfloor)$, kjer $\lfloor t \rfloor$ označuje celoštevilski del števila t. Po istem argumentu kot prej je preslikava θ gladka. Njen inverz je enak $\theta^{-1}(\mathrm{e}^{i2\pi t}, k) = k + t$, kjer je število t enolično določeno s pogojem $t \in (0, 1)$. Zdaj je θ^{-1} gladka, zato je θ difeomorfizem. Njegova $\mathbb{Z}$-ekvivariantnost je prav tako jasna.

Za bralca, veščega osnov krovnih prostorov, na kratko omenimo še, da obstaja tudi daljnosežna posplošitev zgornjega primera: vsaka regularna gladka krovna projekcija $p\colon E \to M$ (med povezanima gladkima mnogoterostma) je glavni sveženj s strukturno grupo $G = \pi_1(M)/p_\#(\pi_1(E))$ – za podrobnosti glej npr. [13]. ♦

Primer 2.9 (Hopfovo vlaknenje)**.** Naj bo $G = \mathrm{U}(1)$, $P = S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$ in $M = \mathbb{C}P^1 := S^3/\mathrm{U}(1)$ ter naj bo projekcija $\pi\colon S^3 \to \mathbb{C}P^1$ dana kot projekcija v prostor orbit pri delovanju G na P, ki je dano s predpisom

$$(z_0, z_1) \cdot \mathrm{e}^{it} := (\mathrm{e}^{it} z_0, \mathrm{e}^{it} z_1).$$

Pokažimo lokalno trivialnost. Označimo $[z_0, z_1] = \mathrm{Orb}_{\mathrm{U}(1)}(z_0, z_1)$ in dalje, z

$$U = \{[z_0, z_1] \mid z_0 \in \mathbb{C}, z_1 \in \mathbb{C}_*\}$$

odprto podmnožico v $\mathbb{C}P^1$; na njej definiramo preslikavo $\vartheta\colon U \to \mathbb{C}$, podano kot $\vartheta([z_0, z_1]) = \frac{z_0}{z_1}$.* Analogno definiramo tudi $\tilde{U} = \{[z_0, z_1] \mid z_0 \in \mathbb{C}_*, z_1 \in \mathbb{C}\}$ in $\tilde{\vartheta}([z_0, z_1]) = \frac{z_1}{z_0}$. Z enostavnim izračunom vidimo

$$\tilde{\vartheta} \circ \vartheta^{-1}(w) = \frac{1}{w},$$

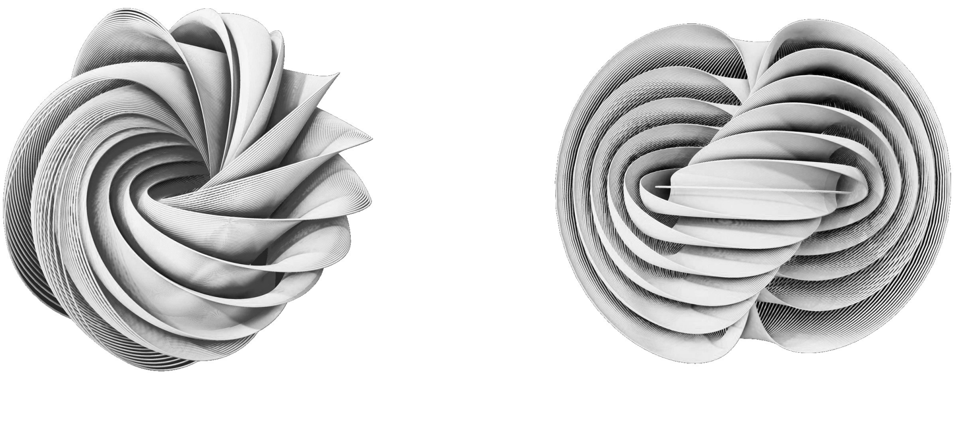
torej je $\{(U, \vartheta), (\tilde{U}, \tilde{\vartheta})\}$ gladek atlas za $\mathbb{C}P^1$. Definiramo $\psi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{U}(1)$ kot

$$\psi(z_0, z_1) := \left([z_0, z_1], \mathrm{e}^{i \arg(z_1)}\right),$$

ki je gladka preslikava z gladkim inverzom

$$([w_0, w_1], \mathrm{e}^{it}) \mapsto \left(w_0 \mathrm{e}^{i(t - \arg(w_1))}, |w_1|\, \mathrm{e}^{it}\right),$$

v kar se prepričamo z direktnim izračunom.† Druga komponenta $\varphi(z_0, z_1) = \mathrm{e}^{i \arg(z_1)}$ preslikave ψ je U(1)-ekvivariantna, saj je $\varphi(z_0 \mathrm{e}^{it}, z_1 \mathrm{e}^{it}) = \mathrm{e}^{i(\arg(z_1) + t)} = \mathrm{e}^{i \arg(z_1)} \mathrm{e}^{it} = \varphi(z_0, z_1) \mathrm{e}^{it}$. Podobno definiramo $\tilde{\psi}\colon \pi^{-1}(\tilde{U}) \to U \times \mathrm{U}(1)$ s predpisom $\tilde{\psi}(z_0, z_1) = ([z_0, z_1], \mathrm{e}^{i \arg(z_0)})$. Ker velja $U \cup \tilde{U} = \mathbb{C}P^1$, smo s tem pokazali, da je $\pi\colon S^3 \xrightarrow{\mathrm{U}(1)} \mathbb{C}P^1$ glavni sveženj. Imenujemo ga *Hopfovo vlaknenje.* ♦



Slika 2: Dva delna prikaza Hopfovega vlaknenja, kot ju je upodobil umetnik Peder Norrby. Vsaka krožnica na posamezni sliki ustreza nekemu vlaknu v S^3, ki smo ga preko stereografske projekcije identificirali s krožnico v $\mathbb{R}^3$.

*Njen inverz je enak $\vartheta^{-1}(w) = \left[\frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}} w, \frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}}\right]$, kot lahko enostavno vidimo. Pripomnimo, da izbrane koordinate niso t. i. "homogene koordinate", kot je razvidno iz definicije delovanja.

†Formulo za inverz smo izpeljali tako, da smo interpretirali njegov drugi argument e^{it} kot polarni kot kompleksnega števila z_1. Dobra definiranost predpisa za inverz je jasna, saj je $\arg(\frac{w_0}{w_1}) = \arg(w_0) - \arg(w_1)$.

2.1.1 Vertikalni podsveženj

Tangentni sveženj TP totalnega prostora P ima zaradi delovanja v glavnem svežnju $\pi\colon P \overset{G}{\to} M$ odlikovan trivialen podsveženj. Opišimo to natančneje. V vsaki točki $u \in P$ imamo linearno preslikavo

$$\mathrm{d}\pi_u \colon T_u P \to T_{\pi(u)} M$$

in prostor $V_u := \ker \mathrm{d}\pi_u$ je podprostor prostora $T_u P$, ki ga imenujemo *vertikalen podprostor* tangentnega prostora glavnega svežnja. Ker je π submerzija, iz $\dim P = \dim M + \dim G$ in dimenzijske formule sledi

$$\dim \ker \mathrm{d}\pi_u = \dim G,$$

torej lahko pričakujemo, da za poljuben $u \in P$ obstaja kanoničen izomorfizem med Liejevo algebro $\mathfrak{g}$ in V_u.

Za opis vertikalnega podsvežnja je potrebno osvežiti znanje o eksponentni preslikavi Liejeve grupe; v kolikor bralec s tem konceptom ni domač, ga usmerjamo v [14, poglavje 2.3]. Definirana je kot $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$, $\exp(X) := \phi_1^X(e)$, kjer ϕ_t^X označuje tok levo invariantnega vektorskega polja X ob času t. Osnovni rezultati o eksponentni preslikavi Liejeve grupe povedo, da je exp gladka preslikava in velja

$$\phi_t^X(e) = \exp(tX)$$

za vse $t \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{g}$, posledično pa tudi

$$\exp(0) = e, \qquad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} \exp(tX) = X_{\exp(sX)},$$

in še zlasti pomembno,

$$\phi_t^X(g) = g \exp(tX)$$

za vse $g \in G$, ali drugače zapisano, $\phi_t^X = R_{\exp(tX)}$. To pomeni, da za vsak $X \in \mathfrak{g}$ velja

$$X_g = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g \exp(tX)$$

in posnemanje te identitete na glavnem svežnju je ključno za tvorbo želenega izomorfizma.

Definicija 2.10. Naj bo P gladka mnogoterost in G Liejeva grupa, ki nanjo deluje prosto z desne, ter $X \in \mathfrak{g}$. *Fundamentalno vektorsko polje na P, ki pripada X*, je prerez $\sigma(X)$ svežnja TP nad P, podan s predpisom

$$\sigma(X)_u := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} u \cdot \exp(tX).$$

Opomba 2.11. S tem smo definirali preslikavo $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ (imenujemo jo *fundamentalna preslikava*), ki vsakemu vektorju iz Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ priredi vektorsko polje na P. Njegovo gladkost moramo še preveriti; da je res prerez tangentnega svežnja TP totalne mnogoterosti P, pa sledi iz opažanja, da je $t \mapsto u \cdot \exp(tX)$ gladka pot v P, ki je ob $t = 0$ enaka u.

Izrek 2.12. *Če Liejeva grupa G deluje prosto na mnogoterost P z desne, potem je preslikava $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ injektivni homomorfizem Liejevih algeber.*

Dokaz. Dokažimo dobro definiranost, tj. $\sigma(X) \in \mathfrak{X}(P)$ – dokazati je potrebno njegovo gladkost. S predpisom $\phi^{\sigma(X)}(t,u) = u \cdot \exp(tX)$ je definiran gladek globalni tok na P, zato je tudi njegov infinitezimalni generator $u \mapsto \frac{d}{dt}\big|_{t=0} u \cdot \exp(tX)$ gladka preslikava, kar dokazuje gladkost prereza $\sigma(X)$.

Dokažimo linearnost. Opazimo, da velja

$$\mathrm{d}(\ell_u)_e(X_e) = \mathrm{d}(\ell_u)_e\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(tX)\right) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \ell_u(\exp(tX)) = \sigma(X)_u$$

in želeno sledi iz linearnosti preslikave $\mathrm{d}(\ell_u)_e$.

Dokažimo injektivnost. Predpostavimo

$$\sigma(X)_u = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u \cdot \exp(tX) = 0$$

za neki $u \in P$. Najprej dokažimo, da je krivulja $t \mapsto u \cdot \exp(tX)$ v P ob tej predpostavki konstantna. Ekvivalentno je pokazati $\frac{d}{dt}\big|_{t=s} u \cdot \exp(tX) = 0$ za vse $s \in \mathbb{R}$, velja pa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg|_{t=s} u \cdot \exp(tX) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u \cdot \exp((s+t)X) = \mathrm{d}(\ell_u)_{\exp(sX)}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp((s+t)X)\right) \\
&= \mathrm{d}(\ell_u)_{\exp(sX)}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi^X_{s+t}(e)\right) = \mathrm{d}(\ell_u)_{\exp(sX)}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi^X_s(\phi^X_t(e))\right) \\
&= \mathrm{d}(\ell_u \circ \phi^X_s)_e(X_e) = \mathrm{d}(\ell_u \circ R_{\exp(sX)})_e(X_e) = \mathrm{d}(r_{\exp(sX)} \circ \ell_u)_e(X_e) \\
&= \mathrm{d}(r_{\exp(sX)})_u(\mathrm{d}(\ell_u)_e(X_e)) = 0,
\end{aligned}$$

kjer smo uporabili osnovne lastnosti odvoda gladke preslikave, na prehodu skozi četrti enačaj translacijsko lemo $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$ (glej npr. [6, enačba (9.2)]), skozi predzadnjega pa definicijsko lastnost delovanja v glavnem svežnju. Zato ob predpostavki $\sigma(X)_u = 0$ velja $u = u \cdot \exp(tX)$ za vse $t \in \mathbb{R}$ in iz prostosti delovanja G na P sledi $\exp(tX) = e$ za vse $t \in \mathbb{R}$, to pa je možno le v primeru, ko je $X = 0$, saj je exp v točki $0 \in \mathfrak{g}$ lokalni difeomorfizem.

Končno, dokažimo še, da σ ohranja Liejev oklepaj, tj. $\sigma([X,Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)]$. Velja

$$\begin{aligned}
[X,Y]_e &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big((\phi^X_{-t})_* Y\big)_e = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{d}(R_{\exp(-tX)})_{\exp(tX)}(Y_{\exp(tX)}) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{d}(R_{\exp(-tX)})_{\exp(tX)}(\mathrm{d}(L_{\exp(tX)})_e(Y_e)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{d}(C_{\exp(tX)})_e(Y_e) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Y),
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili enakost $\phi^X_t = R_{\exp(tX)}$, skozi tretjega dejstvo, da je Y levo invariantno vektorsko polje na G, pri četrtem verižno pravilo in definicijo konjugiranja $C_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$ in nazadnje še definicijo preslikave $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, tj. $\mathrm{Ad}_g = \mathrm{d}(C_g)_e$. Zato velja

$$\sigma([X,Y])_u = (\mathrm{d}\ell_u)_e \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Y) \right). \tag{2.2}$$

Po drugi strani pa je

$$[\sigma(X), \sigma(Y)]_u = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Big((\phi_{-t}^{\sigma(X)})_* \sigma(Y) \Big)_u,$$

kjer je tokovnica vektorskega polja $\sigma(X)$ ob času $-t$ enaka $\phi_{-t}^{\sigma(X)} = \phi^{\sigma(X)}(-t, \cdot) = r_{\exp(-tX)}$. Zato je

$$\begin{aligned}
[\sigma(X), \sigma(Y)]_u &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{d}(\phi_{-t}^{\sigma(X)})_{\phi_t^{\sigma(X)}(u)} \Big(\sigma(Y)_{\phi_t^{\sigma(X)}(u)} \Big) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{d}(r_{\exp(-tX)})_{u\cdot\exp(tX)} (\mathrm{d}(\ell_{u\cdot\exp(tX)})_e(Y_e)) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{d}(r_{\exp(-tX)} \circ \ell_{u\cdot\exp(tX)})_e(Y_e)
\end{aligned}$$

in ker velja $r_{\exp(-tX)} \circ \ell_{u\cdot\exp(tX)} = \ell_u \circ C_{\exp(tX)}$, sledi

$$[\sigma(X), \sigma(Y)]_u = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{d}(\ell_u)_e(\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Y)).$$

Če to primerjamo z enačbo (2.2), iz linearnosti preslikave $\mathrm{d}(\ell_u)_e$ in njene neodvisnosti od parametra t sledi želena enakost. ■

Posledica 2.13. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj. Za vsak $u \in P$ je preslikava $\sigma(\cdot)_u\colon \mathfrak{g} \to V_u \leq T_uP$ izomorfizem vektorskih prostorov.*

Dokaz. Velja

$$\mathrm{d}\pi_u(\sigma(X)_u) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \pi(u \cdot \exp(tX)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \pi(u) = 0$$

za poljubna $u \in P, X \in \mathfrak{g}$, torej je $\sigma(X)_u \in V_u$. Po injektivnosti linearne preslikave $\sigma(\cdot)_u$ iz zadnjega izreka in enakosti $\dim G = \dim V_u$ zdaj sledi želeno. ■

Posledica 2.14. $V = \ker \mathrm{d}\pi$ *je gladek podsveženj svežnja TP in je trivialen.*

Opomba 2.15. Rečemo mu *vertikalni podsveženj* V tangentnega svežnja TP totalnega prostora P.

Dokaz. Če je $\{X_1, \dots X_k\}$ baza za $\mathfrak{g}$, potem je za poljuben $u \in P$ množica

$$\{\sigma(X_1)_u, \dots, \sigma(X_k)_u\}$$

baza za V_u in povsod neničelni gladki prerezi $\sigma(X_i) \in \mathfrak{X}(P)$ so po izreku 2.12 gladki. ■

Ob obravnavi povezave na glavnem svežnju bomo potrebovali naslednji rezultat, ki sodi v ta razdelek. Bralec ga lahko obišče, ko ga bo potreboval.

Trditev 2.16. *Naj bo* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *glavni sveženj. Če je* $\sigma(X)$ *fundamentalno vektorsko polje na* P*, ki pripada* $X \in \mathfrak{g}$*, potem je* $(r_g)_*\sigma(X)$ *fundamentalno vektorsko polje na* P*, ki pripada* $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)$*, tj.*

$$(r_g)_*\sigma(X) = \sigma(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)).$$

Dokaz. Vektorskemu polju $\sigma(X)$ na P pripada tokovnica $\phi_t^{\sigma(X)}(u) = u \cdot \exp(tX)$ in ker je r_g difeomorfizem, vektorskemu polju $(r_g)_*\sigma(X)$ na P pripada (glej npr. [10, posledica 9.14]) tokovnica

$$\phi_t^{(\phi_g)_*\sigma(X)}(u) = r_g \circ \phi_t^{\sigma(X)} \circ r_{g^{-1}}(u) = u \cdot g^{-1} \exp(tX)g.$$

Velja pa $g^{-1}\exp(tX)g = C_{g^{-1}} \circ \exp(tX) = \exp \circ \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(tX)$ po naravnosti eksponentne preslikave (glej npr. [14, trditev 2.40]). Torej za poljuben $u \in P$ velja

$$\begin{aligned}\big((r_g)_*\sigma(X)\big)_u &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u \cdot \exp(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(tX)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u \cdot \exp(t\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)) \\ &= \sigma(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X))_u.\end{aligned}$$

■

2.1.2 Prerezi glavnih svežnjev

Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj in $\psi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times G$ lokalna trivializacija zanj, za neko odprto podmnožico U v M. Ker je ψ difeomorfizem, lahko definiramo

$$\begin{aligned}&s\colon U \to \pi^{-1}(U) \subset P \\ &s(x) := \psi^{-1}(x, e),\end{aligned}$$

in opazimo, da je s gladka preslikava $U \to P$, za katero velja $\pi|_{\pi^{-1}(U)} \circ s = \mathrm{id}_U$. Prereze lahko definiramo splošneje, brez omembe glavnega svežnja.

Definicija 2.17. Naj bo $\pi\colon P \to M$ gladka surjekcija in U odprta množica v M. Gladka preslikava $s\colon U \to P$ je *prerez preslikave* π, če velja $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$. Če je $U = M$, je prerez s *globalen*, sicer je *lokalen*. V primeru, ko je $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj, rečemo preslikavi s tudi *umeritev* glavnega svežnja $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$.

Opomba 2.18. Če odvajamo identiteto $\pi|_{\pi^{-1}(U)} \circ s = \mathrm{id}_U$, po verižnem pravilu dobimo

$$\mathrm{d}\pi_{s(x)} \circ \mathrm{d}s_x = \mathrm{id}_{T_xM},$$

torej je vsak lokalni prerez gladke preslikave $\pi\colon P \to M$ imerzija. Če obstaja odprto pokritje $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ za M skupaj s prerezi $s_\lambda\colon U_\lambda \to P$, potem iz surjektivnosti π sledi, da je π submerzija. Velja tudi obrat, tj. surjektivne submerzije dopuščajo lokalne prereze.

Lema 2.19. *Naj bo* $\pi\colon P \to M$ *surjektivna submerzija med mnogoterostma. Potem za vsako točko* $x \in M$ *obstaja prerez* $s\colon U \to P$ *preslikave* π *za neko okolico* $U \subset M$ *točke* x*.*

Dokaz. Naj bo $x \in M$ in naj bo $u \in \pi^{-1}(x)$ poljuben. Po izreku o rangu (glej npr. [10, trditev 4.12]) obstajata taki odprti kartni okolici (V, φ) in (W, ϑ) na P in M za točki u in x, da velja $\pi(V) \subset W$ in je $\vartheta \circ \pi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(V) \to \vartheta(W)$ enaka projekciji na prvih n koordinat (kjer je $n = \dim M$) – v posebnem to pomeni, da je π odprta preslikava. Definirajmo

$$i \colon \vartheta(W \cap \pi(V)) \to \varphi(V), \quad i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, \overbrace{0, \dots, 0}^{\dim P - \dim M}),$$

torej i je inkluzija prvih n koordinat. Potem je $s := \varphi^{-1} \circ i \circ \vartheta \colon W \cap \pi(V) \to P$ želen gladek lokalni prerez preslikave π, definiran na odprti okolici $U := W \cap \pi(V)$ točke x, saj za vsak $y \in W \cap \pi(V)$ velja

$$\vartheta(\pi(s(y))) = \vartheta(\pi(\varphi^{-1}(s(\vartheta(y))))) = \vartheta(y)$$

in zato $\pi(s(y)) = y$. ■

Posledica zadnje leme je naslednje dejstvo, ki ga bomo pogosto uporabili pri dokazovanju gladkosti dane preslikave, definirane na baznem prostoru submerzije.

Lema 2.20. *Naj bo $\pi \colon P \to M$ surjektivna submerzija in N poljubna mnogoterost ter $f \colon M \to N$ preslikava. Preslikava f je gladka natanko tedaj, ko je $f \circ \pi$ gladka.*

Dokaz. Če je f gladka, je $f \circ \pi$ gladka kot kompozicija gladkih preslikav. Obratno, naj bo $f \circ \pi$ gladka. Po lemi 2.19 za poljubno točko $x \in M$ obstaja prerez $s \colon U \to P$ preslikave π, kjer je U neka odprta okolica točke x v M. Potem velja $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$, zato je preslikava

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f \circ \pi"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

$$f|_U = f \circ (\pi \circ s) = (f \circ \pi) \circ s,$$

gladka kot kompozicija gladkih preslikav. Gladkost preslikave pa je lokalna lastnost. ■

Vrnimo se h glavnim svežnjem. Videli smo, da vsaka lokalna trivializacija glavnega svežnja določa lokalno umeritev. Tudi to implikacijo bomo zdaj obrnili – vsaka umeritev glavnega svežnja določa trivializacijo glavnega svežnja. Posledično bomo lahko glavni sveženj definirali z lokalnimi prerezi namesto z lokalnimi trivializacijami.

Trditev 2.21. *Naj bo $\pi \colon P \to M$ gladka surjekcija in naj bo $m \colon P \times G \to P$ prosto desno delovanje Liejeve grupe G na P, ki ohranja vlakna in je na njih tranzitivno.*[‡] *Če je $s \colon U \to P$ prerez preslikave π, potem je preslikava*

$$\tau \colon U \times G \to \pi^{-1}(U), \quad \tau(x, g) := s(x) \cdot g$$

G-ekvivariantni difeomorfizem.

[‡]Da delovanje ohranja vlakna in je na njih tranzitivno pomeni $\pi^{-1}\pi(u) = \mathrm{Orb}_G(u)$.

Dokaz. Gladkost τ je očitna iz gladkosti s in delovanja m. G-ekvivariantnost je prav tako očitna, saj je $\tau(x, g \cdot h) = \tau(x, g) \cdot h$ za vse $x \in U$ ter $g, h \in G$.

Dokažimo bijektivnost τ. Za dan $x \in M$ je preslikava $\tau(x, \cdot)\colon G \to \pi^{-1}(x)$ po tranzitivnosti delovanja na vlaknih surjektivna, po prostosti pa injektivna, torej je bijekcija. Če velja $\tau(x, g) = \tau(y, h)$ za neke $x, y \in M$ in $g, h \in G$, potem z uporabo preslikave π na tej enakosti iz ohranjanja vlaken sledi $\pi(s(x)) = \pi(s(y))$ in zato $x = y$, posledično pa tudi $g = h$. Zato je τ injektivna. Ker je $\pi^{-1}(U) = \cup_{x\in U}\pi^{-1}(x)$, je τ surjektivna.

Dokažimo, da je τ lokalni difeomorfizem. Po izreku o inverzni preslikavi za mnogoterosti je dovolj preveriti, da je $\mathrm{d}\tau_{(x,g)}\colon T_xM \oplus T_gG \to T_{s(x)\cdot g}P$ izomorfizem za poljubna $x \in U, g \in G$. Sardov izrek (glej npr. [10, izrek 6.10]) pravi, da je množica vseh regularnih vrednosti preslikave τ gosta v $\pi^{-1}(U)$, torej v posebnem obstaja točka iz $U \times G$, v kateri je preslikava τ submerzija. Ker je $\pi^{-1}(U)$ odprta v P, iz tega sledi

$$\dim M + \dim G \geq \dim P_U = \dim P,$$

iz česar sledi, da je dovolj pokazati injektivnost preslikave $\mathrm{d}\tau_{(x,g)}$. Po formuli za odvod gladke preslikave iz produkta mnogoterosti (glej npr. [14, zgled 1.22 (9)]) velja

$$\mathrm{d}\tau_{(x,g)}(X, Y) = \mathrm{d}(\tau(\cdot, g))_x(X) + \mathrm{d}(\tau(x, \cdot))_g(Y) = \mathrm{d}(r_g \circ s)_x(X) + \mathrm{d}(\ell_{s(x)})_g(Y)$$

za poljubna $X \in T_xM, Y \in T_gG$. Privzemimo $\mathrm{d}\tau_{(x,g)}(X, Y) = 0$, torej

$$\mathrm{d}(r_g \circ s)_x(X) = -\,\mathrm{d}(\ell_{s(x)})_g(Y), \tag{2.3}$$

in dokažimo $X = Y = 0$. Za člen na desni strani zgornje enačbe velja $\mathrm{d}(\ell_{s(x)})_g = \mathrm{d}(\ell_{s(x)\cdot g})_e \circ \mathrm{d}(L_{g^{-1}})_g\colon T_gG \to V_{s(x)\cdot g}$ in po posledici 2.13 je ta preslikava izomorfizem vektorskih prostorov (velja namreč $\mathrm{d}(\ell_u)_e = \sigma(\cdot)_u$ za poljuben $u \in P$). Za člen na levi strani pa opazimo, da je $r_g \circ s$ tudi prerez preslikave π, zato je imerzija, in velja

$$\mathrm{d}\pi_{s(x)\cdot g} \circ \mathrm{d}(r_g \circ s)_x = \mathrm{d}(\pi \circ s)_x = \mathrm{id}_{T_xM},$$

zato je vektor $\mathrm{d}(r_g \circ s)_x(X)$ vertikalen natanko tedaj, ko je $X = 0$, tj.

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}(r_g \circ s)_x) \cap V_{s(x)\cdot g} = \{0\}.$$

Ker na desni strani enačbe (2.3) nastopa vertikalni vektor, sledi najprej $X = 0$, posledično pa tudi $\mathrm{d}(\ell_{s(x)})_g(Y) = 0$, zato po injektivnosti preslikave $\mathrm{d}(\ell_{s(x)})_g$ tudi $Y = 0$. To dokazuje injektivnost preslikave $\mathrm{d}\tau_{(x,y)}$. ∎

Opomba 2.22. V dokazu se je pojavil izomorfizem $\mathrm{d}(L_{g^{-1}})_g\colon T_gG \to T_eG$; v kontekstu teorije Liejevih grup lahko definiramo t. i. *Maurer-Cartanovo formo na G*, ki jo označimo z $\mu_G \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$, definirana je s predpisom

$$(\mu_G)_g(X) = \mathrm{d}(L_{g^{-1}})_g(X) \quad \text{za vse } X \in T_gG, g \in G.$$

S to preslikavo vsak tangentni vektor v Liejevi grupi na kanoničen način identificiramo z vektorjem iz $\mathfrak{g} = T_eG$. Vidimo torej, da za poljuben $X \in T_gG$ velja

$$\mathrm{d}(\ell_u)_g(X) = \mathrm{d}(\ell_{u\cdot g})_e \circ \mathrm{d}(L_{g^{-1}})_g(X) = \sigma(\mu_G(X))_{u\cdot g} \quad \text{za vse } u \in P, g \in G. \tag{2.4}$$

Naslednja posledica pravi, da imamo bijektivno korespondenco med umeritvami in trivializacijami.

Posledica 2.23. *Vsaka lokalna umeritev* $s\colon U \to P$ *glavnega svežnja* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *porodi lokalno trivializacijo* $\psi = (\pi, \varphi)\colon \pi^{-1}(U) \to U \times G$*, katere inverz je* $\psi^{-1}(x, g) = s(x) \cdot g$ *in velja* $\varphi(s(x)) = e$ *za vsak* $x \in U$*.*

Dokaz. Po zadnji trditvi je s $\psi^{-1}(x, g) := s(x) \cdot g$ definiran G-ekvivariantni difeomorfizem $\psi^{-1}\colon U \times G \to \pi^{-1}(U)$; njegov inverz označimo s $\psi = (\pi, \varphi)$. Velja torej

$$\varphi(s(x)) = \varphi(\psi^{-1}(x, e)) = e. \tag{2.5}$$

Da je ψ res lokalna trivializacija, je potrebno dokazati še G-ekvivariantnost preslikave φ, tj. $\varphi(u \cdot g) = \varphi(u)g$ za poljubna $u \in \pi^{-1}(U), g \in G$. Naj bo $u \in \pi^{-1}(x)$ za neki $x \in U$. Ker je delovanje na glavnem svežnju prosto in ohranja vlakna ter je na njih tranzitivno, obstaja natanko en $h \in G$, da je $u = s(x) \cdot h$. Potem je

$$\varphi(u \cdot g) = \varphi(s(x) \cdot hg) = \varphi(\psi^{-1}(x, hg)) = hg = \varphi(u)g,$$

kjer zadnji enačaj sledi iz dejstva, da je $\varphi(u) = \varphi(s(x) \cdot h) = \varphi(\psi^{-1}(x, e) \cdot h) = \varphi(\psi^{-1}(x, h)) = h$ po ekvivariantnosti preslikave ψ^{-1} in enačbi (2.5). ∎

Naslednji posledici sledita neposredno iz zadnje posledice.

Posledica 2.24. *Naj bo* $\pi\colon P \to M$ *gladka surjekcija in naj bo* $m\colon P \times G \to P$ *takšno prosto desno delovanje Liejeve grupe* G *na* P*, da so vlakna preslikave* π *natanko orbite delovanja* m*. Če obstaja odprto pokritje* $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *za* M *in lokalni prerezi* $s_\lambda\colon U_\lambda \to P$ *preslikave* π*, potem je* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *glavni sveženj.*

Posledica 2.25. *Če obstaja globalna umeritev glavnega svežnja* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$*, potem je ta trivialen.*

Ko smo ravno pri razpravi o trivialnosti glavnega svežnja, omenimo še naslednje pomembno dejstvo, ki pa ga v pričujočem besedilu ne bomo dokazali.

Trditev 2.26. *Vsak glavni sveženj nad kontraktibilno bazno mnogoterostjo je trivialen.*

Dokaz. [3, posledica 6.9] ∎

2.1.3 Prehodne preslikave

Naj bosta zdaj $(U_i, \psi_i = (\pi, \varphi_i))$ in $(U_j, \psi_j = (\pi, \varphi_j))$ lokalni trivializaciji glavnega svežnja $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$. Definiramo preslikavo

$$\varphi_{ji}\colon U_i \cap U_j \to G, \quad \varphi_{ji}(x) = \varphi_j(u)\varphi_i(u)^{-1},$$

kjer je $u \in \pi^{-1}(x)$ poljuben. Ta preslikava je dobro definirana, saj po ekvivariantnosti velja

$$\varphi_j(u \cdot g)\varphi_i(u \cdot g)^{-1} = \varphi_j(u)gg^{-1}\varphi_i(u)^{-1} = \varphi_j(u)\varphi_i(u)^{-1}$$

in po lemi 2.20 vidimo, da je gladka. Imenujemo jo *prehodna preslikava od trivializacije* ψ_i *k trivializaciji* ψ_j. Iz definicije preslikave φ_{ji} takoj sledi enakost

$$\varphi_{ji}(x)^{-1} = \varphi_{ij}(x), \tag{2.6}$$

za vse $x \in U_i \cap U_j$. Če je $(U_k, \psi_k = (\pi, \varphi_k))$ še ena lokalna trivializacija, potem opazimo tudi, da velja

$$\varphi_{ki}(x) = \varphi_{kj}(x)\varphi_{ji}(x), \tag{2.7}$$

za vse $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$.

Poljubni družini parov $\{(U_{ij}, \varphi_{ij}) \mid i, j \in \Lambda\}$, kjer so $U_{ij} \subset M$ odprte podmnožice in $\varphi_{ij} \in C^\infty(U_{ij}, G)$ take preslikave, za katere veljata identiteti (2.6) in (2.7), rečemo *kocikel preslikav*. V primeru, ko izhajajo iz lokalnih trivializacij glavnega svežnja (kot zgoraj), jim rečemo *kocikel prehodnih preslikav* glavnega svežnja $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$.

Kot vemo, vsaka umeritev glavnega svežnja porodi trivializacijo. Naravno vprašanje je, kako se ena umeritev izraža glede na drugo.

Trditev 2.27. *Naj bo* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *glavni sveženj in* $s_i\colon U_i \to P$, $s_j\colon U_j \to P$ *umeritvi zanj. Potem velja*

$$s_i(x) = s_j(x) \cdot \varphi_{ji}(x)$$

za vsak $x \in U_i \cap U_j$, *kjer je* φ_{ji} *prehodna preslikava od trivializacije* ψ_i *k trivializaciji* ψ_j, *če* ψ_i *in* ψ_j *ustrezata umeritvama* s_i *in* s_j.

Dokaz. Naj bo $x \in U_i \cap U_j$. Ker sta s_i in s_j prereza za π in je delovanje G na P tranzitivno na vlaknih in prosto, obstaja natanko en $g \in G$, da velja $s_i(x) = s_j(x) \cdot g$. Če na tej enakosti uporabimo preslikavo φ_j, iz G-ekvivariantnosti te preslikave sledi

$$\varphi_j(s_i(x)) = g,$$

istočasno pa je po definiciji prehodne preslikave φ_{ji} od trivializacije ψ_j k trivializaciji ψ_i

$$\varphi_{ji}(x) = \varphi_j(s_i(x))\varphi_i(s_i(x))^{-1} = \varphi_j(s_i(x)),$$

kar dokazuje želeno. ■

Kot zanimivost navedimo še, da lahko iz kocikla preslikav konstruiramo glavni sveženj; ker tega dejstva v prihodnje ne bomo potrebovali, ga tudi ne bomo dokazali.

Trditev 2.28. *Naj bo* M *gladka mnogoterost in* G *Liejeva grupa. Če je* $(U_i)_{i\in\Lambda}$ *odprto pokritje za* M *in za vsaka* $i, j \in \Lambda$ *z* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ *obstaja taka* $\varphi_{ji} \in C^\infty(U_i \cap U_j, G)$, *da je* $\{(U_i \cap U_j, \varphi_{ji}) \mid i, j \in \Lambda\}$ *kocikel preslikav, potem obstaja glavni* G*-sveženj* P *nad* M, *da je* $\{\varphi_{ji} \mid i, j \in \Lambda\}$ *kocikel prehodnih preslikav zanj.*

2.1.4 Glavna delovanja

V nadaljevanju bomo potrebovali odgovor na naslednje naravno vprašanje v kontekstu teorije Liejevih grup: kakšno mora biti delovanje Liejeve grupe G na gladko mnogoterost P, da je prostor orbit

$$P/G = \{\mathrm{Orb}_G(u) \mid u \in P\},$$

gladka mnogoterost in je kvocientna projekcija

$$\pi\colon P \to P/G, \quad \pi(u) = \mathrm{Orb}_G(u)$$

submerzija? Dalje, v primeru, ko je P/G gladka mnogoterost, kdaj je $\pi\colon P \to P/G$, skupaj z delovanjem G na P, glavni sveženj? Izkaže se, da je za odgovor na to vprašanje ključna naslednja lastnost.

Definicija 2.29. Desno delovanje $m\colon P \times G \to P$ Liejeve grupe G na gladko mnogoterost P je *glavno*, če je prosto in je preslikava

$$\begin{aligned}\bar{m}\colon P \times G &\to P \times P,\\ (u, g) &\mapsto (u, u \cdot g)\end{aligned}$$

zaprta.

Trditev 2.30. *Delovanje G na P v poljubnem glavnem svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ je glavno.*

Dokaz. Da je delovanje prosto, že vemo. Potrebno je preveriti zaprtost preslikave $\bar{m}$. Naj bo torej $A \subset P \times G$ zaprta podmnožica, $(u_i, \tilde{u}_i)_i \subset \bar{m}(A)$ zaporedje z limito $(u, \tilde{u}) \in P \times P$. Potem za vsak $i \in \mathbb{N}$ velja $\tilde{u}_i = u_i \cdot g_i$ za neki natanko določen $g_i \in G$ (saj je delovanje v glavnem svežnju prosto in tranzitivno na vlaknih). Če dokažemo, da zaporedje $(g_i)_i$ konvergira k elementu $g \in G$, potem po zaprtosti množice A sledi $(u, g) \in A$, zato velja $(u, \tilde{u}) = (u, \lim_{i\to\infty} \tilde{u}_i) = (u, u \cdot g) \in \bar{m}(A)$ (kjer zadnji enačaj sledi iz zveznosti delovanja), torej bo s tem dokazano želeno.

Dokaz napravimo v lokalni trivializaciji za P. Naj bo $x := \pi(u)$ in $\psi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times G$ lokalna trivializacija za neko odprto okolico $U \subset M$ točke x. Potem obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $i \geq n_0$ velja $u_i \in \pi^{-1}(U)$, zato pa tudi $\tilde{u}_i \in \pi^{-1}(U)$. Potem za vsak $i \geq n_0$ velja

$$\begin{aligned}\psi(u_i) &= (x_i, h_i),\\ \psi(\tilde{u}_i) &= (x_i, h_i g_i),\end{aligned}$$

za $x_i := \pi(u_i)$ in neke $h_i \in G$; druga enačba sledi iz ekvivariantnosti preslikave φ, saj sta u_i in $u_i \cdot g_i$ v istem vlaknu. Velja pa tudi

$$\psi(u) = (x, h)$$

za neki $h \in G$. Ker je $u = \lim_{i\to\infty} u_i$, sledi $h = \lim_{i\to\infty} u_i$. Ker velja $\tilde{u} = \lim_{i\to\infty} \tilde{u}_i$, pa sledi še $\pi(u) = \pi(\tilde{u})$ in $\psi(\tilde{u}) = (x, \tilde{h})$ za neki $\tilde{h} \in G$. Po zveznosti ψ zdaj sledi $(x, \tilde{h}) = \lim_{i\to\infty}(x_i, h_i g_i)$, zato tudi $\tilde{h} = \lim_{i\to\infty} h_i g_i$, posledično pa velja $h^{-1}\tilde{h} = \lim_{i\to\infty} g_i$ zaradi zveznosti množenja v G. Iskan element je torej $g := h^{-1}\tilde{h}$. ■

Velja tudi obrat. Zanj potrebujemo naslednji izrek, katerega dokaz je precej tehničen in bi ukradel rdečo nit naše razprave, pridodal pa ne bi zares k našemu razumevanju teorije glavnih svežnjev. Za dokaz bralca usmerimo v [6, izrek 3.7.25 in razdelek 3.11].

Izrek 2.31. *Če Liejeva grupa G deluje na gladko mnogoterost P z desne in je delovanje glavno, potem obstaja natanko ena gladka struktura na P/G, da je kvocientna projekcija $\pi\colon P \to P/G$ submerzija. Velja*

$$\dim(P/G) = \dim P - \dim G.$$

Posledica 2.32. *Če je $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj, potem je M difeomorfna P/G.*

Dokaz. Neposredna posledica zadnjega izreka in predhodne trditve. ∎

Posledica 2.33. *Vsako glavno desno delovanje Liejeve grupe G na gladko mnogoterost P porodi glavni sveženj*

$$\pi\colon P \xrightarrow{G} P/G.$$

Dokaz. Po posledici 2.24 je dovolj pokazati, da za poljubno točko $x \in P/G$ obstaja okolica $U \subset P/G$ in lokalen prerez $s\colon U \to P$ preslikave π. To pa velja po lemi 2.19, saj je surjekcija $\pi\colon P \to P/G$ po zadnjem izreku submerzija. ∎

V posebnem primeru, ko je G kompaktna Liejeva grupa, je predpostavka o glavnosti delovanja avtomatično izpolnjena. Preden to dokažemo, navedimo naslednjo definicijo.

Definicija 2.34. Zvezna preslikava $f\colon X \to Y$ med topološkima prostoroma je *prava*, če je $f^{-1}(K)$ kompaktna podmnožica v X za vsako kompaktno podmnožico $K \subset Y$.

Izrek 2.35. *Vsako prosto desno delovanje kompaktne Liejeve grupe G na gladko mnogoterost P porodi glavni sveženj*

$$\pi\colon P \xrightarrow{G} P/G.$$

Dokaz sledi neposredno iz prejšnje posledice in naslednjih dveh topoloških lem.

Lema 2.36. *Če je $m\colon P \times G \to P$ delovanje kompaktne Liejeve grupe G na gladko mnogoterost P, potem je preslikava $\bar{m}$ prava.*

Dokaz. Naj bo $K \subset P \times P$ kompaktna podmnožica. Potem je $L := \mathrm{pr}_1(K)$ kompaktna podmnožica v P. Ker je G kompaktna Liejeva grupa, je prostor $L \times G$ kompakten, torej je po Hausdorffovosti dovolj pokazati, da je $\bar{m}^{-1}(K)$ vsebovana v prostoru $L \times G$ in v njem zaprta.

Ker je preslikava $\bar{m}$ dana s predpisom $\bar{m}(u, g) = (u, u \cdot g)$, je množica $\bar{m}^{-1}(K)$ res vsebovana v $L \times G$. Množica K pa je kot kompaktna podmnožica v Hausdorffovem prostoru $P \times P$ zaprta, zato je $\bar{m}^{-1}(K)$ zaprta podmnožica v $P \times G$. Posledično je zaprta tudi v $L \times G$. ∎

Lema 2.37. *Vsaka prava zvezna preslikava* $f\colon X \to Y$ *v lokalno kompakten Hausdorffov prostor* Y *je zaprta.*

Dokaz. Naj bo A zaprta podmnožica v X. Najprej trdimo, da je dovolj pokazati, da je $f(A) \cap K$ kompaktna podmnožica v Y za vsak kompakt $K \subset Y$.

V namen dokaza slednjega izberimo $y \in Y \setminus f(A)$. Po lokalni kompaktnosti prostora Y za točko y obstaja kompaktna okolica $K \subset Y$ in po predpostavki je $f(A) \cap K$ kompaktna, zato je po Hausdorffovosti prostora Y tudi zaprta. Potem je

$$\mathrm{Int}(K) \setminus (f(A) \cap K)$$

odprta okolica za y v Y, ki je vsebovana v $Y \setminus f(A)$. Ker je bil $y \in Y \setminus f(A)$ poljuben, je komplement množice $f(A)$ odprt v Y.

Pokažimo še, da je $f(A) \cap K$ kompakt v Y za vsak kompakt $K \subset Y$. Opazimo

$$f(A) \cap K = f(A \cap f^{-1}(K))$$

in ker je f prava, je $f^{-1}(K)$ kompakt, zato je tudi $A \cap f^{-1}(K)$ kompakt; zdaj uporabimo dejstvo, da je zvezna slika kompakta tudi sama kompaktna. ■

2.2 Pridruženi vektorski svežnji

Teorija upodobitev Liejevih grup je v fiziki nepogrešljivo orodje, o čemer priča npr. njena tesna navezava s Fourierevo analizo. V kontekstu teorije glavnih svežnjev so upodobitve Liejevih grup orodje, s katerim iz glavnega svežnja naravno konstruiramo neki vektorski sveženj nad bazno mnogoterostjo. Umestitev pojma pridruženega vektorskega svežnja v fizikalen kontekst podaja diagram ($\star$) iz uvodnega poglavja.

Konstrukcija pridruženega vektorskega svežnja se začne z opažanjem, da imamo ob danem glavnem svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ in dani upodobitvi $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ Liejeve grupe G na nekem vektorskem prostoru V, podano tako desno delovanje G na P kot tudi levo delovanje G na V; vseskozi bomo privzemali, da je V končnorazsežen vektorski prostor. Zapisani delovanji Liejeve grupe G lahko združimo na naraven način.

Lema 2.38. *Naj bo* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *glavni sveženj in* $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ *upodobitev Liejeve grupe* G *na vektorskem prostoru* V. *Preslikava*

$$\begin{aligned}(P \times V) \times G &\to P \times V\\ ((u,v),g) &\mapsto (u \cdot g, \rho_g^{-1}(v))\end{aligned}$$

podaja desno delovanje Liejeve grupe G *na* $P \times V$, *ki je prosto in glavno. Na prostoru orbit tega delovanja*

$$P \times_\rho V := (P \times V)/G$$

obstaja natanko ena struktura gladke mnogoterosti, da je pridružena projekcija

$$p_\rho\colon P \times V \to P \times_\rho V$$

submerzija.

Dokaz. Enostavno je preveriti, da preslikava podaja desno delovanje Liejeve grupe G na $P \times V$. To delovanje je prosto, saj je delovanje G na P prosto, in je glavno po podobnem argumentu kot v dokazu trditve 2.30. Drugi del trditve potem sledi iz izreka 2.31. ■

Opomba 2.39. Za poljubna $u \in P, v \in V$ velja $[u, v] = [u \cdot g, \rho_g^{-1}(v)]$, zato

$$[u \cdot g, v] = [u, \rho_g(v)].$$

Ta identiteta bo v prihodnje uporabna. Ker je delovanje G na P na vlaknih tranzitivno, namreč velja

$$\begin{aligned}(P_x \times V)/G = \{[u, v] \mid u \in P_x, v \in V\} &= \{[u_x \cdot g, v] \mid g \in G, v \in V\} \\ = \{[u_x, \rho_g(v)] \mid g \in G, v \in V\} &= \{[u_x, v] \mid v \in V\},\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj izbrali neki element $u_x \in P_x$. To nas pripelje do naslednjega izreka.

Izrek 2.40. *Naj bo* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *glavni svežen in* $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ *upodobitev Liejeve grupe* G *na končnorazsežnem vektorskem prostoru* V *nad* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$*. Potem na* $E := P \times_\rho V$ *obstaja struktura* $\mathbb{F}$*-vektorskega svežnja ranga* $\dim_{\mathbb{F}} V$ *nad* M*.*

Opomba 2.41. $\pi_E\colon E \to M$ imenujemo *pridružen vektorski svežen* glavnemu svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glede na upodobitev (ρ, V) in rečemo, da je G *strukturna grupa* vektorskega svežnja E.

Dokaz. Sveženjsko projekcijo $\pi_E\colon E \to M$ definiramo s predpisom

$$\pi_E([u, v]) := \pi(u).$$

Ta preslikava je dobro definirana, saj za poljubne $u \in P, v \in V, g \in G$ velja

$$\pi_E([u \cdot g, \rho_g^{-1}(v)]) = \pi(u \cdot g) = \pi(u) = \pi_E([u, v]).$$

Vlakno te preslikave je enako

$$E_x := \pi_E^{-1}(x) = \{[u, v] \in E \mid \pi(u) = x\} = (P_x \times V)/G = \{[u_x, v] \mid v \in V\},$$

(za izbran $u_x \in P_x$) in na njem vpeljemo strukturo vektorskega prostora s predpisom[§]

$$\lambda[u_x, v_1] + \mu[u_x, v_2] = [u_x, \lambda v_1 + \mu v_2].$$

Preslikava $T\colon V \to E_x$, $T(v) = [u_x, v]$ je potem očitno izomorfizem vektorskih prostorov.

[§]Podali smo definicijo seštevanja in množenja s skalarji z odlikovanim predstavnikom $u_x \in P_x$, ki si jo je najlažje zapomniti. Splošneje, če sta $[u_1, v_1], [u_2, v_2] \in E_x$, potem obstaja natanko en $g \in G$, da je $u_2 = u_1 \cdot g$, zato je $\lambda[u_1, v_1] + \mu[u_2, v_2] = \lambda[u_1, v_1] + \mu[u_1, \rho_g(v_2)] = [u_1, \lambda v_1 + \rho_g(\mu v_2)]$. S to enačbo se zlahka prepričamo v dobro definiranost predpisov seštevanja in množenja s skalarji.

Preostane le še konstrukcija lokalnih trivializacij. Naj bo $\psi = (\pi, \varphi)\colon \pi^{-1}(U) \to U \times G$ lokalna trivializacija glavnega svežnja $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ za neko odprto podmnožico $U \subset M$. Definiramo

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\colon \pi_E^{-1}(U) &\to U \times V \\ [u, v] &\mapsto (\pi(u), \rho_{\varphi(u)}(v)), \end{aligned}$$

ki je po lemi 2.20 gladka, saj je $p_\rho\colon (u, v) \mapsto [u, v]$ submerzija. Njen inverz je dan z (očitno gladkim) predpisom

$$\tau(x, v) = [\psi^{-1}(x, e), v],$$

saj velja

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\tau(x, v)) &= \bar{\psi}([\psi^{-1}(x, e), v]) = (x, \rho_{\varphi(\psi^{-1}(x,e))}(v)) = (x, v), \\ \tau(\bar{\psi}([u, v])) &= \tau(x, \rho_{\varphi(u)}(v)) = [\psi^{-1}(x, e), \rho_{\varphi(u)}(v)] = [\psi^{-1}(x, e) \cdot \varphi(u), v] = [u, v], \end{aligned}$$

kjer smo uporabili enakosti $\varphi(\psi^{-1}(x, e)) = e$ in $\psi^{-1}(x, e) \cdot \varphi(u) = \psi^{-1}(\pi(u), \varphi(u)) = u$ iz posledice 2.23. ■

Abstrakten pridruženi vektorski svežnj bomo pogosto želeli identificirati z nekim znanim vektorskim svežnjem, pri čemer bo nadvse uporabna naslednja lema; ker je v kontekstu splošne teorije vektorskih svežnjev dobro poznana, je ne bomo dokazali.

Lema 2.42. *Naj bosta $E \to M$ in $F \to M$ gladka vektorska svežnja nad gladko mnogoterostjo M. Preslikava $H\colon E \to F$ je izomorfizem vektorskih svežnjev natanko tedaj, ko je morfizem vektorskih svežnjev, ki je na vlaknih linearni izomorfizem.*

Dokaz. Glej npr. [12, lema 2.3]. ■

Opomba 2.43. Spomnimo, da rečemo preslikavi $H\colon E \to F$ *morfizem vektorskih svežnjev* $E \to M$ in $F \to M$, če je gladka in je zožitev $H|_{E_x}\colon E_x \to F_x$ linearna preslikava za vsak $x \in M$ (zadnji lastnosti preslikave H rečemo *linearnost na vlaknih*). Preslikavi $H\colon E \to F$ rečemo *izomorfizem vektorskih svežnjev*, če je difeomorfizem, ki je na vlaknih linearni izomorfizem.

Lema torej pravi, da ni potrebno preverjati gladkosti inverza preslikave H, v kolikor preverimo, da je H gladek morfizem vektorskih svežnjev, ki je na vlaknih linearni izomorfizem.

Primer 2.44 (Pridružen vektorski sveženj poljubnemu glavnemu svežnju glede na trivialno upodobitev)**.** Delovanje G na $P \times V$ je v primeru trivialne upodobitve (ρ, V) dano z $(u, v) \mapsto (u \cdot g, v)$, zato je

$$[u \cdot g, v] = [u, v] \tag{2.8}$$

za vse $u \in P, g \in G$ in $v \in V$. Pokažimo, da je vektorski sveženj $P \times_\rho V$ trivialen; v ta namen definiramo preslikavo

$$\begin{aligned} P \times_\rho V &\to M \times V \\ [u, v] &\mapsto (\pi(u), v), \end{aligned}$$

ki je dobro definirana zaradi enakosti (2.8), gladka pa po lemi 2.20. Ta preslikava je na vlaknih očitno linearni izomorfizem, zato po lemi 2.42 sledi, da je izomorfizem vektorskih svežnjev. ♦

Primer 2.45 (Pridružen vektorski sveženj glavnemu svežnju ogrodij glede na standardno upodobitev)**.** Dokažimo, da je $E := F(M) \times_{\mathrm{id}} \mathbb{R}^n$ izomorfen tangentnemu svežnju TM. Naj bo

$$\begin{aligned} H\colon E &\to TM \\ [u, \vec{v}] &\mapsto v^i u_i, \end{aligned}$$

kjer $u = (u_1, \ldots, u_n)$ označuje poljubno bazo vektorskega prostora T_pM in smo pisali $\vec{v} = (v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n$.

Dokažimo dobro definiranost te preslikave. Naj bo u baza za T_pM, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ in $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Potem je

$$[u, \vec{v}] = [u \cdot A, A^{-1}\vec{v}] = [(A^j{}_i u_j)_i, ((A^{-1})^i{}_k v^k)_i] \overset{H}{\mapsto} \overbrace{A^j{}_i (A^{-1})^i{}_k}^{\delta^j{}_k} v^k u_j = v^k u_k,$$

kar dokazuje dobro definiranost.

Preslikava H je na vlaknih očitno izomorfizem vektorskih prostorov. Dokažimo gladkost predpisa za H. Naj bo $(V, \vartheta = (y^i)_i)$ lokalna karta na mnogoterosti M. Ta inducira lokalno trivializacijo $\tilde{\vartheta} = (\pi_{TM}, \mathrm{d}\vartheta)\colon \pi_{TM}^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^n$ svežnja TM. Po drugi strani pa naj bo ψ lokalna trivializacija glavnega svežnja ogrodij, ki je (kot v primeru 2.1) porojena s poljubno lokalno karto $(U, \varphi = (x^i)_i)$. Torej je $\psi = (\pi, A)\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, kjer je matrika $A(u)$ za vsaka $u \in \pi^{-1}(p)$, $p \in U$, definirana z enakostjo

$$u_j = A(u)^i{}_j \partial_i|_p = A(u)^i{}_j \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Lokalna trivializacija ψ dalje inducira lokalno trivializacijo $\bar{\psi}\colon \pi_E^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, s predpisom kot v izreku 2.40. V lokalnih trivializacijah $\tilde{\vartheta}, \bar{\psi}$ velja

$$\begin{aligned} (p, \vec{v}) &\overset{\bar{\psi}^{-1}}{\mapsto} [\psi^{-1}(p, I), \vec{v}] = \left[\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)_i, \vec{v}\right] \overset{H}{\mapsto} v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \\ &\overset{\tilde{\vartheta}}{\mapsto} (p, \mathrm{d}(\vartheta \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(\vec{v})), \end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili verižno pravilo, na prehodu skozi tretjo puščico pa dejstvo, da je

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) = [\mathrm{d}(\vartheta \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}]^j{}_i$$

(j, i)-ti vnos Jacobijeve matrike preslikave $\vartheta \circ \varphi^{-1}$. Ta predpis je gladek v obeh parametrih, zato je preslikava H gladka. Po lemi 2.42 tedaj sledi, da je izomorfizem vektorskih svežnjev. ♦

Primer 2.46 (Adjungirani sveženj)**.** Preslikava $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, $g \mapsto \mathrm{Ad}_g = \mathrm{d}(C_g)_e$ podaja upodobitev $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$ Liejeve grupe G na vektorskem prostoru $\mathfrak{g}$, ki jo imenujemo *adjungirana upodobitev* Liejeve grupe G. Torej lahko naravno tvorimo pridružen vektorski sveženj

$$\mathrm{Ad}(P) := P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$$

danemu glavnemu svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glede na upodobitev $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$. Imenujemo ga *adjungirani sveženj* glavnega svežnja $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$. ♦

Opomba 2.47. Če bi na M imeli podano Riemannovo metriko, bi lahko namesto svežnja ogrodij $\pi\colon F(M) \xrightarrow{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})} M$ preučevali *svežen ortonormiranih ogrodij* $\pi\colon O(M) \xrightarrow{\mathrm{O}(n)} M$, ki ima vlakno O_xM enako množici vseh ortonormiranih baz za T_xM. Isto lahko storimo v primeru, ko imamo na M psevdo Riemannovo metriko s signaturo $(n-p,p)$ – v tem primeru rečemo, da je $\pi\colon O(M) \xrightarrow{\mathrm{O}(p,q)} M$ *svežen psevdo ortonormiranih ogrodij*.

Splošneje, če je E poljuben $\mathbb{F}$-vektorski svežen ranga r nad M, lahko tvorimo svežen ogrodij $\pi\colon F(E) \xrightarrow{\mathrm{GL}(r,\mathbb{F})} M$ zanj. V primeru, ko je E opremljen z metriko (tj. s prerezom vektorskega svežnja $T^{(0,2)}E$, ki na vlaknih inducira $\mathbb{F}$-skalarni produkt) lahko tvorimo svežen $\pi\colon U(E) \xrightarrow{\mathrm{U}(r)} M$ ortonormiranih ogrodij glede na to metriko. V vsakem od teh primerov bi dognali, da je pridružen vektorski svežen (glede na standardno upodobitev strukturne grupe G) izomorfen E.

Vidimo torej, da je vsak vektorski svežen ranga r pridružen svojemu glavnemu svežnju ogrodij glede na standardno upodobitev grupe $\mathrm{GL}(r,\mathbb{F})$.

2.2.1 Prerezi pridruženih vektorskih svežnjev

Ker bodo v naslednjih poglavjih imeli prerezi pridruženih svežnjev posebno vlogo (opisovali bodo polja materije), navedimo nekaj stvari o njih. Naj bo $\Phi \in \Gamma^\infty(P \times_\rho V)$ prerez pridruženega vektorskega svežnja $P \times_\rho V$ glavnemu svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glede na upodobitev (ρ, V). Čeprav smo vrednost prereza Φ v točki $x \in M$ ponavadi označevali s Φ_x, bomo v primeru prerezov pridruženega vektorskega svežnja namesto Φ_x pisali $\Phi(x)$. Oglejmo si, kako se izraža Φ v dani umeritvi za $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$.

Naj bo torej $s\colon U \to P$ umeritev glavnega svežnja $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$; potem lahko za poljuben $x \in U$ zapišemo

$$\Phi(x) = [s(x), \phi(x)]$$

za neki natanko določen vektor $\phi(x) \in V$. S tem smo tvorili neko preslikavo $\phi\colon U \to V$, ki pa je gladka. Res, trivializacija $\psi = (\pi, \varphi)$ za $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$, ki ustreza prerezu s, porodi (kot v dokazu izreka 2.40) trivializacijo $\bar{\psi}$ za $P \times_\rho V$, dano z

$$\bar{\psi}([u,v]) = (\pi(u), \rho_{\varphi(u)}(v))$$

in v tej trivializaciji je gladkost preslikave $\Phi|_U$ ekvivalentna gladkosti preslikave

$$(\bar{\psi} \circ \Phi)(x) = (x, \rho_{\varphi(s(x))}(\phi(x))),$$

torej iz gladkosti Φ sledi gladkost preslikave $U \to V$, dane s predpisom $x \mapsto \rho_{\varphi(s(x))}(\phi(x))$. Velja pa seveda $\phi(x) = \rho^{-1}_{\varphi(s(x))}(\rho_{\varphi(s(x))}(\phi(x)))$, torej je ϕ gladka. S tem smo dokazali naslednje.

Trditev 2.48. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni svežen in (ρ, V) upodobitev Liejeve grupe G. Prerez $\Phi \in \Gamma^\infty(P \times_\rho V)$ pridruženega svežnja se v lokalni umeritvi $s\colon U \to P$ izraža s predpisom*

$$\Phi(x) = [s(x), \phi(x)]$$

za neko natanko določeno preslikavo $\phi \in C^\infty(U, V)$.

Poleg zgornjega pa obstaja še en naraven način opisovanja prerezov pridruženega vektorskega svežnja – ker se pogosto pojavlja v literaturi, povejmo nekaj o njem, četudi ga mi ne bomo zares potrebovali. Med množico $\Gamma^\infty(P\times_\rho V)$ in množico

$$C^\infty(P,V)^\rho := \{\tau \in C^\infty(P,V) \mid \tau(u\cdot g) = \rho_{g^{-1}}(\tau(u)) \text{ za vse } u\in P, g\in G\}$$

namreč obstaja kanonični izomorfizem.

Trditev 2.49. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj in (ρ,V) upodobitev Liejeve grupe G. Preslikava*

$$\Theta\colon C^\infty(P,V)^\rho \to \Gamma^\infty(P\times_\rho V)$$
$$\Theta(\tau) = \Phi_\tau$$

je izomorfizem vektorskih prostorov; tu je prerez Φ_τ dan s predpisom

$$\Phi_\tau(x) = [u_x, \tau(u_x)]$$

za poljuben $u_x \in \pi^{-1}(x)$.

Dokaz. Dobra definiranost prereza Φ_τ sledi iz enakosti

$$[u_x\cdot g, \tau(u_x\cdot g)] = [u_x\cdot g, \rho_{g^{-1}}(\tau(u_x))] = [u_x,\tau(u_x)]$$

za vse $x\in M$, $u_x\in\pi^{-1}(x)$ in $g\in G$; linearnost sledi iz definicije operacij po točkah. V gladkost Φ_τ se enostavno prepričamo s pomočjo izbire lokalne umeritve $s\colon U\to P$, kar prepuščamo bralcu za vajo. Inverz preslikave Θ je v tej umeritvi dan s predpisom $\Phi = [s,\phi] \mapsto \tau$, kjer τ definiramo na $\pi^{-1}(U)$ s predpisom $\tau(s(x)\cdot g) := \rho_{g^{-1}}(\phi(x))$ za vse $x\in U$ in $g\in G$. Dokazati želimo še, da je ta predpis neodvisen od izbire lokalne umeritve; potem je ta predpis za τ globalen. Zaradi trditve 2.27 velja enakost

$$\tau(s_i(x)\cdot g) = \tau(s_j(x)\cdot \varphi_{ji}(x)g) = \rho_{(\varphi_{ji}(x)g)^{-1}}(\phi_j(x)),$$

istočasno pa iz $[s_i,\phi_i] = [s_j,\phi_j]$ z uporabo trditve 2.27 sledi še

$$\phi_j(x) = \rho_{\varphi_{ij}(x)^{-1}}(\phi_i(x)),$$

kar skupaj z dejstvoma, da je ρ delovanje in prehodne preslikave tvorijo kocikel, dokazuje želeno. ■

2.3 Umeritvene transformacije

Umeritvene transformacije so posebna vrsta morfizmov med glavnimi svežnji.

Definicija 2.50. Naj bosta $\pi\colon P\xrightarrow{G} M$ in $\pi'\colon P'\xrightarrow{G} M'$ glavna svežnja in $F\colon M\to M'$ gladka preslikava. *Morfizem med glavnima svežnjema vzdolž preslikave F* je gladka preslikava $f\colon P\to P'$, ki je

i) G-ekvivariantna, tj. $f(u\cdot g) = f(u)\cdot g$ za vse $u\in P$ in $g\in G$, ter
ii) ohranja vlakna, tj. $\pi'\circ f = F\circ\pi$.

Morfizem med glavnima svežnjema ponazorimo z naslednjim komutativnim diagramom.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & P' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "F"] & M' \end{tikzcd}$$

Definicija 2.51. *Umeritvena transformacija* glavnega svežnja $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ je difeomorfizem $f\colon P \to P$, ki je

i) G-ekvivarianten, tj. $f(u \cdot g) = f(u) \cdot g$ za vse $u \in P$ in $g \in G$, ter

ii) ohranja vlakna, tj. $\pi \circ f = \pi$.

Množico umeritvenih transformacij danega glavnega svežnja označimo z $\mathrm{Aut}(P)$; je grupa za komponiranje.

Opomba 2.52. S primerjavo zgornjih definicij vidimo, da je umeritvena transformacija avtomorfizem glavnega svežnja vzdolž preslikave id_M. Temu ustreza naslednji komutativen diagram.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & P \arrow[dl, "\pi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Umeritveno transformacijo f lahko izrazimo še nekoliko bolj priročno. Ker f ohranja vlakna, za vsak $u \in P$ velja $f(u) = u \cdot \sigma_f(u)$ za neki natanko določen $\sigma_f(u) \in G$. Po G-ekvivariantnosti pa za vsak $g \in G$ velja

$$u \cdot \sigma_f(u)g = f(u) \cdot g = f(u \cdot g) = u \cdot g\sigma_f(u \cdot g) \implies \sigma_f(u \cdot g) = g^{-1}\sigma_f(u)g,$$

kar lahko še drugače zapišemo kot

$$\sigma_f \circ r_g = C_{g^{-1}} \circ \sigma_f.$$

Gladkost preslikave $\sigma_f\colon P \to G$ sledi iz gladkosti umeritvene transformacije f, kot se lahko bralec prepriča sam – namignemo, da je dovolj to dokazati v izbiri neke lokalne umeritve $s\colon U \to P$. Označimo torej

$$C^\infty(P,G)^G := \{\sigma \in C^\infty(P,G) \mid \sigma \circ r_g = C_{g^{-1}} \circ \sigma \text{ za vse } g \in G\}.$$

Enostavno je videti, da je ta množica grupa za množenje po točkah; inverzni element elementu $\sigma \in C^\infty(P,G)^G$ je dan z $\sigma^{-1} := \mathrm{inv} \circ \sigma$, kjer je $\mathrm{inv}\colon G \to G$ invertiranje v Liejevi grupi G. Velja pa celo še nekoliko več.

Trditev 2.53. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj. Preslikava $\mathrm{Aut}(P) \to C^\infty(P,G)^G$, dana s predpisom $f \mapsto \sigma_f$, je izomorfizem grup.*

Dokaz. Inverz te preslikave je dan s predpisom $\sigma \mapsto f_\sigma$, kjer je $f_\sigma \colon P \to P$ definirana s $f_\sigma(u) = u \cdot \sigma(u)$ za vse $u \in P$; ta preslikava je res umeritvena transformacija, saj je $(f_\sigma)^{-1}(u) = u \cdot \sigma(u)^{-1}$ (za vse $u \in P$) njen inverz.

Da je homomorfizem grup, preverimo z neposrednim izračunom; za vsak $u \in P$ namreč velja

$$\begin{aligned}(f \circ g)(u) &= f(g(u)) = f(u \cdot \sigma_g(u)) \\ &= f(u) \cdot \sigma_g(u) = u \cdot \sigma_f(u)\sigma_g(u) = u \cdot (\sigma_f \sigma_g)(u).\end{aligned}$$ ■

Opomba 2.54. Če je G abelova grupa, potem obstaja celo izomorfizem grup

$$C^\infty(M, G) \to C^\infty(P, G)^G, \quad f \mapsto f \circ \pi,$$

pri čemer sta obe grupi opremljeni z množenjem po točkah – pokažimo to. Kodomena te preslikave je res takšna, saj za vsak $g \in G$ velja enakost $f \circ \pi \circ r_g = f \circ \pi = C_{g^{-1}} \circ f \circ \pi$, ker je G abelova. Da je homomorfizem, je jasno iz dejstva, da je množenje v obeh množicah dano po točkah. Inverz pridobimo na sledeč način: če je $\sigma \in C^\infty(P, G)^G$, potem po abelovosti G velja $\sigma \circ r_g = \sigma$, tj. σ je na vlaknih konstantna, zato lahko definiramo $f_\sigma \colon M \to G$ s predpisom $f_\sigma(x) = \sigma(u)$ za poljuben $u \in \pi^{-1}(x)$. Ker je $f_\sigma \circ \pi = \sigma$, je po lemi 2.20 preslikava f_σ gladka. Predpis $\sigma \mapsto f_\sigma$ tedaj očitno podaja inverz zgornji preslikavi.

Povejmo to strnjeno: v primeru, ko je strukturna grupa G abelova, so umeritvene transformacije ekvivalentne gladkim preslikavam $M \to G$. Naslednja trditev pravi, da v primeru neabelove strukturne grupe ta trditev velja, vendar le lokalno.

Trditev 2.55. *Naj bo $\pi \colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj in $s \colon U \to P$ njegova umeritev. Preslikava*

$$C^\infty(P_U, G)^G \to C^\infty(U, G), \quad \sigma \mapsto \sigma \circ s,$$

je izomorfizem grup.

Dokaz. Da je kodomena te preslikave res takšna, je zdaj očitno. Da je homomorfizem grup, sledi iz dejstva, da sta obe množici opremljeni z množenjem po točkah.

Inverz te preslikave konstruiramo na sledeč način. Če je $\tau \in C^\infty(U, G)$, potem definirajmo $\sigma_\tau \colon P_U \to G$ s predpisom $\sigma_\tau(s(x) \cdot g) = g^{-1}\tau(x)g$ za vse $(x, g) \in U \times G$. Drugače rečeno, σ_τ je naslednja kompozicija.

$$\begin{array}{ccccccccc} P_U & \xrightarrow{\psi} & U \times G & \xrightarrow{(\tau \circ \mathrm{pr}_1, \mathrm{id}_G \circ \mathrm{pr}_2)} & G \times G & \xrightarrow{(\mathrm{inv} \circ \mathrm{pr}_2, m)} & G \times G & \xrightarrow{m} & G \\ \Psi & & \Psi & & \Psi & & \Psi & & \Psi \\ s(x) \cdot g & \longmapsto & (x, g) & \longmapsto & (\tau(x), g) & \longmapsto & (g^{-1}, \tau(x)g) & \longmapsto & g^{-1}\tau(x)g \end{array}$$

Tukaj ψ označuje lokalno trivializacijo, ki pripada prerezu s. Iz zgornjega sledi, da je preslikava σ_τ gladka. Za vse $u = s(x) \cdot g \in P_U$ in $h \in G$ pa je

$$\sigma_\tau(u \cdot h) = \sigma_\tau(s(x) \cdot gh) = h^{-1}g^{-1}\tau(x)gh = C_{h^{-1}}(\sigma_\tau(u)),$$

zato je $\sigma_\tau \in C^\infty(P_U, G)^G$. Zdaj je $\tau \mapsto \sigma_\tau$ inverz preslikave v navedbi trditve, v kar se je lahko prepričati. ■

Opomba 2.56. Iz zadnjih dveh trditev sklenemo, da na lokalno trivializirajoči množici U danega glavnega svežnja obstaja izomorfizem med grupama

$$\mathrm{Aut}(P_U) \quad \text{in} \quad C^\infty(U, G).$$

Če je namreč $s\colon U \to P$ lokalni prerez, potem lahko vsak $f \in \mathrm{Aut}(P_U)$ izrazimo kot

$$f(s(x)) = s(x) \cdot \underbrace{\sigma_f(s(x))}_{\tau_f(x)}$$

za vse $x \in U$; tedaj je $f \mapsto \tau_f$ želeni izomorfizem.

V posebnem to pomeni, da prehodna preslikava $\varphi_{ji}\colon U_i \cap U_j \to G$ od trivializacije $\psi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ k trivializaciji $\psi_j\colon \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times G$ ustreza natanko eni lokalni umeritveni transformaciji iz $\mathrm{Aut}(P_{U_i \cap U_j})$.

2.3.1 Delovanje na pridružen vektorski sveženj

V fizikalni razpravi bo pomembno naslednje dejstvo. Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj in (ρ, V) upodobitev Liejeve grupe G ter $E = P \times_\rho V$ pridružen vektorski sveženj. Umeritvena transformacija $f \in \mathrm{Aut}(P)$ naravno deluje na E s predpisom

$$f \cdot [u, v] := [f(u), v]$$

za vse $(u, v) \in P \times V$; to delovanje je dobro definirano, saj za vse $g \in G$ velja

$$f \cdot [u \cdot g, \rho_{g^{-1}}(v)] = [f(u \cdot g), \rho_{g^{-1}}(v)] = [f(u) \cdot g, \rho_{g^{-1}}(v)] = [f(u), v],$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj upoštevali G-ekvivariantnost f.

To delovanje pa inducira delovanje na $\Gamma^\infty(E)$ na sledeč način. Kot vemo, lahko vsak prerez $\Phi \in \Gamma^\infty(E)$ pridruženega vektorskega svežnja E v izbrani umeritvi $s\colon U \to P$ zapišemo kot $\Phi = [s, \phi]$ za neko gladko preslikavo $\phi \in C^\infty(U, V)$. Potem za vsak $x \in U$ velja

$$f \cdot [s(x), \phi(x)] = [f(s(x)), \phi(x)] = [s(x), \rho_{\tau_f(x)}(\phi(x))], \tag{2.9}$$

kjer je preslikava $\tau_f\colon U \to G$ implicitno določena z enakostjo $f(s(x)) = s(x) \cdot \tau_f(x)$.

Opomba 2.57. V fizikalni literaturi se delovanje umeritvene transformacije na polje ϕ pogosto zapiše kot

$$\phi(x) \to \tau(x)\phi(x).$$

Enačba (2.9) je precizen način izražave te transformacije.

2.4 Povezava na glavnem svežnju in njena ukrivljenost

Kot smo videli v poglavju o vertikalnem podsvežnju V tangentnega svežnja TP totalnega prostora v glavnem svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$, je V trivialen. Preučevanje tangentnega svežnja TP se torej prestavi na njegov preostali del.

2.4.1 Povezava kot distribucija

Naj bo $\pi\colon P \overset{G}{\to} M$ glavni sveženj. Ker za $V_u := \ker d\pi_u$ velja $\dim V_u = \dim G$, bomo z izbiro[¶] komplementarnega podprostora $H_u \leq T_uP$ k prostoru $\ker d\pi_u$ lahko s preslikavo $d\pi_u$ identificirali $T_{\pi(u)}M$ s H_u. Tak H_u imenujemo *horizontalen podprostor* tangentnega prostora glavnega svežnja. Pri tem moramo upoštevati tudi preslikavo

$$r_g\colon P \to P, \quad r_g(u) = u \cdot g,$$

z naravno zahtevo, da $d(r_g)_u$ slika horizontalne vektorje v horizontalne vektorje (videli smo namreč že, da vertikalne vektorje slika v vertikalne).

Definicija 2.58. *Povezava* na glavnem svežnju $\pi\colon P \overset{G}{\to} M$ je gladka distribucija H ranga $\dim M$ na P, da velja:

i) $T_uP = V_u + H_u$ za vsak $u \in P$,

ii) $d(r_g)_u(H_u) = H_{u\cdot g}$ za vsaka $u \in P, g \in G$.

Opomba 2.59. Zahteva i) je ekvivalentna zahtevi $d\pi_u(H_u) = T_{\pi(u)}M$, ali drugače rečeno: $d\pi_u|_{H_u}\colon H_u \to T_{\pi(u)}M$ je izomorfizem. Zahteva ii) je ekvivalentna zahtevi, da je $d(r_g)_u|_{H_u}\colon H_u \to H_{u\cdot g}$ izomorfizem. Obe omenjeni ekvivalenci sledita neposredno iz dimenzijskih razlogov, saj smo zahtevali, da je rang distribucije H enak $\dim M$. Izbira povezave nam zaradi zahteve i) omogoča, da vsak vektor $v \in T_uP$ na enoličen način razstavimo na *horizontalni* in *vertikalni del*, tj. obstaja natanko en par vektorjev $v^{\mathsf{V}} \in V_u$, $v^{\mathsf{H}} \in H_u$, da je $v = v^{\mathsf{V}} + v^{\mathsf{H}}$.

Terminologija bo v nadaljevanju temu ustrezna – če za $v \in T_uP$ velja $v \in V_u$, ga bomo imenovali *vertikalni vektor*; če velja $v \in H_u$, ga bomo imenovali *horizontalni vektor*. Podobno terminologijo bomo uporabljali tudi za vektorska polja na P.

Primer 2.60 (Trivialna povezava na trivialnem glavnem svežnju)**.** Označimo s $\pi\colon M \times G \overset{G}{\to} M$ trivialni glavni sveženj. Potem je vertikalni prostor $V_{(x,g)}$ v točki (x, g) kanonično izomorfen prostoru $\{0\}_x \oplus T_gG$ (tukaj $\{0\}_x$ označuje trivialni podprostor v T_xM), saj lahko tangentni prostor produkta mnogoterosti kanonično identificiramo z direktno vsoto tangentnih prostorov posameznih mnogoterosti. Za horizontalni prostor v vsaki točki definiramo $H_{(x,g)} := T_xM \oplus \{0\}_g$; na ta način smo očitno definirali povezavo na glavnem svežnju, ki jo imenujemo *trivialna povezava na $M \times G$.* ⧫

2.4.2 Povezava kot 1-forma z vrednostmi v Liejevi algebri

Motivacija. Naj bo H povezava na glavnem svežnju $\pi\colon P \overset{G}{\to} M$. Po definiciji je $V_u = \ker d\pi_u$ in naravno se je vprašati, če obstaja taka linearna preslikava ω_u iz T_uP v neki vektorski prostor (za vsak $u \in P$ isti), da je $H_u = \ker \omega_u$. Odgovor je pritrdilen; izbira povezave na glavnem svežnju $\pi\colon P \overset{G}{\to} M$ nam v vsaki točki $u \in P$ določa linearno projekcijo $T_uP \to V_u$, dano z $v \mapsto v^{\mathsf{V}}$. Ker imamo izomorfizem $\sigma(\cdot)_u\colon \mathfrak{g} \to V_u$, lahko tvorimo v vsaki točki $u \in P$ preslikavo $T_uP \to \mathfrak{g}$. Seveda je pri tem potrebno preslikavo ω definirati kot prerez nekega vektorskega svežnja.

[¶]Izbira komplementarnega vektorskega podprostora ni enolična.

Zaradi linearnoalgebraičnega dejstva $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$ deklariramo ω za prerez vektorskega svežnja $TP^* \otimes \mathfrak{g}$ nad P, tj. $TP^* \otimes \mathfrak{g} := \coprod_{u \in P} T_u^* P \otimes \mathfrak{g}$. Množico gladkih prerezov tega svežnja označimo z $\Omega^1(P; \mathfrak{g}) := \Gamma^\infty(TP^* \otimes \mathfrak{g})$, njene elemente pa imenujemo *1-forme na P z vrednostmi v $\mathfrak{g}$*.

Definicija 2.61. Naj bo H povezava na glavnem svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$. *Povezavna 1-forma povezave H* je $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$, definirana v vsaki točki $u \in P$ kot preslikava $\omega_u\colon T_u P \to \mathfrak{g}$ z identiteto

$$\sigma(\omega_u(v))_u = v^{\vee}. \tag{2.10}$$

Opomba 2.62. Četudi je ω definirana implicitno, je ta definicija dobra; lahko bi pisali tudi $\omega_u(v) := \tilde{\sigma}(v^{\vee})_u$, če je $\tilde{\sigma}(\cdot)_u$ inverz izomorfizma $\sigma(\cdot)_u\colon \mathfrak{g} \to V_u \leq T_u P$ iz posledice 2.13.

Lema 2.63. *Naj bo ω povezavna 1-forma, pridružena povezavi H na glavnem svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$. Za vsak $u \in P$ je ω_u natanko določena z enakostjo*

$$H_u = \ker \omega_u.$$

Dokaz. Dokazujemo, da za poljuben $v \in T_u P$ velja $\omega_u(v) = 0$ natanko tedaj, ko je $v \in H_u$. Implikacija v desno sledi iz linearnosti preslikave $\sigma(\cdot)_u$. Za dokaz implikacije v levo pa opazimo, da $v \in H_u$ pomeni $v^{\vee} = 0$; preostanek sledi iz injektivnosti preslikave $\sigma(\cdot)_u$. ■

Primer 2.64 (Trivialna povezavna 1-forma na trivialnem svežnju)**.** Pridobiti želimo povezavno 1-formo, ki ustreza trivialni povezavi na trivialnem svežnju iz primera 2.60. Sklepamo, da je v nekem smislu enaka Maurer–Cartanovi formi na G – spomnimo, da je slednja definirana z $(\mu_G)_g := \mathrm{d}(L_{g^{-1}})_g\colon T_g G \to \mathfrak{g}$ za vse $g \in G$. Naj bo $\omega_{(x,g)}\colon T_{(x,g)} P \cong T_x M \oplus T_g G \to \mathfrak{g}$ dana kot

$$\omega_{(x,g)}(v_M, v_G) := (\mu_G)_g(v_G),$$

kjer je $(v_M, v_G) \in T_x M \oplus T_g G$. Velja seveda $\ker \omega_{(x,g)} = H_{(x,g)}$, to pa po lemi 2.63 dokazuje, da je ω povezavna 1-forma trivialne povezave H. ♦

Izrek 2.65. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj.*

i) Če je H povezava na $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ in ω njena pridružena povezavna forma, potem velja:

  a) $\omega_u(\sigma(X)_u) = X$ za vse $X \in \mathfrak{g}$ in $u \in P$,

  b) $\omega_{u \cdot g}((r_g)_* v) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u(v))$ za vse $g \in G$ in $v \in T_u P$.

ii) Obratno, če je $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ in zanjo veljata lastnosti a) in b) iz točke i), potem je s $H := \coprod_{u \in P} \ker \omega_u$ enolično definirana takšna povezava na $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$, da je ω njena pridružena povezavna forma.

Opomba 2.66. Izrek pravi, da lahko povezavo na glavnem svežnju definiramo bodisi kot distribucijo na totalnem prostoru bodisi kot 1-formo na njem z vrednostmi v Liejevi algebri. Zato bomo v prihodnjih razdelkih povezavni 1-formi ω rekli kar povezava. Točka i) a) pravi, da je povezava ω levi inverz fundamentalne preslikave $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$.

Dokaz. Dokažimo točko i) a). Naj bo $X \in \mathfrak{g}$ neničelen (sicer enakost velja trivialno). Potem je $\sigma(X)_u \in V_u$, zato po definicijski enačbi (2.10) za ω velja

$$\sigma(\omega_u(\sigma(X)_u))_u = \sigma(X)_u.$$

Po injektivnosti $\sigma(\cdot)_u$ zdaj sledi želeno.

Dokažimo i) b). Če zapišemo $v = v^{\mathsf{H}} + v^{\mathsf{V}}$, vidimo, da je formulo po linearnosti dovolj preveriti na v^{H} in v^{V} posamično. Če je $v = v^{\mathsf{H}}$, je po definicijski lastnosti ii) povezave H tudi $(r_g)_* v$ horizontalen vektor, zato sta obe strani želene enačbe b) ničelni. Če je $v = v^{\mathsf{V}}$, pa po posledici 2.13 obstaja natanko en $X \in \mathfrak{g}$, da je $v = \sigma(X)_u$. Po trditvi 2.16 je torej

$$\omega_{u\cdot g}((r_g)_* v) = \omega_{u\cdot g}(\sigma(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X))_{u\cdot g}) \overset{a)}{=} \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X) \overset{a)}{=} \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u(v)),$$

saj je $X = \omega_u(\sigma(X)_u) = \omega_u(v)$.

Dokažimo točko ii). Preveriti je potrebno, da je H (z vlaknom $H_u = \ker \omega_u$) gladka distribucija ranga $\dim M$ na P, za katero veljata definicijski lastnosti povezave.

Preverimo enakost $T_u P = V_u + H_u$. Dovolj je preveriti $\dim H_u = \dim M$ in $H_u \cap V_u = \{0\}$. Po dimenzijski formuli velja

$$\dim H_u = \dim T_u P - \dim \operatorname{im} \omega_u = \dim M + \dim G - \dim G = \dim M,$$

saj je $\omega_u \colon T_u P \to \mathfrak{g}$ po lastnosti a) surjekcija. Dalje, naj bo $v \in H_u \cap V_u$. Potem je $v = \sigma(X)_u$ za neki $X \in \mathfrak{g}$ in zato

$$0 = \omega_u(v) = \omega_u(\sigma(X)_u) \overset{a)}{=} X \implies v = \sigma(X)_u = 0.$$

Preverimo enakost $\mathrm{d}(r_g)_u(H_u) = H_{u\cdot g}$. Ker velja $\dim H_u = \dim H_{u\cdot g}$ (po prejšnjem odstavku) in je $\mathrm{d}(r_g)_u$ injekcija, je dovolj pokazati le vsebovanost v desno; naj bo torej $v \in H_u$. Potem je

$$\omega_{u\cdot g}(\mathrm{d}(r_g)_u(v)) \overset{b)}{=} \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u(v)) = 0,$$

zato je $\mathrm{d}(r_g)_u(v) \in H_{u\cdot g}$ in posledično $\mathrm{d}(r_g)_u(H_u) \subset H_{u\cdot g}$.

Preverimo gladkost distribucije H. Naj bo $(Y_i)_{i=1}^{\dim P}$ lokalno ogrodje vektorskega svežnja TP nad P v okolici $\pi^{-1}(U)$ neke točke $u \in P$ (tu je U neka okolica točke $\pi(u) \in M$). Naj bo

$$\tilde{Y}_i := Y_i - \sigma(\omega(Y_i))$$

za vsak $i = 1, \ldots, \dim P$. Ker je $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$, je Y_i za vsak i gladko vektorsko polje na $P|_U$, ki je po definiciji horizontalno, saj je $\sigma(\omega(Y_i))$ vertikalni del vektorskega polja Y_i. Od teh $\dim M + \dim G$ vektorskih polj jih je natanko $\dim M$ linearno neodvisnih, kar je po [10, lema 10.32] dovolj preveriti. ■

Opomba 2.67. Do zdaj torej vemo, da za poljuben $g \in G$ velja

$$(r_g)_* \sigma(X) = \sigma(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)) \tag{2.11}$$

za vsak $X \in \mathfrak{g}$ in

$$(r_g)^* \omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega. \tag{2.12}$$

Ti dve identiteti si zapomnimo, saj bosta v nadaljevanju pomembni.

Primer 2.68 (Povezava na Hopfovem vlaknenju)**.** Hopfovemu vlaknenju

$$\pi\colon S^3 \xrightarrow{\mathrm{U}(1)} \mathbb{C}P^1$$

iz primera 2.9 želimo na naraven način prirediti povezavo ω. Za vsako povezavo ω na Hopfovem vlaknenju velja

$$\omega_z(\sigma(is)_z) = is$$

za vse $s \in \mathbb{R}$, zato si bomo najprej ogledali, kakšen predpis ima izomorfizem $\sigma(\cdot)_z\colon \mathfrak{u}(1) \to V_z \leq T_zS^3$ za dan $z = (z_0, z_1) = (x_0 + iy_0, x_1 + iy_1) \in S^3$. Kot vemo iz teorije Liejevih grup, velja $\mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$, torej za $s \in \mathbb{R}$ po definiciji izračunamo

$$\begin{aligned}\sigma(is)_z &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} z\cdot \mathrm{e}^{ist} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (z_0\mathrm{e}^{ist}, z_1\mathrm{e}^{ist}) = (isz_0, isz_1)\\ &= s(-y_0, x_0, -y_1, x_1) = s\left(-y_0\partial_{x_0} + x_0\partial_{y_0} - y_1\partial_{x_1} + x_1\partial_{y_1}\right)\\ &= is(z_0\partial_{z_0} - \bar{z}_0\bar{\partial}_{z_0} + z_1\partial_{z_1} - \bar{z}_1\bar{\partial}_{z_1}),\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi predzadnji enačaj identificirali‖ T_zS^3 z vektorskim podprostorom $\{(w_0, w_1) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(\bar{z}_0w_0 + \bar{z}_1w_1) = 0\}$ prostora $\mathbb{C}^2$, na prehodu skozi zadnjega pa uporabili enakosti $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ iz kompleksne analize. V nadaljevanju bomo z $\mathrm{d}z_0 = \mathrm{d}x_0 + i\,\mathrm{d}y_0$, $\mathrm{d}\bar{z}_0 = \mathrm{d}x_0 - i\,\mathrm{d}y_0$ označevali kovektorski polji, dualni vektorskima poljema $\partial_{z_0}, \bar{\partial}_{z_0}$ (ipd. za spremenljivko z_1).

Zaradi pogoja $\omega_z(\sigma(is)_z) = is$ na poljubno povezavno 1-formo $\omega \in \Omega^1(S^3, i\mathbb{R})$ zdaj definiramo

$$\omega_z = \frac{1}{2}(\bar{z}_0\,\mathrm{d}z_0 - z_0\,\mathrm{d}\bar{z}_0 + \bar{z}_1\,\mathrm{d}z_1 - z_1\,\mathrm{d}\bar{z}_1). \tag{2.13}$$

Preveriti je potrebno le še pogoj b) iz zadnjega izreka, tj.

$$\omega_{z\cdot\mathrm{e}^{is}}(\mathrm{d}(r_{\mathrm{e}^{is}})_z(w_0, w_1)) = \mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^{-is}}(\omega_z(w_0, w_1)) \underset{\text{abelova}}{\overset{\mathrm{U}(1)}{=}} \omega_z(w_0, w_1). \tag{2.14}$$

Da izvrednotimo levo stran te enačbe, vzemimo pot $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$ v S^3 (definirano na neki okolici $0 \in \mathbb{R}$), za katero velja $\gamma(0) = z$ in $\gamma'(0) = (\gamma_0'(0), \gamma_1'(0)) = (w_0, w_1)$. Potem je

$$\mathrm{d}(r_{\mathrm{e}^{is}})_z(w_0, w_1) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (r_{\mathrm{e}^{it}}(\gamma(t))) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\gamma_0(t)\mathrm{e}^{is}, \gamma_1(t)\mathrm{e}^{is}) = (w_0\mathrm{e}^{is}, w_1\mathrm{e}^{is})$$

in zdaj je iz definicije 1-forme ω enostavno videti (z uporabo enakosti $\mathrm{d}\bar{z}_0(w_0) = \bar{w}_0$), da je leva stran enačbe (2.14) enaka

$$\omega_{z\cdot\mathrm{e}^{is}}(w_0\mathrm{e}^{is}, w_1\mathrm{e}^{is}) = \frac{1}{2}(\bar{z}_0w_0 - z_0\bar{w}_0 + \bar{z}_1w_1 - z_1\bar{w}_1),$$

kar je ravno enako $\omega_z(w_0, w_1)$. Torej je z enačbo (2.13) res določena povezava na Hopfovem vlaknenju. Imenujemo jo *kanonična povezava na Hopfovem vlaknenju.* ♦

‖Velja namreč $S^3 = F^{-1}(1)$ za $F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$, $F(z_0, z_1) = |z_0|^2 + |z_1|^2$ in iz izreka o implicitni funkciji za mnogoterosti sledi $T_zS^3 = \ker \mathrm{d}F$, velja pa $\mathrm{d}F = \bar{z}_0\,\mathrm{d}z_0 + z_0\,\mathrm{d}\bar{z}_0 + \bar{z}_1\,\mathrm{d}z_1 + z_1\,\mathrm{d}\bar{z}_1$ in $\mathrm{d}F(w_0\partial_{z_0} + \bar{w}_0\bar{\partial}_{z_0} + w_1\partial_{z_1} + \bar{w}_1\bar{\partial}_{z_1}) = 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}_0w_0 + \bar{z}_1w_1)$.

2.4.3 Ukrivljenost povezave

Motivacija. Pojem ukrivljenosti povezave na glavnem svežnju vpeljemo skozi preučevanje Riemannovega tenzorja v (psevdo) Riemannovi geometriji – v tej motivaciji torej privzemamo seznanjenost z osnovnimi pojmi Riemannove geometrije. Če je $\nabla\colon \mathfrak{X}(M)\times\Gamma^\infty(E)\to\Gamma^\infty(E)$ afina povezava na $\mathbb{F}$-vektorskem svežnju E ranga r nad mnogoterostjo M, potem *Riemannovo tenzorsko polje* $R\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\Gamma^\infty(E)\to\Gamma^\infty(E)$ definiramo kot

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

za poljubne $X,Y\in\mathfrak{X}(M), Z\in\Gamma^\infty(E)$. V kontekstu Riemannove geometrije se običajno (z neposrednim izračunom) preveri, da je zgornji izraz v prvih dveh (celo vseh treh) argumentih $C^\infty(M)$-linearen; takšen je tudi prvi argument povezave ∇. To opažanje E. Cartana je ključno za lokalno izražavo povezave in njene ukrivljenosti, saj lahko tedaj v danem ogrodju $(E_i)_i$ za E zapišemo

$$\nabla_X E_j = \sum_{i=1}^r \omega^i{}_j(X)E_i, \quad R(X,Y)E_j = \sum_{i=1}^r \Omega^i{}_j(X,Y)E_i \tag{2.15}$$

za neke 1-forme $\omega^i{}_j$ in 2-forme $\Omega^i{}_j$ na M. Prvi cilj je seveda izraziti vnose $\Omega^i{}_j$ z vnosi $\omega^i{}_j$. Z izračunom, ki je prepuščen bralcu (v primeru težav si lahko pomaga npr. z [22, izrek 11.1]), se prepričamo, da velja

$$\Omega^i{}_j = \mathrm{d}\omega^i{}_j + \sum_{k=1}^r \omega^i{}_k\wedge\omega^k{}_j. \tag{2.16}$$

Ta izraz namiguje na simultano izvajanje dveh operacij: množenje matrik in vnanji produkt. Torej vidimo, da smo na poti definiranja nove operacije, vendar najprej si oglejmo objekte, ki jih množimo. Če označimo z $E^i{}_j$ matriko, ki ima na (i,j)-tem mestu enico in je sicer ničelna, potem lahko zapišemo

$$\omega := \sum_{i,j=1}^r \omega^i{}_j\otimes E^i{}_j \in \Omega^1(M;\mathfrak{gl}(r,\mathbb{F}))$$
$$\Omega := \sum_{i,j=1}^r \Omega^i{}_j\otimes E^i{}_j \in \Omega^2(M;\mathfrak{gl}(r,\mathbb{F})),$$

tj. ω je matrika 1-form, Ω pa matrika 2-form. Naslednje ključno opažanje za našo razpravo je sledeče: vektorski sveženj E je pridružen glavnemu svežnju $\pi\colon F(E)\xrightarrow{\mathrm{GL}(r,\mathbb{F})} M$ glede na standardno upodobitev grupe $\mathrm{GL}(r,\mathbb{F})$, kot v opombi 2.47. V zgornjih izrazih za ω in Ω zato $\mathfrak{gl}(r,\mathbb{F})$ interpretiramo kot Liejevo algebro strukturne grupe $\mathrm{GL}(r,\mathbb{F})$. Za splošnejši primer definiranja nove operacije na formah z vrednostmi v $\mathfrak{g}$ (in ne le $\mathfrak{gl}(r,\mathbb{F})$) pa lahko uporabimo zgolj Liejev oklepaj (in ne matričnega množenja, kot v (2.16)). Zato definirajmo

$$[\alpha\wedge\beta] := \sum_{i,j,k,l=1}^r (\alpha^i{}_j\wedge\beta^k{}_l)\otimes[E^i{}_j, E^k{}_l],$$

za poljubna $\alpha \in \Omega^k(M; \mathfrak{gl}(r, \mathbb{F})), \beta \in \Omega^l(M; \mathfrak{gl}(r, \mathbb{F}))$, kjer je $[\cdot, \cdot]$ komutator matrik. Ta enačba pomeni, da produkt $[\cdot \wedge \cdot]$ tvorimo tako, da simultano delamo vnanji produkt običajnih diferencialnih form in izvrednotimo komutator baznih vektorjev iz $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{F})$. Ker velja

$$[\omega \wedge \omega] = \sum_{i,j,k,l} \omega^i{}_j \wedge \omega^k{}_l \otimes \overbrace{[E^i{}_j, E^k{}_l]}^{\delta^k{}_j E^i{}_l - \delta^i{}_l E^k{}_j} = 2 \sum_{i,j,k} \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j \otimes E^i{}_j,$$

zdaj sledi

$$\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega], \tag{2.17}$$

kjer smo predhodno definirali

$$\mathrm{d}\alpha := \sum_{i,j=1}^{r} \mathrm{d}\alpha^i{}_j \otimes E^i{}_j$$

za poljubno $\alpha \in \Omega^k(M; \mathfrak{gl}(r, \mathbb{F}))$.

Opazimo tudi, da lahko enačbo (2.17) prestavimo v kontekst glavnih svežnjev, ne le njihovih pridruženih vektorskih svežnjev. Preden to storimo, posplošimo zgornji operaciji d in $[\cdot \wedge \cdot]$ na primer glavnega svežnja; ko smo že ravno pri tem, bomo posplošili tudi koncept povleka diferencialne forme.

Definicija 2.69. Naj bo $\pi \colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj, $(e_a)_{a=1}^{\dim G}$ baza za $\mathfrak{g}$ in $\alpha \in \Omega^k(P; \mathfrak{g}), \beta \in \Omega^l(P; \mathfrak{g})$, torej

$$\alpha = \sum_{a=1}^{\dim G} \alpha^a \otimes e_a,$$

za neke običajne diferencialne forme α^a in β^a na P.

i) *Vnanji produkt* diferencialnih form α in β z vrednostmi v $\mathfrak{g}$ je

$$[\alpha \wedge \beta] := \sum_{a,b} (\alpha^a \wedge \beta^b) \otimes [e_a, e_b] \in \Omega^{k+l}(P; \mathfrak{g}).$$

ii) *Vnanji odvod* diferencialne forme α z vrednostmi v $\mathfrak{g}$ je

$$\mathrm{d}\alpha := \sum_a \mathrm{d}\alpha^a \otimes e_a \in \Omega^{k+1}(P; \mathfrak{g}).$$

iii) *Povlek* diferencialne forme α z vrednostmi v $\mathfrak{g}$ vzdolž preslikave $f \in C^\infty(N, P)$, kjer je N poljubna gladka mnogoterost, je

$$f^*\alpha := \sum_a (f^*\alpha^a) \otimes e_a \in \Omega^k(N; \mathfrak{g}).$$

Opomba 2.70. Zgornje definicije so neodvisne od izbire baze $(e_a)_a$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Res, naj bo (v sumacijski konvenciji) $\alpha = \alpha^a \otimes e_a$ za neke običajne k-forme α^a; če je $(\tilde{e}_a)_a$ še ena baza prostora $\mathfrak{g}$, potem je $\tilde{e}_a = A^b{}_a e_b$, kjer je $A = [A^i{}_j]_{i,j}$ prehodna matrika med bazama, posledično pa se $\alpha \in \Omega^k(M;\mathfrak{g})$ izraža kot $\alpha = \alpha^a e_a = \tilde{\alpha}^a \tilde{e}_a$, iz česar izpeljemo $\tilde{\alpha}^a = (A^{-1})^a{}_b \alpha^b$. Skupaj z bilinearnostjo Liejevega oklepaja, multilinearnostjo vnanjega produkta in linearnosti vnanjega odvoda je s tem dokazana želena neodvisnost od izbire baze Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Prav tako je iz definicije vnanjega produkta običajnih diferencialnih form enostavno videti, da lahko $[\alpha \wedge \beta]$ zapišemo brez izbire baze Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ kot

$$\begin{aligned} &[\alpha \wedge \beta](X_1, \dots, X_{k+l}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn} \sigma)[\alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}), \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)})]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Preslikava $[\cdot \wedge \cdot]\colon \Omega^*(P;\mathfrak{g}) \times \Omega^*(P;\mathfrak{g}) \to \Omega^*(P;\mathfrak{g})$ uživa poleg očitne bilinearnosti tudi naslednje lastnosti.

Lema 2.71. *Naj bo P mnogoterost, $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra in $\alpha \in \Omega^k(P;\mathfrak{g}), \beta \in \Omega^l(P;\mathfrak{g})$.*

i) $[\alpha \wedge \beta] = -(-1)^{kl}[\beta \wedge \alpha]$,

ii) $\mathrm{d}[\alpha \wedge \beta] = [\mathrm{d}\alpha \wedge \beta] + (-1)^k[\alpha \wedge \mathrm{d}\beta]$,

iii) Če je $k = 1$, potem velja $\mathrm{d}\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha(\mathcal{L}_X Y)$ za vsaki dve vektorski polji $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$, kjer $\mathcal{L}$ označuje Liejev odvod,

iv) Če je N gladka mnogoterost in $f \in C^\infty(N,P)$, potem je $f^*[\alpha \wedge \beta] = [f^*\alpha \wedge f^*\beta]$. Velja tudi $\mathrm{d}(f^*\alpha) = f^*\,\mathrm{d}\alpha$, tj. komutira diagram

$$\begin{tikzcd} \Omega^k(P;\mathfrak{g}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^*"] & \Omega^{k+1}(P;\mathfrak{g}) \arrow[d, "f^*"] \\ \Omega^k(N;\mathfrak{g}) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k+1}(N;\mathfrak{g}) \end{tikzcd} \tag{2.19}$$

Dokaz. Pišimo $\alpha = \alpha^a \otimes e_a$ in $\beta = \beta^b \otimes e_b$. Točka i) sledi iz stopničaste komutativnosti $\alpha^a \wedge \beta^b = (-1)^{kl}\beta^b \wedge \alpha^a$ za običajne diferencialne forme in antisimetričnosti Liejevega oklepaja. Točka ii) sledi iz identitete

$$\mathrm{d}(\alpha^a \wedge \beta^b) = \mathrm{d}\alpha^a \wedge \beta^b + (-1)^k \alpha^a \wedge \mathrm{d}\beta^b$$

za običajne diferencialne forme. Točka iii) sledi iz identitete

$$\mathrm{d}\alpha^a(X,Y) = X(\alpha^a(Y)) - Y(\alpha^a(X)) - \alpha^a([X,Y])$$

za vnanji odvod običajne diferencialne 1-forme. Prvi del točke iv) sledi iz dejstva, da povlek ohranja vnanji produkt običajnih form, tj.

$$f^*(\alpha^a \wedge \beta^b) = f^*\alpha^a \wedge f^*\beta^b.$$

Drugi del pa sledi iz naravnosti vnanjega odvoda za običajne diferencialne forme, tj. $\mathrm{d}(f^*\alpha^a) = f^*(\mathrm{d}\alpha^a)$. ∎

Opomba 2.72. Drugi del zadnje točke izrazimo v teoriji kategorij kot: d je naravna transformacija med kontravariantnima funktorjema $\Omega^k(-;\mathfrak{g})$ in $\Omega^{k+1}(-;\mathfrak{g})$.

Opomba 2.73. Vnanji produkt form z vrednostmi v $\mathfrak{g}$ bomo največkrat potrebovali na 1-formah; če sta $\alpha, \beta \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$, potem iz enačbe (2.18) sledi

$$[\alpha \wedge \beta](X, Y) = [\alpha(X), \beta(Y)] - [\alpha(Y), \beta(X)]$$

in v posebnem $[\alpha \wedge \alpha](X, Y) = 2[\alpha(X), \alpha(Y)]$.

Vpeljimo zdaj pojem ukrivljenosti na glavni sveženj po analogiji z enačbo (2.17).

Definicija 2.74. Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj in $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$ povezava na njem. *Ukrivljenost povezave* ω je 2-forma $\Omega \in \Omega^2(P;\mathfrak{g})$ z vrednostmi v $\mathfrak{g}$, definirana s *strukturno enačbo*

$$\Omega := \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega].$$

Opomba 2.75. Ker je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ abelove Liejeve grupe G komutativna, v vsaki abelovi teoriji umeritvenih polj (tj. takšni z abelovo strukturno grupo) velja $\Omega = \mathrm{d}\omega$.

Primer 2.76 (Ukrivljenost Hopfovega vlaknenja)**.** Za primer Hopfovega vlaknenja $\pi\colon S^3 \xrightarrow{\mathrm{U}(1)} \mathbb{C}P^1$ imamo iz primera 2.68 povezavo $\omega \in \Omega^1(S^3; i\mathbb{R})$ v koordinatah $(z_0, z_1) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ dano kot

$$\omega = \frac{1}{2}(\bar{z}_0\,\mathrm{d}z_0 - z_0\,\mathrm{d}\bar{z}_0 + \bar{z}_1\,\mathrm{d}z_1 - z_1\,\mathrm{d}\bar{z}_1).$$

zato je ustrezna ukrivljenostna 2-forma $\Omega^2(S^3; i\mathbb{R})$ enaka

$$\Omega = \mathrm{d}\omega = -(\mathrm{d}z_0 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_0 + \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_1). \qquad \blacklozenge$$

Trditev 2.77. *Za ukrivljenost* Ω *povezave* ω *na glavnem svežnju* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *velja*

$$(r_g)^*\Omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \Omega \tag{2.20}$$

za vse $g \in G$.

Dokaz. Za poljuben $g \in G$ je po lemi 2.71 iv)

$$(r_g)^*\Omega = \mathrm{d}((r_g)^*\omega) + \frac{1}{2}[(r_g)^*\omega \wedge (r_g)^*\omega],$$

velja pa $(r_g)^*\omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega$ in $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}$ je avtomorfizem Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, zato iz enačbe (2.18) sledi želeno. ∎

Pomembno dejstvo o ukrivljenosti je, da je *horizontalna*, tj. $\Omega(X, Y) = 0$, čim je eden od vektorjev X, Y vertikalen – to je vsebina naslednjega izreka. V zadnjem razdelku drugega poglavja bomo namreč ravno zaradi tega lahko pokazali, da je možno ukrivljenost Ω identificirati z neko 2-formo na bazni mnogoterosti, ki ima vrednosti v adjungiranem svežnju $\mathrm{Ad}(P)$, kar pa bo v poglavju zatem osnova Yang–Millsove teorije. Omenjena lastnost ukrivljenosti Ω je uporabna tudi sicer, zato si jo je vredno zapomniti.

Izrek 2.78. *Za ukrivljenost* Ω *povezave* ω *na glavnem svežnju* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *velja*

$$\Omega(X,Y) = \mathrm{d}\omega(\pi_H(X), \pi_H(Y)) \tag{2.21}$$

za vsaka tangentna vektorja $X, Y \in TP$ *na totalnem prostoru* P*. Tu je* $\pi_H\colon TP \to H$ *horizontalna projekcija, tj.* $v \mapsto v^{\mathsf{H}}$*.*

Dokaz. V poljubni točki $u \in P$ po lemi 2.71 iii) in opombi 2.73 velja

$$\begin{aligned}\Omega(X,Y) &= \mathrm{d}\omega(X,Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \\ &= X(\omega(\tilde{Y})) - Y(\omega(\tilde{X})) - \omega(\mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{Y}) + [\omega(X), \omega(Y)]\end{aligned}$$

za vsaki razširitvi $\tilde{X}, \tilde{Y}$ vektorjev X, Y na neko okolico U točke u v P, saj je $\Omega(X,Y)$ tedaj zgolj vrednost preslikave $\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})\colon U \to \mathfrak{g}$ v točki u. Po linearnosti je dovolj pokazati, da enakost (2.21) velja za vse možne kombinacije izbir $X, Y \in T_uP$, kjer je $u \in P$ poljuben.

Če sta oba vektorja vertikalna, potem velja $X = \sigma(V)_u$ in $Y = \sigma(W)_u$ za neka vektorja $V, W \in \mathfrak{g}$. Desna stran enačbe (2.21) je ničelna in leva stran je

$$\Omega(X,Y) = X(W) - Y(V) - \underbrace{\omega(\mathcal{L}_{\sigma(V)}\sigma(W))}_{\omega(\sigma([V,W]))} + [V,W] = 0,$$

kjer smo vektorja $X, Y \in T_uP$ razširili do fundamentalnih vektorskih polj $\sigma(V)$ in $\sigma(W)$ na P ter uporabili dejstvo, da je $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ homomorfizem Liejevih algeber (izrek 2.12); drugi enačaj sledi iz dejstva, da je podčrtan izraz enak $[V, W]$.

Če sta X in Y horizontalna vektorja, potem je desna stran enačbe (2.21) enaka $\mathrm{d}\omega(X,Y)$, leva pa tudi, kot je razvidno iz prve vrstice v prvi enačbi tega dokaza.

Če je X vertikalen in Y horizontalen, potem je $X = \sigma(V)_u$ za nek $V \in \mathfrak{g}$, vektor Y pa lahko po [10, lema 10.12] razširimo do poljubnega horizontalnega vektorskega polja $\tilde{Y}$ na neki okolici točke u, saj je povezava H distribucija na P. Desna stran enačbe (2.21) je očitno ničelna, leva stran pa je enaka

$$\Omega(X,Y) = 0 - Y(V) - \omega(\mathcal{L}_{\sigma(V)}\tilde{Y}) + 0 = -\omega(\mathcal{L}_{\sigma(V)}\tilde{Y}),$$

torej je dovolj pokazati, da je $\mathcal{L}_{\sigma(V)}\tilde{Y}$ horizontalno vektorsko polje. To je vsebina naslednje leme. ∎

Lema 2.79. *Naj bo* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *glavni sveženj. Če je* Y *horizontalno in* $\sigma(V)$ *fundamentalno vektorsko polje na* P*, potem je* $\mathcal{L}_{\sigma(V)}Y$ *horizontalno.*

Dokaz. Po definiciji Liejevega odvoda v poljubni točki $u \in P$ velja

$$(\mathcal{L}_{\sigma(V)}Y)_u = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(\left(\phi_{-t}^{\sigma(V)}\right)_* Y\right)_u = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left((r_{\exp(-tV)})_* Y\right)_u,$$

po definiciji povezave pa je $\left((r_{\exp(-tV)})_* Y\right)_u \in H_u$ za vsak $t \in \mathbb{R}$, zato je tudi $(\mathcal{L}_X Y)_u \in H_u$. ∎

Naslednja proslavljena in pogosto priročna identiteta se v moderni geometriji pojavlja v mnogih oblikah; v naslednjem poglavju bomo videli, da nosi pomembno vlogo tudi v fiziki.

Izrek 2.80 (Bianchijeva identiteta)**.** *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj in ω povezava na njej. Potem je vnanji odvod ukrivljenostne forme Ω enak*

$$\mathrm{d}\Omega = [\Omega \wedge \omega]. \tag{2.22}$$

Dokaz. Po strukturni enačbi velja

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Omega &= \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}[\omega \wedge \omega] = \frac{1}{2}([\mathrm{d}\omega \wedge \omega] - [\omega \wedge \mathrm{d}\omega]) \\ &= [\mathrm{d}\omega \wedge \omega] = [\Omega \wedge \omega] - [[\omega \wedge \omega] \wedge \omega],\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi tretji enačaj uporabili lemo 2.71 i). Za vsaka tri vektorska polja $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(P)$ pa velja

$$\begin{aligned}[[\omega \wedge \omega] \wedge \omega](X_1, X_2, X_3) &= \frac{1}{2!}\sum_{\sigma \in S_3} (\operatorname{sgn}\sigma)\big[[\omega \wedge \omega](X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \omega(X_{\sigma(3)})\big] \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} (\operatorname{sgn}\sigma)\big[[\omega(X_{\sigma(1)}), \omega(X_{\sigma(2)})], \omega(X_{\sigma(3)})\big]\end{aligned}$$

kar pa je zaradi Jacobijeve identitete v Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ enako nič; ker to velja za vsaka vektorska polja X_i, je $[[\omega \wedge \omega] \wedge \omega] = 0$, kar dokazuje želeno. ■

2.4.4 Umeritvena polja in njihove jakosti

Povezavno 1-formo ω in njeno ukrivljenost Ω (obe z vrednostmi v g) želimo iz P nekako prenesti na M; to lahko naravno storimo s povlekom diferencialne forme vzdolž neke umeritve.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook] & P|_U \arrow[d, "\pi"] \\ & U \arrow[u, bend left, "s"] \end{tikzcd} \tag{2.23}$$

Definicija 2.81. Naj bo ω povezava na glavnem svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ in $s\colon U \to P$ umeritev. *Lokalna povezavna forma glede na umeritev s* je

$$A := s^*\omega = \omega \circ \mathrm{d}s \in \Omega^1(U; \mathfrak{g}).$$

Opomba 2.82. V fiziki A imenujemo *umeritveno polje*, povezavo ω in umeritev s pa razberemo iz konteksta. Če izberemo bazo $(e_a)_a$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, potem lahko zapišemo

$$A = \sum_a A^a \otimes e_a$$

za neke običajne 1-forme $A^a \in \Omega^1(U)$. V lokalnih koordinatah $(x^\mu)_\mu$ lahko A zapišemo kot

$$A = \sum_{a,\mu} A^a_\mu \,\mathrm{d}x^\mu \otimes e_a$$

za neke funkcije $A^a_\mu \in C^\infty(U)$. Definiramo tudi preslikave $A_\mu := A(\partial_\mu) \in C^\infty(U, \mathfrak{g})$ z vrednostmi v $\mathfrak{g}$, katerim rečemo *polja umeritvenih bozonov.* Tedaj pišemo $A = A_\mu \,\mathrm{d}x^\mu$ in upoštevamo sumacijsko konvencijo.

Definicija 2.83. Naj bo ω povezava na glavnem svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ in $s\colon U \to P$ umeritev. *Lokalna ukrivljenostna forma glede na umeritev* s je

$$F := s^*\Omega = \Omega \circ \mathrm{d}s \in \Omega^2(U;\mathfrak{g}),$$

kjer je Ω ukrivljenost povezave ω.

Opomba 2.84. V fiziki F imenujemo *jakost umeritvenega polja* A, umeritev s pa razberemo iz konteksta. Če izberemo bazo $(e_a)_a$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, potem lahko zapišemo

$$F = \sum_a F^a \otimes e_a$$

za neke običajne 2-forme $F^a \in \Omega^2(U)$. V lokalnih koordinatah $(x^\mu)_\mu$ lahko F zapišemo kot

$$F = \sum_{a,\mu,\nu} F^a_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu) \otimes e_a$$

za neke funkcije $F^a_{\mu\nu} \in C^\infty(U)$. Definiramo tudi funkcije $F_{\mu\nu} := F(\partial_\mu, \partial_\nu) \in C^\infty(U,\mathfrak{g})$ z vrednostmi v $\mathfrak{g}$. Tedaj pišemo $F = F_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$ in upoštevamo sumacijsko konvencijo.

Ker je ukrivljenost Ω pridobljena iz povezave ω, nas zanima, kako se F izraža z A. Odgovor na to daje enostaven neposreden izračun, ki ga ubesedimo z izrekom.

Izrek 2.85 (Lokalna strukturna enačba)**.** *Naj bo* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *glavni sveženj,* ω *povezava na njem in* $s\colon U \to P$ *umeritev. Za umeritveno polje* A *in njegovo jakost* F *velja*

$$F = \mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A \wedge A], \tag{2.24}$$

kar v lokalnih koordinatah $(x^\mu)_\mu$ *zapišemo kot*

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \tag{2.25}$$

Če je G *abelova, potem je* $F = \mathrm{d}A$ *in* $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$*.*

Dokaz. Prva enačba sledi v celoti iz leme 2.71 iv), tj. naravnosti d in dejstva, da povlek ohranja vnanji produkt form z vrednostmi v $\mathfrak{g}$. V lokalnih koordinatah dobimo

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \mathrm{d}A(\partial_\mu, \partial_\nu) + \frac{1}{2}[A \wedge A](\partial_\mu, \partial_\nu) \\ &= \partial_\mu(A(\partial_\nu)) - \partial_\nu(A(\partial_\mu)) - A(\cancel{\mathcal{L}_{\partial_\mu}\partial_\nu}) + [A(\partial_\mu), A(\partial_\nu)] \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \end{aligned}$$

kjer smo uporabili strukturno enačbo in formulo za vnanji odvod 1-forme iz leme 2.71 iii). Če je G abelova, je njena Liejeva algebra komutativna, iz česar sledi drugi želeni sklep. ∎

Opomba 2.86. V fiziki interpretiramo člen $[A_\mu, A_\nu]$ v izrazu za $F_{\mu\nu}$ kot interakcijo polja bozonov s samim samo – v abelovih teorijah polja torej ni interakcij med bozoni. To bo postalo jasneje v 3. poglavju, kjer bomo omenjene interakcije prikazali tudi diagramatično.

Izrek 2.87 (Lokalna Bianchijeva identiteta)**.** *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj, ω povezava na njem in $s\colon U \to P$ umeritev. Za jakost F umeritvenega polja A velja*

$$\mathrm{d}F = [F \wedge A]. \tag{2.26}$$

Dokaz. Neposredna posledica Bianchijeve identitete (2.22) in leme 2.71 iv). ∎

Ker sta umeritveno polje A in njegova jakost F odvisna od izbire umeritve, nas zanima še, kako prehajati med $A_i := s_i^*\omega$ in $A_j := s_j^*\omega$, če sta $s_i\colon U_i \to P, s_j\colon U_j \to P$ različni izbiri umeritev z $U_i \cap U_j \neq \emptyset$; označimo z $g_{ji}\colon U_i \cap U_j \to G$ prehodno preslikavo med trivializacijama, ki jima pripadata. Po definiciji umeritvenega polja je

$$A_i = \omega \circ \mathrm{d}s_i$$

in po trditvi 2.27 velja $s_i = s_j \cdot g_{ji}$, zato izračunamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(s_i)_x(X) &= \mathrm{d}(m \circ (s_j, g_{ji}))_x(X)\\
&= \mathrm{d}(m(\cdot, g_{ji}(x)))_{s_j(x)} \circ \mathrm{d}(s_j)_x(X) + \mathrm{d}(m(s_j(x), \cdot))_{g_{ji}(x)} \circ \mathrm{d}(g_{ji})_x(X)\\
&= \mathrm{d}(r_{g_{ji}(x)})_{s_j(x)} \circ \mathrm{d}(s_j)_x(X) + \mathrm{d}(\ell_{s_j(x)})_{g_{ji}(x)} \circ \mathrm{d}(g_{ji})_x(X)\\
&= \mathrm{d}(r_{g_{ji}(x)})_{s_j(x)} \circ \mathrm{d}(s_j)_x(X) + \sigma(\mu_G(\mathrm{d}(g_{ji})_x(X)))_{s_i(x)}
\end{aligned}$$

za poljubna $x \in U_i \cap U_j$, $X \in T_xM$. Tu je $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ fundamentalna preslikava in μ_G Maurer-Cartanova forma na G, uporabili pa smo formulo za odvod preslikave na produktu dveh mnogoterosti in enakost (2.4) iz opombe 2.22. To (nekoliko nepravilno) z izpuščenima argumentoma x in X zapišemo kot

$$\mathrm{d}s_i = \mathrm{d}(r_{g_{ji}}) \circ \mathrm{d}s_j + \sigma \circ \mu_{ji}, \tag{2.27}$$

kjer smo dodatno vpeljali $\mu_{ji} := (g_{ji})^*\mu_G \in \Omega^1(U_i \cap U_j; \mathfrak{g})$. Če na zadnjem izrazu uporabimo ω, dobimo

$$\begin{aligned}
A_i &= \omega \circ \mathrm{d}s_i = (r_{g_{ji}})^*\omega \circ \mathrm{d}s_j + \omega \circ \sigma \circ \mu_{ji} = \mathrm{Ad}_{g_{ji}^{-1}} \circ \omega \circ \mathrm{d}s_j + \mu_{ji}\\
&= \mathrm{Ad}_{g_{ji}^{-1}} \circ A_j + \mu_{ji},
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi tretji enačaj uporabili obe definicijski lastnosti povezave, na prehodu skozi četrtega pa prepoznali izraz A_j. V posebnem primeru, ko je $G \subset \mathrm{GL}(r, \mathbb{F})$, velja** $\mathrm{Ad}_g(X) = gXg^{-1}$ in $\mu_G|_g(Y) = \mathrm{d}(L_{g^{-1}})_g(Y) = g^{-1}Y$ za vsaka $X \in \mathfrak{g}, Y \in T_gG$, zato je

$$A_i|_x = g_{ji}(x)^{-1} \cdot A_j|_x \cdot g_{ji}(x) + g_{ji}(x)^{-1} \cdot \mathrm{d}(g_{ji})_x,$$

kjer smo pisali $\cdot$ za matrično množenje v $\mathbb{F}^{r\times r}$.

**V Liejevi grupi G smo definirali $C_g(h) = ghg^{-1}$. Levo in desno množenje v $\mathrm{GL}(r, \mathbb{F})$ sta zožitvi linearne preslikave nad $\mathbb{F}^{r\times r}$ na odprto množico, torej $(L_g)_*X = gX$ in $(R_g)_*X = Xg$ za poljubna $g \in G, X \in T_gG$.

Podobno si bomo zdaj ogledali še, kako prehajati med jakostma $F_i := s_i^*\Omega$ in $F_j := s_j^*\Omega$. Po enačbi (2.27) je

$$\begin{aligned} F_i(X,Y) &= \Omega(\mathrm{d}(r_{g_{ji}}) \circ \mathrm{d}(s_j)(X), \mathrm{d}(r_{g_{ji}}) \circ \mathrm{d}(s_j)(Y)) \\ &= ((r_{g_{ji}})^*\Omega)(\mathrm{d}(s_j)(X), \mathrm{d}(s_j)(Y)) \\ &= \mathrm{Ad}_{g_{ji}^{-1}}(\Omega(\mathrm{d}(s_j)(X), \mathrm{d}(s_j)(Y))) \\ &= \mathrm{Ad}_{g_{ji}^{-1}} \circ F_j(X,Y), \end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili trditev 2.77. S tem smo dokazali naslednje.

Izrek 2.88. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj s povezavo ω in naj bosta A_i, A_j umeritveni polji glede na umeritvi $s_i, s_j\colon U \to P$ ter F_i, F_j njuni jakosti. Potem na U velja*

$$A_i = \mathrm{Ad}_{g_{ji}^{-1}} \circ A_j + \mu_{ji} \quad \text{in} \quad F_i = \mathrm{Ad}_{g_{ji}^{-1}} \circ F_j, \tag{2.28}$$

kjer je $\mu_{ji} := (g_{ji})^*\mu_G$. Če je $G \subset \mathrm{GL}(r,\mathbb{F})$, je to ekvivalentno enakostma

$$A_i = g_{ji}^{-1} A_j g_{ji} + g_{ji}^{-1}\,\mathrm{d}g_{ji} \quad \text{in} \quad F_i = g_{ji}^{-1} F_j g_{ji}. \tag{2.29}$$

Opomba 2.89. Podobni argumenti tistim pred navedbo zadnjega izreka pokažejo, da za vsako umeritveno transformacijo $f \in \mathrm{Aut}(P)$ in povezavo ω na glavnem svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ velja

$$(f^*\omega)_u = \mathrm{Ad}_{\sigma_f(u)^{-1}} \circ \omega_u + \big((\sigma_f)^*\mu_G\big)_u \quad \text{in} \quad (f^*\Omega)_u = \mathrm{Ad}_{\sigma_f(u)^{-1}} \circ \Omega_u, \tag{2.30}$$

za vse $u \in P$, kjer je preslikava $\sigma_f\colon P \to G$ implicitno definirana s predpisom $f(u) = u \cdot \sigma_f(u)$, kot v trditvi 2.53.

Posledica 2.90. *Če je strukturna grupa G glavnega svežnja $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ abelova, potem na M obstaja 2-forma $F_M \in \Omega^2(M;\mathfrak{g})$, da za poljubno umeritev $s\colon U \to P$ velja $F_M|_U = s^*\Omega$. Ta 2-forma je sklenjena, zato definira de Rhamov kohomološki razred $[F_M] \in H^2_{dR}(M;\mathfrak{g})$.*

Dokaz. V abelovi grupi je konjugiranje enako identiteti id_G, zato velja $\mathrm{Ad}_{g_{ji}^{-1}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ in posledično $F_i = F_j$ za poljubni dve umeritvi s_i, s_j. To dokazuje dobro definiranost in globalnost forme F_M, definirane lokalno s $F_M := s^*\Omega$ za poljubno umeritev $s\colon U \to P$. Je sklenjena, saj v poljubni umeritvi $s\colon U \to P$ velja

$$F_M|_U = \mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A \wedge A] = \mathrm{d}A \implies \mathrm{d}F_M|_U = 0$$

(kjer je $A = s^*\omega$), saj je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ abelove Liejeve grupe G komutativna. Posledično je $\mathrm{d}F_M = 0$. ∎

Opomba 2.91. Opazimo, da je F_M iz zadnje posledice lokalno eksaktna, saj velja $F_M|_U = \mathrm{d}A$. Ta eksaktnost ni nujno globalna, saj velja $A_i = A_j + \mu_{ji}$, torej umeritveno polje, katerega odvod bi želeli imeti za F_M, ni nujno globalno dobro definirano. Je pa to po Poincaréjevemu izreku (glej npr. [3, posledica 4.1.1]) res v primeru kontraktibilne mnogoterosti M.

Primer 2.92 (Jakost umeritvenega polja na Hopfovem vlaknenju)**.** Ker ima Hopfovo vlaknenje $\pi\colon S^3 \xrightarrow{\mathrm{U}(1)} \mathbb{C}P^1$ abelovo strukturno grupo, na $\mathbb{C}P^1$ po zadnji posledici obstaja globalna ukrivljenostna 2-forma F z vrednostmi v $i\mathbb{R}$. Spomnimo se iz primera 2.76, da je ukrivljenost povezave

$$\omega_z = \frac{1}{2}(\bar{z}_0\,\mathrm{d}z_0 - z_0\,\mathrm{d}\bar{z}_0 + \bar{z}_1\,\mathrm{d}z_1 - z_1\,\mathrm{d}\bar{z}_1)$$

na Hopfovem svežnju enaka

$$\Omega = -(\mathrm{d}z_0 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_0 + \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_1).$$

Z uporabo slednje želimo določiti F, to pa bomo seveda storili v neki lokalni karti – izberemo npr. (U, ϑ), kjer je

$$\begin{aligned} U &= \{[z_0, z_1] \in \mathbb{C}P^1 \mid z_0 \in \mathbb{C}, z_1 \in \mathbb{C}_*\} \\ \vartheta\colon U &\to \mathbb{C},\ \vartheta([z_0, z_1]) = \frac{z_0}{z_1}. \end{aligned}$$

Opomnimo, da tej karti do globalnosti manjka le ena točka. Za nadaljevanje si oglejmo naslednja diagrama, ki ponazarjata dogajanje.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}(1) \arrow[r, hook] & S^3|_U \ni (z_0, z_1) \arrow[d, mapsto] \\ & U \ni [z_0, z_1] \arrow[u, bend left, "s"] \arrow[d, mapsto] \\ & \mathbb{C} \ni \frac{z_0}{z_1} \end{tikzcd} \quad \text{in} \quad \begin{tikzcd} \Omega^2(S^3, i\mathbb{R}) \ni \Omega \arrow[d, bend left, "s^*"] \\ \Omega^2(U, i\mathbb{R}) \ni F \arrow[u, "\pi^*"] \arrow[u, mapsto] \\ \Omega^2(\mathbb{C}, i\mathbb{R}) \ni \hat{F} \arrow[u, "\vartheta^*"] \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd} \tag{2.31}$$

V zgornjem diagramu je $\hat{F}$ iskana lokalna izražava forme F v karti ϑ, $s\colon U \to S^3$ pa poljubna umeritev. $\hat{F}$ je torej določena z enakostjo $s^*\Omega = \vartheta^*\hat{F}$. Opazimo, da je za $\hat{F}$ dovolj zahtevati $\pi^*\vartheta^*\hat{F} = \Omega$, saj iz $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$ potem sledi $s^*\Omega = s^*\pi^*\vartheta^*\hat{F} = (\pi \circ s)^*\vartheta^*\hat{F} = \vartheta^*\hat{F}$. V ta namen označimo $g := \vartheta \circ \pi$, torej $g(z_0, z_1) = \frac{z_0}{z_1}$.

Ker je $\hat{F}$ 2-forma na $\mathbb{C}$ z vrednostmi v $i\mathbb{R}$, obstaja taka funkcija $f \in C^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R})$, da velja

$$\hat{F}_w = f(w)\,\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w}$$

za poljuben $w \in \mathbb{C}$.[††] Po formuli za povlek forme v lokalnih koordinatah je

$$g^*\hat{F} = (f \circ g)\,\mathrm{d}\left(\frac{z_0}{z_1}\right) \wedge \mathrm{d}\left(\frac{\bar{z}_0}{\bar{z}_1}\right)$$

in ker velja

$$\mathrm{d}\left(\frac{z_0}{z_1}\right) = \frac{z_1\,\mathrm{d}z_0 - z_0\,\mathrm{d}z_1}{{z_1}^2},$$

[††]Na $\mathbb{C}$ velja namreč $\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w} = -i\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, v kar se je enostavno prepričati. Tu je $w = x + iy \in \mathbb{C}$.

po krajšem izračunu z uporabo lastnosti vnanjega produkta sledi

$$\begin{aligned} g^*\hat{F} = f\left(\frac{z_0}{z_1}\right)\frac{1}{|z_1|^4}(&|z_1|^2 \, \mathrm{d}z_0 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_0 + |z_0|^2 \, \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_1 \\ &- z_1\bar{z}_0 \, \mathrm{d}z_0 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_1 - z_0\bar{z}_1 \, \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_0). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Ker je $(z_0, z_1) \in S^3$, lahko uporabimo identiteto $z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1 = 1$, da dodatno poenostavimo to enačbo. Če jo vnanje odvajamo, dobimo

$$\bar{z}_0 \, \mathrm{d}z_0 + z_0 \, \mathrm{d}\bar{z}_0 + \bar{z}_1 \, \mathrm{d}z_1 + z_1 \, \mathrm{d}\bar{z}_1 = 0,$$

zato sledi

$$-\bar{z}_0 \, \mathrm{d}z_0 = z_0 \, \mathrm{d}\bar{z}_0 + \bar{z}_1 \, \mathrm{d}z_1 + z_1 \, \mathrm{d}\bar{z}_1, \quad -\bar{z}_1 \, \mathrm{d}z_1 = \bar{z}_0 \, \mathrm{d}z_0 + z_0 \, \mathrm{d}\bar{z}_0 + z_1 \, \mathrm{d}\bar{z}_1.$$

Če vstavimo ti dve enačbi v spodnjo vrstico enačbe (2.32), le-ta postane

$$-z_1\bar{z}_0 \, \mathrm{d}z_0 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_1 - z_0\bar{z}_1 \, \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_0 = |z_0|^2 \, \mathrm{d}z_0 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_0 + |z_1|^2 \, \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_1,$$

torej dobimo

$$g^*\hat{F} = f\left(\frac{z_0}{z_1}\right)\frac{1}{|z_1|^4}(\mathrm{d}z_0 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_0 + \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}\bar{z}_1).$$

Iz zahteve $g^*\hat{F} = \Omega$ potem sledi

$$f\left(\frac{z_0}{z_1}\right) = -|z_1|^4$$

in ker za $(z_0, z_1) \in S^3$ velja

$$|z_1|^4 = \frac{|z_1|^4}{|z_1|^4 + 2|z_0|^2|z_1|^2 + |z_0|^4} = \frac{1}{1 + 2|z_0/z_1|^2 + |z_0/z_1|^4} = \frac{1}{\left(1 + |z_0/z_1|^2\right)^2},$$

sledi

$$f(w) = -\frac{1}{\left(1 + |w|^2\right)^2} \quad \text{in} \quad \hat{F}_w = -\frac{1}{\left(1 + |w|^2\right)^2} \, \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w}.$$

♦

Opomba 2.93. 2-forma $\vartheta^*\hat{F}$ iz prejšnjega primera je definirana na U, torej ji do globalnosti manjka le predpis v eni točki. Ker je F definirana globalno, lahko formo $\vartheta^*\hat{F}$ gladko razširimo do globalne 2-forme, ki je enaka F.

Kot zanimivost navedimo še, da lahko preverimo, da je $[F] \in H^2_{dR}(\mathbb{C}P^1; i\mathbb{R})$ netrivialen, tj. da ne obstaja $\alpha \in H^1_{dR}(\mathbb{C}P^1; i\mathbb{R})$, da je $F = \mathrm{d}\alpha$; trdimo torej, da F ni globalno eksaktna, čeprav je po opombi 2.91 lokalno eksaktna. Po de Rhamovem izreku [10, izrek 18.14] imamo namreč izomorfizem grup

$$T\colon H^2_{dR}(\mathbb{C}P^1; i\mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}(H^\infty_2(\mathbb{C}P^1), i\mathbb{R}), \quad T([\alpha])([c]) = \int_c \alpha,$$

za poljuben gladek 2-cikel $c \in Z_2^\infty(\mathbb{C}P^1)$; tukaj $H_*^\infty(\mathbb{C}P^1)$ označuje gladko singularno homologijo, tj. homologijo gladkih verig na $\mathbb{C}P^1$ (glej [10, str. 473]). Torej je dovolj preveriti $\int_{\mathbb{C}P^1} F \neq 0$. Ker je $\vartheta^* \hat{F}$ definirana povsod, razen v eni točki, velja

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}P^1} F = \int_{\mathbb{C}} \hat{F} &= -\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\left(1+|w|^2\right)^2} \,\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w} = 2i \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= 2i \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 2i \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{1}{(1+r^2)^2} r \,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi i \int_1^\infty \frac{1}{u^2} \,\mathrm{d}u = -2\pi i \frac{1}{u}\bigg|_{u=1}^{\infty} = 2\pi i,
\end{aligned}$$

kjer smo v zadnji vrstici vpeljali novo spremenljivko $u = 1 + r^2$. 2-formo $F_{FS} := \frac{1}{2i} F$ imenujemo *Fubini-Studyjeva 2-forma* na $\mathbb{C}P^1$.

2.5 Horizontalni dvig in kovariantni odvod

Vprašanje obstoja dviga poti iz baznega prostora v totalni prostor je v topologiji in geometriji eno od temeljnih vprašanj; tako je tudi v primeru splošne teorije povezav na glavnih svežnjih, kjer porodi pojem kovariantnega odvoda na pridruženem vektorskem svežnju. Za ogrevanje si oglejmo koncept horizontalnega dviga vektorskega polja.

2.5.1 Horizontalni dvig vektorskega polja

Še naprej naj bo H povezava na $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$. Ker je $\mathrm{d}\pi_u|_{H_u}\colon H_u \to T_{\pi(u)}M$ za poljuben $u \in P$ izomorfizem vektorskih prostorov (še več, $\mathrm{d}\pi|_H\colon H \to TM$ je po lemi 2.42 izomorfizem vektorskih svežnjev vzdolž preslikave π, saj je zožitev gladke preslikave $\mathrm{d}\pi$ na vloženo podmnogoterost $H \subset TP$ in linearni izomorfizem na vlaknih), lahko vsakemu vektorskemu polju $X \in \mathfrak{X}(M)$ priredimo enolično določeno horizontalno vektorsko polje na P.

Definicija 2.94. Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj in H povezava na njem. *Horizontalni dvig X^* vektorskega polja $X \in \mathfrak{X}(M)$ na P* je prerez svežnja H, definiran z enakostjo

$$\mathrm{d}\pi_u(X_u^*) = X_{\pi(u)},$$

za vse $u \in P$.

Opomba 2.95. Da je ta definicija dobra, je jasno iz zahteve po horizontalnosti X^* in komentarja pred definicijo. Drugače rečeno, horizontalni dvig vektorskega polja X na M je enolično določeno π-sorodno horizontalno vektorsko polje X^* na P; njegov obstoj in enoličnost sta torej očitna, dotakniti se je treba še njegove gladkosti, vzpostavili pa bomo tudi nekaj pomembnih in relativno predvidljivih lastnosti.

Trditev 2.96. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj in H povezava na njem. Če je $X \in \mathfrak{X}(M)$, potem je $X^* \in \mathfrak{X}(P)$ in velja*

$$(r_g)_*(X^*) = X^* \text{ za vse } g \in G,$$

tj. X^* je desno invariantno vektorsko polje na P. Obratno, če je $Y \in \mathfrak{X}(P)$ desno invariantno in horizontalno, potem obstaja tak $X \in \mathfrak{X}(M)$, da je $Y = X^*$.

Dokaz. Gladkost prereza X^* vektorskega svežnja H nad P sledi iz dejstva, da je $\mathrm{d}\pi|_H$ izomorfizem vektorskih svežnjev, torej difeomorfizem $H \to TM$. Ker je H gladek podsveženj svežnja TP, je X^* tudi gladek prerez svežnja TP.

Dokažimo desno invariantnost X^*, tj. $\mathrm{d}(r_g)_u(X^*_u) = X^*_{u\cdot g}$ za poljubna $g \in G, u \in P$. Po definicijski lastnosti ii) povezave H velja $\mathrm{d}(r_g)_u(X^*_u) \in H_{u\cdot g}$, istočasno pa tudi $X^*_{u\cdot g} \in H_{u\cdot g}$. Velja pa

$$\mathrm{d}\pi_{u\cdot g}(\mathrm{d}(r_g)_u(X^*_u)) = \mathrm{d}(\pi \circ r_g)_u(X^*_u) = \mathrm{d}\pi_u(X^*_u) = X_{\pi(u)} = \mathrm{d}\pi_{u\cdot g}(X^*_{u\cdot g}),$$

kjer smo na prehodu skozi prvi enačaj uporabili verižno pravilo, skozi drugega upoštevali definicijsko lastnost delovanja, skozi tretjega in četrtega pa definicijo X^* v dveh različnih točkah. Ker je $\mathrm{d}\pi_{u\cdot g}|_{H_{u\cdot g}} : H_{u\cdot g} \to T_{\pi(u)}M$ izomorfizem, sledi $\mathrm{d}(r_g)_u(X^*_u) = X^*_{u\cdot g}$, kar smo želeli pokazati.

Naj bo zdaj $Y \in \mathfrak{X}(P)$ desno invariantno horizontalno vektorsko polje na P. Definiramo $X_{\pi(u)} := \mathrm{d}\pi_u(Y_u)$ za poljuben $u \in P$. Zaradi desne invariantnosti Y je ta definicija dobra, saj je

$$\mathrm{d}\pi_{u\cdot g}(Y_{u\cdot g}) = \mathrm{d}\pi_{u\cdot g}(\mathrm{d}(r_g)_u Y_u) = \mathrm{d}(\pi \circ r_g)_u(Y_u) = \mathrm{d}\pi_u(Y_u).$$

Ker je $\mathrm{d}\pi : TP \to TM$ gladek morfizem vektorskih svežnjev, slika gladke prereze v gladke prereze, v kolikor je slika dobro definirana, v kar pa smo se ravno prepričali. Zato je $X \in \mathfrak{X}(M)$. Če ga horizontalno dvignemo do $X^* \in \mathfrak{X}(P)$, potem po definiciji velja

$$\mathrm{d}\pi_u(X^*_u) = X_{\pi(u)} = \mathrm{d}\pi_u(Y_u)$$

in ker sta Y in X^* horizontalni vektorski polji na P, sledi $Y = X^*$. ■

Trditev 2.97. *Na glavnem svežnju $\pi : P \xrightarrow{G} M$ s povezavo H za poljubna $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ velja:*

i) $(X + Y)^* = X^* + Y^*$,

ii) $(fX)^* = (f \circ \pi)X^*$ *za vsako* $f \in C^\infty(M)$,

iii) $[X^*, Y^*]^{\mathsf{H}} = [X, Y]^*$.

Dokaz. Točka *i)* sledi iz $\mathrm{d}\pi_u(X^*_u + Y^*_u) = \mathrm{d}\pi_u(X^*_u) + \mathrm{d}\pi_u(Y^*_u) = X_{\pi(u)} + Y_{\pi(u)}$, za vse $u \in P$. Točka *ii)* sledi iz izračuna

$$\mathrm{d}\pi_u\big((fX)^*_u\big) = (fX)_{\pi(u)} = f(\pi(u))X_{\pi(u)} = f(\pi(u))\,\mathrm{d}\pi_u(X^*_u) = \mathrm{d}\pi_u\big(((f \circ \pi)X^*)_u\big),$$

za vse $u \in P$, kjer smo na prehodu skozi zadnji enačaj upoštevali linearnost $\mathrm{d}\pi_u$.

Dokažimo *iii)*. Ker je vektorsko polje X^* π-sorodno X in Y^* π-sorodno Y, je po naravnosti Liejevega oklepaja (glej npr. [10, trditev 8.30]) $[X^*, Y^*]$ π-sorodno $[X, Y]$, tj. za poljuben $u \in P$ velja

$$\mathrm{d}\pi_u([X^*, Y^*]_u) = [X, Y]_{\pi(u)},$$

istočasno pa je $\mathrm{d}\pi_u([X, Y]^*_u) = [X, Y]_{\pi(u)}$. Vektorsko polje $[X^*, Y^*]$ na P ni nujno horizontalno – če ga razstavimo na $[X^*, Y^*] = [X^*, Y^*]^{\mathsf{H}} + [X^*, Y^*]^{\mathsf{V}}$, potem iz dejstva, da je $\mathrm{d}\pi_u|_{H_u}$ izomorfizem in je $[X^*, Y^*]^{\mathsf{V}} \in \ker \pi_*$, sledi želeno. ■

Opomba 2.98. Če je povezava H kot distribucija involutivna (ali kot je po Frobeniusovem izreku ekvivalentno, integrabilna – glej npr. [10, izrek 19.12]), opazimo, da lastnost iii) iz zadnje trditve postane $[X^*, Y^*] = [X, Y]^*$, saj je tedaj $[X^*, Y^*]$ horizontalno vektorsko polje na P.

Na tej točki kot zanimivost omenimo, da je povezava H kot distribucija integrabilna natanko tedaj, ko je *ravna*, tj. $\Omega = 0$. Res, za vsaki dve horizontalni vektorski polji X, Y na P velja $\Omega(X, Y) = \mathrm{d}\omega(X, Y) = -\omega([X, Y])$, kjer smo uporabili enačbo (2.21) in lastnost iz leme 2.71 iii). Po horizontalnosti Ω tedaj iz Frobeniusovega izreka sledi želena ekvivalenca. Zavoljo kompletnosti jo ubesedimo.

Trditev 2.99 (Karakterizacije ravnosti povezave)**.** *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj s povezavo H in naj ω označuje ustrezno povezavno 1-formo. Naslednje trditve so ekvivalentne.*

i) Povezava ω je ravna, tj. njena ukrivljenost Ω je ničelna forma.

ii) Distribucija H je integrabilna.

iii) Za vsaki vektorski polji $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ na poljubni odprti množici $U \subset M$ velja $[X^*, Y^*] = [X, Y]^*$.

Dokaz. Točki i) in ii) sta ekvivalentni po zadnji opombi; točka iii) sledi iz ii) po zadnji trditvi. Za dokaz implikacije iz iii) v i) pripomnimo, da lahko vsaka dva horizontalna vektorja $\tilde{X}, \tilde{Y} \in H_u$ za dan $u \in P$ najprej razširimo do poljubnega vektorskega polja na neki okolici točke u, zatem potisnemo na M, torej $X = \pi_*\tilde{X}$ in $Y = \pi_*\tilde{Y}$, nato pa horizontalno dvignemo do vektorskih polj X^* in Y^*, ki sta v točki u po enoličnosti enaki $\tilde{X}$ in $\tilde{Y}$, ter uporabimo predpostavko. ■

2.5.2 Horizontalni dvig poti in vzporedni prenos

Motivacija. Za vpeljavo pojma horizontalnega dviga krivulje se spomnimo pojma vzporednega prenosa iz (psevdo) Riemannove geometrije. Če je ∇ afina povezava na mnogoterosti M in $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, potem za poljuben $x \in M$ velja

$$\nabla_X Y|_x = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\bar{P}^\gamma_t Y_{\gamma(t)} - Y_x}{t} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \bar{P}^\gamma_t Y_{\gamma(t)},$$

glej npr. [11, posledica 4.35]. Tu je $\gamma\colon [0, \varepsilon) \to M$ gladka pot z $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = X_x$ in za vsak $t \in [0, \varepsilon)$ je $\bar{P}^\gamma_t\colon T_{\gamma(t)}M \to T_xM$ vzporedni prenos vzdolž γ od t do 0, tj. inverz preslikave $P^\gamma_t(v) = V(t)$, kjer je V enolično določeno vzporedno vektorsko polje vzdolž poti γ, tj. zanj velja $\nabla_{\gamma'} V = 0$.

Naš cilj v naslednjih poglavjih je vpeljati analogen koncept vzporednega prenosa na danem pridruženem vektorskem svežnju $P \times_\rho V$ glavnemu svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glede na upodobitev (ρ, V) Liejeve grupe G, kar nam bo omogočilo vpeljavo kovariantnega odvoda na njem. Za to je ključen pojem vzporednega dviga poti iz M na P. V nadaljevanju bo I označeval interval $I = [0, \varepsilon] \in \mathbb{R}$, za neki $\varepsilon > 0$ (lahko si mislimo $\varepsilon = 1$), $\gamma\colon I \to M$ pa bo odsekoma gladka pot v M.

Definicija 2.100. Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj in H povezava na njem. *Horizontalni dvig poti* $\gamma\colon I \to M$ je odsekoma gladka pot $\gamma^*\colon I \to P$, da je $\pi \circ \gamma^* = \gamma$

(rečemo, da γ^* *pokrije* pot γ) in sta $\dot{\gamma}^*(t+), \dot{\gamma}^*(t-) \in H_{\gamma^*(t)}$ za vsak $t \in I$ (rečemo, da je pot *horizontalna*).

Opomba 2.101. Z $\dot{\gamma}^*$ bomo vedno označili hitrost dviga γ^* (in ne dvig hitrosti). V posebnem primeru, ko je γ gladka pot v M, zahtevamo tudi gladkost poti γ^* v P, horizontalnost poti pa je ekvivalentna pogoju $\dot{\gamma}^*(t) \in H_{\gamma^*(t)}$ za vse $t \in I$.

Naslednji izrek nam zagotavlja obstoj take krivulje v P, če le izberemo začetno točko $u \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ dviga.

Izrek 2.102. *Naj bo* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *glavni sveženj s povezavo* ω. *Za vsako odsekoma gladko pot* $\gamma\colon I \to M$ *in* $u \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ *obstaja natanko en horizontalni dvig* γ_u^* *poti* γ *z začetkom v* u, *tj.* $\gamma_u^*(0) = u$.

Dokaz. Izrek je dovolj dokazati za primer, ko je γ gladka pot v M; v primeru, ko je takšna le odsekoma, napravimo toliko dvigov, kolikor je gladkih odsekov krivulje γ, pri čemer za začetno točko dviga posameznega odseka vzamemo končno vrednost dviga predhodnega odseka. Naj bo γ torej gladka pot v M.

Množica I je kompakten metrični prostor, zato po Lebesgueovi lemi obstaja taka delitev $0 = t_0 < \cdots < t_N = \varepsilon$ intervala I, da je množica $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ za vsak i vsebovana v neki odprti trivializirajoči množici $U_i \subset M$ sveženjske projekcije π; brez škode splošnosti lahko privzamemo, da se sekata samo samo U_i in U_{i+1} (sicer ti množici zmanjšamo). Pišimo $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ – po prejšnji povedi je torej $\gamma(I_i) \subset U_i$. Lokalno trivializacijo, ki ustreza množici U_i, označimo s $\psi_i = (\pi, \varphi_i)\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$. Pričnimo z indukcijo.

Naj bo $\delta_0\colon I_0 \to P$ dana s predpisom $\delta_0(t) = \psi_0^{-1}(\gamma(t), \varphi_0(u_0))$, kjer je $u_0 := u$ začetna točka dviga, kot v predpostavki. S tem je definirana gladka pot v $\pi^{-1}(U_0)$, ki pokrije pot $\gamma|_{I_0}$. Ker pot δ_0 ni nujno horizontalna, jo bomo vzdolž vlaken spremenili. Poiščimo torej takšno gladko preslikavo $a_0\colon I_0 \to G$, da je pot $\gamma_u^*\colon I_0 \to P$, ki je definirana s predpisom

$$\gamma_u^*(t) := \delta_0(t) \cdot a_0(t),$$

horizontalna in velja $a_0(0) = e$; tedaj namreč velja $\delta_0(0) \cdot a_0(0) = u$. Pričakujemo, da bomo a_0 določili kot rešitev neke diferencialne enačbe. Horizontalnost poti γ_u^* je po lemi 2.63 ekvivalentna zahtevi $\omega(\dot{\gamma}_u^*(t)) = 0$ za vse $t \in I_0$. Po formuli za odvod preslikave iz produkta mnogoterosti velja

$$\dot{\gamma}_u^*(t) = (r_{a_0(t)})_* \dot{\delta}_0(t) + \sigma(\mu_G(\dot{a}_0(t)))_{\gamma_u^*(t)}$$

in zato

$$\begin{aligned}
\omega(\dot{\gamma}_u^*(t)) &= \mathrm{Ad}_{a_0(t)^{-1}}(\omega(\dot{\delta}_0(t))) + \mu_G(\dot{a}_0(t)) \\
&= (L_{a_0(t)^{-1}})_* \Big((R_{a_0(t)})_* \omega\big(\dot{\delta}_0(t)\big) + \dot{a}_0(t) \Big) = 0,
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi prvi enačaj uporabili obe definicijski lastnosti povezave ω, na drugem pa zgolj izpostavili $(L_{a_0(t)^{-1}})_*$ in uporabili definiciji za Ad in μ_G. Ker so leve translacije v Liejevi grupi G difeomorfizmi, je ta enačba ekvivalentna enačbi

$$\dot{a}_0(t) = -(R_{a_0(t)})_* \omega\big(\dot{\delta}_0(t)\big).$$

Zadnja enačba, skupaj s pogojem $a(0) = e$, ustreza diferencialni enačbi integralne poti časovno odvisnega vektorskega polja $V_0\colon I_0 \times G \to TG$ na Liejevi grupi G, ki je dano s predpisom

$$V_0(t, g) = -(R_g)_*\omega(\dot{\delta}_0(t)).$$

Po osnovnem izreku o časovno odvisnih tokovih integralna krivulja na neki okolici točke $0 \in I_0$ obstaja in je enolično določena – glej [10, str. 236 in izrek 9.48]. Zapisano vektorsko polje V pa je očitno desno invariantno, tj. velja $\mathrm{d}(R_h)_g V_0(t.g) = V_0(t, gh)$ za vse $g, h \in G$ in $t \in I_0$, zato po analognem dokazu kot v [14, trditev 2.20] sledi, da je V kompletno vektorsko polje, tj. njegova integralna pot a_0 je definirana za vse $t \in I_0$. S tem smo dokazali obstoj dviga γ_u^* na I_0.

Denimo, da dvig γ_u^* poti γ že obstaja na intervalu $\cup_{i=0}^{k-1} I_i$ za neki $1 \leq k \leq N$. Kot zgoraj, definiramo $\delta_k\colon I_k \to P$ s predpisom $\delta_k(t) = \psi_k^{-1}(\gamma(t), \varphi_k(u_k))$, kjer je $u_k = \gamma_u^*(s_k)$ za poljubno izbran $s_k \in I_{k-1} \cap I_k$. Prav tako podobno kot zgoraj za vse $t \in I_k$ definiramo $\gamma_u^*(t) = \delta_k(t) \cdot a_k(t)$, kjer je $a_k\colon I_k \to G$ rešitev diferencialne enačbe

$$\dot{a}_k(t) = -(R_{a_k(t)})_*\omega\big(\dot{\delta}_k(t)\big)$$

integralne poti časovno odvisnega vektorskega polja

$$V_k(t, g) = -(R_g)_*\omega(\dot{\delta}_k(t))$$

pri začetnem pogoju $a_k(s_k) = e$. Po enoličnosti v osnovnem izreku o časovno odvisnih tokovih se nov predpis za γ_u^* na I_k ujema s predpisom za γ_u^* na I_{k-1} iz indukcijske predpostavke. To dokazuje želen indukcijski korak. ∎

Opomba 2.103. Namesto pogoja $\gamma_u^*(0) = u$ za dan $u \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ bi lahko zahtevali $\gamma_u^*(s) = u$ za neki $s \in I$ in $u \in \pi^{-1}(\gamma(s))$; potem u pač ne bi bil začetna točka krivulje γ_u^*, temveč njena vrednost pri $s \in I$.

Opomba 2.104. Bistvo dokaza izreka o časovno odvisnih tokovih, na katerega smo se sklicali v zadnjem dokazu, je uporaba eksistenčnega izreka o rešitvi sistema navadnih (nelinearnih) diferencialnih enačb. Iz izreka o tokovih sledi tudi, da je preslikava $\tau^\gamma\colon \pi^{-1}(\gamma(0)) \times I \to P$, ki je dana s predpisom $\tau^\gamma(u, t) = \gamma_u^*(t)$, gladka. Če to spet prevedemo na raven eksistenčnega izreka, gre za gladkost rešitve sistema navadnih nelinearnih diferencialnih enačb in njeno gladko odvisnost od začetnih pogojev.

Opomba 2.105. V primeru, ko je Liejeva grupa G matrična, lahko integralno pot $a_k(t)$ iz dokaza zadnjega izreka določimo nekoliko natančneje s pomočjo t. i. *urejenega ekponenciranja* (ang. *path-ordered exponential*). Za podrobnosti glej [6, poglavje 5.10].

Posledica 2.106. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj s povezavo H in $\gamma\colon I \to M$ odsekoma gladka pot. Za poljuben $t \in I$ je preslikava $\tau_t^\gamma\colon \pi^{-1}(\gamma(0)) \to \pi^{-1}(\gamma(t))$, podana s predpisom*

$$\tau_t^\gamma(u) := \gamma_u^*(t),$$

gladka bijekcija z inverzom $\bar{\tau}_t^\gamma(\tilde{u}) := \left(\overline{\gamma|_{[0,t]}}\right)_{\tilde{u}}^*(t)$, ki je neodvisna od parametrizacije poti γ. Preslikava τ_t^γ je G-ekvivariantna, tj. velja

$$\tau_t^\gamma(u \cdot g) = \tau_t^\gamma(u) \cdot g$$

za vsak $g \in G, u \in \pi^{-1}(\gamma(0))$.

Opomba 2.107. Preslikavo τ_t^γ ob danem $t \in I$ imenujemo *vzporedni prenos* vzdolž dviga poti γ. Kadar je krivulja γ jasna iz konteksta, pišemo tudi kar τ_t.

Dokaz. Označimo $\tau_t = \tau_t^\gamma$, $\bar{\tau}_t = \bar{\tau}_t^\gamma$. Gladkost preslikave τ_t sledi iz opombe 2.104. Dokažimo, da je $\bar{\tau}_t$ res inverz preslikave τ_t. Po definiciji obeh preslikav velja

$$\bar{\tau}_t(\tau_t(u)) = \left(\overline{\gamma|_{[0,t]}}\right)^*_{\gamma_u^*(t)}(t)$$

in ker je γ_u^* enolično določena horizontalna krivulja, ki pokrije γ in ima ob času t vrednost $\gamma_u^*(t)$, velja

$$\left(\overline{\gamma|_{[0,t]}}\right)^*_{\gamma_u^*(t)} = \overline{\left(\gamma|_{[0,t]}\right)^*_u}.$$

Če desno stran izvrednotimo ob času t, dobimo $\overline{\left(\gamma|_{[0,t]}\right)^*_u}(t) = \gamma_u^*(0) = u$. Torej smo dokazali, da je $\bar{\tau}_t$ levi inverz od τ_t; podobno dokažemo, da je tudi desni inverz. To dokazuje bijektivnost preslikave τ_t. $\bar{\tau}_t$ je gladka po istem argumentu kot τ_t, zato je τ_t difeomorfizem med vlaknoma $\pi^{-1}(\gamma(0))$ in $\pi^{-1}(\gamma(t))$.

Dokažimo neodvisnost od parametrizacije poti γ. Naj bo $J = [0, \tilde{\varepsilon}]$ za neki $\tilde{\varepsilon} > 0$, $\alpha\colon J \to I$ difeomorfizem z $\alpha(0) = 0$ in označimo s $\tau_t^{\gamma\circ\alpha}$ vzporedni prenos vzdolž poti $\gamma \circ \alpha$, tj. $\tau_t^{\gamma\circ\alpha}(u) = (\gamma \circ \alpha)_u^*(t)$ za poljubna $u \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ in $t \in J$. Ker je $(\gamma \circ \alpha)_u^*$ za poljuben $u \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ horizontalni dvig poti $\gamma \circ \alpha$, jo pokrije, tj.

$$\pi \circ (\gamma \circ \alpha)_u^* = \gamma \circ \alpha,$$

in če to enakost komponiramo z α^{-1} z desne, dobimo $\pi \circ (\gamma \circ \alpha)_u^* \circ \alpha^{-1} = \gamma$. Ker je α difeomorfizem, je pot $(\gamma \circ \alpha)_u^* \circ \alpha^{-1}$ po verižnem pravilu horizontalna, zato iz enoličnosti dviga γ_u^* poti γ sledi

$$(\gamma \circ \alpha)_u^* = \gamma_u^* \circ \alpha,$$

iz česar sledi

$$\tau_t^{\gamma\circ\alpha}(u) = (\gamma \circ \alpha)_u^*(t) = \gamma_u^*(\alpha(t)) = \tau_{\alpha(t)}(u),$$

kar pomeni ravno neodvisnost vzporednega prenosa vzdolž poti γ od parametrizacije poti γ.

Dokažimo G-ekvivariantnost preslikave τ_t ob danem $t \in I$. Naj bo $g \in G, u \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Po definiciji povezave H velja, da preslikava r_g slika horizontalne poti v horizontalne poti. Zato je $t \mapsto \gamma_u^*(t) \cdot g$ horizontalna pot z začetkom v $u \cdot g$, ki pokrije pot γ. Ker je $\gamma_{u\cdot g}^*$ enolično določena taka pot, sledi

$$\gamma_u^*(t) \cdot g = \gamma_{u\cdot g}^*(t),$$

za poljuben $t \in I$, kar dokazuje želeno. ∎

Vzporedni prenos lahko zdaj prestavimo še v kontekst pridruženih vektorskih svežnjev.

Posledica 2.108. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj s povezavo ω in $E = P \times_\rho V$ pridružen vektorski sveženj glede na upodobitev (ρ, V) Liejeve grupe G. Naj bo $\gamma\colon I \to M$ odsekoma gladka pot v M. Za poljuben $t \in I$ je preslikava $P_t^\gamma\colon E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(t)}$, dana s predpisom*

$$P_t^\gamma([u, v]) = [\tau_t^\gamma(u), v],$$

izomorfizem vektorskih prostorov.

Opomba 2.109. Preslikavo P_t^γ za dan $t \in I$ imenujemo *vzporedni prenos na pridruženem vektorskem svežnju* $P \times_\rho V$ vzdolž odsekoma gladke poti γ. Kadar je pot γ jasna iz konteksta, pišemo tudi kar P_t.

Dokaz. Preslikava $P_t = P_t^\gamma$ je za dan $t \in I$ dobro definirama, saj za vse $u \in \pi^{-1}(\gamma(0)), g \in G$ in $v \in V$ velja

$$P_t([u \cdot g, \rho_{g^{-1}}(v)]) = [\tau_t(u \cdot g), \rho_{g^{-1}}(v)] = [\tau_t(u) \cdot g, \rho_{g^{-1}}(v)] = [\tau_t(u), v],$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili G-ekvivariantnost preslikave τ_t iz posledice 2.106. Linearnost preslikave P_t je očitna iz strukture vektorskega prostora na poljubnem vlaknu vektorskega svežnja E. Inverz te preslikave je podan za vsak $u \in \pi^{-1}(\gamma(t))$ in $v \in V$ s predpisom

$$\bar{P}_t([u, v]) = [\bar{\tau}_t(u), v],$$

saj je $\bar{\tau}_t$ po posledici 2.106 inverz preslikave τ_t. ■

2.5.3 Kovariantni odvod na pridruženem svežnju

Po motivaciji iz prejšnjega razdelka lahko zdaj vpeljemo pojem kovariantnega odvoda na pridruženem vektorskem svežnju.

Definicija 2.110. Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj s povezavo ω in $E = P \times_\rho V$ pridružen vektorski sveženj glede na upodobitev (ρ, V) Liejeve grupe G. *Kovariantni odvod* prereza $\Phi \in \Gamma^\infty(E)$ pridruženega svežnja E vzdolž vektorskega polja $X \in \mathfrak{X}(M)$ je prerez vektorskega svežnja E, definiran s predpisom

$$(\nabla_X \Phi)(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \bar{P}_t^{\gamma_x^X}(\Phi(\gamma_x^X(t))), \tag{2.33}$$

kjer γ_x^X označuje integralno pot vektorskega polja X z začetkom v x, tj. $\gamma_x^X(0) = x$, $\dot{\gamma}_x^X(0) = X_x$.

Opomba 2.111. Pot γ_x^X v zgornji definiciji potrebujemo definirano le na intervalu $[0, \varepsilon)$ za poljuben $\varepsilon > 0$. V nadaljevanju tega razdelka bomo pisali $\gamma = \gamma_x^X$ in $I = [0, \varepsilon)$.

Ker bomo pogosto delali v neki umeritvi $s\colon U \to P$ glavnega svežnja, nas zanima, kako se $(\nabla_X \Phi)(x)$ izraža v njej ob danem $x \in U$. Po trditvi 2.48 ima Φ predpis $\Phi(x) = [s(x), \phi(x)]$ za neko natanko določeno preslikavo $\phi \in C^\infty(U, V)$. Po definiciji vzporednega prenosa na pridruženem svežnju velja

$$\bar{P}_t^\gamma(\Phi(\gamma(t))) = \bar{P}_t^\gamma([s(\gamma(t)), \phi(\gamma(t))]) = [\bar{\tau}_t(s(\gamma(t))), \phi(\gamma(t))].$$

Za vsak $t \in I$ je $q(t) = \bar{\tau}_t(s(\gamma(t)))$ element vlakna $\pi^{-1}(\gamma(0)) = \pi^{-1}(x)$. Slednje pomeni, da je $q\colon I \to \pi^{-1}(x)$ pot v vlaknu, zato ima predpis $q(t) = s(x) \cdot a(t)$ za neko pot $a\colon I \to G$, za katero velja $a(0) = e$. Torej velja

$$\bar{P}_t^\gamma(\Phi(\gamma(t))) = [s(x), \rho_{a(t)}(\phi(\gamma(t)))]$$

in zato

$$(\nabla_X \Phi)(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \bar{P}_t^\gamma(\Phi(\gamma(t))) = \left[s(x), \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \rho_{a(t)}(\phi(\gamma(t)))\right]$$
$$= [s(x), \rho_*(\dot{a}(0))(\phi(x)) + \mathrm{d}\phi_x(X_x)]\,,$$

kjer zadnja enakost sledi iz odvajanja upodobitvenega delovanja $\tilde{\rho}\colon G \times V \to V$, ki ima predpis $\tilde{\rho}(g, v) = \rho_g(v)$, saj velja

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \tilde{\rho}(a(t), \phi(\gamma(t))) = \mathrm{d}(\tilde{\rho}(\cdot, \phi(x)))_e(\dot{a}(0)) + \mathrm{d}(\tilde{\rho}(a(0), \cdot))_{\phi(x)}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi(\gamma(t))\right)$$

in je $\tilde{\rho}(a(0), \cdot) = \tilde{\rho}(e, \cdot) = \mathrm{id}_V$. Ugotoviti je potrebno seveda še, kaj je $\dot{a}(0)$. Opazimo, da je $\dot{q}(0) = \mathrm{d}(\ell_{s(x)})_e(\dot{a}(0))$ vertikalen vektor, zato velja $\dot{q}(0) = \sigma(\dot{a}(0))_{s(x)}$, kjer je $\sigma\colon \mathfrak{g} \to TP$ fundamentalna preslikava. Posledično velja

$$\dot{a}(0) = \omega(\dot{q}(0)),$$

po definicijski lastnosti povezave ω. Po definiciji q pa velja $\tau_t(q(t)) = s(\gamma(t))$, oziroma še drugače:

$$\tau(t, q(t)) = s(\gamma(t)).$$

Če to enakost odvajamo ob času $t = 0$, dobimo

$$\underbrace{\mathrm{d}\big(\tau(\cdot, \overbrace{q(0)}^{=s(x)})\big)_{q(0)}(1)}_{=\dot{\gamma}^*_{s(x)}(0)} + \mathrm{d}(\underbrace{\tau(0, \cdot)}_{=\mathrm{id}_{\pi^{-1}(x)}})_{s(x)}(\dot{q}(0)) = \mathrm{d}s_x(X_x),$$

in zato velja $\dot{q}(0) = \mathrm{d}s_x(X_x) - \dot{\gamma}^*_{s(x)}(0)$. Ker pa je $\gamma^*_{s(x)}$ horizontalna pot, sledi

$$\dot{a}(0) = \omega(\dot{q}(0)) = \omega(\mathrm{d}s_x(X_x)) = A(X_x),$$

kjer je $A = s^*\omega$ umeritveno polje. S tem smo dokazali naslednje.

Izrek 2.112. *Naj bo $\pi\colon P \overset{G}{\to} M$ glavni sveženj s povezavo ω in $E = P \times_\rho V$ pridružen vektorski sveženj glede na upodobitev (ρ, V) Liejeve grupe G. Kovariantni odvod prereza $\Phi \in \Gamma^\infty(E)$ pridruženega vektorskega svežnja E se v dani umeritvi $s\colon U \to P$ izraža s predpisom*

$$(\nabla_X \Phi)(x) = [s(x), \mathrm{d}\phi_x(X_x) + \rho_*(A(X_x))(\phi(x))], \tag{2.34}$$

kjer je $\Phi|_U = [s, \phi]$ za neko natanko določeno preslikavo $\phi \in C^\infty(U, V)$ in $A = s^*\omega$.

Opomba 2.113. Iz zgornje formule vidimo, da je $(\nabla_X \Phi)(x)$ – kar se tiče parametra $X \in \mathfrak{X}(M)$ – odvisen le od X_x. Dalje, $\nabla_X \Phi$ je zaradi zgornje enakosti gladek prerez vektorskega svežnja $P \times_\rho V$; opazimo, da ima izbira upodobitve (ρ, V) osrednjo vlogo pri kovariantnem odvajanju. Pogosto zapišemo tudi kar

$$\nabla_X \Phi = [s, \nabla_X \phi],$$

kjer je $\nabla_X \phi \in C^\infty(U, V)$ seveda podana z

$$(\nabla_X \phi)(x) = \mathrm{d}\phi_x(X_x) + \rho_*(A(X_x))(\phi(x)). \tag{2.35}$$

Zaradi zadnje enakosti se včasih afina povezava na pridruženem svežnju (s precejšnjo zlorabo zapisa) v literaturi pojavi v obliki $\nabla = \mathrm{d} + \rho_* A$, kjer na $\rho_* A$ gledamo kot diferencialno 1-formo z vrednostmi v $\mathrm{End}(V)$.

V lokalni karti $(x^\mu)_\mu$ na M (brez škode za splošnost naj bo definirana kar na U) je torej

$$(\nabla_\mu \phi)(x) = (\partial_\mu \phi)(x) + \rho_*(A_\mu(x))(\phi(x)), \tag{2.36}$$

kar v primeru, ko je $G \subset \mathrm{GL}(r, \mathbb{F})$ matrična Liejeva grupa in ρ njena standardna upodobitev na $\mathbb{F}^r$, zapišemo kot

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu \phi. \tag{2.37}$$

Ta izraz se bo večkrat pojavil v fizikalnih delih naše razprave, saj standardne upodobitve matričnih grup predstavljajo osnovne primere uporabe splošne teorije umeritvenih polj pri opisovanju materije.

Trditev 2.114. *Naj bo* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *glavni sveženj s povezavo* ω *in* $E = P \times_\rho V$ *pridružen vektorski sveženj glede na upodobitev* (ρ, V) *Liejeve grupe* G*. Preslikava* $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \Gamma^\infty(E) \to \Gamma^\infty(E)$ *s predpisom* $(X, \Phi) \mapsto \nabla_X \Phi$ *je afina povezava na* E*.*

Dokaz. Dokaz poteka v izbrani umeritvi $s\colon U \to P$ glavnega svežnja $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$. Naj bo $\Phi \in \Gamma^\infty(E)$ in $\phi \in C^\infty(U, V)$ kot v trditvi 2.48, torej $\Phi = [s, \phi]$. $C^\infty(M, \mathbb{F})$-linearnost v prvem argumentu je jasna iz enačbe (2.34); tukaj je $\mathbb{F}$ obseg vektorskega prostora V. Iz te enačbe je jasna tudi linearnost v drugem argumentu.

Dokažimo Leibnizevo pravilo, torej $\nabla_X(f\Phi) = (Xf)\Phi + f\nabla_X \Phi$. Velja

$$(\nabla_X(f\Phi))(x) = [s(x), \mathrm{d}(f\phi)_x(X_x) + \underbrace{\underline{\rho_*(A(X_x))}}_{\in \mathrm{End}(V)}(f(x)\phi(x))]$$

in ker velja $\mathrm{d}(f\phi)_x = f(x)\,\mathrm{d}\phi_x + \phi(x)\,\mathrm{d}f_x$ ter lahko v skladu z zgornjim zavitim oklepajem $f(x)$ nesemo pred podčrtan izraz, sledi želeno. ∎

2.5.4 Kompatibilnost z metriko na pridruženem svežnju

Vpliv upodobitve (ρ, V) na afino povezavo ∇ na pridruženem vektorskem svežnju $P \times_\rho V$ iz prejšnjega razdelka se kaže na sledeč predvidljiv način. V primeru, ko je V opremljen s skalarnim produktom, ki je kompatibilen z upodobitvijo (ρ, V), je tudi metrika na $P \times_\rho V$, ki jo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ inducira, kompatibilna z afino povezavo ∇ iz prejšnjega razdelka. Opišimo to natančneje.

Definicija 2.115. Naj bo (ρ, V) upodobitev Liejeve grupe G. Skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na V je *G-invarianten*, če velja $\langle \rho_g(v), \rho_g(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ za vse $v, w \in V$ ter $g \in G$.

Trditev 2.116. *Naj bo* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *glavni sveženj s povezavo* ω *in* $E = P \times_\rho V$ *pridružen vektorski sveženj glede na upodobitev* (ρ, V) *Liejeve grupe* G. *Naj bo* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ G*-invarianten skalarni produkt na* V. *S predpisom*

$$\langle [u,v],[u,w]\rangle_E := \langle v,w\rangle \ \textit{ za vse } u \in P \textit{ in } v,w \in V$$

je podana metrika na pridruženem svežnju E, *tj. gladek prerez vektorskega svežnja* $E^* \otimes E^*$ *nad* M, *ki na vlaknih inducira skalarni produkt.*

Dokaz. Najprej preverimo dobro definiranost skalarnega produkta $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ na E_x za dan $x \in M$. Naj bo torej $u \in \pi^{-1}(x)$ in naj bo $g \in G$; potem za poljubna $v, w \in V$ velja

$$\begin{aligned}
[u,v] &= [u\cdot g, \rho_{g^{-1}}(v)],\\
[u,w] &= [u\cdot g, \rho_{g^{-1}}(w)].
\end{aligned}$$

Zato sledi

$$\langle [u\cdot g, \rho_{g^{-1}}(v)], [u\cdot g, \rho_{g^{-1}}(w)]\rangle_E = \langle \rho_{g^{-1}}(v), \rho_{g^{-1}}(w)\rangle = \langle v,w\rangle$$

po G-invariantnosti skalarnega produkta $\langle\cdot,\cdot\rangle$. To dokazuje dobro definiranost predpisa na E_x, očitno pa ta predpis določa skalarni produkt na E_x.

Preveriti je potrebno še gladkost prereza $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$; ekvivalentno je preveriti (glej npr. [6, trditev 12.19]), da je $\langle \Phi, \Theta\rangle_E : M \to \mathbb{F}$ gladka funkcija za vsaka dva lokalna gladka prereza Φ, Θ vektorskega svežnja E. Slednja se v poljubni umeritvi $s\colon U \to P$ izražata kot $\Phi = [s,\phi]$ in $\Theta = [s,\theta]$ za neki preslikavi $\phi, \theta \in C^\infty(U, V)$. Potem je

$$\langle \Phi(x), \Theta(x)\rangle_E = \langle \phi(x), \theta(x)\rangle\,,$$

iz česar gladkost sledi po bilinearnosti $\langle\cdot,\cdot\rangle$. ∎

Trditev 2.117. *Naj bo* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *glavni sveženj s povezavo* ω *in* $E = P \times_\rho V$ *pridružen vektorski sveženj glede na upodobitev* (ρ, V) *Liejeve grupe* G. *Afina povezava* ∇ *na* E *je kompatibilna z metriko* $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$, *ki jo porodi* G*-invariantni skalarni produkt* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *na* V, *tj. velja*

$$X\,\langle \Phi, \Theta\rangle_E = \langle \nabla_X \Phi, \Theta\rangle_E + \langle \Phi, \nabla_X\Theta\rangle_E \tag{2.38}$$

za vse $X \in \mathfrak{X}(M)$ *in* $\Phi, \Theta \in \Gamma^\infty(E)$.

Dokaz. Veljavnost enačbe (2.38) je dovolj preveriti v poljubni umeritvi $s\colon U \to P$ glavnega svežnja $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$; po trditvi 2.48 velja $\Phi = [s,\phi]$ in $\Theta = [s,\theta]$ za neki natanko določeni preslikavi $\phi, \theta \in C^\infty(U,V)$. Desna stran zgornje enačbe, izvrednotena v $x \in U$, je

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla_X\Phi, \Theta\rangle_E(x) + \langle \Phi, \nabla_X\Theta\rangle_E(x) = \langle \nabla_X \phi, \theta\rangle(x) + \langle \phi, \nabla_X\theta\rangle(x)\\
&= \langle \mathrm{d}\phi(X_x) + \rho_*(A(X_x))(\phi(x)), \theta(x)\rangle + \langle \phi(x), \mathrm{d}\theta(X_x) + \rho_*(A(X_x))(\theta(x))\rangle\,,
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili enačbo (2.35). Leva stran enačbe (2.38), izvrednotena v $x \in U$, je

$$\begin{aligned}(X\left\langle \Phi, \Theta\right\rangle_E)(x) = (X\left\langle \phi, \theta\right\rangle)(x) &= \left(X \sum_a \phi^a \overline{\theta^a}\right)(x) \\ &= \sum_a \left(\mathrm{d}\phi^a(X_x)\overline{\theta^a(x)} + \phi^a(x)\overline{\mathrm{d}\theta^a(X_x)}\right) \\ &= \left\langle \mathrm{d}\phi(X), \theta\right\rangle(x) + \left\langle \phi, \mathrm{d}\theta(X)\right\rangle(x),\end{aligned}$$

kjer smo razvili $\phi = \phi^a v_a$ (za neke $\phi^a \in C^\infty(U)$) in podobno θ po neki ortonormirani bazi $(v_a)_a$ vektorskega prostora V. Torej je ekvivalentno dokazati, da velja

$$\left\langle \rho_*(A(X_x))(\phi(x)), \theta(x)\right\rangle + \left\langle \phi(x), \rho_*(A(X_x))(\theta(x))\right\rangle = 0 \tag{2.39}$$

za vse $x \in U$. To je vsebina naslednje leme. ■

Lema 2.118. *Naj bo (ρ, V) upodobitev Liejeve grupe G in $\langle\cdot,\cdot\rangle$ G-invariantni skalarni produkt na V. Za vse $v, w \in V$ in $Z \in \mathfrak{g}$ velja $\langle(\rho_* Z)v, w\rangle + \langle v, (\rho_* Z)w\rangle = 0$.*

Dokaz. Po G-invariantnosti velja

$$\langle v, w\rangle = \left\langle \rho_{\exp(tZ)}(v), \rho_{\exp(tZ)}(w)\right\rangle$$

za vse $t \in \mathbb{R}$. Če to identiteto odvajamo ob $t = 0$, dobimo željeno. ■

2.5.5 Vpliv umeritvene transformacije na vzporedni prenos

V fizikalnem delu razprave bomo potrebovali naslednje dejstvo, ki pa je zanimivo tudi samo po sebi. Naj bo $\gamma\colon I \to M$ odsekoma gladka pot v M; označimo s $\tau_t^\omega\colon \pi^{-1}(\gamma(0)) \to \pi^{-1}(\gamma(t))$ vzporedni prenos vzdolž poti γ glede na povezavo ω za čas $t \in I$.

Lema 2.119. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj s povezavo ω in $f \in \mathrm{Aut}(P)$. Če je $\gamma\colon I \to M$ odsekoma gladka pot v M, se vzporedni prenos $\tau_t^{f^*\omega}$ vzdolž γ glede na povezavo $f^*\omega$ izraža z ω in f na sledeč način:*

$$\tau_t^{f^*\omega} = f^{-1} \circ \tau_t^\omega \circ f. \tag{2.40}$$

Dokaz. Po definiciji je preslikava $\tau_t^{f^*\omega}$ določena s predpisom $\tau_t^{f^*\omega}(u) = \gamma_u^{f^*\omega}(t)$, kjer smo z $\gamma_u^{f^*\omega}$ označili horizontalni dvig poti γ glede na povezavo $f^*\omega$ z začetno točko u. Ta dvig je natanko določen z lastnostma, da pokrije pot γ in je $\dot\gamma_u^{f^*\omega}(t)$ za vse t horizontalen vektor. Po enačbi (2.30) pa velja

$$f^*\omega = \mathrm{Ad}_{\sigma_f^{-1}} \circ \omega + \sigma_f^* \mu_G,$$

kjer je $\sigma_f\colon P \to G$ implicitno določena z enakostjo $f(u) = u \cdot \sigma_f(u)$. Torej je $X_u \in T_u P$ horizontalen glede na $f^*\omega$ natanko tedaj, ko zanj velja enakost

$$\begin{aligned}\omega(X_u) &= -\mathrm{Ad}_{\sigma_f(u)} \circ \mathrm{d}(L_{\sigma_f(u)^{-1}})_{\sigma_f(u)} \circ \mathrm{d}(\sigma_f)_u(X_u) \\ &= -\,\mathrm{d}(R_{\sigma_f(u)^{-1}})_{\sigma_f(u)} \circ \mathrm{d}(\sigma_f)_u(X_u) \\ &= -\,\mathrm{d}(R_{\sigma_f(u)^{-1}} \circ \sigma_f)_u(X_u).\end{aligned}$$

Vidimo torej, da je pot ϑ_u v P z začetkom v u horizontalni dvig krivulje γ (tj. $\vartheta_u = \gamma_u^{f^*\omega}$) natanko tedaj, ko jo pokrije in zanjo velja

$$\omega(\dot{\vartheta}_u(t)) = -\operatorname{d}(R_{\sigma_f(\vartheta_u(t))^{-1}} \circ \sigma_f)_{\vartheta_u(t)}(\dot{\vartheta}_u(t)) \tag{2.41}$$

za vse $t \in I$.

Oglejmo si desno stran enačbe (2.40); imamo enakost

$$(f^{-1} \circ \tau_t^\omega \circ f)(u) = f^{-1}(\gamma_{f(u)}^\omega(t)) = (f^{-1} \circ \gamma_{f(u)}^\omega)(t),$$

kjer $\gamma_{f(u)}^\omega$ označuje horizontalni dvig poti γ z začetkom v $f(u)$ glede na povezavo ω. Če za dan $t \in I$ pišemo $p := \gamma_{f(u)}^\omega(t)$, potem velja

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ \gamma_{f(u)}^\omega)'(t) &= \operatorname{d}(f^{-1})_p(\dot{\gamma}_{f(u)}^\omega(t)) \\ &= \operatorname{d}(r_{\sigma_f(p)^{-1}})_p(\dot{\gamma}_{f(u)}^\omega(t)) + \sigma\big(((\sigma_f^{-1})^*\mu_G)_p(\dot{\gamma}_{f(u)}^\omega(t))\big)_{f(p)},\end{aligned} \tag{2.42}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili enakost (za poljuben $u \in P$)

$$\operatorname{d}f_u = \operatorname{d}(r_{\sigma_f(u)})_u + \sigma\big((\sigma_f^*\mu_G)(\cdot)\big)_{f(u)},$$

ki sledi iz odvajanja identitete $f = m \circ (\mathrm{id}_P, \sigma_f)$. Poenostaviti želimo drugi člen v (2.42); za poljuben $u \in P$ velja

$$((\sigma_f^{-1})^*\mu_G)_u = \operatorname{d}(L_{\sigma_f(u)})_{\sigma_f(u)^{-1}} \circ \operatorname{d}(\sigma_f^{-1})_u.$$

Dalje, če $\phi\colon G \times G \to G$ označuje množenje v Liejevi grupi, potem iz odvajanja identitete $\phi \circ (\sigma_f^{-1}, \sigma_f) = e$ v točki u, kjer desna stran predstavlja konstantno preslikavo v nevtralni element Liejeve grupe G, sledi

$$\operatorname{d}(R_{\sigma_f(u)})_{\sigma_f(u)^{-1}} \circ \operatorname{d}(\sigma_f^{-1})_u + \operatorname{d}(L_{\sigma_f(u)^{-1}})_{\sigma_f(u)} \circ \operatorname{d}(\sigma_f)_u = 0,$$

iz česar po komponiranju z $\mathrm{Ad}_{\sigma_f(u)}$ sledi

$$\operatorname{d}(L_{\sigma_f(u)})_{\sigma_f(u)^{-1}} \circ \operatorname{d}(\sigma_f^{-1})_u = -\operatorname{d}(R_{\sigma_f(u)^{-1}})_{\sigma_f(u)} \circ \operatorname{d}(\sigma_f)_u,$$

in zato

$$((\sigma_f^{-1})^*\mu_G)_u = -\operatorname{d}(R_{\sigma_f(u)^{-1}})_{\sigma_f(u)} \circ \operatorname{d}(\sigma_f)_u.$$

Zdaj enačba (2.42) postane

$$(f^{-1} \circ \gamma_{f(u)}^\omega)'(t) = \operatorname{d}(r_{\sigma_f(p)^{-1}})_p(\dot{\gamma}_{f(u)}^\omega(t)) - \sigma\big(\operatorname{d}(R_{\sigma_f(p)^{-1}} \circ \sigma_f)_p(\dot{\gamma}_{f(u)}^\omega(t))\big)_{f(p)}$$

in če na njej uporabimo ω, dobimo

$$\begin{aligned}&\omega\big((f^{-1} \circ \gamma_{f(u)}^\omega)'(t)\big) \\ &\quad= \omega\big(\operatorname{d}(r_{\sigma_f(p)^{-1}})_p(\dot{\gamma}_{f(u)}^\omega(t))\big) - \omega\big(\sigma\big(\operatorname{d}(R_{\sigma_f(p)^{-1}} \circ \sigma_f)_p(\dot{\gamma}_{f(u)}^\omega(t))\big)_{f(p)}\big) \\ &\quad= \mathrm{Ad}_{\sigma_f(p)^{-1}}\cancel{\big(\omega(\dot{\gamma}_{f(u)}^\omega(t))\big)} - \operatorname{d}(R_{\sigma_f(p)^{-1}} \circ \sigma_f)_p(\dot{\gamma}_{f(u)}^\omega(t)) \\ &\quad= -\operatorname{d}(R_{\sigma_f(p)^{-1}} \circ \sigma_f)_p(\dot{\gamma}_{f(u)}^\omega(t)),\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili definicijski lastnosti za ω in v tretji vrstici uporabili ω-horizontalnost poti $\gamma_{f(u)}^\omega$. Če zadnjo enačbo primerjamo z enačbo (2.41) in upoštevamo, da je $f^{-1} \circ \gamma_{f(u)}^\omega$ pot v P, ki pokrije γ ter ima začetno točko u, iz enoličnosti sledi

$$f^{-1} \circ \gamma_{f(u)}^\omega = \gamma_u^{f^*\omega},$$

kar smo želeli pokazati. ∎

2.6 Forme z vrednostmi v adjungiranem svežnju

Iz Riemannove geometrije vemo, da je razlika dveh afinih povezav na mnogoterosti M tenzorsko polje na M. Oglejmo si, kako se obnaša razlika povezav $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ na glavnem svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$. Seveda velja $\tilde{\omega} - \omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$. Dalje, za poljuben vektor $X \in \mathfrak{g}$ velja

$$(\tilde{\omega} - \omega)(\sigma(X)) = \tilde{\omega}(\sigma(X)) - \omega(\sigma(X)) = X - X = 0,$$

torej je 1-forma $\tilde{\omega} - \omega$ ničelna na vertikalnem podsvežnju V tangentnega svežnja TP. Poleg tega velja tudi $(r_g)^*(\tilde{\omega} - \omega) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ (\tilde{\omega} - \omega)$ po izreku 2.65.

Spomnimo se, da po izreku 2.78 velja, da je ukrivljenost Ω povezave ω horizontalna, in po trditvi 2.77 velja $(r_g)^*\Omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \Omega$. Torej si razlike povezav in ukrivljenosti povezav delijo neke skupne lastnosti – ubesedimo to z definicijo in trditvijo.

Definicija 2.120. Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj in $\alpha \in \Omega^k(P; \mathfrak{g})$. α je *horizontalna*, če za vsak $u \in P$ in $X_1, \dots, X_k \in T_uP$ velja

$$\alpha_u(X_1, \dots, X_k) = 0,$$

čim je vsaj eden od vektorjev $X_1, \dots, X_k$ vertikalen. Forma α je *tipa* Ad, če za vsak $g \in G$ velja

$$(r_g)^*\alpha = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \alpha.$$

Množico vseh horizontalnih k-form na P tipa Ad z vrednostmi v $\mathfrak{g}$ označimo z

$$\Omega^k_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}.$$

Trditev 2.121. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj.*

i) Za vsaki dve povezavi $\omega, \tilde{\omega}$ na P velja $\tilde{\omega} - \omega \in \Omega^1_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}$. Obratno, če je $\alpha \in \Omega^1_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}$ in je ω povezava na P, potem je $\tilde{\omega} := \omega + \alpha$ povezava na P.

ii) Za ukrivljenost Ω poljubne povezave ω na P velja $\Omega \in \Omega^2_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}$.

Dokaz. Neposredna posledica izrekov 2.65, 2.78 in trditve 2.77. ■

Opomba 2.122. Vidimo torej, da je množica vseh povezav na glavnem svežnju afin prostor nad vektorskim prostorom $\Omega^1_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}$

Za eleganten opis Yang–Millsove teorije bomo vzpostavili še naslednje abstraktno dejstvo.

Izrek 2.123. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj. Preslikava*

$$\begin{aligned} &T\colon \Omega^k_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}} \to \Omega^k(M; \mathrm{Ad}(P)) \\ &(T\alpha)_x(X_1, \dots, X_k) := [u, \alpha_u(X_1^*, \dots, X_k^*)] \quad \textit{za vse } X_i \in T_xM, \end{aligned}$$

kjer je $u \in \pi^{-1}(x)$ poljuben, je izomorfizem vektorskih prostorov.

Opomba 2.124. V definiciji predpisa za T je X_i^* horizontalni dvig vektorja X_i (dvig vektorja lahko napravimo po celem vlaknu in dobimo desno invariantno vektorsko polje $X_i^* \in \mathfrak{X}(\pi^{-1}(x))$ na vlaknu, tj. zanj velja $(r_g)_* X_i^* = X_i^*$).

Spomnimo, da smo z $\mathrm{Ad}(P) = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ označili adjungirani svežnenj iz primera 2.46. Elemente vektorskega prostora $\Omega^k(M; \mathrm{Ad}(P)) = \Gamma^\infty(\Lambda^k T^*M \otimes \mathrm{Ad}(P))$ imenujemo *forme z vrednostmi v adjungiranem svežnju* na M; so preslikave $T_xM \times \cdots \times T_xM \to \mathrm{Ad}(P)_x$, kjer je $\mathrm{Ad}(P)_x$ vlakno vektorskega svežnja $\mathrm{Ad}(P)$ nad točko $x \in M$.

Dokaz. Dokažimo dobro definiranost T, tj. neodvisnost od izbire $u \in \pi^{-1}(x)$. Če je $\tilde{u} \in \pi^{-1}(x)$, potem velja $\tilde{u} = u \cdot g^{-1}$ za neki $g \in G$. Potem je

$$\begin{aligned}
[\tilde{u}, \alpha_{\tilde{u}}(X_1^*, \ldots, X_k^*)] &= [u \cdot g^{-1}, \alpha_{u \cdot g^{-1}}(X_1^*, \ldots, X_k^*)] \\
&= [u, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\alpha_{u \cdot g^{-1}}(X_1^*, \ldots, X_k^*))] \\
&= [u, ({r_g}^*\alpha)_{u \cdot g^{-1}}(X_1^*, \ldots, X_k^*)] \\
&= [u, \alpha_u((r_g)_* X_1^*, \ldots, (r_g)_* X_k^*)] \\
&= [u, \alpha_u(X_1^*, \ldots, X_k^*)],
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili definicijo ekvivalenčnih razredov v $\mathrm{Ad}(P)_x$, skozi tretjega Ad-lastnost forme α, skozi petega pa desno invariantnost X_i^*.

Dokažimo gladkost forme $T\alpha$. Če je $s\colon U \to P$ umeritev glavnega svežnja $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ in so $X_i \in \mathfrak{X}(U)$ poljubna vektorska polja na U, potem je predpis

$$\big((T\alpha)(X_1, \ldots, X_k)\big)(x) = [s(x), \big(\alpha(X_1^*, \ldots, X_k^*)\big)(s(x))]$$

preslikave $U \to \mathrm{Ad}(P)_U$ očitno gladek, kar je ekvivalentno gladkosti forme $T\alpha|_U$. Ker lahko umeritev najdemo okoli poljubne točke $x \in M$, to dokazuje gladkost forme $T\alpha$.

Linearnost preslikave T je očitna, saj so operacije definirane po točkah.

Dokažimo bijektivnost T. Definirajmo njen inverz s predpisom

$$(T^{-1}\tilde{\alpha})_u(Y_1, \ldots, Y_k) := \xi_u \quad \text{za vse } Y_i \in T_uP,$$

kjer je vektor $\xi_u \in \mathfrak{g}$ podan implicitno z $[u, \xi_u] = \tilde{\alpha}_{\pi(u)}(\pi_* Y_1, \ldots, \pi_* Y_k)$; opomnimo, da je s tem predpisom enolično določen. Preverimo, da je levi inverz; velja

$$(T^{-1}(T\alpha))_u(Y_1, \ldots, Y_k) = \xi_u,$$

kjer je $[u, \xi_u] = (T\alpha)_{\pi(u)}(\pi_* Y_1, \ldots, \pi_* Y_k) = [u, \alpha_u\big((\pi_* Y_1)^*, \ldots, (\pi_* Y_k)^*\big)]$ in torej

$$\xi_u = \alpha_u\big((\pi_* Y_1)^*, \ldots, (\pi_* Y_k)^*\big) = \alpha_u({Y_1}^{\mathsf{H}}, \ldots, {Y_k}^{\mathsf{H}}) = \alpha_u(Y_1, \ldots, Y_k),$$

kjer smo na prehodu skozi zadnji enačaj uporabili horizontalnost α. Preverimo še, da je desni inverz;[‡‡] velja

$$\begin{aligned}
(T(T^{-1}\tilde{\alpha}))_x(X_1, \ldots, X_k) &= [u, (T^{-1}\tilde{\alpha})_u(X_1^*, \ldots, X_k^*)] \\
&= [u, \xi_u] \\
&= \tilde{\alpha}_{\pi(u)}(\pi_* X_1^*, \ldots, \pi_* X_k^*) \\
&= \tilde{\alpha}_x(X_1, \ldots, X_k),
\end{aligned}$$

[‡‡] Nimamo razloga, da bi mislili, da sta domena in kodomena končnorazsežna vektorska prostora, zato je potrebno preveriti, da je T^{-1} obojestranski inverz.

kjer smo na prehodu skozi zadnji enačaj uporabili definicijsko enakost horizontalnega dviga vektorja. ∎

Posledica 2.125. *Naj bo* $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *glavni sveženj. Ukrivljenost* $\Omega \in \Omega^2(P;\mathfrak{g})$ *poljubne povezave* ω *lahko identificiramo z 2-formo* $F_M := T(\Omega) \in \Omega^2(M;\mathrm{Ad}(P))$ *na* M *z vrednostmi v* $\mathrm{Ad}(P)$.

Opomba 2.126. V primeru, ko je G abelova, je upodobitev $(\mathrm{Ad},\mathfrak{g})$ trivialna, iz primera 2.44 pa tedaj sledi, da je adjungirani sveženj $\mathrm{Ad}(P)$ trivialen. V tem primeru lahko torej F_M iz zadnje posledice interpretiramo kot element prostora $\Omega^2(M;\mathfrak{g})$, kar pomeni, da smo ravnokar posplošili posledico 2.90 na primer, ko strukturna grupa G ni nujno abelova.

To opažanje je ključno za posplošitev Maxwellove teorije na neabelovo strukturno grupo v naslednjem poglavju.

3 Umeritveni bozoni

Motivacija. Poglavje o umeritvenih bozonih motivirajmo z obravnavo Maxwellove teorije. V tem celotnem poglavju bomo zelo pogosto potrebovali koncept orientacije mnogoterosti, zato povejmo nekaj o njem; bralec lahko vse naslednje definicije in rezultate najde v [10, poglavje 15].

Dve karti (U, φ) in (V, ϑ) na gladki mnogoterosti M *določata isto orientacijo*, če na množici $\varphi(U \cap V)$ velja $\det \mathrm{d}(\vartheta \circ \varphi^{-1}) > 0$. Gladek atlas na mnogoterosti je *orientiran*, če vsaki dve karti v njem določata isto orientacijo. Gladka mnogoterost je *orientabilna*, če v njenem maksimalnem gladkem atlasu obstaja kak orientiran podatlas. *Orientacija* gladke mnogoterosti M je izbira nekega orientiranega podatlasa v maksimalnem gladkem atlasu. Tedaj rečemo, da je mnogoterost M *orientirana*. Dobro poznan rezultat iz teorije gladkih mnogoterosti pravi, da je gladka mnogoterost M orientabilna natanko tedaj, ko na njej obstaja povsod neničelna diferencialna n-forma (glej [10, trditev 15.5]), ki jo imenujemo *volumska forma*.

Izbira orientacije mnogoterosti M nam v vsaki točki $x \in M$ porodi orientacijo tangentnega prostora T_xM – osnove o orientacijah vektorskih prostorov so navedene v dodatku A.1, kjer bo bralec našel tudi koncept t. i. *volumskega elementa* na orientiranem vektorskem prostoru s psevdo skalarnim produktom, ki je osnova za vpeljavo naslednjega koncepta. Naj bo (M, g) orientirana psevdo Riemannova mnogoterost. Potem na njej obstaja enolično določena *psevdo Riemannova volumska forma* ω_g na M, tj. taka n-forma na M, ki se na vsakem orientiranem psevdo ortonormiranem lokalnem ogrodju $(E_\mu)_\mu$ tangentnega svežnja TM izvrednoti v ena;

$$\omega_g(E_0, \ldots, E_{n-1}) = 1.$$

To pomeni, da psevdo Riemannova volumska forma v vsaki točki določa nek volumski element. Če bralec s psevdo Riemannovo volumsko formo ni domač, se lahko o njej pouči npr. v [10, str. 388–390].

Prostor Minkowskega je orientabilna (saj na njej obstaja globalna karta) štirirazsežna psevdo Riemannova mnogoterost $M = \mathbb{R}^4$ s psevdo metriko Minkowskega $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Kot vemo iz uvodnega poglavja, je na standardnem orientiranem psevdo ortonormiranem ogrodju $(\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$ tangentnega svežnja TM psevdo metrika Minkowskega dana z

$$\langle \partial_t, \partial_t \rangle = 1, \ \langle \partial_x, \partial_x \rangle = -1, \ \langle \partial_y, \partial_y \rangle = -1, \ \langle \partial_z, \partial_z \rangle = -1.$$

Naj bodo zdaj $E_i, B_i \in C^\infty(M)$, kjer je $i = 1, 2, 3$. Na M lahko vpeljemo *jakost F elektromagnetnega polja* kot

$$\begin{aligned} F := &- E_x \, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x - E_y \, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y - E_z \, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z \\ &+ B_x \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B_y \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + B_z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Enostaven izračun pokaže, da velja

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F = &(\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (\partial_y E_z - \partial_z E_y + \partial_t B_x) \, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ &+ (\partial_z E_x - \partial_x E_z + \partial_t B_y) \, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (\partial_x E_y - \partial_y E_x + \partial_t B_z) \, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

zato velja ekvivalenca

$$\mathrm{d}F = 0 \iff \operatorname{div} \vec{B} = 0, \ \operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0,$$

torej je zahteva $\mathrm{d}F = 0$ ekvivalentna Gaussovemu in Faradayevemu zakonu elektromagnetizma.

Za pridobitev preostalih dveh Maxwellovih enačb je potrebno uporabiti Hodge-$\star$ operator; v kolikor bralec s tem konceptom ni domač, smo osnovne definicije in rezultate o njem zbrali v dodatku A.1. Po formuli (A.4) velja

$$\star(\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x) = -\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,\ \star(\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y) = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z,\ \star(\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z) = -\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

in zato, upoštevajoč $\star\star = -I$, sledi

$$\begin{aligned}\star F = E_x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + E_y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + E_z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ + B_x\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x + B_y\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y + B_z\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Če zadnji izraz vnanje odvajamo, dobimo

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\star F = (\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (\partial_z B_y - \partial_y B_z + \partial_t E_x)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ + (\partial_x B_z - \partial_z B_x + \partial_t E_y)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (\partial_y B_x - \partial_x B_y + \partial_t E_z)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\end{aligned}$$

oziroma

$$\star\mathrm{d}\star F = -(\operatorname{div}\vec{E})\,\mathrm{d}t + (-\operatorname{rot}\vec{B} + \partial_t\vec{E})_i\,\mathrm{d}x^i,$$

kjer indeks i teče po $1, 2, 3$. Vidimo torej, da velja $\star\mathrm{d}\star F = 0$ natanko tedaj, ko veljata enačbi $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ in $\operatorname{rot}\vec{B} - \partial_t\vec{E} = 0$. Enakost $\star\mathrm{d}\star F = 0$ je torej ekvivalentna brezizvornemu Coulombovemu in Amperovemu zakonu elektromagnetizma.

Naj bodo zdaj $J_\mu \in C^\infty(M)$ za vse $\mu = 0, \ldots, 3$ in definirajmo *1-formo J izvorov elektromagnetnega polja* kot

$$J := J_\mu\,\mathrm{d}x^\mu,$$

ter pišimo $\rho = J_0$ ter $J_x = J_1, J_y = J_2, J_z = J_3$. Upoštevajoč zgornjo enačbo za $\star\mathrm{d}\star F$ vidimo, da velja ekvivalenca

$$\star\mathrm{d}\star F + J = 0 \iff \operatorname{div}\vec{E} = \rho,\ \operatorname{rot}\vec{B} - \partial_t\vec{E} = \vec{J},$$

kar ustreza Coulombovemu in Amperovemu zakonu elektromagnetizma z izvori J elektromagnetnega polja. Torej se Maxwellove enačbe (z izvori) na M glasijo

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F &= 0,\\ \star\mathrm{d}\star F + J &= 0.\end{aligned}$$

Omenimo še, da z uporabo operatorja $\mathrm{d}\star$ na drugi enačbi sledi

$$0 = \mathrm{d}(-\,\mathrm{d}\star F + \star J) = \mathrm{d}\star J = (\partial_t\rho + \partial_x J_x + \partial_y J_y + \partial_z J_z)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

kar je ekvivalentno kontinuitetni enačbi $\partial_t\rho + \operatorname{div}\vec{J} = 0$.

V nadaljevanju nas bodo zaenkrat zanimale le brezizvorne Maxwellove enačbe

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F &= 0,\\ \star\mathrm{d}\star F &= 0.\end{aligned}$$

Iz prve enačbe (ki velja tudi v primeru, ko so prisotni izvori) po Poincaréjevem izreku in kontraktibilnosti M sledi $F = \mathrm{d}A$ za neko diferencialno 1-formo A, kar v izbranih lokalnih koordinatah zapišemo kot $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Imenujemo jo *elektromagnetni potencial.*

Teorijo elektromagnetizma lahko zdaj ohlapno interpretiramo kot trivialni U(1)-glavni sveženj nad prostorom Minkowskega na sledeč način. Formo F interpretiramo kot 2-formo na M z vrednostmi v $\mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{R}$. Takoj opazimo, da je v tej interpretaciji enačba $\mathrm{d}F = 0$ povzeta z Bianchijevo identiteto (2.26) za jakost umeritvenega polja, saj je U(1) abelova. Podobno želimo storiti tudi z identiteto $\star\mathrm{d}\star F = 0$; neposreden izračun pokaže, da je le-ta ekvivalentna enačbi

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0,$$

v standardnih koordinatah, kjer smo pisali $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu$. Ta enačba povzema dejstvo, da je F stacionarna točka Maxwellovega akcijskega funkcionala

$$S = -\frac{1}{4}\int_M F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,\mathrm{d}^4x, \tag{3.1}$$

v kar se lahko z neposrednim izračunom prepričamo npr. z vstavitvijo Maxwellovega Lagrangiana

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

v Euler–Lagrangeeve enačbe

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A^\nu} + \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = 0.$$

Enačbo (3.1) lahko zapišemo še drugače, z vedenjem, da psevdo skalarni produkt na M inducira *psevdo skalarni produkt** *običajnih diferencialnih k-form*

$$\begin{aligned}&\langle\cdot,\cdot\rangle : \Omega^k(M)\times\Omega^k(M)\to C^\infty(M),\\ &\langle\alpha,\beta\rangle := \sum_{\mu_1<\cdots<\mu_k}\alpha_{\mu_1\ldots\mu_k}\beta^{\mu_1\ldots\mu_k} = \frac{1}{k!}\alpha_{\mu_1\ldots\mu_k}\beta^{\mu_1\ldots\mu_k},\end{aligned}$$

kjer smo pisali $\alpha_{\mu_1\ldots\mu_k} = \alpha(\partial_{\mu_1},\ldots,\partial_{\mu_k})$. Torej je jasno, da lahko zapišemo enačbo (3.1) kot

$$S = -\frac{1}{2}\int_M \langle F,F\rangle\,\omega_g,$$

kjer ω_g označuje psevdo Riemannovo volumsko formo na M, ki se v izbranih lokalnih koordinatah izraža kot $\omega_g = \mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$.

V nadaljevanju bomo zgornji mehanizem naredili precizen in ga posplošili na splošnejši primer glavnega svežnja $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ s povezavo ω nad orientirano psevdo Riemannovo mnogoterostjo (M,g). Za to moramo spretno definirati zgornje pojme za diferencialne forme z vrednostmi v poljubnem vektorskem svežnju E – v skladu s posledico 2.125 bomo na koncu vzeli $E = \mathrm{Ad}(P)$.

*Ta preslikava seveda ni običajni psevdo skalarni produkt (le rečemo mu tako, saj ga porodi psevdo metrika g). Je namreč $C^\infty(M)$-bilinearna preslikava s kodomeno $C^\infty(M)$.

3.1 Pripomočki

3.1.1 Hodge-$\star$ operator

Naslednja dejstva privzamemo kot danosti – bralec se lahko o njih prepriča v dodatku A.1. Hodge-$\star$ operator je izomorfizem vektorskih svežnjev $\Lambda^k(T^*M)$ in $\Lambda^{n-k}(T^*M)$, za vsak $k \in \{0, \dots, n\}$, nad orientirano psevdo Riemannovo mnogoterostjo (M, g). Zato porodi $C^\infty(M)$-linearen izomorfizem $\star\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ med diferencialnimi formami dualnih dimenzij k in $n - k$. Zapisan izomorfizem $\star$ je v splošnem implicitno podan z enakostjo

$$\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \, \omega_g,$$

za vse diferencialne k-forme α in β na M. Če je $(E^\mu)_\mu$ psevdo ortonormirano ogrodje kotangentnega svežnja T^*M, tj. $\langle E^\mu, E^\nu \rangle = \eta^{\mu\nu} \in \{-1, +1\}$, potem se $\star$ izraža na baznih k-formah kot

$$\star(E^{\mu_1} \wedge \dots \wedge E^{\mu_k}) = \eta^{\mu_1\mu_1} \dots \eta^{\mu_k\mu_k} \operatorname{sgn}(\sigma_I) E^{\mu_{k+1}} \wedge \dots \wedge E^{\mu_n},$$

kjer je $\sigma_I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \end{smallmatrix}\right) \in S_n$ permutacija (in ne upoštevamo sumacijskega dogovora).

3.1.2 Forme z vrednostmi v vektorskem svežnju

Pojem skalarnega produkta diferencialnih form lahko posplošimo na primer, ko zavzemajo vrednosti v vektorskem svežnju, kot to velja za globalno diferencialno formo $F_M = T(\Omega)$ z vrednostmi v adjungiranem svežnju $\mathrm{Ad}(P)$ (posledica 2.125). Predhodno spomnimo, da lahko ob danem lokalnem ogrodju $(e_i)_{i=1}^r$ vektorskega svežnja E zapišemo $F \in \Omega^k(M; E) = \Gamma^\infty(\Lambda^k(T^*M) \otimes E)$ kot $F = \sum_{i=1}^r F^i \otimes e_i$ za neke običajne diferencialne k-forme $F^i \in \Omega^k(M)$. V nadaljevanju bo E vedno nad obsegom $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ in končnega ranga r.

Definicija 3.1. Naj bo E vektorski sveženj ranga r nad psevdo Riemannovo mnogoterostjo (M, g) in $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ metrika na E. *Psevdo skalarni produkt diferencialnih k-form z vrednostmi v E* je preslikava

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_E &: \Omega^k(M; E) \times \Omega^k(M; E) \to C^\infty(M, \mathbb{F}), \\ \langle F, G \rangle_E &:= \sum_{i,j=1}^r \left\langle F^i, G^j \right\rangle \langle e_i, e_j \rangle_E \,, \end{aligned}$$

kjer je $(e_i)_{i=1}^r$ poljubno lokalno ogrodje vektorskega svežnja E in smo razvili $F = \sum_{i=1}^r F^i \otimes e_i$ in $G = \sum_{j=1}^r G^j \otimes e_j$ za neke običajne diferencialne k-forme $F^i, G^j \in \Omega^k(M)$.

Opomba 3.2. Enostavno se je prepričati, da je ta definicija neodvisna od izbire lokalnega ogrodja za E; uporabimo namreč dejstvo, da za poljubni dve ogrodji $(e_i)_i$ in $(\tilde{e}_i)_i$ vektorskega svežnja E obstaja matrika gladkih funkcij $A = [A^i{}_j]$, da velja $e_j = \tilde{e}_i A^i{}_j$, iz česar sledi $F^i = (A^{-1})^i{}_j \tilde{F}^j$.

Definicija 3.3. Naj bo E vektorski sveženj ranga r nad orientirano psevdo Riemannovo mnogoterostjo (M, g). *Hodge-$\star$ operator na diferencialnih k-formah z vrednostmi v E* je preslikava

$$\star\colon \Omega^k(M; E) \to \Omega^{n-k}(M; E),$$
$$\star F := \sum_{i=1}^{r} (\star F^i) \otimes e_i,$$

kjer je $(e_i)_{i=1}^r$ poljubno lokalno ogrodje vektorskega svežnja E in smo razvili $F = \sum_{i=1}^r F^i \otimes e_i$ za neke običajne diferencialne k-forme $F^i \in \Omega^k(M)$.

Dodatno, naj bo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ metrika na E. *L^2-psevdo skalarni produkt diferencialnih k-form (s kompaktnim nosilcem) z vrednostmi v E* je preslikava

$$\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_E \colon \Omega_c^k(M; E) \times \Omega_c^k(M; E) \to \mathbb{F},$$
$$\langle\!\langle F, G \rangle\!\rangle_E := \int_M \langle F, G \rangle_E \, \omega_g.$$

Naslednja trditev pravi, da je $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_E$ zares psevdo skalarni produkt.

Trditev 3.4. *Naj bo E vektorski sveženj nad orientirano psevdo Riemannovo mnogoterostjo (M, g) in $\langle \cdot, \cdot \rangle$ metrika na E. $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_E$ je psevdo skalarni produkt na vektorskem prostoru $\Omega_c^k(M; E)$.*

Dokaz. Preverimo le neizrojenost; ostalo je očitno. Obravnavajmo primer $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Potrebno je preveriti, da za dan $F \in \Omega_c^k(M; E)$ velja:

$$\text{če je } \langle\!\langle F, G \rangle\!\rangle_E = 0 \text{ za vse } G \in \Omega_c^k(M; E), \text{ potem je } F = 0.$$

Če predpostavimo $\int_M \langle F, G \rangle_E \, \omega_g = 0$ za vse G, potem po $C^\infty(M)$-linearnosti $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ velja tudi $\int_M \varphi \langle F, G \rangle_E \, \omega_g = 0$ za vse $\varphi \in C_c^\infty(M)$ in $G \in \Omega_c^k(M; E)$. Posledično je

$$\langle F, G \rangle_E = 0 \text{ za vse } G \in \Omega_c^k(M; E).$$

Res, sicer obstaja tak G, da v neki točki $x \in M$ velja $\langle F, G \rangle_E (x) \neq 0$, zato po zveznosti velja $\langle F, G \rangle_E |_U \neq 0$; še več, na neki okolici U točke x je ta funkcija enakega predznaka. Obstaja pa testna funkcija $\varphi \in C^\infty(U)$ (nenegativna in na nekem kompaktu okoli x znotraj U enotska), ki ima kompaktni nosilec vsebovan v U, zato tedaj $\int_M \varphi \langle F, G \rangle_E \, \omega_g \neq 0$, kar je protislovje.[†] V posebnem velja

$$\langle F, G \rangle_E = 0 \text{ za vse } G \in \Omega_c^k(U; E)$$

za poljubno lokalno trivializirajočo okolico U vektorskega svežnja E. Tam lahko pišemo $F = \sum_i F^i \otimes e_i$ ipd. za poljuben G, kjer je $(e_i)_i$ neko ortonormirano lokalno ogrodje za E. Potem je $\langle F, G \rangle_E = \sum_i \langle F^i, G^i \rangle = 0$ za vsako k-terico običajnih diferencialnih k-form G^i, kar implicira, da v vsaki točki $x \in U$ velja

$$\left\langle F^i|_x, \alpha \right\rangle = 0 \text{ za vsak alternirajoč } k\text{-kovektor } \alpha \in \Lambda^k(T_x^* M).$$

[†]Pravkar smo izvedli isti trik, kot se običajno izvede pri dokazu osnovne leme variacijskega računa.

Če je $(\varepsilon_i)_i$ psevdo ortonormirana baza za T_x^*M, lahko brez škode za splošnost privzamemo $F^i|_x = c\,\varepsilon^{j_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{j_k}$. Ob izbiri $\alpha = \varepsilon^{j_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{j_k}$ zdaj sledi

$$0 = \left\langle F^i|_x, \alpha \right\rangle = c g^{j_1 j_1} \ldots g^{j_k j_k},$$

zato tudi $c = 0$. Točka x in njena okolica U sta bili poljubni, zato je $F = 0$. ■

Opomba 3.5. Podobno bi lahko razmislili, da je $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_E$ pozitivno definiten, če je (M, g) Riemannova mnogoterost. Zgolj ob predpostavki, da je (M, g) orientirana psevdo Riemannova mnogoterost, lahko podobno premislimo tudi, da je preslikava

$$\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle \colon \Omega_c^k(M) \times \Omega_c^k(M) \to \mathbb{F},$$
$$\langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle := \int_M \langle \alpha, \beta \rangle \, \omega_g$$

psevdo skalarni produkt na vektorskem prostoru $\Omega_c(M)$ (običajnih) diferencialnih form s kompaktnim nosilcem.

3.1.3 Kovariantni vnanji odvod

Na prostoru $\Omega^k(M; E)$ diferencialnih form z vrednostmi v vektorskem svežnju E lahko enostavno vpeljemo pojem vnanjega produkta.

Definicija 3.6. Naj bo E vektorski sveženj nad mnogoterostjo M. *Vnanji produkt* diferencialnih form F in G z vrednostmi v E je

$$\wedge \colon \Omega^k(M; E) \times \Omega^l(M; E) \to \Omega^{k+l}(M; E),$$
$$F \wedge G := \sum_{i=1}^{r} (F^i \wedge G^i) \otimes e_i,$$

kjer je $(e_i)_{i=1}^r$ poljubno lokalno ogrodje vektorskega svežnja E in smo razvili $F = \sum_{i=1}^r F^i \otimes e_i$ in $G = \sum_{j=1}^r G^j \otimes e_j$ za neke običajne diferencialne k-forme $F^i, G^j \in \Omega^k(M)$.

Spet se je enostavno prepričati v neodvisnost zgornje definicije od izbire lokalnega ogrodja za E. Naivna definicija vnanjega odvoda diferencialne forme z vrednostmi v vektorskem svežnju pa ne bi bila neodvisna od izbire lokalnega ogrodja za E, saj za vnanji odvod običajnih diferencialnih form obvelja stopničasto Leibnizevo pravilo

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta,$$

kjer je $k = \dim \alpha$. Zato potrebujemo naslednjo definicijo.

Definicija 3.7. Naj bo E vektorski sveženj nad mnogoterostjo M in ∇ afina povezava na E. *Kovariantni vnanji odvod* diferencialne k-forme z vrednostmi v E je preslikava

$$\mathrm{d}_\nabla \colon \Omega^k(M; E) \to \Omega^{k+1}(M; E)$$
$$\mathrm{d}_\nabla F := \sum_{i=1}^{r} \left(\mathrm{d}F^i \otimes e_i + (-1)^k F^i \wedge \nabla e_i \right) \tag{3.2}$$

kjer je $(e_i)_{i=1}^r$ poljubno lokalno ogrodje vektorskega svežnja E in smo razvili $F = \sum_{i=1}^r F^i \otimes e_i$ za neke običajne diferencialne k-forme $F^i \in \Omega^k(M)$.

Opomba 3.8. Če je E pridružen sveženj glavnemu svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glede na upodobitev (ρ, V) Liejeve grupe G, kovariantni odvod ∇ na E pa je porojen s povezavo $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$, potem označimo $\nabla = \nabla^\omega$ in $\mathrm{d}_\nabla = \mathrm{d}_\omega$.

Trditev 3.9. *Definicija kovariantnega vnanjega odvoda za diferencialne forme z vrednostmi v vektorskem svežnju je neodvisna od izbire lokalnega ogrodja.*

Dokaz. Za bolj pregleden izračun izpuščamo vsote in upoštevamo sumacijsko pravilo. Naj bosta $(e_i)_i$ in $(\tilde{e}_i)_i$ lokalni ogrodji vektorskega svežnja E na neki odprti podmnožici $U \subset M$. Potem velja $e_i = \tilde{e}_j A^j{}_i$ za neko matriko A gladkih funkcij na U in posledično $F^i = (A^{-1})^i{}_j \tilde{F}^j$. Če ta dva izraza vstavimo v (3.2), dobimo

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_\nabla F &= \mathrm{d}\Big((A^{-1})^i{}_j \tilde{F}^j\Big) \otimes (\tilde{e}_l A^l{}_i) + (-1)^k (A^{-1})^i{}_j \tilde{F}^j \wedge \nabla(\tilde{e}_l A^l{}_i) \\
&= A^l{}_i \Big(\mathrm{d}(A^{-1})^i{}_j \wedge \tilde{F}^j + (A^{-1})^i{}_j \, \mathrm{d}\tilde{F}^j\Big) \otimes \tilde{e}_l \\
&+ (-1)^k (A^{-1})^i{}_j \tilde{F}^j \wedge \big(A^l{}_i \nabla \tilde{e}_l + (\mathrm{d}A^l{}_i) \otimes \tilde{e}_l\big) \\
&= \mathrm{d}\tilde{F}^j \otimes \tilde{e}_j + (-1)^k \tilde{F}^j \wedge \nabla \tilde{e}_j \\
&+ A^l{}_i \, \mathrm{d}(A^{-1})^i{}_j \wedge \tilde{F}^j \otimes \tilde{e}_l + (-1)^k (A^{-1})^i{}_j \Big(\tilde{F}^j \wedge (\mathrm{d}A^l{}_i)\Big) \otimes \tilde{e}_l,
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili stopničasto Leibnizevo pravilo za d in Leibnizevo pravilo za ∇, skozi zadnjega pa zgolj premešali člene. Zadnja vrstica v zgornjem izračunu zdaj odpade zaradi enakosti

$$0 = \mathrm{d}(A^l{}_i (A^{-1})^i{}_j) = (A^{-1})^i{}_j \, \mathrm{d}A^l{}_i + A^l{}_i \, \mathrm{d}(A^{-1})^i{}_j$$

in stopničaste komutativnosti običajnega vnanjega produkta, kar dokazuje želeno. ∎

Opomba 3.10. Enostavno je videti, da je $\Omega^0(M; E) = \Gamma^\infty(E)$ in da je na 0-formah z vrednostmi v E kovariantni vnanji odvod kar enak običajnemu kovariantnemu odvodu na E, tj. $\mathrm{d}_\nabla|_{\Gamma^\infty(E)} = \nabla$. Torej posplošujemo pojem kovariantnega odvoda na E.

Trditev 3.11 (Lastnosti kovariantnega vnanjega odvoda)**.** *Naj bo E $\mathbb{F}$-vektorski sveženj nad mnogoterostjo M in ∇ afina povezava na E. Za kovariantni vnanji odvod diferencialne forme z vrednostmi v vektorskem svežnju velja:*

i) $\mathrm{d}_\nabla\colon \Omega^k(M; E) \to \Omega^{k+1}(M; E)$ *je $\mathbb{F}$-linearna preslikava.*

ii) $\mathrm{d}_\nabla(\alpha \otimes \sigma) = \mathrm{d}\alpha \otimes \sigma + (-1)^k \alpha \wedge \nabla\sigma$ *za vse* $\alpha \in \Omega^k(M)$ *in* $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$.

iii) $(\mathrm{d}_\nabla \mathrm{d}_\nabla \sigma)(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma = R(X, Y)\sigma$ *za vse* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *in* $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$.

Dokaz. Točki i) in ii) sta neposredni posledici definicije (3.2). Da dokažemo točko iii), si je potrebno ogledati Cartanovo definicijo povezavne 1-forme in ukrivljenostne 2-forme, kot v enačbi (2.15). Naj bo $(e_i)_{i=1}^r$ lokalno ogrodje za E na neki odprti množici $U \subset M$; potem velja

$$\nabla_X e_i = \sum_j \omega^j{}_i(X) e_j, \quad R(X, Y) e_i = \sum_j \Omega^j{}_i(X, Y) e_j$$

za neke običajne diferencialne forme ${\omega^j}_i \in \Omega^1(U)$ in ${\Omega^j}_i \in \Omega^2(U)$. Če razvijemo $\sigma = \alpha^i e_i$ za neke $\alpha_i \in C^\infty(U)$ in izpuščamo vsote, potem je

$$\mathrm{d}_\nabla \mathrm{d}_\nabla \sigma = \mathrm{d}_\nabla \nabla\sigma = \mathrm{d}_\nabla(\mathrm{d}\alpha^i \otimes e_i + \alpha^i \nabla e_i) = -\,\mathrm{d}\alpha^i \wedge \nabla e_i + \mathrm{d}\alpha^i \wedge \nabla e_i + \alpha^i\, \mathrm{d}_\nabla(\nabla e_i)$$

in dalje

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}_\nabla(\nabla e_i))\,(X,Y) &= \left(\mathrm{d}{\omega^j}_i \otimes e_j - {\omega^j}_i \wedge \nabla e_j\right)(X,Y) \\
&= \left(\mathrm{d}{\omega^j}_i \otimes e_j - ({\omega^j}_i \wedge {\omega^l}_j) \otimes e_l\right)(X,Y) \\
&= \mathrm{d}{\omega^j}_i(X,Y) e_j + ({\omega^l}_j \wedge {\omega^j}_i)(X,Y) e_l \\
&= \left(\mathrm{d}{\omega^l}_i(X,Y) + ({\omega^l}_j \wedge {\omega^j}_i)(X,Y)\right) e_l \\
&= {\Omega^l}_i(X,Y) e_l,
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi prvi enačaj upoštevali definicijo d_∇, skozi drugega upoštevali Cartanovo definicijo povezavne 1-forme, skozi tretjega upoštevali antikomutiranje običajnih 1-form in vstavili argumenta v posamezne forme v vsoti, skozi četrtega preuredili indekse in skozi petega upoštevali Cartanovo strukturno enačbo (2.16). Velja torej

$$(\mathrm{d}_\nabla \mathrm{d}_\nabla \sigma)(X,Y) = {\Omega^l}_i(X,Y)\alpha^i e_l = R(X,Y)\sigma. \qquad \blacksquare$$

Opomba 3.12. Vidimo, da namesto enakosti $\mathrm{d}_\nabla \mathrm{d}_\nabla = 0$ velja, da je $\mathrm{d}_\nabla \mathrm{d}_\nabla$ enak Riemannovemu ukrivljenostnemu tenzorju glede na povezavo ∇ na E, kar priča o naravnosti definicije d_∇.

Lokalna izražava kovariantnega vnanjega odvoda

Zanima nas, kako se kovariantni vnanji odvod na $\Omega^k(M; \mathrm{Ad}(P))$ izraža lokalno, tj. v neki lokalni umeritvi za P.

Naj bo $s\colon U \to P$ umeritev glavnega svežnja $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$. Če je $(v_i)_i$ baza Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, potem lahko definiramo $e_i = [s, v_i]$ (tu v_i označuje konstantno preslikavo v vektor v_i) in tedaj je $(e_i)_i$ lokalno ogrodje za $\mathrm{Ad}(P)$. Naj bo $\alpha = \alpha^i \otimes v_i \in \Omega^k_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}$ in $\alpha_M = T\alpha \in \Omega^k(M; \mathrm{Ad}(P))$; slednjo lahko izrazimo s koeficienti α^i. Res, po definiciji je α_M enaka

$$(\alpha_M)_x(X) = [s(x), (\alpha^i)_{s(x)}(s_* X) v_i] = [s(x), (s^*\alpha^i)_x(X) v_i], \text{ za vse } X \in T_x M,$$

kar z izpuščenima argumentoma x in X zapišemo kot

$$\alpha_M = (s^*\alpha^i) \otimes [s, v_i] = s^*\alpha^i \otimes e_i,$$

in dalje v umeritvi s to zapišemo kot $(\alpha_M)_s = s^*\alpha^i \otimes v_i \in \Omega^k(M; \mathfrak{g})$. V splošnem torej velja $(\alpha_M)_s = (T\alpha)_s = s^*\alpha$. Zanima nas izražava za $(\mathrm{d}_\omega \alpha_M)_s$.

Po definiciji kovariantnega vnanjega odvoda je

$$\mathrm{d}_\omega \alpha_M = \mathrm{d}(s^*\alpha^i) \otimes e_i + (-1)^k (s^*\alpha^i) \wedge \nabla^\omega e_i,$$

in iz enačbe (2.34) zaradi konstantnosti v_i sledi

$$\nabla^\omega_{X_x} e_i = [s(x), \mathrm{Ad}_*(A^\omega(X_x))(v_i)] = [s(x), \mathrm{ad}(A^\omega(X_x)) v_i] \text{ za vse } X_x \in T_x M,$$

kjer je $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{ad} = \mathrm{Ad}_*$ tako imenovana adjungirana upodobitev Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ in $A^\omega = s^*\omega$. V kontekstu teorije Liejevih grup pa po [14, trditev 2.45] velja naslednja enakost za adjungirano upodobitev Liejeve algebre $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{ad}(v)w = [v, w] \text{ za vse } v, w \in \mathfrak{g}.$$

Zato lahko zapišemo $\nabla^\omega_{X_x} e_i = [s(x), [A^\omega(X_x), v_i]]$ in posledično tudi

$$\left(\nabla^\omega_{X_x} e_i\right)_s = [A^\omega(X_x), v_i].$$

Če zapišemo $\omega = \omega^i \otimes v_i$, potem je $A^\omega = s^*\omega^j \otimes v_j$, iz česar sledi

$$(\nabla^\omega_{X_x} e_i)_s = (s^*\omega^j)(X_x)[v_j, v_i] \text{ in zato } (\nabla^\omega e_i)_s = (s^*\omega^j) \otimes [v_j, v_i].$$

Skupno dobimo torej

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}_\omega \alpha_M)_s &= \mathrm{d}(s^*\alpha^i) \otimes v_i + (-1)^k (s^*\alpha^i) \wedge (s^*\omega^j) \otimes [v_j, v_i] \\
&= \mathrm{d}(s^*\alpha^i) \otimes v_i + (s^*\omega^j) \wedge (s^*\alpha^i) \otimes [v_j, v_i] \\
&= \mathrm{d}(s^*\alpha^i) \otimes v_i + [s^*\omega \wedge s^*\alpha] \\
&= s^*(\mathrm{d}\alpha + [\omega \wedge \alpha]) \\
&= T(\mathrm{d}\alpha + [\omega \wedge \alpha])_s,
\end{aligned}$$

kjer smo večkrat uporabili lemo 2.71. Dokazali smo torej naslednje.

Trditev 3.13. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj s povezavo ω. Za vsako horizontalno formo $\alpha \in \Omega^k_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}$ tipa* Ad *z vrednostmi v $\mathfrak{g}$ se kovariantni vnanji odvod $\mathrm{d}_\omega \alpha_M$ forme $\alpha_M \in \Omega^k(M; \mathrm{Ad}(P))$ v dani umeritvi $s\colon U \to P$ izraža z*

$$(\mathrm{d}_\omega \alpha_M)_s = s^*(\mathrm{d}\alpha + [\omega \wedge \alpha]) = T(\mathrm{d}\alpha + [\omega \wedge \alpha])_s. \tag{3.3}$$

Opomba 3.14. Zapis $T(\mathrm{d}\alpha + [\omega \wedge \alpha])$ je upravičen, saj je T na formah tipa Ad dobro definirana in je $\mathrm{d}\alpha + [\omega \wedge \alpha]$ forma tipa Ad.

Posledica 3.15. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj s povezavo ω. Potem velja*

$$\mathrm{d}_\omega \alpha_M = T(\mathrm{d}\alpha + [\omega \wedge \alpha]), \tag{3.4}$$

za vse $\alpha \in \Omega^k_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}$.

Dokaz. Enakost po zadnji trditvi velja v vsaki umeritvi $s\colon U \to P$, zato velja na celotni mnogoterosti M. ∎

Izrek 3.16 (Globalna Bianchijeva identiteta)**.** *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj s povezavo ω. Za ukrivljenostno 2-formo $F_M = T(\Omega) \in \Omega^2(M; \mathrm{Ad}(P))$ na M z vrednostmi v adjungiranem svežnju velja*

$$\mathrm{d}_\omega F_M = 0.$$

Dokaz. Neposredna posledica zadnje posledice in Bianchijeve identitete (2.22). ∎

3.1.4 Kodiferencial in kovariantni kodiferencial

Vnanji odvod je preslikava $\mathrm{d}\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$; s pomočjo Hodge-$\star$ operatorja lahko zdaj naravno definiramo še preslikavo $\delta\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$.

Definicija 3.17. Naj bo (M, g) orientirana psevdo Riemannova mnogoterost. *Kodiferencial* je preslikava

$$\begin{aligned}
&\delta\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M) \\
&\delta := (-1)^k \star^{-1} \mathrm{d} \star .
\end{aligned}$$

Opomba 3.18. Opomnimo, da za $\star^{-1}\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ velja

$$\star^{-1} = (-1)^{k(n-k)+p}\star,$$

kjer je p indeks psevdo Riemannove mnogoterosti (M, g) (glej zadnjo točko trditve A.4), torej za k-formo α velja

$$\delta\alpha = -(-1)^{(k+1)(n-k)+p} \star \mathrm{d} \star \alpha.$$

Predfaktor $(-1)^k$ smo izbrali zaradi naslednjega dejstva.

Lema 3.19. *Naj bo (M, g) orientirana psevdo Riemannova mnogoterost brez roba. Kodiferencial δ je formalna adjungirana preslikava kovariantnega odvoda* d *glede na L^2-psevdo skalarni produkt na diferencialnih formah, tj.*

$$\langle\!\langle \mathrm{d}\alpha, \beta \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \alpha, \delta\beta \rangle\!\rangle \tag{3.5}$$

za vse $\alpha \in \Omega^k_c(M)$ in $\beta \in \Omega^{k+1}_c(M)$.

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned}
(\langle \mathrm{d}\alpha, \beta\rangle - \langle \alpha, \delta\beta\rangle)\,\omega_g &= \mathrm{d}\alpha \wedge \star\beta - \alpha \wedge \star\delta\beta \\
&= \mathrm{d}\alpha \wedge \star\beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}{\star}\beta \\
&= \mathrm{d}(\alpha \wedge \star\beta),
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi prvi enačaj upoštevali definicijo $\star$, skozi drugega enakost $\star\delta\beta = (-1)^{k+1}\,\mathrm{d}{\star}\beta$ in skozi tretjega stopničasto Leibnizevo pravilo za običajne forme. Sklep zdaj sledi z uporabo Stokesovega izreka (glej npr. [21, str. 261]), saj po predpostavki velja $\partial M = \emptyset$. ∎

Definicija 3.20. Naj bo E vektorski sveženj nad orientirano psevdo Riemannovo mnogoterostjo (M, g) in ∇ afina povezava na E. *Kovariantni kodiferencial* je preslikava

$$\begin{aligned}
&\delta_\nabla\colon \Omega^k(M; E) \to \Omega^{k-1}(M; E) \\
&\delta_\nabla := (-1)^k \star^{-1} \mathrm{d}_\nabla \star .
\end{aligned}$$

Izrek 3.21. *Naj bo (M,g) orientirana psevdo Riemannova mnogoterost brez roba; naj bo E vektorski sveženj, $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ metrika in ∇ afina metrična povezava na njem. Kovariantni kodiferencial δ_∇ je formalna adjungirana preslikava kovariantnega vnanjega odvoda d_∇ glede na L^2-psevdo skalarni produkt na diferencialnih formah z vrednostmi v E, tj.*

$$\langle\!\langle \mathrm{d}_\nabla F, G\rangle\!\rangle_E = \langle\!\langle F, \delta_\nabla G\rangle\!\rangle_E \tag{3.6}$$

za vse $F \in \Omega_c^k(M;E)$ in $G \in \Omega_c^{k+1}(M;E)$.

Dokaz. Po linearnosti integrala in preslikav d_∇ in δ_∇ je izrek dovolj dokazati za $F = \alpha\otimes\sigma$ in $G = \beta\otimes\tau$, kjer so $\alpha\in\Omega_c^k(M)$, $\beta\in\Omega_c^{k+1}(M)$ in $\sigma,\tau\in\Gamma^\infty(E)$. Če je $(e_i)_i$ poljubno lokalno ogrodje za E na neki odprti podmnožici $U\subset M$, lahko pišemo $\sigma = \sigma^i e_i$ in $\tau = \tau^i e_i$ za neke $\sigma^i,\tau^i\in C^\infty(U)$. Potem je

$$\mathrm{d}_\nabla F = \mathrm{d}\alpha\otimes\sigma + (-1)^k\alpha\wedge\nabla\sigma = \mathrm{d}\alpha\otimes\sigma + (-1)^k(\alpha\wedge\mathrm{d}\sigma^i + \sigma^j\alpha\wedge\omega^i{}_j)\otimes e_i,$$

kjer smo uporabili Cartanovo definicijo povezavne 1-forme, tj. $\nabla e_j = \omega^i{}_j\otimes e_i$ in $\omega^i{}_j$ so običajne diferencialne forme na U. Po drugi strani izračunamo

$$\begin{aligned}
\delta_\nabla G &= -(-1)^{k(n-k-1)+p}\star\mathrm{d}_\nabla\star G\\
&= -(-1)^{k(n-k-1)+p}\star\mathrm{d}_\nabla(\star\beta\otimes\tau)\\
&= -(-1)^{k(n-k-1)+p}\star\big((\mathrm{d}\star\beta)\otimes\tau + (-1)^{n-k-1}(\star\beta)\wedge\nabla\tau\big)\\
&= \delta\beta\otimes\tau - (-1)^{(k+1)(n-k-1)+p}\star(\star\beta\wedge\nabla\tau)\\
&= \delta\beta\otimes\tau - (-1)^{(k+1)(n-k-1)+p}\star(\star\beta\wedge\mathrm{d}\tau^i + \tau^j\star\beta\wedge\omega^i{}_j)\otimes e_i.
\end{aligned}$$

Skalarna produkta, ki se pojavita pod integraloma, sta

$$\langle \mathrm{d}_\nabla F, G\rangle_E = \langle \mathrm{d}\alpha,\beta\rangle\langle\sigma,\tau\rangle_E + (-1)^k\left\langle\alpha\wedge\mathrm{d}\sigma^i + \sigma^j\alpha\wedge\omega^i{}_j,\beta\right\rangle\langle e_i,\tau\rangle_E$$

in

$$\begin{aligned}
\langle F,\delta_\nabla G\rangle_E &= \langle\alpha,\delta\beta\rangle\langle\sigma,\tau\rangle_E\\
&\quad - (-1)^{(k+1)(n-k-1)+p}\left\langle\alpha,\star(\star\beta\wedge\mathrm{d}\tau^i + \tau^j\star\beta\wedge\omega^i{}_j)\right\rangle\langle\sigma,e_i\rangle_E.
\end{aligned}$$

Celoten integrand na levi strani enačbe (3.6) je z uporabo definicije Hodge-$\star$ operatorja enak

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{d}_\nabla F, G\rangle_E\,\omega_g &= \langle\sigma,\tau\rangle_E\,\mathrm{d}\alpha\wedge\star\beta + (-1)^k(\alpha\wedge\mathrm{d}\sigma^i + \sigma^j\alpha\wedge\omega^i{}_j)\wedge\star\beta\,\langle e_i,\tau\rangle_E\\
&= \langle\sigma,\tau\rangle_E\,\mathrm{d}\alpha\wedge\star\beta + \langle e_i,\tau\rangle_E\,(\mathrm{d}\sigma^i + \sigma^j\omega^i{}_j)\wedge\alpha\wedge\star\beta\\
&= \langle\sigma,\tau\rangle_E\,\mathrm{d}\alpha\wedge\star\beta + \langle\nabla\sigma,\tau\rangle_E\wedge\alpha\wedge\star\beta,
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi zadnji enačaj dodatno vpeljali

$$\begin{aligned}
&\langle\cdot,\cdot\rangle_E : \Omega^1(M;E)\times\Gamma^\infty(E)\to\Omega^1(M),\\
&\langle\alpha\otimes\sigma,\tau\rangle_E = \langle\sigma,\tau\rangle_E\,\alpha \text{ (in razširimo po linearnosti).}
\end{aligned}$$

Podobno, zaradi enakosti

$$\begin{aligned}
&\big\langle \alpha, \star(\star\beta \wedge \mathrm{d}\tau^i + \tau^j \star\beta \wedge \omega^i{}_j)\big\rangle\, \omega_g \\
&\quad = \alpha \wedge \star^2(\star\beta \wedge \mathrm{d}\tau^i + \tau^j \star\beta \wedge \omega^i{}_j) \\
&\quad = (-1)^{k(n-k)+p} \alpha \wedge (\star\beta \wedge \mathrm{d}\tau^i + \tau^j \star\beta \wedge \omega^i{}_j)
\end{aligned}$$

integrand na desni strani enačbe (3.6) postane

$$\begin{aligned}
\langle F, \delta_\nabla G\rangle_E\, \omega_g &= \langle \sigma, \tau\rangle_E\, \alpha \wedge \star\delta\beta \\
&\quad - (-1)^{(k+1)(n-k-1)+p}(-1)^{k(n-k)+p} \alpha \wedge (\star\beta \wedge \mathrm{d}\tau^i + \tau^j \star\beta \wedge \omega^i{}_j)\, \langle \sigma, e_i\rangle_E \\
&= \langle \sigma, \tau\rangle_E\, \alpha \wedge \star\delta\beta - (-1)^{n-1} \alpha \wedge \star\beta \wedge (\mathrm{d}\tau^i + \tau^j \omega^i{}_j)\, \langle \sigma, e_i\rangle_E \\
&= \langle \sigma, \tau\rangle_E\, \alpha \wedge \star\delta\beta - \langle \sigma, e_i\rangle_E\, (\mathrm{d}\tau^i + \tau^j \omega^i{}_j) \wedge \alpha \wedge \star\beta \\
&= \langle \sigma, \tau\rangle_E\, \alpha \wedge \star\delta\beta - \langle \sigma, \nabla\tau\rangle_E \wedge \alpha \wedge \star\beta.
\end{aligned}$$

Zato je razlika integrandov enaka

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{d}_\nabla F, G\rangle_E\, \omega_g - \langle F, \delta_\nabla G\rangle_E\, \omega_g \\
&\quad = \langle \sigma, \tau\rangle_E\, \mathrm{d}(\alpha \wedge \star\beta) + (\langle \nabla\sigma, \tau\rangle_E + \langle \sigma, \nabla\tau\rangle_E) \wedge \alpha \wedge \star\beta \\
&\quad = \mathrm{d}(\langle \sigma, \tau\rangle_E\, \alpha \wedge \star\beta),
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi prvi enačaj uporabili enakost

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \star\beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \star\beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\star\beta = \mathrm{d}\alpha \wedge \star\beta - \alpha \wedge \star\delta\beta,$$

na prehodu skozi drugega pa metričnost povezave ∇. Ker je po predpostavki $\partial M = \emptyset$, z uporabo Stokesovega izreka [21, str. 261] sledi želeno. ■

3.2 Yang–Millsova teorija

V lasti imamo vsa orodja, da lahko posplošimo teorijo elektromagnetizma iz motivacije v začetku tega poglavja. V tem podpoglavju privzemamo naslednje.

Vhodni podatki (YM).

i) (M, g) *je orientirana psevdo Riemannova mnogoterost,*

ii) $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ *je glavni sveženj s kompaktno strukturno grupo* G *dimenzije* r*,*

iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ *je* Ad*-invarianten skalarni produkt na Liejevi algebri* $\mathfrak{g}$ *Liejeve grupe* G*.*[‡]

Slednji po trditvi 2.116 inducira metriko $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{Ad}(P)}$ na adjungiranem svežnju $\mathrm{Ad}(P)$. Z $\mathscr{A}(P) \subset \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ označimo množico vseh povezavnih 1-form (z vrednostmi v $\mathfrak{g}$) na glavnem svežnju $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$.

[‡]Opomnimo, da za poljubno upodobitev (ρ, V) kompaktne Liejeve grupe G vedno obstaja G-invarianten skalarni produkt na V (glej npr. [14, trditev 3.22]); v posebnem torej vedno obstaja Ad-invarianten skalarni produkt na Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ kompaktne grupe G.

3.2.1 Yang–Millsov Lagrangian

Naslednja definicija je naravna posplošitev Maxwellovega Lagrangiana.

Definicija 3.22. *Yang–Millsov Lagrangian* je preslikava

$$\mathscr{L}_{YM} \colon \mathscr{A}(P) \to C^\infty(M),$$
$$\mathscr{L}_{YM}(\omega) := -\frac{1}{2} \langle F_M^\omega, F_M^\omega \rangle_{\mathrm{Ad}(P)},$$

kjer je $F_M^\omega = T(\Omega^\omega) \in \Omega^2(M; \mathrm{Ad}(P))$ ukrivljenostna 2-forma na M z vrednostmi v adjungiranem svežnju.

Opomba 3.23. Če je G abelova, lahko zaradi trivialnosti svežnja $\mathrm{Ad}(P)$ pišemo

$$\mathscr{L}_{YM}(\omega) = -\frac{1}{2} \langle F_M^\omega, F_M^\omega \rangle_{\mathfrak{g}},$$

kjer je $F_M^\omega \in \Omega^2(M; \mathfrak{g})$ globalna ukrivljenostna 2-forma na M z vrednostmi v $\mathfrak{g}$ iz posledice 2.90.

Karakteristična lastnost Lagrangianov v fiziki je, da so invariantni na "simetrije" v dani teoriji. S tem v kontekstu umeritvenih polj mislimo na naslednje.

Izrek 3.24. *Yang–Millsov Lagrangian je invarianten na umeritvene transformacije, tj. velja*

$$\mathscr{L}_{YM}(f^*\omega) = \mathscr{L}_{YM}(\omega) \tag{3.7}$$

za vse $\omega \in \mathscr{A}(P)$ *in* $f \in \mathrm{Aut}(P)$.

Dokaz. Dokazujemo, da velja

$$\langle F_M^{f^*\omega}, F_M^{f^*\omega} \rangle_{\mathrm{Ad}(P)} = \langle F_M^\omega, F_M^\omega \rangle_{\mathrm{Ad}(P)},$$

kjer je $F_M^{f^*\omega} = T(\Omega^{f^*\omega})$. Po definiciji ukrivljenostne 2-forme velja

$$\Omega^{f^*\omega} = \mathrm{d}(f^*\omega) + \frac{1}{2}[f^*\omega \wedge f^*\omega] = f^*(\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]) = f^*\Omega^\omega,$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili lemo 2.71. Dalje, po (2.30) velja

$$f^*\Omega^\omega = \mathrm{Ad}_{\sigma_f^{-1}} \circ \Omega^\omega,$$

kjer je preslikava $\sigma_f \colon P \to G$ enolično določena s pogojem $f(u) = u \cdot \sigma_f(u)$. Sledi torej enakost

$$F_M^{f^*\omega} = T(\mathrm{Ad}_{\sigma_f^{-1}} \circ \Omega^\omega).$$

V poljubnih koordinatah $(x^\mu)_\mu$ na $U \subset M$ pa po definiciji kanoničnega izomorfizma $T \colon \Omega^2_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}} \to \Omega^2(M; \mathrm{Ad}(P))$ in skalarnega produkta na $\mathrm{Ad}(P)$ za vsak $x \in U$ velja (z upoštevanjem sumacijskega dogovora)

$$\begin{aligned}
\langle F_M^{f^*\omega}, &F_M^{f^*\omega} \rangle_{\mathrm{Ad}(P)}(x) \\
&= \frac{1}{2!} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \left\langle \mathrm{Ad}_{\sigma_f(u)^{-1}} \circ (\Omega^\omega)_u(\partial_\mu^*, \partial_\nu^*), \mathrm{Ad}_{\sigma_f(u)^{-1}} \circ (\Omega^\omega)_u(\partial_\rho^*, \partial_\sigma^*) \right\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&= \frac{1}{2!} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \left\langle (\Omega^\omega)_u(\partial_\mu^*, \partial_\nu^*), (\Omega^\omega)_u(\partial_\rho^*, \partial_\sigma^*) \right\rangle_{\mathfrak{g}} \\
&= \langle F_M^\omega, F_M^\omega \rangle_{\mathrm{Ad}(P)}(x),
\end{aligned}$$

kjer je ∂_μ^* horizontalni dvig vektorskega polja ∂_μ in je $u \in \pi^{-1}(x)$ poljuben, na drugem enačaju pa smo upoštevali Ad-invariantnost skalarnega produkta na $\mathfrak{g}$. ■

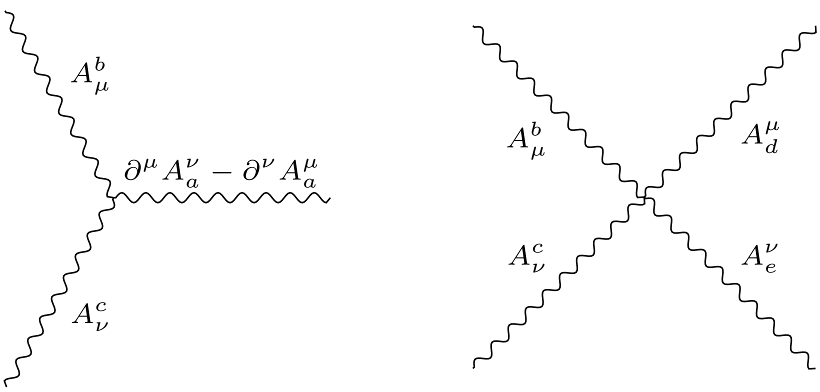
Zapišimo Yang–Millsov Lagrangian lokalno; naj bo torej $s\colon U \to P$ umeritev in $(x^\mu)_\mu$ lokalne koordinate na $U \subset M$. Za dano povezavo $\omega \in \mathscr{A}(P)$ tvorimo umeritveno polje $A = s^*\omega$; po lokalni strukturni enačbi (2.25) se njegova jakost F_s^ω izraža kot $(F_s^\omega)_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, kjer je $A_\mu = A(\partial_\mu) \in \Omega^1(U; \mathfrak{g})$. V neki ortonormirani bazi $(v_a)_a$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ glede na $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ lahko po komponentah zapišemo najprej umeritveno polje kot $A_\mu = A_\mu^a v_a$ za neke $A_\mu^a \in C^\infty(U)$ in nato še njegovo jakost kot

$$(F_s^\omega)_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}{}^a A_\mu^b A_\nu^c,$$

kjer so $f_{bc}{}^a \in \mathbb{F}$ strukturne konstante Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, tj. konstante, natanko določene z relacijami $[v_b, v_c] = f_{bc}{}^a v_a$ za vse $b, c = 1, \ldots, r$. Latinske črke, ki pripadajo indeksom strukturnih konstant, lahko po mili volji dvigujemo in spuščamo – paziti je treba le na njihov vrstni red. Če zgornji izraz vstavimo v Yang–Millsov Lagrangian, z upoštevanjem sumacijskega dogovora dobimo

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{YM}(\omega) &= -\frac{1}{2} \langle F_M^\omega, F_M^\omega \rangle_{\mathrm{Ad}(P)} = -\frac{1}{4} \langle (F_s^\omega)_{\mu\nu}, (F_s^\omega)^{\mu\nu} \rangle_{\mathfrak{g}} = -\frac{1}{4} (F_s^\omega)_{\mu\nu}^a (F_s^\omega)_a^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) \\
&\quad - \frac{1}{2} f_{bc}{}^a A_\mu^b A_\nu^c (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) \\
&\quad - \frac{1}{4} f_{bc}{}^a f^{de}{}_a A_\mu^b A_\nu^c A_d^\mu A_e^\nu.
\end{aligned}$$

Člen v drugi vrstici je kvadratičen v koeficientih umeritvenega polja in ga interpretiramo kot člen prostega (neinteragirajočega) polja umeritvenih bozonov – je tudi edini člen v primeru, ko je G abelova, saj so tedaj strukturne konstante Liejeve algebre ničelne. Člena v tretji in četrti vrstici pa sta kubična in kvartična v koeficientih umeritvenega polja. Interpretiramo ju kot interakcijska člena med umeritvenimi bozoni v neabelovih teorijah umeritvenih polj – takšne člene običajno diagramatično prikažemo s t. i. Feynmanovim diagramom, v našem primeru ju prikazuje slika 3.



Slika 3: Feynmanova diagrama interakcijskih členov v lokalni izražavi Yang–Millsovega Lagrangiana.

3.2.2 Yang–Millsova enačba

V tem razdeku poleg vhodnih podatkov (YM) dodatno privzemamo še, da je M sklenjena mnogoterost, tj. kompaktna in brez roba.

Definicija 3.25. *Yang–Millsova akcija* je preslikava

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{YM} \colon \mathscr{A}(P) \to \mathbb{R}, \\
&\mathcal{S}_{YM}(\omega) = \int_M \mathscr{L}_{YM}(\omega)\omega_g = -\frac{1}{2}\langle\!\langle F_M^\omega, F_M^\omega \rangle\!\rangle_{\mathrm{Ad}(P)}.
\end{aligned}$$

Povezava $\omega \in \mathscr{A}(P)$ je *stacionarna točka Yang–Millsove akcije*, če velja

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} S_{YM}(\omega + t\alpha) = 0 \text{ za vse } \alpha \in \Omega^1_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}. \tag{3.8}$$

Opomba 3.26. Namesto omejitve na kompaktno mnogoterost M bi lahko v definiciji Yang–Millsove akcije domeno omejili na

$$\mathscr{A}_{L^2}(P) := \{\omega \in \mathscr{A}(P) \mid \mathcal{S}_{YM}(\omega) < \infty\}$$

in zahtevali pogoj (3.8) zgolj za vse $\alpha \in \Omega^1_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}$ s kompaktnim nosilcem; kompaktnost M torej privzemamo zgolj zato, da je $\mathcal{S}_{YM}$ dobro definirana na celem $\mathscr{A}(P)$, torej zaradi enostavnosti. Spomnimo, da je $\mathscr{A}(P)$ afin prostor nad vektorskim prostorom $\Omega^1_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}$, zato je $\omega + t\alpha \in \mathscr{A}(P)$ za vse $\omega \in P(A)$, $\alpha \in \Omega^1_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}$ in $t \in \mathbb{R}$; posledično je definicija stacionarne točke Yang–Millsove akcije dobra.

Izrek 3.27. *Naj bo $\pi \colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj nad sklenjeno orientabilno psevdo Riemannovo mnogoterostjo M in $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$* Ad*-invarianten skalarni produkt na $\mathfrak{g}$. Povezava ω na P je stacionarna točka Yang–Millsove akcije natanko tedaj, ko je rešitev t. i. Yang–Millsove enačbe*

$$\mathrm{d}_\omega \star F_M^\omega = 0. \tag{3.9}$$

Dokaz. Izvrednotiti je potrebno izraz

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle\!\langle F_M^{\omega+t\alpha}, F_M^{\omega+t\alpha} \rangle\!\rangle_{\mathrm{Ad}(P)}.$$

Velja

$$\begin{aligned}
\Omega^{\omega+t\alpha} &= \mathrm{d}(\omega + t\alpha) + \frac{1}{2}[(\omega + t\alpha) \wedge (\omega + t\alpha)] \\
&= \Omega^\omega + t(\mathrm{d}\alpha + [\omega \wedge \alpha]) + \frac{1}{2}t^2[\alpha \wedge \alpha]
\end{aligned}$$

in posledično

$$\begin{aligned}
F_M^{\omega+t\alpha} &= T(\Omega^{\omega+t\alpha}) \\
&= T(\Omega^\omega) + tT(\mathrm{d}\alpha + [\omega \wedge \alpha]) + \frac{1}{2}t^2 T[\alpha \wedge \alpha] \\
&= F_M^\omega + t\, \mathrm{d}_\omega \alpha_M + \frac{1}{2}t^2 T[\alpha \wedge \alpha],
\end{aligned}$$

kjer smo na zadnjem enačaju uporabili enačbo (3.4) iz posledice trditve o lokalni izražavi kovariantnega vnanjega odvoda. Sledi torej

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle\!\langle F_M^{\omega+t\alpha}, F_M^{\omega+t\alpha} \rangle\!\rangle_{\mathrm{Ad}(P)} = 2\langle\!\langle F_M^{\omega}, \mathrm{d}_\omega \alpha_M \rangle\!\rangle_{\mathrm{Ad}(P)} = 2\langle\!\langle \delta_\omega F_M^{\omega}, \alpha_M \rangle\!\rangle_{\mathrm{Ad}(P)},$$

kjer smo na prehodu skozi prvi enačaj upoštevali bilinearnost $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{\mathrm{Ad}(P)}$, na drugem pa uporabili izrek 3.21 (uporaba je zaradi enakosti $\partial M = \emptyset$ upravičena). Ta izraz je (po neizrojenosti $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{\mathrm{Ad}(P)}$ iz trditve 3.4) ničeln za vse $\alpha \in \Omega^1_{\mathrm{Hor}}(P; \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}} \cong \Omega^1(M; \mathrm{Ad}(P))$ natanko tedaj, ko je

$$\delta_\omega F_M^\omega = 0,$$

oziroma $\star^{-1} \mathrm{d}_\omega \star F_M^\omega = 0$, kar implicira $\mathrm{d}_\omega \star F_M^\omega = 0$. ■

Opomba 3.28. Povezavi $\omega \in \mathscr{A}(P)$, ki reši Yang–Millsovo enačbo, rečemo tudi *Yang–Millsova povezava*; take povezave so po zadnjem izreku natanko stacionarne točke Yang–Millsove akcije.

Primer 3.29 (Maxwellova teorija)**.** V primeru trivialnega U(1)-svežnja nad prostorom Minkowskega M s povezavo ω so lokalne ukrivljenostne 2-forme F_s neodvisne od izbire umeritve $s\colon U \to P$, zato definirajo globalno 2-formo $F_M \in \Omega^2(M; \mathfrak{u}(1))$ (kot v posledici 2.90). Maxwellove enačbe (v brezizvornem primeru) so torej dane z Bianchijevo identiteto in Yang–Millsovo enačbo

$$\mathrm{d}F_M = 0, \text{ in } \delta F_M = 0.$$

V primeru, ko so prisotni izvori $J = \rho\,\mathrm{d}t + j_x\,\mathrm{d}x + j_y\,\mathrm{d}y + j_z\,\mathrm{d}z$, velja namesto Yang–Millsove enačbe enakost $\delta F_M = J$, kot v uvodu tega poglavja.

Na tej točki vidimo, da vsaka konfiguracija elektromagnetnega polja ustreza natanko enemu de Rhamovemu kohomološkemu razredu iz $H^2_{dR}(M)$. V neabelovih teorijah polja to ne velja nujno. ♦

3.2.3 Interakcija umeritvenega polja s skalarnim poljem

Motivacija. Iz fizike je znano, da na prostoru Minkowskega (M, η) skalarna polja (oz. njihovi ℓ-multipleti, kjer je $\ell \in \mathbb{N}$) ustrezajo tistim preslikavam $\phi \in C^\infty(M, \mathbb{C}^\ell)$, ki so stacionarne točke akcije, ki ustreza Klein–Gordonovemu Lagrangianu

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)^\dagger(\partial_\mu \phi) - m^2(\phi^\dagger \phi) = \langle \mathrm{d}\phi, \mathrm{d}\phi \rangle - m^2 \langle \phi, \phi \rangle,$$

kjer je $\mathbb{C}^\ell$ opremljen s standardnim skalarnim produktom

$$(v, w) = ((v_1, \dots, v_\ell), (w_1, \dots, w_\ell)) \mapsto v^\dagger w := \bar{v}_1 w_1 + \cdots + \bar{v}_\ell w_\ell$$

in smo z $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označili skalarni produkt diferencialnih form na (M, η) z vrednostmi v $\mathbb{C}^\ell$, z $m > 0$ pa maso skalarnega bozona, ki ga opisujemo. Preselimo to v naš kontekst.

V tem razdelku poleg vhodnih podatkov (YM) torej privzemimo, da je W ℓ-razsežen kompleksen vektorski prostor, $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ upodobitev in $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ G-invarianten skalarni produkt na W. Kot vemo, to pomeni, da izbrana povezava ω na glavnem svežnju inducira afino povezavo ∇ na pridruženem vektorskem svežnju $E = P \times_\rho W$, ki je kompatibilna z metriko $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$, ki jo porodi $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$. Splošneje, na $\Omega^k(M;E)$ (za $k \geq 0$) imamo pojem kovariantnega vnanjega odvoda d_ω, ki je na $\Omega^0(M;E) = \Gamma^\infty(E)$ enak ∇. Elementom množice $\Gamma^\infty(E)$ rečemo *kompleksna skalarna polja*, če je $\dim W = 1$; rečemo jim *ℓ-multipleti kompleksnih skalarnih polj*, če je $\dim W > 1$.

Definicija 3.30. *Klein–Gordonov Lagrangian* je preslikava

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}_{KG}\colon \Gamma^\infty(E) \times \mathscr{A}(P) \to C^\infty(M),\\ &\mathscr{L}_{KG}(\Phi,\omega) = \langle \mathrm{d}_\omega\Phi, \mathrm{d}_\omega\Phi\rangle_E - m^2\langle\Phi,\Phi\rangle_E\,,\end{aligned}$$

kjer prvi člen imenujemo *kinetični člen*, drugega pa *masni člen*; tu $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ označuje psevdo skalarni produkt diferencialnih form z vrednostmi v E, kot v definiciji 3.1. Dalje, *Klein–Gordonova akcija* je preslikava

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}_{KG}\colon \Gamma^\infty(E) \times \mathscr{A}(P) \to \mathbb{R},\\ &\mathcal{S}_{KG}(\Phi,\omega) = \int_M \mathscr{L}_{KG}(\Phi,\omega)\omega_g.\end{aligned}$$

Opomba 3.31. Podobno kot prej moramo za dobro definiranost Klein–Gordonove akcije privzeti bodisi kompaktnost M bodisi domeno preslikave $\mathcal{S}_{KG}$ zmanjšati na $\{(\Phi,\omega) \in \Gamma^\infty(E) \times \mathscr{A}(P) \mid \mathcal{S}_{KG}(\Phi,\omega) < \infty\}$.

Klein–Gordonov Lagrangian želimo zdaj izraziti lokalno. Naj bodo $(x^\mu)_\mu$ lokalne koordinate na M in $s\colon U \to P$ lokalna umeritev; potem lahko pišemo $\Phi|_U = [s,\phi]$ za neko gladko funkcijo $\phi\colon U \to W$. Tedaj je

$$\langle \mathrm{d}_\omega\Phi, \mathrm{d}_\omega\Phi\rangle_E = g^{\mu\nu}\langle\nabla_\mu\phi, \nabla_\nu\phi\rangle_W = \langle\nabla^\mu\phi, \nabla_\mu\phi\rangle_W\,,$$

upoštevajoč sumacijsko konvencijo. Naj bo $A = s^*\omega = A_\mu\,\mathrm{d}x^\mu$ umeritveno polje, kjer so $A_\mu \in C^\infty(U,\mathfrak{g})$ t. i. polja umeritvenih bozonov. Z zlorabo zapisa $A_\mu := \rho_* A_\mu \in C^\infty(U, \mathrm{End}(W))$ lahko zapišemo[§] enačbo (2.36) kot

$$\nabla^\omega_\mu\phi = \partial_\mu\phi + A_\mu\phi.$$

Omenimo, da se v fiziki člen $A_\mu\phi$ imenuje *člen minimalne sklopitve.*

Če vzamemo $W = \mathbb{C}^\ell$ in standardni skalarni produkt kot iz motivacije v tem razdelku, postane A_μ matrika gladkih kompleksnih funkcij dimenzije $\ell\times\ell$ in imamo naslednjo lokalno izražavo za $\mathscr{L}_{KG}$.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{KG}(\Phi,\omega) &= (\partial^\mu\phi)^\dagger(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi\\ &\quad + (\partial^\mu\phi)^\dagger(A_\mu\phi) + (A_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi)\\ &\quad + (A^\mu\phi)^\dagger(A_\mu\phi).\end{aligned}$$

[§]Ta zapis je upravičen le v primeru, ko je ρ standardna upodobitev grupe G.

Z upoštevanjem leme 2.118 pa obvelja v našem zlorabljenem zapisu še enakost

$$A_\mu^\dagger = -A_\mu.$$

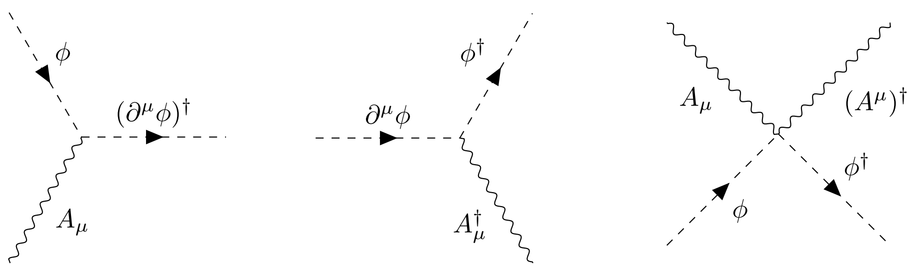
Če jo upoštevamo pri prejšnjem rezultatu za $\mathscr{L}_{KG}$, smo s tem dokazali naslednje.

Trditev 3.32. *Če je vektorski prostor $W = \mathbb{C}^\ell$ opremljen s standardnim skalarnim produktom $\langle v, w\rangle_W = v^\dagger w$, potem se Klein–Gordonov Lagrangian v lokalnih koordinatah $(x^\mu)_\mu$ na U in umeritvi $s\colon U \to P$ izraža kot:*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{KG}(\Phi,\omega) &= (\partial^\mu\phi)^\dagger(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi \\ &\quad + (\partial^\mu\phi)^\dagger(A_\mu\phi) - (\phi^\dagger A_\mu)(\partial^\mu\phi) \\ &\quad - (\phi^\dagger A^\mu)(A_\mu\phi),\end{aligned}$$

kjer so A_μ polja umeritvenih bozonov, tj. $A = s^*\omega = A^\mu \,\mathrm{d}x^\mu$.

Opomba 3.33. Vidimo, da so zadnji trije členi neničelni zgolj v primeru, ko je preslikava $\rho_*\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(W)$ netrivialna; to je razlog, da množici $\Gamma^\infty(E)$ (multipletov) kompleksnih skalarnih polj rečemo, da so *nabiti*, če je ρ_* netrivialna; zadnjim trem členom rečemo *interakcijski členi*, saj opisujejo interakcijo med umeritvenim poljem in multipleti kompleksnih skalarnih polj. Diagramatično so prikazani na sliki 4.



Slika 4: Feynmanovi diagrami interakcijskih členov v lokalni izražavi Klein–Gordonovega Lagrangiana.

Pokažimo, da je $\mathscr{L}_{KG}$ res Lagrangian.

Izrek 3.34. *Klein–Gordonov Lagrangian je invarianten na umeritvene transformacije, tj. velja*

$$\mathscr{L}_{KG}(f^{-1}\Phi, f^*\omega) = \mathscr{L}_{KG}(\Phi,\omega) \tag{3.10}$$

za vse $\Phi \in \Gamma^\infty(E)$, $\omega \in \mathscr{A}(P)$ in $f \in \mathrm{Aut}(P)$.

Dokaz. Dokaz poteka v izbrani umeritvi $s\colon U \to P$; potem lahko namreč pišemo $\Phi = [s,\phi]$ za neko natanko določeno $\phi \in C^\infty(U, W)$. Velja

$$(f^{-1}\Phi)(x) = [f^{-1}(s(x)), \phi(x)] = [s, \rho_{\tau_f(x)^{-1}}\phi(x)],$$

kjer je $\tau_f \in C^\infty(U, G)$ dana implicitno s $f(s(x)) = s(x)\cdot\tau_f(x)$, kot v opombi 2.56. Za masni člen potem očitno velja

$$-m^2\left\langle f^{-1}\Phi, f^{-1}\Phi\right\rangle_E(x) = -m^2\left\langle \rho_{\tau_f(x)^{-1}}\phi(x), \rho_{\tau_f(x)^{-1}}\phi(x)\right\rangle_W = -m^2\left\langle \phi(x),\phi(x)\right\rangle_W,$$

kjer smo skozi drugi enačaj uporabili G-invariantnost skalarnega produkta na W. To implicira, da je masni člen sam zase invarianten na umeritvene transformacije. Da dokažemo invariantnost kinetičnega člena na umeritvene transformacije, pa je dovolj dokazati enakost

$$\mathrm{d}_{f^*\omega}(f^{-1}\Phi) = f^{-1}\,\mathrm{d}_\omega\Phi,$$

saj je transformiran kinetični člen enak $\langle \mathrm{d}_{f^*\omega}(f^{-1}\Phi), \mathrm{d}_{f^*\omega}(f^{-1}\Phi)\rangle_E$ in je skalarni produkt na W G-invarianten. To je vsebina naslednje trditve. ■

Trditev 3.35. *Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj s povezavo ω in $E = P \times_\rho V$ pridružen vektorski sveženj glede na upodobitev (ρ, V) Liejeve grupe G ter $f \in \mathrm{Aut}(P)$. Velja*

$$\nabla_X^{f^*\omega}(f^{-1}\Phi) = f^{-1}\nabla_X^\omega\Phi$$

za vse $\Phi \in \Gamma^\infty(E)$ in $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Dokaz. Naj bo $s\colon U \to P$ umeritev in $\Phi = [s, \phi]$ za neko $\phi \in C^\infty(U, V)$. Po definiciji kovariantnega odvoda na pridruženem svežnju je

$$(\nabla_X^\omega\Phi)(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [\bar{\tau}_t^{\omega,\gamma}(s(\gamma(t))), \phi(\gamma(t))],$$

kjer je γ poljubna gladka pot z $\gamma'(0) = X_x$ in $\bar{\tau}_t^{\omega,\gamma}\colon \pi^{-1}(\gamma(t)) \to \pi^{-1}(\gamma(0))$ označuje inverz vzporednega prenosa $\tau_t^{\omega,\gamma}$ vzdolž poti γ glede na povezavo ω. Po lemi 2.119 velja enakost

$$\bar{\tau}_t^{f^*\omega,\gamma} = f^{-1} \circ \bar{\tau}_t^{\omega,\gamma} \circ f$$

in zato je

$$\begin{aligned}
(\nabla_X^{f^*\omega}(f^{-1}\Phi))(x) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [(f^{-1} \circ \bar{\tau}_t^{\omega,\gamma} \circ f)\big(f^{-1}(s(\gamma(t)))\big), \phi(\gamma(t))] \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [f^{-1}(\bar{\tau}_t^{\omega,\gamma}(s(\gamma(t)))), \phi(\gamma(t))] \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f^{-1} \cdot [\bar{\tau}_t^{\omega,\gamma}(s(\gamma(t))), \phi(\gamma(t))].
\end{aligned}$$

Za vsak t pa je $[\bar{\tau}_t^{\omega,\gamma}(s(\gamma(t))), \phi(\gamma(t))] \in E_x$ in f na vsakem vlaknu ustreza konstantnemu delovanju z nekim elementom grupe G, zato lahko zamenjamo vrstni red odvajanja in delovanja s f^{-1}, kar dokazuje želeno. ■

3.2.4 Yang–Mills–Higgsove enačbe

Še naprej privzemamo vhodne podatke (YM) in ℓ-razsežen vektorski prostor W nad $\mathbb{C}$, upodobitev $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ ter G-invarianten skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ na W. Ker bomo delali z variacijskim računom, privzemimo tudi, da je M brez roba. Namesto masnega člena v Klein–Gordonovem Lagrangianu bomo zdaj dopuščali splošnejši potencial $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katerega privzemamo, da je analitična funkcija.

Definicija 3.36. *Yang–Mills–Higgsov Lagrangian* je preslikava

$$\mathscr{L}_{YMH}\colon \Gamma^\infty(E)\times\mathscr{A}(P)\to C^\infty(M),$$
$$\mathscr{L}_{YMH}(\Phi,\omega)=\langle \mathrm{d}_\omega\Phi,\mathrm{d}_\omega\Phi\rangle_E - V(\Phi)-\frac{1}{2}\langle F^\omega_M, F^\omega_M\rangle_{\mathrm{Ad}(P)},$$

kjer smo pisali $V(\Phi):=V(\langle\Phi,\Phi\rangle_E)$. *Yang–Mills–Higgsova akcija* je preslikava

$$\mathcal{S}_{YMH}\colon \mathcal{D}_{\mathcal{S}_{YMH}}\to\mathbb{R},$$
$$\mathcal{S}_{YMH}(\Phi,\omega)=\int_M \mathscr{L}_{YMH}(\Phi,\omega)\omega_g,$$

kjer je $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{YMH}}:=\{(\Phi,\omega)\in\Gamma^\infty(E)\times\mathscr{A}(P)\mid \mathcal{S}_{YMH}(\Phi,\omega)<\infty\}$.

Opomba 3.37. Identični argumenti kot v dokazih izrekov 3.24 in 3.34 pokažejo, da je $\mathscr{L}_{YMH}$ invarianten na umeritvene transformacije, tj. velja

$$\mathscr{L}_{YMH}(f^{-1}\Phi, f^*\omega)=\mathscr{L}_{YMH}(\Phi,\omega)$$

za vse $\Phi\in\Gamma^\infty(E),\omega\in\mathscr{A}(P)$ in $f\in\mathrm{Aut}(P)$.

Definicija 3.38. Par $(\Phi,\omega)\in\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{YMH}}$ je *stacionarna točka* Yang–Mills–Higgsove akcije, če velja

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathcal{S}_{YMH}(\Phi+t\Theta,\omega+t\alpha)=0 \tag{3.11}$$

za vse $\Theta\in\Gamma^\infty(E)$ in $\alpha\in\Omega^1_{\mathrm{Hor}}(P;\mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}$ s kompaktnim nosilcem.

Izpeljimo Yang–Mills–Higgsove enačbe. Naj bosta Θ in α kot v zgornji definiciji. Najprej opazimo, da lahko (po Leibnizevem pravilu) v zgornji definiciji stacionarne točke zamenjamo vrstni red integriranja po M in odvajanja po t, saj je $t\mapsto\mathscr{L}(\Phi+t\Theta,\omega+t\alpha)(x)$ za vsak $x\in M$ gladka realna funkcija in je $\partial M=\emptyset$. Dalje, velja

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathscr{L}_{YMH}(\Phi+t\Theta,\omega+t\alpha)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathscr{L}_{YMH}(\Phi+t\Theta,\omega)+\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathscr{L}_{YMH}(\Phi,\omega+t\alpha),$$

torej bomo posebej variirali Higgsovo polje Φ in povezavo ω – najprej Φ. Opazimo, da je

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathscr{L}_{YMH}(\Phi+t\Theta,\omega)\\
&\qquad=2\,\mathrm{Re}\,\langle\mathrm{d}_\omega\Phi,\mathrm{d}_\omega\Theta\rangle_E-\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}V(\langle\Phi,\Phi\rangle_E+2t\,\mathrm{Re}\,\langle\Phi,\Theta\rangle_E+t^2\langle\Theta,\Theta\rangle_E)\\
&\qquad=2\,\mathrm{Re}\,\langle\mathrm{d}_\omega\Phi,\mathrm{d}_\omega\Theta\rangle_E-2V'(\Phi)\,\mathrm{Re}\,\langle\Phi,\Theta\rangle_E\\
&\qquad=2\,\mathrm{Re}\big(\langle\mathrm{d}_\omega\Phi,\mathrm{d}_\omega\Theta\rangle_E-2V'(\Phi)\langle\Phi,\Theta\rangle_E\big),
\end{aligned}\tag{3.12}$$

kjer smo v drugi vrstici upoštevali lastnosti skalarnega produkta na W, in v tretji uporabili verižno pravilo. Zahtevneje je variirati povezavo ω:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathscr{L}_{YMH}(\Phi, \omega + t\alpha) \\
&\qquad = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle \mathrm{d}_{\omega+t\alpha}\Phi, \mathrm{d}_{\omega+t\alpha}\Phi\rangle_E - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left\langle F_M^{\omega+t\alpha}, F_M^{\omega+t\alpha}\right\rangle_{\mathrm{Ad}(P)}.
\end{aligned}$$

Drugi člen po enakem postopku kot v dokazu izreka 3.27 postane

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left\langle F_M^{\omega+t\alpha}, F_M^{\omega+t\alpha}\right\rangle_{\mathrm{Ad}(P)} = -\left\langle F_M^{\omega}, \mathrm{d}_\omega \alpha_M\right\rangle_{\mathrm{Ad}(P)}, \tag{3.13}$$

prvi pa je po bilinearnosti enak

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle \mathrm{d}_{\omega+t\alpha}\Phi, \mathrm{d}_{\omega+t\alpha}\Phi\rangle_E = 2\,\mathrm{Re}\left\langle \mathrm{d}_\omega\Phi, \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{d}_{\omega+t\alpha}\Phi \right\rangle_E,$$

kar najlažje vidimo z zapisom $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ lokalno, v izbiri neke ortonormirane baze za W. Drugi argument v tem skalarnem produktu je v izbrani umeritvi $s\colon U \to P$ enak¶

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\mathrm{d}_{\omega+t\alpha}\Phi)_s &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big(\mathrm{d}\phi + (\rho_* \circ A_s^{\omega+t\alpha})\phi\big) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big(\rho_* \circ (s^*(\omega + t\alpha))\,\phi\big) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\rho_* \circ s^*\omega)\phi + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} t(\rho_* \circ s^*\alpha)\phi \\
&= (\rho_* \circ s^*\alpha)\phi \\
&= s^*\alpha^a \otimes (\rho_* v_a)\phi,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

kjer smo v prvi vrstici uporabili formulo (2.35) za kovariantni odvod $\nabla^{\omega+t\alpha}\Phi$, v tretji dejstvo, da sta povlek in ρ_* linearni preslikavi, v peti pa razvili $\alpha = \alpha_a \otimes v_a$ po neki bazi $(v_a)_a$ za $\mathfrak{g}$. Z izrazom (3.14) je motivirana definicija naslednjega produkta.

Definicija 3.39. Naj bo $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$ glavni sveženj s povezavo ω in $E = P \times_\rho V$ pridružen vektorski sveženj glede na upodobitev (ρ, V) Liejeve grupe G. *Zviti produkt* je preslikava

$$\begin{aligned}
&\Omega^1_{\mathrm{Hor}}(P;\mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}} \times \Gamma^\infty(E) \to \Omega^1(M;E), \\
&(\alpha, \Phi) \mapsto (\alpha \odot \Phi)(X_x) := \alpha^a(X_u^*)[u, (\rho_* v_a)\phi(x)] \text{ za vse } X_x \in T_xM,
\end{aligned}$$

kjer je $u \in \pi^{-1}(x)$ poljuben, X^* horizontalni dvig vektorja X_x na $\pi^{-1}(x)$ in smo razvili $\alpha = \alpha^a \otimes v_a$.

Opomba 3.40. Dokaz, da je produkt $\alpha \odot \Phi$ neodvisen od izbire $u \in \pi^{-1}(x)$, prepuščamo bralcu – ključna je uporaba dejstva, da je $\alpha \in \Omega^1_{\mathrm{Hor}}(P;\mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}$ in uvida, da se ob spremembi točke $u \in \pi^{-1}(x)$ ustrezno spremeni tudi funkcija ϕ (skupaj z očitno neodvisnostjo definicije $\alpha \odot \Phi$ od izbire baze $(v_a)_a$ za $\mathfrak{g}$).

¶Če je $\eta \in \Omega^k(M;E)$, potem se v izbrani bazi $(e_i)_i$ za W in umeritvi s izraža kot $\eta = \eta^i \otimes [s, e_i]$ in pišemo $\eta_s := \eta^i \otimes e_i$.

Izraz (3.14) je torej ravno enak $(\alpha \odot \Phi)_s$, iz česar sklenemo, da velja

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{d}_{\omega+t\alpha}\Phi = \alpha \odot \Phi.$$

Potem je

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \mathrm{d}_{\omega+t\alpha}\Phi, \mathrm{d}_{\omega+t\alpha}\Phi\rangle_E = 2\,\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{d}_\omega\Phi, \alpha \odot \Phi\rangle_E\,,$$

ta izraz pa bi želeli v skladu s (3.13) preoblraziti tako, da bo enak $\langle \alpha_M, J_H(\Phi,\omega)\rangle_{\mathrm{Ad}(P)}$ za neki enolično določen $J_H(\Phi,\omega) \in \Omega^1(M;\mathrm{Ad}(P))$, saj bomo tedaj lahko uporabili neizrojenost skalarnega produkta $\langle\!\langle \cdot,\cdot \rangle\!\rangle_{\mathrm{Ad}(P)}$. To nam zagotavlja lema 3.43, ki je predstavljena po navedbi izreka. Posledično velja

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \mathrm{d}_{\omega+t\alpha}\Phi, \mathrm{d}_{\omega+t\alpha}\Phi\rangle_E = \langle \alpha_M, J_H(\Phi,\omega)\rangle_{\mathrm{Ad}(P)}\,. \tag{3.15}$$

Če združimo rezultate (3.12), (3.13) in (3.15), dobimo

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} &\mathcal{S}_{YMH}(\Phi+t\Theta, \omega+t\alpha)\\
&= 2\,\mathrm{Re}\left(\langle\!\langle \mathrm{d}_\omega\Phi, \mathrm{d}_\omega\Theta\rangle\!\rangle_E - \langle\!\langle V'(\Phi)\Phi,\Theta\rangle\!\rangle_E\right)\\
&+ \langle\!\langle \alpha_M, J_H(\Phi,\omega)\rangle\!\rangle_{\mathrm{Ad}(P)} - \langle\!\langle F_M^\omega, \mathrm{d}_\omega\alpha_M\rangle\!\rangle_{\mathrm{Ad}(P)}\\
&= 2\,\mathrm{Re}\left(\langle\!\langle \delta_\omega\,\mathrm{d}_\omega\Phi - V'(\Phi)\Phi,\Theta\rangle\!\rangle_E\right)\\
&- \langle\!\langle \delta_\omega F_M^\omega - J_H(\Phi,\omega), \alpha_M\rangle\!\rangle_{\mathrm{Ad}(P)},
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj upoštevali izrek 3.21 in dejstvo, da je $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ simetričen. Zgornji izraz je ničeln za vse $\Theta \in \Gamma^\infty(E)$ in $\alpha \in \Omega^1_{\mathrm{Hor}}(M;\mathrm{Ad}(P))$ s kompaktnim nosilcem natanko tedaj, ko sta oba člena vsak zase ničelna.[‖] Z uporabo neizrojenosti obeh skalarnih produktov (trditev 3.4) smo dokazali naslednje.

Izrek 3.41. *Par $(\Phi,\omega) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}_{YMH}}$ je stacionarna točka Yang–Mills–Higgsove akcije natanko tedaj, ko je rešitev t. i. Yang–Mills–Higgsove enačbe*

$$\delta_\omega\,\mathrm{d}_\omega\Phi = V'(\Phi)\Phi, \tag{3.16}$$

$$\delta_\omega F_M^\omega = J_H(\Phi,\omega). \tag{3.17}$$

Opomba 3.42. Enačbi (3.17) rečemo v splošnejšem primeru (takrat, ko nimamo nujno opravka s sklopitvijo s skalarnim poljem) *nehomogena Yang–Millsova enačba.* V enačbi (3.16) za primer $V(\Phi) = m^2\langle\Phi,\Phi\rangle_E$ prepoznamo Klein–Gordonovo enačbo. Definiramo lahko namreč *Laplaceev operator* na $\Omega^k(M;E)$ kot

$$\Delta := \mathrm{d}_\omega\delta_\omega + \delta_\omega\,\mathrm{d}_\omega = (\mathrm{d}_\omega + \delta_\omega)^2$$

in na $\Omega^0(M;E) = \Gamma^\infty(E)$ velja $\Delta = \delta_\omega\,\mathrm{d}_\omega$, zato je v tej notaciji enačba (3.16) enaka

$$\Delta\Phi = V'(\Phi)\Phi.$$

Dalje, z uporabo kovariantnega kodiferenciala na obeh straneh enačbe (3.17) dobimo *kontinuitetno enačbo* $\delta_\omega J_H(\Phi,\omega) = 0$.

[‖]Drugače rečeno, par (Φ,ω) je stacionaren natanko tedaj, ko sta Φ in ω stacionarna.

Lema 3.43. *Naj bosta $\Phi \in \Gamma^\infty(E)$ in $\omega \in \mathscr{A}(P)$. Obstaja natanko en $J_H(\Phi,\omega) \in \Omega^1(M;\mathrm{Ad}(P))$, da velja*

$$2\,\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{d}_\omega\Phi, \alpha \odot \Phi\rangle = \langle \alpha_M, J_H(\Phi,\omega)\rangle_{\mathrm{Ad}(P)}$$

za vse $\alpha \in \Omega^1_{\mathrm{Hor}}(P;\mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}$.

Opomba 3.44. Formo $J_H(\Phi,\omega)$ z vrednostmi v adjungiranem svežnju imenujemo *Yang–Mills–Higgsov tok.*

Dokaz. Dokažimo enoličnost $J_H(\Phi,\Omega)$. Naj bo $(v_a)_a$ baza za $\mathfrak{g}$ in $(e_i)_i$ ortonormirana baza za W glede na $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ ter naj bo $s\colon U \to P$ umeritev. Potem pišemo $\Phi = [s,\phi] = [s,\phi^i e_i]$ in velja

$$(\mathrm{d}_\omega\Phi)_s = \mathrm{d}\phi + (\rho_* A_s)\phi = \mathrm{d}\phi^i \otimes e_i + (\rho_* A_s)^k{}_l\phi^l \otimes e_k$$

po formuli (2.35) za kovariantni odvod; tu smo na prehodu skozi drugi enačaj zgolj zapisali oba člena v izbrani bazi za W in na $\rho_* A_s$ gledali kot matriko običajnih 1-form. Drugi faktor na levi je v umeritvi s enak

$$(\alpha \odot \Phi)_s = s^*\alpha^a \otimes (\rho_* v_a)\phi = (s^*\alpha^a)(\rho_* v_a)^k{}_l\phi^l \otimes e_k,$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj razvili $(\rho_* v_a)\phi$ po bazi za W. Potem je

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{d}_\omega\Phi, \alpha\odot\Phi\rangle &= 2\,\mathrm{Re}\Big(\big\langle \mathrm{d}\phi^i + (\rho_*A_s)^i{}_l\phi^l, (s^*\alpha^j)(\rho_*v_j)^k{}_p\phi^p\big\rangle \underbrace{\langle e_i, e_k\rangle_W}_{\delta_{ik}}\Big)\\ &= 2\,\mathrm{Re}\big\langle \mathrm{d}\phi^i + (\rho_*A_s)^i{}_l\phi^l, (s^*\alpha^j)(\rho_*v_j)_{ip}\phi^p\big\rangle.^{**}\end{aligned}$$

Razpišimo še desno stran. Ker je $J_H(\Phi,\omega)$ 1-forma na M z vrednostmi v $\mathrm{Ad}(P)$, ustreza neki 1-formi $J^k \otimes v_k$ na P z vrednostmi v $\mathfrak{g}$. Glede na umeritev s se izraža kot $J_H(\Phi,\omega)_s = s^*J^k \otimes e_k$; imamo pa tudi $(\alpha_M)_s = s^*\alpha^i \otimes e_i$. Zato je

$$\langle \alpha_M, J_H(\Phi,\omega)\rangle_{\mathrm{Ad}(P)} = \big\langle s^*\alpha^i, s^*J^k\big\rangle \underbrace{\langle e_i, e_k\rangle_W}_{\delta_{ik}} = \big\langle s^*\alpha^i, s^*J_i\big\rangle.$$

Če izberemo zdaj $s^*\alpha^i = \delta^i{}_r\,\mathrm{d}x^\mu$ za neki indeks μ, ki pripada eni od danih lokalnih koordinat $(x^\mu)_\mu$ na U, potem po predpostavki o enakosti obeh strani dobimo

$$\begin{aligned}(s^*J_r)(\partial_\mu) &= 2\,\mathrm{Re}\big((\partial_\mu\phi^i)(\rho_*v_r)_{ip}\phi^p + (\rho_*A_\mu)^i{}_l\phi^l(\rho_*v_r)_{ip}\phi^p\big)\\ &= 2\,\mathrm{Re}\Bigg(\underbrace{\big(\partial_\mu\phi^i + (\rho_*A_\mu)^i{}_l\phi^l\big)}_{[(\mathrm{d}_\omega\Phi)_s(\partial_\mu)]^i}(\rho_*v_r)_{ip}\phi^p\Bigg),\end{aligned}$$

kjer $[(\mathrm{d}_\omega\Phi)_s(\partial_\mu)]^i$ označuje i-to komponento funkcije $(\mathrm{d}_\omega\Phi)_s(\partial_\mu)\colon U \to W$. Vidimo torej, da je $J_H(\Phi,\omega)$ z zgornjim predpisom v poljubni umeritvi s, ortonormirani bazi (e_i) za W in lokalnih koordinatah $(x^\mu)_\mu$ enolično določen.

Za njegov obstoj je potrebno pokazati, da je zgornja definicija komponente $J_r = J^r$ 1-forme $J^k\otimes v_k$ neodvisna od teh treh izbir – to pa je jasno, kajti $\mathrm{d}_\omega\Phi$ je neodvisna tako od umeritve s kot tudi od lokalnih koordinat; poleg tega je skalarni produkt na W, katerega ponazarjajo ponovljeni indeksi zgoraj in spodaj, neodvisen od izbire ortonormirane baze. ■

**Nižanje in višanje indeksov tu ne spremeni ničesar, saj izražamo komponente glede na ortonormirano bazo za W.

Brout–Englert–Higgsov mehanizem

Za konec poglavja skicirajmo, kako se zadnji izrek uporablja v fiziki – poglobljeno razpravo lahko bralec najde v [6, str. 447–464]; v nadaljevanju privzemamo kontraktibilnost bazne mnogoterosti M. *Yang–Mills–Higgsov vakuum* je tak par $(\Phi_0, \omega_0) \in \Gamma^\infty(E) \times \mathscr{A}(P)$, za katerega veljajo naslednje tri lastnosti.

- Vakuumska povezava ω_0 je ravna, tj. $\Omega^{\omega_0} = 0$.
- Vakuumsko polje Φ_0 je vzporedno, tj. $\mathrm{d}_{\omega_0}\Phi_0 = \nabla^{\omega_0}\Phi_0 = 0$.
- Za vsak $x \in M$ je $\Phi_0(x)$ minimum potenciala V.

Iz Yang–Mills–Higgsovih enačb (3.16) in (3.17) takoj vidimo, da je Yang–Mills–Higgsov vakuum, v kolikor obstaja, njihova rešitev. Ni težko pokazati (glej [6, trditev 8.1.5]), da vakuum Yang–Mills–Higgsove teorije obstaja natanko tedaj, ko obstajata umeritev $s_0 \colon M \to P$ in vektor $w_0 \in W$, za katera velja $A_{s_0} := s_0^*\omega_0 = 0$ in $\Phi_0 = [s_0, w_0]$, kjer w_0 označuje konstantno preslikavo $M \to W$ v vektor w_0. Taki umeritvi rečemo *vakuumska umeritev*, vektorju w_0 pa *vakuumski vektor*; slednji je torej minimum potenciala V. Dalje, rečemo, da je *umeritvena simetrija Yang–Mills–Higgsovega vakuuma spontano zlomljena*, če velja

$$\mathrm{Stab}_G(w_0) := \{g \in G \mid \rho_g(w_0) = w_0\} \subsetneq G.$$

V tem primeru seveda nujno velja $w_0 \neq 0$. Fizikalna ideja za zadnjo definicijo je sledeča: v nekaj trenutkih po velikem poku naj bi se zgodil spontani zlom umeritvene simetrije Yang–Mills–Higgsovega vakuuma, pri katerem vakuumski vektor iz "nestabilne" vrednosti $w_0 = 0$ preide v vrednost $w_0 \neq 0$, kar ima za posledico, da v lokalni izražavi Yang–Mills–Higgsovega Lagrangiana pridobimo dodatne člene, ki jih fizikalno interpretiramo kot masne člene umeritvenega polja – glej [6, izrek 8.2.10].

Bodimo nekoliko bolj specifični. S. Weinberg je leta 1967 v svojem slavnem članku [23], ki je eden najbolj citiranih v fiziki, zapisal:

> "Leptons interact only with photons, and with the intermediate bosons that presumably mediate weak interactions. What could be more natural than to unite these spin-one bosons into a multiplet of gauge fields?"

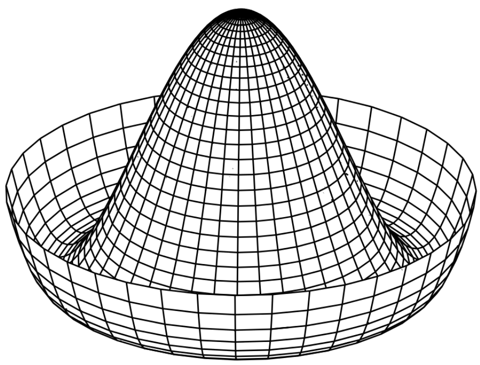
V nadaljevanju je pokazal, da sta elektromagnetna in šibka jedrska sila – v režimu spontano zlomljene umeritvene simetrije – zgolj dve različni manifestaciji t. i. elektrošibke sile. To opišemo v kontekstu naše teorije s trivialnim $(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1))$-svežnjem nad prostorom Minkowskega, ki ga imenujemo *elektrošibki glavni sveženj*; za vektorski prostor W vzamemo $\mathbb{C}^2$, na njem pa definiramo standardni skalarni produkt $\langle v, w\rangle_W = v^\dagger w$. Dalje, strukturno grupo upodobimo s standardno upodobitvijo $\rho \colon \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1) \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$, tj. s predpisom $(A, \mathrm{e}^{it}) \mapsto A\mathrm{e}^{it}$; glede na to upodobitev je zapisani standardni skalarni produkt invarianten, kar je enostavno videti. Higgsov potencial $V \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ definiramo kot $V(w) = -\mu(w^\dagger w) + \lambda(w^\dagger w)^2$ za neki konstanti $\mu, \lambda > 0$, katerih eksperimentalne vrednosti so dandanes znane; tako definiran V imenujemo *potencial mehiškega klobuka* (slika 5). Razlogi za to definicijo potenciala V so sledeči.

- Zahtevamo, da je polinom največ četrte stopnje (to ima opraviti s t. i. *renormalizabilnostjo* teorije, ki je grobo rečeno neke vrste izogibanje pojavu neskončnih kvantitet v izračunih).
- Zahtevamo, da je $(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1))$-invarianten zavoljo umeritvene invariantnosti Yang–Mills–Higgsovega Lagrangiana.
- Zahtevamo, da ima minimum, ki pa se ne nahaja pri $w = 0$.

Če pri tem dodatno predpostavimo obstoj Yang–Mills–Higgsovega vakuumskega para (ω_0, Φ_0), katerega umeritvena simetrija je spontano zlomljena, pridobimo matematični temelj za opis t. i. *Brout–Englert–Higgsovega mehanizma* pridobitve mas umeritvenih bozonov $W^{\pm}$ in Z – glej [6, izrek 8.7.2]. Polje skalarnega Higgsovega bozona torej opišemo s prerezom Φ_0 pridruženega vektorskega svežnja

$$\big(M \times (\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1))\big) \times_\rho \mathbb{C}^2$$

elektrošibkemu glavnemu svežnju. Kot zanimivost omenimo še, da je $w_0 \in W$ vakuumski vektor natanko tedaj, ko velja $\|w_0\| = \sqrt{\frac{\mu}{2\lambda}}$, kot to enostavno vidimo. Množica vseh vakuumskih vektorjev v tem primeru je torej 3-sfera v $\mathbb{C}^2$ z radijem $\|w_0\|$.



Slika 5: Ilustracija potenciala mehiškega klobuka za primer $W = \mathbb{C}$.

4 Fermioni

V tem poglavju bomo razvito teorijo glavnih svežnjev uporabili za opis fermionov v fiziki. Oglejmo si, kako je Dirac prišel do matematičnega opisa zanje na prostoru Minkowskega.

4.1 Zgodovinsko ozadje Diracove enačbe

Leta 1927 je na Solvayevi konferenci, ki je nedvomno ena najpomembnejših v zgodovini fizike, stekel pogovor med N. Bohrom in P. A. M. Diracom. Slednji je leta 1963 o tem pogovoru izjavil naslednje:

> *[...] I remember when I was in Copenhagen quite early Bohr asked me what I was working on, and I told him I was trying to get the relativistic theory of the electron. And Bohr said, "But Klein has already solved that problem." I was rather perturbed by that, but Bohr seemed to be quite complacent and satisfied with Klein's solution, and I wasn't. I remember it disturbed me quite a lot that Bohr was so satisfied with it because of the negative probabilities that it led to.*

V zgornjem citatu se Bohrova izjava *"But Klein has already solved that problem."* navezuje na Klein–Gordonovo enačbo

$$(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\phi = 0$$

s katero smo motivirali opis interakcije med skalarnim in umeritvenim poljem; označimo levo stran s (KG) in spomnimo, da je $\phi\colon M \to \mathbb{C}$ in je (M, η) prostor Minkowskega. Težava z njo je sledeča: če izvrednotimo

$$\begin{aligned} 0 = \phi^*(KG) - \phi(KG)^* &= (\phi^*\partial_t^2\phi - \phi\partial_t^2\phi^*) - (\phi^*\vec{\nabla}^2\phi - \phi\vec{\nabla}^2\phi^*) \\ &= \partial_t(\phi^*\partial_t\phi - \phi\partial_t\phi^*) - \vec{\nabla}(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*), \end{aligned}$$

in to enačbo pomnožimo z $i/2m$, dobimo

$$\underbrace{\partial_t\left(\frac{i}{2m}(\phi^*\partial_t\phi - \phi\partial_t\phi^*)\right)}_{\rho} + \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{2im}(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*)\right)}_{\vec{j}} = 0.$$

To enačbo bi želeli interpretirati kot kontinuitetno enačbo gostote verjetnosti za prisotnost delca, kot se to lahko stori v primeru Schrödingerjeve enačbe. Opazimo, da zgornji ρ ni nujno nenegativna funkcija, torej količine ρ ne moremo pojmovati kot gostoto verjetnosti za prisotnost delca – to je imel Dirac v mislih s stavkom *"the negative probabilities that it led to"*. Izkaže se, da je količino ρ ustrezno pojmovati kot gostoto *naboja* skalarnega polja.

Dirac je sumil, da težava tiči v tem, da v Klein–Gordonovi enačbi nastopajo diferencialni operatorji drugega reda in ne prvega, pri tem pa želel ohraniti posebnorelativistično zvezo $E = \sqrt{p^2 + m^2}$. Zato je predpisal

$$(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta m)^2 = p^2 + m^2 = E^2 \tag{4.1}$$

za neke iskane objekte $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta$. Če izvrednotimo levo stran in zahtevamo veljavnost te enačbe, takoj dobimo zahteve

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} := \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0,$$

za vse $i \in \{1, 2, 3\}$; indeksne rimske črke bodo v nadaljevanju označevale prostorske komponente x, y, z. Zgornji izrazi namigujejo na to, da so iskani objekti matrike; zahteva $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$ je bila v fiziki tedaj že dobro poznana – za Paulijeve matrike

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

namreč veljajo enakosti

$$\begin{aligned} [\sigma_i, \sigma_j] &= \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\varepsilon_{ij}{}^k\sigma_k, \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}I, \end{aligned}$$

kjer ponovljeni rimski indeksi označujejo sumacijo po $\{1, 2, 3\}$, in je

$$\varepsilon_{ij}{}^k = \begin{cases} \mathrm{sgn}(ijk) & \text{če so } i, j, k \text{ paroma različni,} \\ 0 & \text{sicer,} \end{cases}$$

t. i. *Levi-Civitajev simbol*. Pokazati pa se da, da ne obstajajo take štiri kompleksne 2×2 matrike α_i in β, za katere bi veljale zgornje zahteve. Kako torej nadaljevati? Dirac je nekoč zapisal:

> "It took me quite a while before I suddenly realized that there was no need to stick to the quantities with just 2 rows and columns. Why not go to 4 rows and columns?"

Po nekaj ugibanja in poskušanja najdemo primer takih (neenolično določenih) bločnih matrik:

$$\beta = \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & \\ & -\sigma_i \end{pmatrix},$$

in če celoten lineariziran izraz za E iz enačbe (4.1) vstavimo v Schrödingerjevo enačbo $i\partial_t\psi = E\psi$, dobimo

$$i\partial_t\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi.$$

Če v ta izraz vstavimo definicijo gibalne količine $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ iz kvantne mehanike, vidimo, da velja

$$(i\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m)\psi = 0. \tag{4.3}$$

Definirajmo še $\gamma_0 := \beta$ in $\gamma_i := -\beta\alpha_i$, tj.

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

ter $\gamma^\mu = \eta^{\mu\nu}\gamma_\nu$; če enačbo (4.3) pomnožimo z leve z β, jo lahko tedaj elegantno zapišemo kot

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \tag{D}$$

To je slavna *Diracova enačba*; četverec ψ kompleksnih funkcij na prostoru Minkowskega imenujemo *spinorsko polje*. Izkaže se, da moramo prvi par komponent tega četverca interpretirati kot valovno funkcijo delca, drugi par pa kot valovno funkcijo antidelca; Diracova enačba v nekem smislu torej napoveduje obstoj antidelcev in simultano opisuje delec in antidelec. Vsak od njiju je predstavljen s parom kompleksnih funkcij, kar ima opraviti s *spinom* – to bo postalo jasneje v razdelku 4.2.3 o spinorski upodobitvi spin grupe Lorentzove grupe. Za matrike γ_μ veljajo enostavno preverljive enakosti

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} I, \tag{4.5}$$

v kar se lahko bralec sam prepriča z neposrednim izračunom. Pogosto pišemo tudi kar

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} & \sigma_\mu \\ \tilde{\sigma}_\mu & \end{pmatrix},$$

kjer smo dodatno vpeljali $\sigma_0 := I$ in $\tilde{\sigma}_0 := \sigma_0$ ter $\tilde{\sigma}_i = -\sigma_i$. Očitno je, da je γ_0 hermitska, γ_i pa so antihermitske, saj so Paulijeve matrike hermitske.

Pokažimo zdaj, da lahko neko količino, ki je povezana s spinorskim poljem ψ, res interpretiramo kot gostoto verjetnosti za prisotnost delca. Če Diracovo enačbo (D) hermitsko adjungiramo, dobimo

$$-i(\partial_\mu \psi^\dagger)(\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger = 0. \tag{4.6}$$

To lahko nekoliko poenostavimo. Zaradi enakosti $\{\gamma_0, \gamma_i\} = 0$ velja $\{\gamma_0, \gamma_i\}^\dagger = \gamma_i^\dagger \gamma_0^\dagger + \gamma_0^\dagger \gamma_i^\dagger = 0$, in zato z uporabo hermitskosti γ_0 (na obeh $\gamma_0^\dagger$ v tej enačbi) in antihermitskosti γ_i (le na eni od $\gamma_i^\dagger$) ugotovimo, da veljata enakosti

$$\gamma_i^\dagger = \gamma_0 \gamma_i \gamma_0 \quad \text{in} \quad (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Če zadnjo enačbo vstavimo v enačbo (4.6) in jo nato pomnožimo z γ^0 z desne, ta postane

$$-i(\partial_\mu \psi^\dagger)\gamma_0 \gamma^\mu - m\psi^\dagger \gamma_0 = 0,$$

in če vpeljemo *adjungirano spinorsko polje* $\overline{\psi} := \psi^\dagger \gamma_0$, potem zadnja enačba postane

$$-i\partial_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu - m\overline{\psi} = 0, \tag{$\overline{\mathrm{D}}$}$$

kar imenujemo *adjungirana Diracova enačba*. Podobno, kot smo to storili v primeru Klein–Gordonove enačbe, si zdaj ogledamo naslednji izraz:

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\psi}(\mathrm{D}) - (\overline{\mathrm{D}})\psi \\ &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + (i\partial_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu + m\overline{\psi})\psi \\ &= i(\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu \overline{\psi})\gamma^\mu \psi) \\ &= i\partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu \psi), \end{aligned}$$

torej je $\partial_\mu j^\mu = 0$, čim vpeljemo $j_\mu := \overline{\psi}\gamma_\mu\psi$. Izpeljali smo torej kontinuitetno enačbo za količino j_μ, v kateri pa je

$$\rho := j_0 = \overline{\psi}\gamma_0\psi = \psi^\dagger\gamma_0^2\psi = \psi^\dagger\psi,$$

ki je torej pozitivna funkcija na prostoru Minkowskega. Torej smo z izpeljavo Diracove enačbe ustvarili posebnorelativistično kvantnomehansko gibalno diferencialno enačbo, katere rešitev ψ lahko interpretiramo kot valovno funkcijo delca; količino $\psi^\dagger\psi$ interpretiramo kot gostoto verjetnosti za prisotnost delca.

V nadaljevanju bomo Diracovo enačbo prenesli iz prostora Minkowskega v splošnejši kontekst – vpeljali jo bomo na *Lorentzovo mnogoterost* M (tj. na 4-razsežno psevdo Riemannovo mnogoterost s signaturo $(1,3)$) z nekaterimi dodatnimi potrebnimi predpostavkami na M. Kot smo že omenili, bomo to storili z uporabo razvite teorije glavnih svežnjev. Zatem bomo Diracovo enačbo še sklopili z umeritvenim poljem, kot smo to storili v primeru skalarnega polja.

Preden se tega lotimo, je potrebno dobro preučiti Lorentzovo grupo

$$\mathrm{O}(1,3) = \{A \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R}) \mid A^\top \eta A = \eta\}, \quad \eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1).$$

Pogoj $A^\top\eta A = \eta$ je ekvivalenten pogoju $\eta(Av, Aw) = \eta(v,w)$ za vse $v, w \in \mathbb{R}^4$, kar sledi iz enakosti $\eta(Av,Aw) = (Av)^\top\eta Aw = v^\top A^\top\eta Aw$; ta pogoj je dalje ekvivalenten temu, da četverec stolpcev matrike A sestavlja psevdo ortonormirano bazo glede na psevdo skalarni produkt η.

4.2 Lorentzova grupa

Naslednja dejstva privzemam kot poznana, bralec se lahko o njih prepriča v [14, poglavji 2.1.3 in 2.2.3]. Lorentzova grupa $\mathrm{O}(1,3)$ je Liejeva grupa, ki je kot mnogoterost dimenzije $n(n-1)/2 = 6$ (saj je $n = 4$). Njena Liejeva algebra je enaka

$$\mathfrak{o}(1,3) = \{X \in \mathfrak{gl}(4,\mathbb{R}) \mid \eta X + X^\top\eta = 0\},$$

taista množica pa je seveda tudi Liejeva algebra njene komponente za povezanost nevtralnega elementa I, saj so komponente danega topološkega prostora, ki je lokalno povezan s potmi, vedno odprte podmnožice. Začnimo torej s preučevanjem komponent za povezanost Lorentzove grupe.

4.2.1 Komponente za povezanost

Lorentzova grupa se od ortogonalne grupe $\mathrm{O}(4)$ razlikuje v tem, da namesto običajnega skalarnega produkta na $\mathbb{R}^4$ "ohranja" psevdo skalarni produkt Minkowskega η. To ima zanimivo posledico: medtem, ko ima $\mathrm{O}(4)$ dve komponenti za povezanost, ima $\mathrm{O}(1,3)$ kar štiri. Ohlapno rečeno gre za to, da matrike z enotsko determinanto iz $\mathrm{O}(1,3)$ ohranjajo orientacijo prostora-časa $\mathbb{R}^4$, ne ohranjajo pa nujno orientacije prostora $\{0\}\times\mathbb{R}^3$ in časa $\mathbb{R}\times\{0\}^3$ vsakega zase. Zaradi tega ima potem Liejeva grupa $\mathrm{SO}(1,3)$ dve komponenti, kar je v kontrastu s povezanostjo Liejeve grupe $\mathrm{SO}(4)$. Dokažimo zapisano.

Izrek 4.1. *Lorentzova grupa ima natanko štiri komponente za povezanost:*

$$\begin{aligned}
L_+^\uparrow &= \{A \in \mathrm{O}(1,3) \mid \det A = 1, A_{00} \geq 1\},\\
L_-^\uparrow &= \{A \in \mathrm{O}(1,3) \mid \det A = -1, A_{00} \geq 1\},\\
L_+^\downarrow &= \{A \in \mathrm{O}(1,3) \mid \det A = 1, A_{00} \leq -1\},\\
L_-^\downarrow &= \{A \in \mathrm{O}(1,3) \mid \det A = -1, A_{00} \leq -1\}.
\end{aligned}$$

Opomba 4.2. Posledica izreka je, da je $L_+^\uparrow$ Liejeva podgrupa v $\mathrm{SO}(1,3)$, saj je komponenta za povezanost, ki vsebuje nevtralni element I (medtem ko druge komponente same zase niso niti grupe, ker ga ne). Označujemo tudi $L_+^\uparrow = \mathrm{SO}^+(1,3)$, pri čemer (nekoliko nerodno) plus na levi označuje enotskost determinante, na desni pa pogoj $A_{00} \geq 1$. To grupo imenujemo *ortohrona specialna Lorentzova grupa* (ang. *orthochronous special Lorentz group*).

Dokaz. Najprej opazimo, da za poljubno $A \in \mathrm{O}(1,3)$ velja

$$-1 = \det \eta = \det(A^\top \eta A) = -(\det A)^2,$$

zato je $\det A = \pm 1$. Dalje, za $e_0 = (1,0,0,0)$ velja

$$1 = \eta(e_0, e_0) = \eta(Ae_0, Ae_0) = A_{00}^2 - A_{10}^2 - A_{20}^2 - A_{30}^2,$$

zato je $A_{00}^2 = 1 + A_{10}^2 + A_{20}^2 + A_{30}^2$ in posledično $A_{00}^2 \geq 1$; drugače rečeno, velja $A_{00} \geq 1$ ali $A_{00} \leq -1$. To dokazuje, da so navedene podmnožice odprte (in očitno disjunktne) podmnožice v $\mathrm{O}(1,3)$, zato ima slednja najmanj štiri komponente za povezanost. Velja pa $I \in L_+^\uparrow$, $\eta \in L_-^\uparrow$, $-I \in L_+^\downarrow$ in $-\eta \in L_-^\downarrow$, zato velja tudi $L_-^\uparrow = \eta L_+^\uparrow$, $L_+^\downarrow = (-I)L_+^\uparrow$ ter $L_-^\downarrow = (-\eta)L_+^\uparrow$, saj je levo množenje s poljubnim elementom difeomorfizem Liejeve grupe $L_+^\uparrow$. Torej je za sklep, da so komponente natanko štiri, dovolj pokazati, da je $L_+^\uparrow$ povezana podmnožica v $\mathrm{O}(1,3)$.

Pokazali bomo, da je $L_+^\uparrow$ difeomorfna $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$; pri tem si pomagamo z uvidom, da je $e_0 \in \mathbb{R}^4$ taka točka, da lahko njeno orbito $\mathrm{Orb}_{L_+{}^\uparrow}(e_0)$ opišemo precizno in elegantno. Definirajmo *hiperboloid* H v prostoru Minkowskega kot

$$H = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \eta(x,x) = 1, x_0 \geq 1\}.$$

Množica H je zaprta podmnožica v $\mathbb{R}^4$, difeomorfna $\mathbb{R}^3$. Res, pogoja $\eta(x,x) = 1$ in $x_0 \geq 1$ sta skupaj ekvivalentna pogoju $x_0 = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, zato je H mnogoterost grafa funkcije, preslikava $x \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ pa globalna karta zanjo. Pokažimo, da par $(L_+^\uparrow, H)$ dopušča strukturo glavnega svežnja s strukturno grupo G, izomorfno $\mathrm{SO}(3)$.

Definirajmo

$$\begin{aligned}
\pi \colon L_+^\uparrow &\to H,\\
\pi(A) &= Ae_0.
\end{aligned}$$

Ta preslikava je gladka, saj je zožitev matričnega množenja. Pokažimo, da je surjektivna. Naj bo točka $v_0 \in H$ poljubna; potem velja $\eta(v_0, v_0) = 1$, zato lahko v_0

dopolnimo do psevdo ortonormirane baze $(v_i)_{i=0}^3$ in tako postane matrika stolpcev $[v_0\, v_1\, v_2\, v_3]$ element grupe $\mathrm{O}(1,3)$. Za prvo komponento $(v_0)^0$ vektorja v_0 zaradi pogoja $v_0 \in H$ velja $(v_0)^0 \geq 1$, očitno pa lahko s spremembo vrstnega reda vektorjev v_i obrnemo predznak determinante $\det[v_0\, v_1\, v_2\, v_3]$, zato lahko vzamemo tako bazo $(v_i)_i$, da je $[v_0\, v_1\, v_2\, v_3] \in L_+^\uparrow$. Iz definicije točke e_0 zdaj sledi očitna enakost $[v_0\, v_1\, v_2\, v_3]e_0 = v_0$, kar dokazuje željeno surjektivnost.

Naj bo $G := \pi^{-1}(e_0)$, tj.

$$G = \mathrm{Stab}_{L^\uparrow{}_+}(e_0) = \{A \in L_+^\uparrow \mid Ae_0 = e_0\}.$$

Kot stabilizatorska podgrupa je G zaprta podgrupa v $L_+^\uparrow$, zato je po [14, izrek 2.69] zaprta Liejeva podgrupa, kot taka pa naravno deluje na $L_+^\uparrow$ z desnim množenjem gladko in prosto, očitno pa tudi tranzitivno na vlaknih preslikave π. Opazimo, da ima vsaka matrika $A \in G$ zaradi pogoja $Ae_0 = e_0$ bločno obliko $\mathrm{diag}(1, \tilde{A})$ za neko obrnljivo 3×3 matriko $\tilde{A}$, ki pa mora zaradi pogoja $A \in L^\uparrow{}_+$ biti element grupe $\mathrm{SO}(3)$. To pomeni, da sta Liejevi grupi G in $\mathrm{SO}(3)$ izomorfni, slednja pa je povezana, saj je komponenta nevtralnega elementa v $\mathrm{O}(3)$.

Končno, definiramo globalen prerez $s\colon H \to L_+{}^\uparrow$ preslikave π z gladkim predpisom

$$s(x) = \left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & 0 & 0 \\ x & & I & \\ & & & \end{array}\right),$$

s tem pa smo po posledici 2.24 dokazali, da je $\pi\colon L_+^\uparrow \xrightarrow{G} H$ trivialen glavni sveženj. Zato velja $L_+^\uparrow \approx H \times G \approx \mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$, produkt povezanih topoloških prostorov pa je povezan. ■

Opomba 4.3. V dokazu smo videli, da je $L_+^\uparrow \approx \mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$, torej Lorentzova grupa in njena komponenta nevtralnega elementa nista kompaktni, kar je v nasprotju z ortogonalno grupo $\mathrm{O}(4)$ in specialno unitarno grupo $\mathrm{SO}(4)$. Spoznali smo tudi, da je $A \mapsto \mathrm{diag}(1, A)$ zaprta vložitev Liejeve grupe $\mathrm{SO}(3)$ v $\mathrm{SO}(1,3)$.

4.2.2 Spin homomorfizem $\mathbf{SL(2,\mathbb{C}) \to SO^+(1,3)}$

Preučevanje krovnih homomorfizmov v dano Liejevo grupo G je pomembno zaradi dejstva, da lahko z njihovo pomočjo (vsaj v principu) enostavno opisujemo upodobitve grupe G – glej lemo po tem uvodu. Homomorfizem povezanih Liejevih grup $H \to G$ je *krovni*, če je njegov odvod izomorfizem Liejevih algeber $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$. Iz splošne teorije Liejevih grup vemo, da je vsak krovni homomorfizem Liejevih grup surjektivni lokalni difeomorfizem (glej npr. [14, trditev 2.91]). Preden se lotimo iskanja univerzalnega krova Liejeve grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$, za ogrevanje dokažimo omenjeno lemo.

Lema 4.4. *Naj bo $\phi\colon H \to G$ homomorfizem Liejevih grup in (ρ, V) upodobitev Liejeve grupe G.*

i) $(\rho\circ\phi, V)$ je upodobitev Liejeve grupe H (imenuje se povlek upodobitve V vzdolž ϕ, označimo ϕ^*V).

ii) Če je ϕ surjektiven in V nerazcepna, je tudi ϕ^*V nerazcepna.

Dokaz. Prva točka sledi iz dejstva, da je kompozitum homomorfizmov Liejevih grup tudi sam homomorfizem Liejevih grup. Dokažimo drugo točko. Naj bo W podupodobitev upodobitve ϕ^*V. Potem velja $hw := \phi(h)w \in W$ za vse $h \in H, w \in W$, in ker je ϕ surjektivna, sledi $gw \in W$ za vse $g \in G, w \in W$. Torej je W podupodobitev upodobitve V, zato velja bodisi $W = \{0\}$ bodisi $W = V$. ■

Izrek o univerzalnem krovu Liejeve grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$ je ključen za nadaljnjo razpravo. Ker se ta lahko sam po sebi zdi nekoliko abstrakten, ga motivirajmo s preučevanjem njene Liejeve algebre $\mathfrak{so}^+(1,3) = \mathfrak{o}(1,3)$ in njenih korelacij z drugimi pomembnimi Liejevimi algebrami, in preučimo določene elemente grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$, ki nosijo fizikalno informacijo.

Standardna baza šestdimenzionalne Liejeve algebre $\mathfrak{so}^+(1,3)$ je dana s t. i. *generatorji rotacij in potiskov*:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & 1 \\ & & 0 & \\ & -1 & & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$
$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & & -1 & \\ & 0 & & \\ -1 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & & & -1 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Zgornje brezsledne matrike so očitno linearno neodvisne, z neposrednim izračunom pa se prepričamo, da so res elementi šestdimenzionalne algebre $\mathfrak{so}^+(1,3)$, zato so njena baza. Nomenklatura je ustrezna, saj eksponenciranje prve trojice zgornjih matrik vrne ravno standardne matrike prostorskih rotacij, eksponenciranje druge trojice pa matrike potiskov v prostoru Minkowskega (ang. *Lorentz boosts*) – da to utemeljimo, ekponencirajmo matriki φJ_3 in φK_3 za nek $\varphi > 0$. V prvem primeru je

$$\mathrm{e}^{\varphi J_3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varphi J_3)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varphi J_3)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varphi J_3)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\varphi & \sin\varphi & \\ & -\sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

kjer smo na prehodu skozu drugi enačaj uporabili absolutno konvergentnost (v matrični normi) vrste na skrajni levi (glej [14, str. 45]), na prehodu skozi tretjega pa enakosti $(J_3)^0 = I$, $(J_3)^{4k+1} = J_3$ $(J_3)^{4k+2} = -\mathrm{diag}(0,1,1,0)$, $(J_3)^{4k+3} = -J_3$ in $(J_3)^{4k+4} = \mathrm{diag}(0,1,1,0)$, ki veljajo za vse $k \in \mathbb{N}_0$, v kar se lahko prepričamo z množenjem matrik in indukcijo, ter Taylorjev razvoj elementarnih funkcij sin in cos. Matrika $\mathrm{e}^{\varphi J_3}$ predstavlja ravno prostorsko rotacijo okrog z-osi za kot φ. Podobno izračunamo, da velja

$$\mathrm{e}^{\varphi K_3} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & & & -\sinh\varphi \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -\sinh\varphi & & & \cosh\varphi \end{pmatrix},$$

kar v fiziki interpretiramo tako, da definiramo število $v \in (-c, c)$ kot $v/c = \tanh \varphi$, kjer c označuje hitrost svetlobe; tedaj matrika $\mathrm{e}^{\varphi K_3}$ predstavlja transformacijo iz mirujočega koordinatnega sistema v koordinatni sistem, ki se giblje s hitrostjo v v smeri z glede na izhodišče, čemur rečemo *Lorentzov potisk* v smeri z. Za fizikalno razpravo o tem glej npr. [19, poglavje 14.9].

Vrnimo se h generatorjem algebre $\mathfrak{so}^+(1,3)$; z neposrednim računom preverimo, da za komutatorje teh matrik velja

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ij}{}^k J_k, \quad [J_i, K_j] = \varepsilon_{ij}{}^k K_k, \quad [K_i, K_j] = -\varepsilon_{ij}{}^k J_k. \tag{4.7}$$

Enakost skrajno desno pove, da generatorji K_i potiskov sami zase ne tvorijo Liejeve podalgebre v $\mathfrak{so}^+(1,3)$, kar implicira, da množica potiskov $\{\mathrm{e}^{\varphi K_i} \mid \varphi \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3\}$ ni Liejeva podgrupa Liejeve grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$.

Liejeve algebre $\mathfrak{so}^+(1,3)$ torej ne moremo zapisati z direktno vsoto podalgeber, ki ju generirajo posamično generatorji rotacij in generatorji potiskov, saj $\mathrm{Lin}\{K_i\}_i$ ni zaprta za Liejev oklepaj in $[J_i, K_j] \neq 0$. To razrešimo s t. i. *kompleksifikacijo Liejeve algebre*,

$$\mathfrak{so}^+(1,3)_{\mathbb{C}} := \mathfrak{so}(1,3) \otimes \mathbb{C},$$

kar zgolj pomeni, da smo realne koeficiente v algebri nadgradili v kompleksne. Tedaj lahko definiramo

$$J_i^{\pm} := \frac{1}{2}(J_i \pm i K_i)$$

in z neposrednim računom preverimo

$$[J_i^+, J_j^+] = \varepsilon_{ij}{}^k J_k^+, \quad [J_i^-, J_j^-] = \varepsilon_{ij}{}^k J_k^-, \quad [J_i^+, J_j^-] = 0,$$

za vse i in j, iz česar sledi, da sta množici $\mathrm{Lin}\{J_i^+\}_i$ in $\mathrm{Lin}\{J_i^-\}_i$ komplementarni Liejevi podalgebri v $\mathfrak{so}(1,3)_{\mathbb{C}}$; s komplementarnostjo imamo v mislih enakost $\mathrm{Lin}\{J_i^+\}_i \cap \mathrm{Lin}\{J_i^-\}_i = \emptyset$, ki enostavno sledi iz $[J_i^+, J_j^-] = 0$. Linearnoalgebraično dejstvo je, da tedaj velja

$$\mathfrak{so}^+(1,3)_{\mathbb{C}} \cong \mathrm{Lin}\{J_i^+\}_i \oplus \mathrm{Lin}\{J_i^-\}_i.$$

Po drugi strani pa opazimo, da za $\mathrm{Lin}\{J_i^+\}_i$ in $\mathrm{Lin}\{J_i^-\}_i$ veljajo iste komutacijske relacije, kot v Liejevi algebri

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) \mid X + X^\dagger = 0, \mathrm{tr}\, X = 0\}$$

kompleksnih 2×2 antihermitskih brezslednih matrik; res, baza le-te so (do predznaka natanko) namreč ravno Paulijeve matrike

$$\left\{\frac{1}{2i}\sigma_j\right\}_{j=1}^{3}, \quad \text{za katere velja} \quad \left[\frac{1}{2i}\sigma_i, \frac{1}{2i}\sigma_j\right] = \varepsilon_{ij}{}^k \frac{1}{2i}\sigma_k.$$

Če bralec s tem ni domač, naj obišče [4, str. 62]. Vidimo, da sta Liejevi algebri $\mathrm{Lin}\{J_i^+\}_i$ in $\mathrm{Lin}\{J_i^-\}_i$ obe izomorfni kompleksifikaciji $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$. Posledično je

$$\mathfrak{so}^+(1,3)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus i\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}. \tag{4.8}$$

Nekoliko nepredvideno si zdaj ogledamo še Liejevo algebro $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ specialne linearne Liejeve grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$; po [14, poglavje 2.2.2] velja

$$\begin{aligned}
\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} X = 0\} \\
&= \operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}_{\mathbb{C}} \\
&= \operatorname{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}\right\} + \operatorname{Lin}\left\{i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, i\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, i\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}\right\} \\
&= i\mathfrak{su}(2) + \mathfrak{su}(2) \\
&\cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

S primerjavo enačb (4.8) in (4.9) vidimo, da je

$$\mathfrak{so}^+(1,3)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus i\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{C}}.$$

Izomorfnost kompleksifikacij danih Liejevih algeber pa ne implicira nujno izomorfnosti Liejevih algeber;* pokažimo, da je v primeru algeber $\mathfrak{so}^+(1,3)$ in $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ to vseeno res. V ta namen najprej identificirajmo prostor Minkowskega $(\mathbb{R}^4, \eta)$ z vektorskim prostorom $(\mathrm{Herm}(2), \det)$ vseh 2×2 hermitskih matrik.

Lema 4.5. *Preslikavi* $\mathcal{I}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathrm{Herm}(2)$ *in* $\tilde{\mathcal{I}}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathrm{Herm}(2)$*, dani za vsak* $x = (x^0, \dots, x^3)$ *s predpisom*

$$\mathcal{I}(x) = x^\mu \sigma_\mu \quad \textit{in} \quad \tilde{\mathcal{I}}(x) = x^\mu \tilde{\sigma}_\mu,$$

sta izomorfizma vektorskih prostorov, za katera velja

$$\det \mathcal{I}(x) = \eta(x,x) \quad \textit{in} \quad \mathcal{I}(x)\tilde{\mathcal{I}}(x) = \tilde{\mathcal{I}}(x)\mathcal{I}(x) = \eta(x,x)I.$$

Opomba 4.6. Po lemi lahko torej vsak $x \in \mathbb{R}^4$ identificiramo z matriko

$$\mathcal{I}(x) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x_0 - x^3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(2),$$

in je pri tem njegova psevdo norma $\eta(x,x)$ enaka determinanti te matrike. Včasih bomo namesto $\mathcal{I}(x)$ pisali kar x, namesto $\tilde{\mathcal{I}}(x)$ pa $\tilde{x}$, in imeli v mislih zapisano identifikacijo. V lemi dodatno vidimo, da je det psevdo skalarni produkt na Herm(2). Omenimo tudi, da prostor Herm(2) dopušča tudi "običajni" skalarni produkt, dan z $\langle M, N\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(AB)$, glede na katerega velja enostavno preverljiva enakost $\langle \sigma_\mu, \sigma_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu}$.

Dokaz. Za dokaz prvega dela leme je dovolj pokazati, da je $(\sigma_\mu)_\mu$ baza prostora Herm(2), to pa je jasno, saj je vsaka matrika $A \in \mathrm{Herm}(2)$ oblike

$$A = \begin{pmatrix} a & c + id \\ c - id & b \end{pmatrix} \quad \text{za neke } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Drugi del leme sledi z neposrednim izračunom. ■

*Brez dodatne razprave povejmo, da protiprimer podajata Liejevi algebri $\mathfrak{so}(3)$ in $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

Izrek 4.7. *Preslikava* $\mathrm{Spin}\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}^+(1,3)$*, dana s predpisom*

$$\mathrm{Spin}(A)x := AxA^\dagger,$$

za vse $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *in* $x \in \mathrm{Herm}(2) \cong \mathbb{R}^4$*, je krovni homomorfizem Liejevih grup z jedrom* $\{\pm I\}$*. Še več, Liejeva grupa* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *je povezana in enostavno povezana, zato je univerzalni krov Liejeve grupe* $\mathrm{SO}^+(1,3)$*.*

Opomba 4.8. Preslikavo Spin imenujemo *spin homomorfizem*; splošneje, tako imenujemo vsak univerzalni krovni homomorfizem (morebitno nedefinitne) ortogonalne Liejeve grupe in pri tem totalni prostor imenujemo *spin grupa*. V tej terminologiji izrek pravi, da je $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *spin grupa ortohrone specialne Lorentzove grupe* (krajše rečemo tudi kar *spin grupa Lorentzove grupe*), zato pogosto označimo $\mathrm{Spin}(1,3) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ in $\mathfrak{spin}(1,3) := \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Dokaz. Najprej je potrebno preveriti, da je $\mathrm{Spin}(A) \in \mathrm{SO}^+(1,3)$. Izraz $AxA^\dagger$ je seveda linearen v argumentu x, zato je $\mathrm{Spin}(A)$ linearna preslikava na $\mathbb{R}^4$. Po prejšnji lemi velja

$$\eta(\mathrm{Spin}(A)x, \mathrm{Spin}(A)x) = \det AxA^\dagger = \det A \det x \det A^\dagger = \det x = \eta(x,x),$$

zato je $\mathrm{Spin}(A) \in \mathrm{O}(1,3)$. Pokažimo, da je Liejeva grupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ povezana in enostavno povezana – še več, pokazali bomo, da je difeomorfna $S^3 \times \mathbb{R}^3$.

Definirajmo preslikavo $\pi\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2_*$ s predpisom $\pi(A) = A\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, tj. π vrne prvi stolpec matrike A; surjektivnost te preslikave je očitna. Vlakno nad elementom $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ je enako

$$\pi^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}1 & b\\0 & 1\end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{C}\right\} =: G,$$

in jasno je, da je G Liejeva grupa, ki je izomorfna grupi $\mathbb{C}$ za seštevanje. Enostavno je videti, da je $G = \mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, zato je G zaprta Liejeva podgrupa v $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, kot taka pa deluje na slednjo z desnim množenjem gladko in prosto, očitno pa tudi tranzitivno na vlaknih preslikave π. Naj bo preslikava $s\colon \mathbb{C}^2_* \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ dana z gladkim predpisom

$$s(z,w) = \begin{pmatrix} z & -\frac{\bar{w}}{z\bar{z}+w\bar{w}} \\ w & \frac{\bar{z}}{z\bar{z}+w\bar{w}} \end{pmatrix}.$$

To je globalen prerez preslikave π, zato po posledici 2.24 sledi, da je

$$\pi\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{G} \mathbb{C}^2_*$$

glavni sveženj, ki pa je trivialen. Posledično je $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \approx \mathbb{C}^2_* \times \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^4_* \times \mathbb{C} \approx S^3 \times (0,\infty) \times \mathbb{C} \approx S^3 \times \mathbb{R}^3$. Produkt povezanih in enostavno povezanih topoloških prostorov pa je tudi sam takšen, torej je $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ povezan in enostavno povezan prostor. Ker je zvezna slika povezanega topološkega prostora povezan prostor, sledi tudi $\mathrm{im}(\mathrm{Spin}) \subset \mathrm{SO}^+(1,3)$, saj je $\mathrm{SO}^+(1,3)$ povezan prostor.

Preslikava Spin je homomorfizem grup, saj velja $\mathrm{Spin}(AB)x = ABxB^\dagger A^\dagger$ za vse $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Poiščimo njegovo jedro; naj bo torej $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ taka matrika, da velja $\mathrm{Spin}(A)x = AxA^\dagger = x$ za vse $x \in \mathrm{Herm}(2)$. Če je $x = I$, dobimo enakost $AA^\dagger = I$, torej je A unitarna, kar pomeni

$$\begin{aligned} A_{00}\bar{A}_{00} + A_{10}\bar{A}_{10} &= 1 \\ A_{10}\bar{A}_{10} + A_{11}\bar{A}_{11} &= 1. \end{aligned}$$

in če je $x = \sigma_3$, dobimo

$$\begin{aligned} A_{00}\bar{A}_{00} - A_{10}\bar{A}_{10} &= 1 \\ A_{10}\bar{A}_{10} - A_{11}\bar{A}_{11} &= -1, \end{aligned}$$

iz česar sledi $A_{10} = A_{01} = 0$. Iz prve od teh enačb potem sledi $A_{00}\bar{A}_{00} = 1$, imamo pa tudi $\det A = A_{00}A_{11} = 1$, zato je $A_{11} = \bar{A}_{00} =: \bar{z}$. Če je $x = \sigma_1$, dobimo iz pogoja $\left(\begin{smallmatrix} z & \\ & \bar{z} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \bar{z} & \\ & z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right)$ še enakost $z^2 = 1$, iz katere sledi $z = \pm 1$ in zato $A \in \{\pm I\}$ oz. ekvivalentno $\ker(\mathrm{Spin}) \subset \{\pm I\}$; jasno pa je, da velja $\{\pm I\} \subset \ker(\mathrm{Spin})$, zato smo dokazali

$$\ker(\mathrm{Spin}) = \{\pm I\}.$$

Poljuben homomorfizem Liejevih grup pa ima diskretno jedro natanko tedaj, ko je imerzija (v to ekvivalenco se naj bralec sam prepriča z uporabo dejstva, da je vsaka imerzija med mnogoterostma lokalno injektivna, in naravnostjo eksponentne preslikave [14, trditev 2.40]), zato je njegov odvod $\mathrm{Spin}_*\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{so}^+(1,3)$ injektivni homomorfizem Liejevih algeber. Obe algebri pa sta 6-dimenzionalni, saj sta grupi $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ in $\mathrm{SO}^+(1,3)$ kot mnogoterosti 6-dimenzionalni, zato je Spin_* izomorfizem Liejevih algeber; končno, Liejeva grupa $\mathrm{SO}^+(1,3)$ je povezana po izreku 4.1, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ pa po prejšnjem odstavku, zato je preslikava Spin krovni homomorfizem Liejevih grup. ∎

Posledica 4.9. *Fundamentalna grupa specialne ortohrone Lorentzove grupe je*

$$\pi_1(\mathrm{SO}^+(1,3)) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Opomba 4.10. Zaradi izrekov 4.1 in 4.7 lahko torej narišemo diagram:

$$\begin{array}{l} \mathrm{Spin}(1,3) \\ \quad \big\downarrow \scriptstyle\mathrm{Spin} \\ \mathrm{SO}^+(1,3) \ \sqcup \ (L_-^\uparrow \sqcup L_+^\downarrow \sqcup L_-^\downarrow) \end{array}$$

Trditev 4.11. *Predpis izomorfizma* $\mathrm{Spin}_*\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{so}^+(1,3)$ *Liejevih algeber, ki ga porodi spin homomorfizem* $\mathrm{Spin}\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}^+(1,3)$, *je enak*

$$\mathrm{Spin}_*(Y)x = Yx + xY^\dagger$$

za vse $Y \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ *in* $x \in \mathrm{Herm}(2) \cong \mathbb{R}^4$.

Dokaz. Naj bo $A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ gladka pot v $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, dana z $A(t) = e^{tY}$. Potem je $A(0) = I$, $A'(0) = Y$ in

$$\mathrm{Spin}_*(Y)x = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Spin}(A(t))x = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(t)xA(t)^\dagger = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tY}xe^{tY^\dagger} = Yx + xY^\dagger,$$

kjer smo na prehodu skozi tretji enačaj upoštevali enakost $(e^{tY})^\dagger = e^{tY^\dagger}$, v katero se lahko prepričamo z uporabo definicije eksponenciranja matrike[†] in dejstva, da je hermitsko adjungiranje zvezna operacija; na prehodu skozi zadnji enačaj smo zgolj uporabili Leibnizevo pravilo. ∎

4.2.3 Spinorska upodobitev spin grupe Lorentzove grupe

Vse končnorazsežne upodobitve Liejeve grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ so znane in razumljene – bralec se lahko o tem prepriča npr. v [16, poglavje 3.1], brez dokaza pa jih navedemo kasneje, v opombi 4.17. Mi bomo potrebovali zgolj nekaj preprostih upodobitev te grupe, zato se najprej osredotočimo nanje. Ker je spinorsko polje ψ iz uvoda tega poglavja četverec kompleksnih funkcij na prostoru Minkowskega, nas zanimajo kompleksne 4-dimenzionalne upodobitve Liejeve grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Spinorsko polje ψ lahko zapišemo kot

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{(1/2,0)} \\ \psi_{(0,1/2)} \end{pmatrix}$$

za neki dve 2-terici $\psi_{(1/2,0)}, \psi_{(0,1/2)}$ kompleksnih funkcij na prostoru Minkowskega. Pri tem $\psi_{(1/2,0)}$ imenujemo *levosučno* in $\psi_{(0,1/2,0)}$ *desnosučno* spinorsko polje. Ta razcep naredimo zato, ker matrike γ_μ delujejo s σ_μ na vsako 2-terico posebej, pri čemer zamenjajo vrstni red teh dveh 2-teric. Iz tega razloga nas zanimajo samo tiste nerazcepne upodobitve Liejeve grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ na $\mathbb{C}^4$, ki vsebujejo $\mathbb{C}^2 \oplus \{0\}^2$ in $\{0\}^2 \oplus \mathbb{C}^2$ kot $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-invariantna podprostora. Kot bomo videli kasneje, se kot fizikalno relevantna izkaže naslednja upodobitev $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ na $\mathbb{C}^4$.

Definicija 4.12. Preslikavo $\kappa\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(4,\mathbb{C})$, dano s predpisom

$$\kappa(A) := \begin{pmatrix} A & \\ & (A^\dagger)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

imenujemo *spinorska upodobitev* spin grupe Lorentzove grupe.

Opomba 4.13. Kot že omenjeno, bomo kasneje vpeljali pojem spinorskega polja na splošnejših Lorentzovih mnogoterostih, kot je prostor Minkowskega. Tam bodo spinorska polja prerezi pridruženega vektorskega svežnja glede na spinorsko upodobitev – zaenkrat še ne vemo, kateri glavni sveženj imamo pri tem v mislih, vidimo pa, da je njegova strukturna grupa enaka $\mathrm{Spin}(1,3) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Opomba 4.14. Spinorsko upodobitev moramo razumeti na sledeč način. Označimo z $D^{(1/2,0)}$ standardno upodobitev grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ na prostoru $\mathbb{C}^2$ (tj. $D^{(1/2,0)}$ je v standardni bazi prostora $\mathbb{C}^2$ kar inkluzija $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$) in dalje, označimo z $D^{(0,1/2)}$ t. i. *konjugirano dualno upodobitev*, tj. $D^{(0,1/2)}\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ je (v standardni bazi prostora $\mathbb{C}^2$) dana s predpisom

$$D^{(0,1/2)}(A) := (A^\dagger)^{-1}.$$

Preslikava $D^{(0,1/2)}$ je res upodobitev, saj velja enakost $((AB)^\dagger)^{-1} = (B^\dagger A^\dagger)^{-1} = (A^\dagger)^{-1}(B^\dagger)^{-1}$ za vse $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Torej je spinorska upodobitev κ direktna vsota upodobitev $D^{(1/2,0)}$ in $D^{(0,1/2)}$, tj.

$$\kappa = D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}.$$

[†] $\exp\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, $e^Y = \sum_{n=0}^\infty \frac{Y^n}{n!}$.

Ti dve upodobitvi pa nista izomorfni.[‡] Res – pa denimo, da obstaja $T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, da velja $TAT^{-1} = (A^\dagger)^{-1}$ za vse $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Če na tej enakosti uporabimo sled, dobimo enakost $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(A^\dagger)^{-1}$ za vse $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ – ta enakost pa ne velja za matriko

$$A = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & i/2 \end{pmatrix},$$

saj $-2i + i/2 \neq -i/2 + 2i$, kar je protislovje.

Naslednja trditev odraža dejstvo, da obstaja takšna upodobitev Liejeve algebre $\mathfrak{so}^+(1, 3) \to \mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, ki ni odvod neke upodobitve $\mathrm{SO}^+(1, 3) \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$; kaj takega se v primeru grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ po Liejevem drugem fundamentalnem izreku (glej npr. [14, posledica 2.117]) ne more zgoditi. Po naslednji trditvi je κ_* taka upodobitev Liejeve algebre $\mathfrak{so}^+(1, 3)$, ki ni odvod neke upodobitve grupe $\mathrm{SO}^+(1, 3)$ na $\mathbb{C}^4$.

Trditev 4.15. *Ne obstaja taka upodobitev* $\tilde{\kappa} \colon \mathrm{SO}^+(1, 3) \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$, *da velja*

$$\tilde{\kappa} \circ \mathrm{Spin} = \kappa.$$

Dokaz. Pa denimo, da taka upodobitev $\tilde{\kappa}$ obstaja. Velja $-I \in \ker(\mathrm{Spin})$, zato se leva stran zgornje enačbe ob vstavitvi $-I$ izvrednoti v I_4, desna pa v $-I_4$. ∎

Opomba 4.16. Razjasnimo na tej točki še znano fizikalno izjavo: "spinorsko polje ψ se transformira v $-\psi$ ob rotaciji prostora za polni kot". Naj bo

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\varphi} & \\ & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Potem je $\mathrm{Spin}(A_\varphi) \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ in ob upoštevanju identifikacije $\mathbb{R}^4 \cong \mathrm{Herm}(2)$ izračunamo

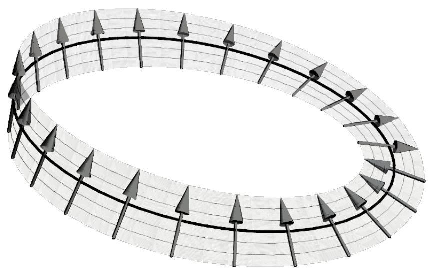
$$\mathrm{Spin}(A_\varphi)x = A_\varphi x A_\varphi^\dagger = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & \mathrm{e}^{-i2\varphi}(x^1 - ix^2) \\ e^{i2\varphi}(x^1 + ix^2) & x^0 - x^3 \end{pmatrix},$$

torej vidimo, da $\mathrm{Spin}(A_\varphi) \in \mathrm{SO}^+(1, 3)$ ustreza prostorski rotaciji okoli z-osi za kot 2φ, saj sta komponenti x^1 in x^2 vektorja x podvrženi rotaciji $(x^1 + ix^2) \mapsto \mathrm{e}^{i2\varphi}(x^1 + ix^2)$, medtem ko x^0 in x^3 ostaneta fiksirana. Če vzamemo torej $\varphi = \pi$, potem je $A_\pi = -I$ in preslikava $\mathrm{Spin}(A_\pi)$ ustreza rotaciji prostora okoli z-osi za polni kot 2π, tj. $\mathrm{Spin}(A_\pi) = I$, preslikava κ pa matriko A_π upodobi na $\mathbb{C}^4$ kot

$$\kappa(A_\pi) = \begin{pmatrix} -I & \\ & -I \end{pmatrix} = -I_4.$$

Delovanje $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ na spinorsko polje $\psi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^4$ pa naravno definiramo z $\psi \mapsto \kappa(A)\psi$, zato A_π na ψ deluje kot $\psi \mapsto \kappa(A_\pi)\psi = -\psi$.

[‡] $T \colon (W, \tau) \to (V, \rho)$ je izomorfizem med upodobitvama grupe G, če je linearni izomorfizem in velja $T(\tau_x w) = \rho_x(Tw)$ za vse $w \in W, x \in G$.



Slika 6: Prikaz transformacije spinorja ob prostorski rotaciji za polni kot.

Opomba 4.17. Brez dokaza zdaj še omenimo, da je vsaka končnorazsežna nerazcepna upodobitev Liejeve grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ izomorfna upodobitvi $D^{(j_+,j_-)}$ za neki dve števili

$$j_+, j_- \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\right\},$$

kjer je $D^{(j_+,j_-)}\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(S^{(j_+,j_-)})$ definirana kot podupodobitev upodobitve

$$D^{(j_+,j_-)} := \overbrace{D^{(1/2,0)} \otimes \cdots \otimes D^{(1/2,0)}}^{2j_+} \otimes \overbrace{D^{(0,1/2)} \otimes \cdots \otimes D^{(0,1/2)}}^{2j_-},$$

zožene na vektorski prostor

$$S^{(j_+,j_-)} := S(\overbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}^{2j_+}) \otimes S(\overbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}^{2j_-}),$$

tenzorjev, simetričnih na prvih $2j_+$ in zadnjih $2j_-$ mestih. Ker je dimenzija prostora simetričnih k-tenzorjev na n-razsežnem vektorskem prostoru enaka $\binom{n+k-1}{k}$, velja

$$\dim_{\mathbb{C}} S^{(j_+,j_-)} = \binom{2j_+ + 1}{2j_+}\binom{2j_- + 1}{2j_-} = (2j_+ + 1)(2j_- + 1).$$

Število $j_+ + j_-$ imenujemo *spin upodobitve* $D^{(j_+,j_-)}$. Omenimo še, da zaradi števila $2j_+ + 2j_-$ faktorjev v zgornjem tenzorskem produktu velja enakost

$$D^{(j_+,j_-)}(-I) = (-1)^{2j_+ + 2j_-} I,$$

torej lastnost iz opombe 4.16 velja za vse upodobitve grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ s spinom $j_+ + j_- \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots\}$. Dokaze zgornjih navedb in nadaljnje rezultate o nerazcepnih upodobitvah grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ lahko bralec najde v [16, poglavje 3.1].

4.3 Spinske strukture na Lorentzovih mnogoterostih

Naša naslednja naloga je tvoriti nekakšen glavni sveženj nad Lorentzovo mnogoterostjo (M, g) s strukturno grupo $\mathrm{Spin}(1,3) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, kot smo napovedali v opombi 4.13. Kot vemo, lahko tvorimo sveženj psevdo ortonormiranih ogrodij tangentnega svežnja, ki ga označimo s $\pi\colon O(M) \xrightarrow{\mathrm{O}(1,3)} M$. Najprej želimo reducirati strukturno grupo na $\mathrm{SO}^+(1,3)$, vendar v splošnem ni razloga, da to sploh lahko naredimo. Zato privzemamo naslednjo dodatno predpostavko o Lorentzovi mnogoterosti M.

Definicija 4.18. Lorentzova mnogoterost (M, g) je *prostor in čas orientabilna*, če je povezana in ima totalni prostor $\mathrm{O}(M)$ svežnja psevdo ortonormiranih ogrodij štiri komponente za povezanost. Izbira komponente za povezanost se imenuje *orientacija prostora in časa* mnogoterosti M; izbrano komponento označimo s $\mathrm{SO}^+(M)$, M pa imenujemo Lorentzova mnogoterost *z orientiranim prostorom in časom.*

Naj bo Lorentzova mnogoterost (M, g) prostor in čas orientabilna. Ker je vsako vlakno glavnega svežnja $\pi\colon \mathrm{O}(M) \xrightarrow{\mathrm{O}(1,3)} M$ difeomorfno Liejevi grupi $\mathrm{O}(1,3)$, ta pa ima po izreku 4.1 natanko štiri komponente, so vlakna zožitve $\pi|_{\mathrm{SO}^+(M)}$ difeomorfna Liejevi grupi $\mathrm{SO}^+(1,3)$. Če desno delovanje $m\colon \mathrm{O}(M) \times \mathrm{O}(1,3) \to \mathrm{O}(M)$ zožimo na $\mathrm{SO}^+(M) \times \mathrm{SO}^+(1,3)$, dobimo delovanje ortohrone specialne Lorentzove grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$ na $\mathrm{SO}^+(M)$, s tem pa glavni sveženj

$$\pi\colon \mathrm{SO}^+(M) \xrightarrow{\mathrm{SO}^+(1,3)} M,$$

kjer smo namesto $\pi|_{\mathrm{SO}^+(M)}$ pisali kar π. Imenujemo ga *sveženj ortohronih psevdo ortonormiranih ogrodij* Lorentzove mnogoterosti M.

Opomba 4.19. Zgornja definicija ima opraviti s splošnejšim pojmom t. i. *redukcije strukturne grupe* – bralec lahko poglobljeno razpravo o tem pojmu najde v [8].

Naravno vprašanje je, če lahko vlakna svežnja ortohronih psevdo ortonormiranih ogrodij Lorentzove mnogoterosti M v nekem smislu nadgradimo iz $\mathrm{SO}^+(1,3)$ v $\mathrm{Spin}(1,3)$. V ta namen tvorimo naslednjo definicijo.

Definicija 4.20. Naj bo (M, g) Lorentzova mnogoterost z orientiranim prostorom in časom in $\pi\colon \mathrm{SO}^+(M) \xrightarrow{\mathrm{SO}^+(1,3)} M$. *Spinska struktura* na M je glavni sveženj

$$\pi_S\colon S(M) \xrightarrow{\mathrm{Spin}(1,3)} M,$$

skupaj s Spin-ekvivariantnim morfizmom svežnjev $\lambda\colon S(M) \to \mathrm{SO}^+(M)$, tj. tako preslikavo, da velja:

i) $\pi_S = \pi \circ \lambda$,

ii) $\lambda(p \cdot A) = \lambda(p) \cdot \mathrm{Spin}(A)$ za vse $p \in S(M)$ in $A \in \mathrm{Spin}(1,3)$.

Opomba 4.21. Glavni sveženj $\pi_S\colon S(M) \xrightarrow{\mathrm{Spin}(1,3)} M$ v definiciji spinske strukture imenujemo *glavni spin sveženj.* Spinsko strukturo ponazorimo z diagramom

$$\begin{tikzcd} & S(M) \arrow[dl, "\lambda"] \arrow[dd, "\pi_S"] \\ \mathrm{SO}^+(M) \arrow[dr, "\pi"] & \\ & M \end{tikzcd} \tag{4.11}$$

in zamolčimo Spin-ekvivariantnost v točki ii). Oba pogoja skupaj sta ekvivalentna komutativnosti diagrama:

$$\begin{tikzcd}
S(M)\times\mathrm{Spin}(1,3) \arrow[r, "\cdot"] \arrow[dd, "\lambda\times\mathrm{Spin}"] & S(M) \arrow[dr, "\pi_S"] \arrow[dd, "\lambda"] & \\
& & M \\
\mathrm{SO}^+(M)\times\mathrm{SO}^+(1,3) \arrow[r, "\cdot"] & \mathrm{SO}^+(M) \arrow[ur, "\pi"] &
\end{tikzcd}$$

Opomba 4.22. Ali spinska struktura na dani Lorentzovi mnogoterosti z orientiranim prostorom in časom vselej obstaja? V splošnem je odgovor ne; A. Heaflinger je leta 1956 dokazal, da spinska struktura na orientabilni Riemannovi mnogoterosti obstaja natanko tedaj, ko je t. i. drugi Stiefel–Whitneyjev razred ničeln. M. Karoubi je leta 1968 ta rezultat posplošil na primer splošnih psevdo Riemannovih mnogoterosti – glej [1]. Ker bi se z razpravo o tem preveč oddaljili od zastavljene tematike, glede zapisanega ne bomo šli v podrobnosti. Spinska struktura namreč očitno obstaja, če je sveženj $\pi\colon \mathrm{SO}^+(M) \xrightarrow{\mathrm{SO}^+(1,3)} M$ trivialen (to velja vselej, če je M kontraktibilna mnogoterost). Takrat za $\pi_S\colon S(M) \xrightarrow{\mathrm{Spin}(1,3)} M$ vzamemo kar trivialni sveženj $S(M) = M\times\mathrm{Spin}(1,3)$, za morfizem svežnjev λ pa preslikavo, dano z $(x, A) \mapsto (x, \mathrm{Spin}(A))$ za vse $x \in M$ in $A \in \mathrm{Spin}(1,3)$. V nadaljevanju se bomo omejili na primer Lorentzove mnogoterosti z orientiranim prostorom in časom, ki dopušča spinsko strukturo – imenujemo jo *spinska Lorentzova mnogoterost.*

S spinsko strukturo v mislih lahko zdaj tvorimo pridružen vektorski sveženj glede na upodobitev κ in naravno konstruiramo kovariantni odvod na njem.

Definicija 4.23. Naj bo (M, g) Lorentzova mnogoterost z orientiranim prostorom in časom. Lokalnemu prerezu $e\colon U \to \mathrm{SO}^+(M)$ svežnja $\pi\colon \mathrm{SO}^+(M) \xrightarrow{\mathrm{SO}^+(1,3)} M$ rečemo *tetrada.*

Opomba 4.24. Vsako tetrado e lahko po definiciji svežnja ogrodij zapišemo kot četverec $e = (e_0, \ldots, e_3) = (e_\mu)_\mu$ prerezov tangentnega svežnja, ki je psevdo ortonormirano (lokalno) ogrodje na (M, g).

Trditev 4.25. *Naj bo (M, g) spinska Lorentzova mnogoterost. Za dano tetrado $e\colon U \to \mathrm{SO}^+(M)$ na kontraktibilni odprti podmnožici $U \subset M$ obstajata natanko dva prereza $\varepsilon_\pm\colon U \to S(M)$ glavnega spin svežnja, za katera velja*

$$\lambda \circ \varepsilon_\pm = e.$$

Dokaz. Tetrada $e\colon U \to \mathrm{SO}^+(M)$ je, kot vsak prerez svežnja, vložitev, torej je množica $e(U) \subset \mathrm{SO}^+(M)$ difeomorfna U, zato je kontraktibilna. To implicira, da je preslikava

$$\lambda|_{\lambda^{-1}(e(U))}\colon \lambda^{-1}(e(U)) \to e(U)$$

trivialna dvolistna krovna preslikava, ki dopušča natanko dva prereza $s_\pm\colon e(U) \to \lambda^{-1}(e(U))$. Torej sta $\varepsilon_\pm := s_\pm \circ e$ iskana prereza glavnega spin svežnja. ∎

$$
\begin{tikzcd}
& S(U) \arrow[ld, "\lambda"] \arrow[dd, "\pi_S"'] \\
\mathrm{SO}^+(U) \arrow[ru, bend left, "s_\pm"] \arrow[rd, "\pi"] & \\
& U \arrow[uu, bend right, "\varepsilon_\pm"'] \arrow[lu, bend left, "e"]
\end{tikzcd}
$$

Slika 7: Skica dogajanja v dokazu trditve 4.25.

Definicija 4.26. Naj bo (M, g) spinska Lorentzova mnogoterost. *Spinorski sveženj* je pridružen vektorski sveženj

$$S := S(M) \times_\kappa \mathbb{C}^4$$

glavnemu spin svežnju glede na spinorsko upodobitev κ. *Spinorsko polje* na spinski Lorentzovi mnogoterosti M je prerez $\Psi \in \Gamma^\infty(S)$ spinorskega svežnja S.

Opomba 4.27. Po trditvah 2.48 in 4.25 lahko vsako spinorsko polje $\Psi \in \Gamma^\infty(S)$ lokalno izrazimo kot $\Psi = [\varepsilon, \psi]$ za neko $\psi \in C^\infty(U, \mathbb{C}^4)$, kjer je $\varepsilon\colon U \to S(M)$ neki prerez glavnega spin svežnja.

4.3.1 Spinska povezava in spinorski kovariantni odvod

Naj bo (M, g) spinska Lorentzova mnogoterost. Ker je Lorentzova, po osnovnem izreku (psevdo) Riemannove geometrije na njej obstaja enolično določena Levi–Civitajeva povezava ∇, ki jo želimo prenesti na spinorski sveženj. To nam omogoči ravno spinska struktura na M.

Izrek 4.28. *Naj bo (M, g) spinska Lorentzova mnogoterost in naj bo ω poljubna povezava na glavnem svežnju $\pi\colon \mathrm{SO}^+(M) \xrightarrow{\mathrm{SO}^+(1,3)} M$. Potem je*

$$\omega_S := (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ \lambda^* \omega \tag{4.12}$$

povezava na glavnem spin svežnju.

Dokaz. Ker je $\mathrm{Spin}_*\colon \mathfrak{spin}(1,3) \to \mathfrak{so}^+(1,3)$ izomorfizem Liejevih algeber, je ω_S 1-forma na $S(M)$ z vrednostmi v $\mathfrak{spin}(1,3)$. Potrebno je preveriti, da ω_S zadošča definicijskima lastnostma povezavne 1-forme.

Preverimo $(r_g)^*\omega_S = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega_S$ za vse $g \in \mathrm{Spin}(1,3)$. Naj bo $Y \in T(S(M))$ poljuben. Velja

$$
\begin{aligned}
\big((r_g)^*\omega_S\big)(Y) &= (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ \omega(\lambda_*(r_g)_*Y) \\
&= (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ \omega\big((r_{\mathrm{Spin}(g)})_*\lambda_*Y\big) \\
&= (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ \mathrm{Ad}_{\mathrm{Spin}(g)^{-1}} \circ \omega(\lambda_*Y) \\
&= (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ \mathrm{Ad}_{\mathrm{Spin}(g)^{-1}} \circ (\lambda^*\omega)(Y) \\
&= (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ \mathrm{Ad}_{\mathrm{Spin}(g)^{-1}} \circ \mathrm{Spin}_* \circ \omega_S(Y),
\end{aligned}
$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili Spin-ekvivariantnost morfizma λ, skozi tretjega transformacijsko lastnost povezave ω, skozi zadnjega pa definicijo ω_S. Velja pa

$$\mathrm{Ad}_{\mathrm{Spin}(g)^{-1}} \circ \mathrm{Spin}_* = \mathrm{d}(C_{\mathrm{Spin}(g)^{-1}} \circ \mathrm{Spin})_e = \mathrm{d}(\mathrm{Spin} \circ C_{g^{-1}})_e = \mathrm{Spin}_* \circ \mathrm{Ad}_{g^{-1}},$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj upoštevali dejstvo, da je Spin homomorfizem grup, in vseskozi upoštevali verižno pravilo. Vstavitev zadnje enakosti v zgornjo formulo dokazuje želeno transformacijsko lastnost forme ω_S.

Preverimo še $\omega_S(\sigma(X)_p) = X$ za vse $X \in \mathfrak{spin}(1,3)$ in $p \in S(M)$. Velja

$$\begin{aligned}
\omega_S(\sigma(X)_p) &= (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ \omega \left(\lambda_* \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p \cdot \exp(tX) \right) \\
&= (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ \omega \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \lambda(p \cdot \exp(tX)) \right) \\
&= (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ \omega \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\lambda(p) \cdot \mathrm{Spin}(\exp(tX))) \right) \\
&= (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ \omega \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\lambda(p) \cdot \exp(\mathrm{Spin}_*(tX))) \right) \\
&= (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ \omega \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\lambda(p) \cdot \exp(t\mathrm{Spin}_*(X))) \right) \\
&= (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ \omega(\sigma(\mathrm{Spin}_* X)_{\lambda(p)}), \\
&= X,
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi tretji enačaj upoštevali Spin-ekvivariantnost morfizma λ, skozi četrtega uporabili naravnost eksponentne preslikave, skozi šestega definicijo fundamentalne preslikave in skozi zadnjega definicijsko lastnost povezave ω. ∎

Definicija 4.29. Naj bo (M, g) spinska Lorentzova mnogoterost in ω povezava na $\pi \colon \mathrm{SO}^+(M) \xrightarrow{\mathrm{SO}^+(1,3)} M$, ki ustreza Levi–Civitajevi afini povezavi ∇ na M. Povezavo $\omega_S = (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ \lambda^* \omega$ imenujemo *spinska povezava* na glavnem spin svežnju. Kovariantni odvod, ki ga spinska povezava porodi na spinorskem vektorskem svežnju $S = S(M) \times_\kappa \mathbb{C}^4$, imenujemo *spinorski kovariantni odvod* in označimo z ∇^S.

4.3.2 Cliffordovo množenje

Za uvedbo Diracovega operatorja na $\Gamma^\infty(S)$ je potrebno posplošiti množenje z matrikami γ_μ na spinorski sveženj $\Gamma^\infty(S)$.

Definicija 4.30. *Cliffordovo množenje* je preslikava $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, dana s predpisom

$$x \cdot \psi := \gamma(x)\psi,$$

kjer smo $\gamma \colon \mathbb{R}^4 \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ definirali na standardni bazi $(e_\mu)_\mu$ prostora $\mathbb{R}^4$ s predpisom

$$\gamma(e_\mu) := \gamma_\mu,$$

in razširili po linearnosti; če pišemo $x = x^\mu e_\mu$, potem je $\gamma(x) = x^\mu \gamma_\mu$. Tu so matrike γ_μ definirane kot v enačbi (4.4).

Opomba 4.31. Z identifikacijo $\mathbb{R}^4 \cong \mathrm{Herm}(2)$ lahko enostavneje zapišemo

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} & \mathcal{I}(x) \\ \tilde{\mathcal{I}}(x) & \end{pmatrix}.$$

Zaradi enakosti $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} I$ pa tedaj velja še nekoliko splošnejša enakost

$$\{\gamma(x), \gamma(y)\} = 2\eta(x, y) I,$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}^4$.

Lema 4.32. *Za vse $A \in \mathrm{Spin}(1,3)$ in $x \in \mathbb{R}^4$ velja*

$$\gamma(\mathrm{Spin}(A)x) = \kappa(A)\gamma(x)\kappa(A)^{-1}, \tag{4.13}$$

kjer je $\kappa\colon \mathrm{Spin}(1,3) \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$ spinorska upodobitev in je $\mathrm{Spin}\colon \mathrm{Spin}(1,3) \to \mathrm{SO}^+(1,3)$ spin homomorfizem.

Dokaz. Desna stran enačbe (4.13) je po definiciji spinorske upodobitve κ enaka

$$\begin{aligned}
\kappa(A)\gamma(x)\kappa(A)^{-1} &= \begin{pmatrix} A & \\ & (A^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \mathcal{I}(x) \\ \tilde{\mathcal{I}}(x) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & A^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} & A\mathcal{I}(x)A^\dagger \\ (A^\dagger)^{-1}\tilde{\mathcal{I}}(x)A^{-1} & \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Desni zgornji blok te matrike je po definiciji Spin homomorfizma enak $\mathcal{I}(\mathrm{Spin}(A)x)$. Izvrednotiti je potrebno še levi spodnji blok. Po lemi 4.5 velja $\mathcal{I}(x)\tilde{\mathcal{I}}(x) = \eta(x, x)I$, zato v primeru, ko je $\eta(x, x) \neq 0$,[§] velja tudi $\tilde{\mathcal{I}}(x) = \eta(x, x)\mathcal{I}(x)^{-1}$. Potem je

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{I}}(\mathrm{Spin}(A)x) &= \eta(\mathrm{Spin}(A)x, \mathrm{Spin}(A)x)\mathcal{I}(\mathrm{Spin}(A)x)^{-1} \\
&= \eta(x, x)(A\mathcal{I}(x)A^\dagger)^{-1} \\
&= (A^\dagger)^{-1}\eta(x, x)\mathcal{I}(x)^{-1}A^{-1} \\
&= (A^\dagger)^{-1}\tilde{\mathcal{I}}(x)A^{-1},
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili dejstvo, da je $\mathrm{Spin}(A) \in \mathrm{SO}^+(1,3)$ in njegovo definicijo, skozi četrtega pa predhodno omenjeno identiteto. Vidimo torej, da velja enakost

$$\kappa(A)\gamma(x)\kappa(A)^{-1} = \begin{pmatrix} & \mathcal{I}(\mathrm{Spin}(A)x) \\ \tilde{\mathcal{I}}(\mathrm{Spin}(A)x) & \end{pmatrix} = \gamma(\mathrm{Spin}(A)x). \qquad \blacksquare$$

Posledica 4.33 (Kompatibilnost Cliffordovega množenja s spinorsko upodobitvijo)**.** *Za vse $A \in \mathrm{Spin}(1,3)$, $x \in \mathbb{R}^4$ in $\psi \in \mathbb{C}^4$ velja*

$$\kappa(A)(x \cdot \psi) = (\mathrm{Spin}(A)x) \cdot (\kappa(A)\psi). \tag{4.14}$$

[§]Po zveznosti vseh preslikav, udeleženih v enakost (4.13), je to dovolj preveriti za vse $x \in \mathbb{R}^4$, za katere je $\eta(x, x) \neq 0$.

Dokaz. Desna stran enačbe (4.14) je enaka

$$\begin{aligned}(\mathrm{Spin}(A)x)\cdot(\kappa(A)\psi) &= \gamma(\mathrm{Spin}(A)x)\kappa(A)\psi\\ &= \kappa(A)\gamma(x)\kappa(A)^{-1}\kappa(A)\psi\\ &= \kappa(A)\gamma(x)\psi,\end{aligned}$$

kar je natanko enako $\kappa(A)(x\cdot\psi)$. ∎

Definicija 4.34. Naj bo (M,g) spinska Lorentzova mnogoterost in $\lambda\colon S(M)\to \mathrm{SO}^+(M)$ ustrezen Spin-ekvivarianten morfizem svežnjev. *Cliffordovo množenje na spinorskem svežnju S* je preslikava $T_pM\times S_p\to S_p$, dana s predpisom

$$([\lambda(u),x],[u,\psi])\mapsto[u,x\cdot\psi],$$

za vse $x\in\mathbb{R}^4$ in $\psi\in\mathbb{C}^4$, kjer je $u\in\pi_S^{-1}(p)$ poljuben; tu smo poljuben element iz T_pM zapisali kot ekvivalenčni razred $[\lambda(u),x]$ v pridruženem vektorskem svežnju $\mathrm{SO}^+(M)\times_{\mathrm{id}}\mathbb{R}^4$ glavnega svežnja $\mathrm{SO}^+(M)$ glede na standardno upodobitev Liejeve grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$.

Opomba 4.35. Spomnimo, da vektor $[\lambda(u),x]$ ustreza (v skladu s primerom 2.45, kjer smo identificirali TM z nekim pridruženim vektorskim svežnjem) tistemu vektorju iz T_pM, ki je enak $x^\mu(\lambda(u))_\mu$. Tukaj je $\lambda(u)$ namreč psevdo ortonormirana baza za T_pM, x pa je četverec koeficientov zapisanega vektorja v razvoju po tej bazi.

Potrebno je preveriti dobro definiranost te preslikave.

Trditev 4.36. *Naj bo (M,g) spinska Lorentzova mnogoterost. Za vsak $p\in M$ je definicija Cliffordovega množenja $T_pM\times S_p\to S_p$ na spinorskem svežnju S neodvisna od izbire $u\in\pi_S^{-1}(p)$.*

Dokaz. Naj bo $\tilde{u}=u\cdot g$ za nek $g\in\mathrm{Spin}(1,3)$. Potem je

$$[\tilde{u},\tilde{\psi}]=[u,\kappa(g)\tilde{\psi}]=[u,\psi],$$

iz česar sledi $\kappa(g)\tilde{\psi}=\psi$. Podobno velja

$$\begin{aligned}[\lambda(\tilde{u}),\tilde{x}] &= [\lambda(u\cdot g),\tilde{x}] = [\lambda(u)\cdot\mathrm{Spin}(g),\tilde{x}]\\ &= [\lambda(u),\mathrm{Spin}(g)\tilde{x}] = [\lambda(u),x],\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili Spin-ekvivariantnost morfizma λ, skozi tretjega pa upoštevali, da je imamo opravka s standardno upodobitvijo $\mathrm{SO}^+(1,3)$ na $\mathbb{R}^4$. Zato sledi

$$x=\mathrm{Spin}(g)\tilde{x}. \tag{4.15}$$

Po definiciji Cliffordovega množenja na spinorskem svežnju je

$$\begin{aligned}[\lambda(u),x]\cdot[u,\psi] &= [u,x\cdot\psi]\\ &= [u,\gamma(x)\psi]\\ &= [u,\gamma(\mathrm{Spin}(g)\tilde{x})(\kappa(g)\tilde{\psi})]\\ &= [u,(\mathrm{Spin}(g)\tilde{x})\cdot(\kappa(g)\tilde{\psi})]\\ &= [u,\kappa(g)(\tilde{x}\cdot\tilde{\psi})]\\ &= [\tilde{u},\tilde{x}\cdot\tilde{\psi}],\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi tretji enačaj vstavili izpeljano izražavo za x in ψ z $\tilde{x}$ in $\tilde{\psi}$, skozi četrtega uporabili definicijo Cliffordovega množenja, skozi petega pa kompatibilnost Cliffordovega množenja s spinorsko upodobitvijo. Zadnja vrstica zgornjega računa je enaka definiciji Cliffordovega množenja na spinorskem svežnju z izbrano točko $\tilde{u} \in \pi^{-1}(p)$, kar dokazuje želeno. ■

Opomba 4.37. Cliffordovo množenje na pridruženem spinorskem svežnju porodi tudi množenje

$$\mathfrak{X}(M) \times \Gamma^\infty(S) \to \Gamma^\infty(S)$$

vektorskega polja s spinorskim poljem, po točkah. Natančneje, definirano je kot $(X, \Psi) \mapsto X \cdot \Psi$, kjer je spinorsko polje $X \cdot \Psi$ dano v točki $p \in M$ z

$$(X \cdot \Psi)_p = X_p \cdot \Psi_p.$$

Spinorsko polje $X \cdot \Psi$ je gladko, kar sledi iz linearnosti preslikave $\gamma\colon \mathbb{R}^4 \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$.

V kontekstu spinorskega svežnja ima kompatibilnost Cliffordovega množenja s spinorsko upodobitvijo (enačba (4.14)) naslednjo pomembno posledico. Če je $A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Spin}(1,3)$ gladka pot v Liejevi grupi $\mathrm{Spin}(1,3)$, dana z $A(t) = \mathrm{e}^{tY}$ za neki $Y \in \mathfrak{spin}(1,3)$, potem za vse $t \in \mathbb{R}$ velja

$$\kappa(A(t))(x \cdot \psi) = (\mathrm{Spin}(A(t))x) \cdot (\kappa(A(t))\psi).$$

Če to enakost odvajamo v $t = 0$, dobimo

$$\kappa_*(Y)(x \cdot \psi) = (\mathrm{Spin}_*(Y)x) \cdot \psi + x \cdot (\kappa_*(Y)\psi). \tag{4.16}$$

Slednje bomo uporabili pri naslednjem pomembnem izreku.

Izrek 4.38 (Kompatibilnost Cliffordovega množenja s spinorskim kov. odvodom)**.** *Naj bo (M, g) spinska Lorentzova mnogoterost. Za vse $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ in $\Psi \in \Gamma^\infty(S)$ velja*

$$\nabla^S_X(Y \cdot \Psi) = \nabla_X Y \cdot \Psi + Y \cdot \nabla^S_X \Psi. \tag{4.17}$$

Dokaz. Dokaz poteka lokalno; naj bo $U \subset M$ kontraktibilna odprta podmnožica v M. Potem lahko glede na izbran prerez $\varepsilon\colon U \to S(M)$ pišemo $Y = [\lambda \circ \varepsilon, \phi]$ in $\Psi = [\varepsilon, \psi]$ za neki preslikavi $\phi \in C^\infty(U, \mathbb{R}^4)$ in $\psi \in C^\infty(U, \mathbb{C}^4)$. Če definiramo $A^{\mathrm{Spin}} = \varepsilon^* \omega_S$, potem za vse $p \in U$ velja

$$\begin{aligned}
\nabla^S_{X_p}(\phi \cdot \psi) &= \nabla^S_{X_p}(\phi^\mu \gamma_\mu \psi) \\
&= \mathrm{d}(\phi^\mu \gamma_\mu \psi)(X_p) + \big(\kappa_*\big(A^{\mathrm{Spin}}(X_p)\big)\big)(\phi^\mu \gamma_\mu \psi) \\
&= \mathrm{d}(\phi^\mu \gamma_\mu \psi)(X_p) + \big(\mathrm{Spin}_*(A^{\mathrm{Spin}}(X_p))\phi\big) \cdot \psi + \phi \cdot \big(\kappa_*(A^{\mathrm{Spin}}(X_p))\psi\big) \\
&= (\mathrm{d}\phi^\mu)(X_p)\gamma_\mu \psi + \big(\mathrm{Spin}_*(A^{\mathrm{Spin}}(X_p))\phi\big) \cdot \psi \\
&\quad + \phi^\mu \gamma_\mu (\mathrm{d}\psi)(X_p) + \phi \cdot \big(\kappa_*(A^{\mathrm{Spin}}(X_p))\big),
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili formulo (2.35) za lokalno izražavo kovariantnega odvoda, skozi tretjega enačbo (4.16) za $Y = A^{\mathrm{Spin}}(X_p)$, skozi četrtega pa Leibnizevo pravilo. V zadnji vrstici nemudoma prepoznamo lokalno izražavo za

$$\phi \cdot \nabla^S_{X_p} \Psi.$$

Podobno v predzadnji vrstici zaradi enakosti $\mathrm{Spin}_*(A^{\mathrm{Spin}}(X_p)) = A(X_p)$, ki sledi iz

$$A^{\mathrm{Spin}} = \varepsilon^*\omega_S = (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ \varepsilon^*\lambda^*\omega = (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ (\lambda \circ \varepsilon)^*\omega = (\mathrm{Spin}_*)^{-1} \circ A,$$

kjer je $A = (\lambda\circ\varepsilon)^*\omega$ lokalna povezavna forma povezave ω glede na tetrado $\lambda\circ\varepsilon\colon U \to \mathrm{SO}^+(M)$, prepoznamo lokalno izražavo za

$$\nabla^S_{X_p}\phi \cdot \psi. \qquad \blacksquare$$

4.3.3 Diracova forma

Na prostoru $\mathbb{C}^4$ želimo zdaj definirati neizrojeno hermitsko[¶] formo

$$H\colon \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C},$$

ki je $\mathrm{Spin}(1,3)$-invariantna. Takšna hermitska forma namreč porodi psevdo metriko na spinorskem svežnju S, ki je kompatibilna s spinorskim kovariantnim odvodom ∇^S, kot v trditvi 2.116 in 2.117.[‖] Če smo bili pozorni, smo jo srečali že v uvodnem delu tega poglavja.

Definicija 4.39. *Diracova forma* je preslikava $H\colon \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$, dana s predpisom

$$H(\phi,\psi) := \phi^\dagger\gamma_0\psi. \tag{4.18}$$

Trditev 4.40. *Za Diracovo formo veljajo naslednje lastnosti.*

i) $H(\phi, c\psi) = cH(\phi,\psi) = H(\bar{c}\phi,\psi)$ *za vse* $c \in \mathbb{C}$ *in* $\phi,\psi \in \mathbb{C}^4$.

ii) $H(\phi,\psi) = \overline{H(\psi,\phi)}$ *za vse* $\phi,\psi \in \mathbb{C}^4$.

iii) H *je neizrojena: če za dan* $\psi \in \mathbb{C}^4$ *velja* $H(\phi,\psi) = 0$ *za vse* $\phi \in \mathbb{C}^4$*, potem je* $\psi = 0$.

iv) Diracova forma je $\mathrm{Spin}(1,3)$*-invariantna glede na upodobitev* κ*, tj. velja*

$$H(\kappa(A)\phi, \kappa(A)\psi) = H(\phi,\psi)$$

za vse $A \in \mathrm{Spin}(1,3)$ *in* $\phi,\psi \in \mathbb{C}^4$.

v) Za vse $x \in \mathbb{R}^4$ *in* $\phi,\psi \in \mathbb{C}^4$ *velja*

$$H(x\cdot\phi,\psi) = H(\phi, x\cdot\psi).$$

Dokaz. Prve tri točke so posledica zapisa Diracove forme v standardni bazi za $\mathbb{C}^4$:

$$H(\phi,\psi) = \overline{\phi_1}\psi_3 + \overline{\phi_2}\psi_4 + \overline{\phi_3}\psi_1 + \overline{\phi_4}\psi_2.$$

[¶]Forma je *hermitska*, če je konjugirano simetrična in seskvilinearna, tj. linearna v drugem in konjugirano linearna v prvem argumentu.

[‖]V trditvi 2.116 smo imeli opravka z G-invariantnim skalarnim produktom, tj. s pozitivno-definitno G-invariantno hermitsko formo. Povsem analogno dokažemo trditev, da neizrojena G-invariantna hermitska forma porodi psevdo metriko na pridruženem vektorskem svežnju.

Dokažimo točko iv). Velja

$$H(\kappa(A)\phi, \kappa(A)\psi) = \phi^\dagger \kappa(A)^\dagger \gamma_0 \kappa(A)\psi$$

in

$$\kappa(A)^\dagger \gamma_0 \kappa(A) = \begin{pmatrix} A^\dagger & \\ & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \\ & (A^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} = \gamma_0,$$

kar dokazuje želeno.

Dokažimo točko v). Po $\mathbb{R}$-bilinearnosti forme H je v) dovolj preveriti za primer, ko je x standardni bazni vektor v $\mathbb{R}^4$, tj. $x = e_\mu$. Velja

$$H(e_\mu \cdot \phi, \psi) = (\gamma_\mu \phi)^\dagger \gamma_0 \psi = \phi^\dagger \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 \psi = \phi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \psi = H(\phi, e_\mu \cdot \psi),$$

kjer smo na prehodu skozi tretji enačaj uporabili enakost $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0$. ■

Posledica 4.41. *Naj bo (M, g) spinska Lorentzova mnogoterost. Diracova forma H porodi psevdo metriko $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, ki je kompatibilna z spinorskim kovariantnim odvodom, in velja*

$$\langle X \cdot \Phi, \Psi \rangle_S = \langle \Phi, X \cdot \Psi \rangle_S \tag{4.19}$$

za vse $X \in \mathfrak{X}(M)$ in $\Phi, \Psi \in \Gamma^\infty(E)$. Imenujemo jo Diracova psevdo metrika na spinorskem svežnju.

Dokaz. Neposredna posledica zadnje trditve, trditev 2.116, 2.117 in dejstva, da je $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ definiran kot $\langle [u, \phi], [u, \psi] \rangle_S = H(\phi, \psi)$ za vse $u \in S(M)$ ter $\phi, \psi \in \mathbb{C}^4$. ■

Definicija 4.42. Naj bo (M, g) spinska Lorentzova mnogoterost. *L^2-psevdo skalarni produkt spinorskih polj (s kompaktnim nosilcem)* je preslikava

$$\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_S \colon \Gamma_c^\infty(S) \times \Gamma_c^\infty(S),$$
$$\langle\!\langle \Phi, \Psi \rangle\!\rangle_S := \int_M \langle \Phi, \Psi \rangle_S \, \omega_g.$$

Opomba 4.43. Povsem analogno kot v trditvi 3.4 se prepričamo, da je $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_S$ psevdo skalarni produkt na prostoru $\Gamma_c^\infty(S)$ – njegova neizrojenost namreč sledi iz dejstva, da je Diracova forma H neizrojena.

4.3.4 Diracov operator na spinorskem svežnju

Na voljo imamo vse sestavine, da lahko definiramo Diracov operator in si ogledamo kakšno njegovo lastnost.

Definicija 4.44. Naj bo (M, g) spinska Lorentzova mnogoterost. *Diracov operator* je preslikava $D \colon \Gamma^\infty(S) \to \Gamma^\infty(S)$, dana s predpisom

$$D\Psi = i\eta^{\mu\nu} e_\mu \cdot \nabla^S_{e_\nu} \Psi, \tag{4.20}$$

kjer je $(e_\mu)_\mu$ poljubna tetrada na (M, g).

Opomba 4.45. Definicija Diracovega operatorja je neodvisna od izbire tetrade $(e_\mu)_\mu$. Res, naj bo $(\tilde{e}_\mu)_\mu$ neka druga tetrada, definirana na isti odprti množici $U \subset M$, kot $(e_\mu)_\mu$. Potem je $\tilde{e}_\mu = e_\nu A^\nu{}_\mu$ za neko gladko preslikavo $A\colon U \to \mathrm{SO}^+(1,3)$ (tj. A je matrika gladkih realnih funkcij na U, ki je v vsaki točki iz U element Liejeve grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$) in

$$\eta^{\mu\nu}\tilde{e}_\mu \cdot \nabla^S_{\tilde{e}_\nu}\Psi = \eta^{\mu\nu}A^\rho{}_\mu A^\sigma{}_\nu e_\rho \cdot \nabla^S_{e_\sigma}\Psi = \eta^{\rho\sigma}e_\rho \cdot \nabla^S_{e_\sigma}\Psi,$$

kjer smo na prehodu skozi prvi enačaj uporabili $C^\infty(M)$-linearnost kovariantnega odvoda v spodnjem argumentu in očitno $C^\infty(M)$-linearnost Cliffordovega množenja, skozi drugega pa uporabili enakost

$$\eta^{\mu\nu}A^\rho{}_\mu A^\sigma{}_\nu = \eta^{\rho\sigma},$$

ki je definicijska za matrike iz $\mathrm{SO}^+(1,3)$. Posledično je Diracov operator globalno dobro definirana preslikava.

Opomba 4.46. V izbranem prerezu $\varepsilon\colon U \to S(M)$ glavnega spin svežnja lahko definiramo *standardno tetrado* kot $e_\mu := [\lambda \circ \varepsilon, v_\mu]$, kjer je $v_\mu\colon U \to \mathbb{R}^4$ dana kot konstantna preslikava v μ-ti standardni enotski vektor. V tej tetradi se Diracov operator na spinorskem polju $\Psi = [\varepsilon, \psi]$ izraža kot

$$D\Psi = [\varepsilon, D\psi] = [\varepsilon, i\eta^{\mu\nu}\gamma_\mu\nabla^S_{e_\nu}\psi],$$

kjer je

$$\nabla^S_{e_\nu}\psi = \mathrm{d}\psi(e_\nu) + \kappa_*(A^{\mathrm{Spin}}(e_\nu))\psi, \tag{4.21}$$

torej lahko (lokalno) zapišemo

$$D\psi = i\gamma^\mu\nabla^S_{e_\mu}\psi = i\gamma^\mu\big(e_\mu + \kappa_*(A^{\mathrm{Spin}}(e_\mu))\big)\psi, \tag{4.22}$$

kjer je $A^{\mathrm{Spin}} = \varepsilon^*\omega_S$. Na prostoru Minkowskega ta enačba postane $D\psi = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi$, zato je v tem primeru Diracov operator D isti diferencialni operator, ki se je pojavil v Diracovi enačbi na začetku tega poglavja.

Podobno, kot je kodiferencial formalna adjungirana preslikava vnanjega odvoda glede na L^2-psevdo skalarni produkt na diferencialnih formah, velja za Diracov operator naslednji izrek.

Izrek 4.47. *Naj bo (M,g) spinska Lorentzova mnogoterost brez roba. Diracov operator je sebiadjungirana preslikava glede na L^2-psevdo skalarni produkt spinorskih polj, tj.*

$$\langle\!\langle D\Phi, \Psi\rangle\!\rangle_S = \langle\!\langle \Phi, D\Psi\rangle\!\rangle_S \tag{4.23}$$

za vse $\Phi, \Psi \in \Gamma^\infty_c(S)$.

Dokaz. Naj bodo $(x^\mu)_\mu$ normalne koordinate na neki okolici U dane točke $p \in M$ (glej npr. [11, trditev 5.24]). Potem v točki p velja

$$\begin{aligned}
\langle D\Phi, \Psi \rangle_S &= \left\langle i\eta^{\mu\nu}\partial_\mu \cdot \nabla^S_\nu \Phi, \Psi \right\rangle_S \\
&= -i\eta^{\mu\nu} \left\langle \nabla^S_\nu \Phi, \partial_\mu \cdot \Phi \right\rangle_S \\
&= -i\eta^{\mu\nu} \big(\partial_\nu \left\langle \Phi, \partial_\mu \cdot \Psi \right\rangle_S - \left\langle \Phi, \nabla^S_\nu (\partial_\mu \cdot \Psi) \right\rangle_S \big) \\
&= -i\eta^{\mu\nu} \big(\partial_\nu \left\langle \Phi, \partial_\mu \cdot \Psi \right\rangle_S - \left\langle \Phi, (\nabla_\nu \partial_\mu) \cdot \Psi \right\rangle_S - \left\langle \Phi, \partial_\mu \cdot \nabla^S_\nu \Psi \right\rangle_S \big) \\
&= -i\eta^{\mu\nu} \big(\partial_\nu \left\langle \Phi, \partial_\mu \cdot \Psi \right\rangle_S - \left\langle \Phi, \partial_\mu \cdot \nabla^S_\nu \Psi \right\rangle_S \big) \\
&= -i\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \big(\alpha(\partial_\mu) \big) + \langle \Phi, D\Psi \rangle_S \,,
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj upoštevali enačbo (4.19), skozi tretjega kompatibilnost Diracove metrike s spinorskim kovariantnim odvodom, skozi četrtega kompatibilnost Cliffordovega množenja s spinorskim kovariantnim odvodom, skozi petega normalnost izbranih koordinat v točki p (velja namreč $(\nabla_\nu \partial_\mu)|_p = 0$), pri zadnjem pa smo dodatno vpeljali 1-formo $\alpha \in \Omega^1(M; \mathbb{C})$, dano z $\alpha(X) := \langle \Phi, X \cdot \Psi \rangle_S$. Oglejmo si prvi člen desne strani zgornjega izračuna.

Trdimo, da za poljubno 1-formo $\alpha \in \Omega^1(M; \mathbb{C})$ velja

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\nu (\alpha(\partial_\mu)) = \star^{-1} \mathrm{d} \star \alpha,$$

kar (do predznaka natanko) pomeni, da je divergenca diferencialne forme enaka njenemu kodiferencialu. Po linearnosti je to enakost dovolj pokazati za forme oblike $\alpha = f \, \mathrm{d}x^\lambda$, kjer je $\mathrm{d}x^\lambda$ dualno kovektorsko polje vektorskemu polju ∂_λ za nek λ in je $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$. Velja

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\nu (\alpha(\partial_\mu)) = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu (f \delta^\lambda_\mu) = \eta^{\lambda\nu} \partial_\nu f = \eta^{\lambda\lambda} \partial_\lambda f,$$

kjer v izrazu skrajno desno ne upoštevamo sumacijskega pravila. Po drugi strani pa je zaradi normalnosti izbranih koordinat terica $(\partial_\mu|_p)_\mu$ psevdo ortonormirana baza prostora T_pM, zato lahko uporabimo formulo za Hodge-$\star$ operator, tj. v točki p velja

$$\star\alpha = f g^{\lambda\lambda} (-1)^{\lambda-1} \, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^\lambda} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

Če zadnji izraz vnanje odvajamo, iz neodvisnosti vnanjega odvoda od izbire koordinat sledi, da v točki p velja

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\star\alpha) &= (-1)^{\lambda-1} \partial_\lambda (f g^{\lambda\lambda}) \, \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^\lambda} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \eta^{\lambda\lambda} (\partial_\lambda f) \omega_g,
\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj upoštevali lastnosti vnanjega produkta in zopet uporabili normalnost izbranih koordinat; natančneje, uporabili smo enakosti $\partial_\lambda (g_{\mu\nu})(p) = 0$ in $g_{\mu\nu}(p) = g(\partial_\mu, \partial_\nu)(p) = \eta_{\mu\nu}$. V točki p velja torej enakost

$$\star^{-1} \mathrm{d} \star \alpha = - \star \mathrm{d} \star \alpha = -\eta^{\lambda\lambda} (\partial_\lambda f) \overbrace{\star\omega_g}^{-1} = \eta^{\lambda\lambda} \partial_\lambda f,$$

in zato je

$$\langle D\Phi, \Psi \rangle_S = i \star \mathrm{d} \star \alpha + \langle \Phi, D\Psi \rangle_S \,.$$

Ker lahko v vsaki točki izberemo normalne koordinate in je izraz na desni neodvisen od izbire lokalnih koordinat, pa ta enakost velja povsod na M. Posledično je

$$\langle\!\langle D\Phi, \Psi \rangle\!\rangle_S - \langle\!\langle \Phi, D\Psi \rangle\!\rangle_S = i \int_M (\star \,\mathrm{d} \star \alpha)\omega_g = -i \int_M \mathrm{d} \star \alpha = -i \int_{\partial M} \star\alpha = 0,$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili točki i) in iii) iz trditve A.4, na predzadnjem Stokesov izrek, na zadnjem pa predpostavko $\partial M = \emptyset$. ■

Opomba 4.48. Vidimo, da je za dokaz zadnjega izreka ključno, da je spinska povezava ω_S, ki porodi Diracov operator D, porojena z Levi–Civitajevo povezavo ∇ na M, saj normalne koordinate na M obstajajo le v primeru, ko je ∇ metrična in simetrična povezava na M.

Opomba 4.49. Naravno vprašanje je tudi, v kakšni korespondenci sta kvadrat D^2 Diracovega operatorja in Laplaceev operator $\Delta = \delta_{\omega_S} \mathrm{d}_{\omega_S}$ – oba sta namreč diferencialna operatorja drugega reda na spinorskih poljih $\Gamma^\infty(S)$. Odgovor na to vprašanje podaja *Schrödinger–Lichnerowitzeva formula*, ki jo lahko bralec najde npr. v [5, poglavje 3.3] ali [9, poglavje 8].

4.4 Lagrangiani in gibalne enačbe

Prišli smo do sklepnega razdelka tega magistrskega dela. Pokažimo, da lahko razvita orodja uporabimo za opis fermionov na spinski Lorentzovi mnogoterosti.

4.4.1 Prosto spinorsko polje: Diracova enačba

Definicija 4.50. Naj bo (M, g) spinska Lorentzova mnogoterost brez roba. *Diracov Lagrangian* je preslikava

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_D \colon \Gamma^\infty(S) \to C^\infty(M), \\ &\mathscr{L}_D(\Psi) := \mathrm{Re}\, \langle \Psi, D\Psi \rangle_S - m \,\langle \Psi, \Psi \rangle_S\,, \end{aligned}$$

kjer je $m > 0$ konstanta – imenujemo jo *masa fermiona. Diracova akcija* je preslikava

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_D \colon \mathcal{D}_{\mathcal{S}_D} \to \mathbb{R}, \\ &\mathcal{S}_D(\Psi) := \int_M \mathscr{L}_D(\Psi)\omega_g, \end{aligned}$$

kjer je $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_D} := \{\Psi \in \Gamma^\infty(S) \mid \mathcal{S}_D(\Psi) < \infty\}$ in je Diracov operator D definiran s tisto povezavo na glavnem spin svežnju, ki je inducirana z Levi–Civitajevo povezavo na M (glej definicijo 4.29). Spinorsko polje Ψ je *kritična točka* Diracove akcije, če velja

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{S}_D(\Psi + t\Phi) = 0$$

za vsa spinorska polja $\Phi \in \Gamma_c^\infty(S)$ s kompaktnim nosilcem.

Opomba 4.51. Domeno Diracove akcije smo omejili zavoljo njene dobre definiranosti; alternativno bi lahko zahtevali kompaktnost M. Dalje, v kinetičnem členu Diracovega Lagrangiana smo vzeli le realni del zato, ker v splošnem v fiziki želimo realnost Lagrangianov – to pa ne vpliva na Diracovo akcijo, saj je

$$\begin{aligned}\int_M \operatorname{Re} \langle \Psi, D\Psi\rangle_S \, \omega_g &= \frac{1}{2}\int_M (\langle \Psi, D\Psi\rangle_S + \langle D\Psi, \Psi\rangle_S)\omega_g \\ &= \frac{1}{2}\int_M (\langle \Psi, D\Psi\rangle_S + \langle \Psi, D\Psi\rangle_S)\omega_g = \int_M \langle \Psi, D\Psi\rangle_S \, \omega_g,\end{aligned}$$

kjer smo skozi drugi enačaj upoštevali sebiadjungiranost D po izreku 4.47.

Izrek 4.52. *Naj bo (M, g) spinska Lorentzova mnogoterost brez roba. Spinorsko polje Ψ je kritična točka Diracove akcije natanko tedaj, ko reši t. i. Diracovo enačbo*

$$D\Psi - m\Psi = 0. \tag{4.24}$$

Dokaz. Izračunamo

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{S}_D(\Psi + t\Phi) &= \langle\!\langle \Psi, D\Phi\rangle\!\rangle_S + \langle\!\langle \Phi, D\Psi\rangle\!\rangle_S - m\langle\!\langle \Psi, \Phi\rangle\!\rangle_S - m\langle\!\langle \Phi, \Psi\rangle\!\rangle_S \\ &= 2\operatorname{Re}\langle\!\langle \Phi, D\Psi - m\Psi\rangle\!\rangle_S,\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj upoštevali sebiadjungiranost Diracovega operatorja po izreku 4.47 in konjugirano linearnost psevdo skalarnega produkta $\langle\!\langle \cdot, \cdot\rangle\!\rangle_S$. Po neizrojenosti slednjega zdaj sledi želena ekvivalenca. ■

Opomba 4.53. Včasih imamo z izrazom *spinorsko polje* v mislih tak prerez Ψ spinorskega svežnja, ki reši Diracovo enačbo $D\Psi - m\Psi = 0$, kar je po zadnjem izreku ekvivalentno njegovi stacionarnosti glede na Diracovo akcijo.

Ker smo Diracovo enačbo zapisali brezkoordinatno, je avtomatično veljavna v poljubnih koordinatah Lorentzove mnogoterosti (M, g). To opažanje imenujemo *Lorentzova kovariantnost Diracove enačbe.*

Želeli pa bi pokazati, da poleg Lorentzove kovariantnosti velja tudi umeritvena invariantnost Diracovega Lagrangiana, tj. $\mathscr{L}_D(f^{-1}\Psi) = \mathscr{L}_D(\Psi)$ za vse $\Psi \in \Gamma^\infty(S)$ in $f \in \operatorname{Aut}(S(M))$. Pri tem naletimo na težave – oglejmo si, zakaj. Naj bo $(M, g) = (\mathbb{R}^4, \eta)$ prostor Minkowskega. Vsak avtomorfizem f glavnega spin svežnja $\mathbb{R}^4 \times \operatorname{Spin}(1, 3)$ se zaradi trivialnosti izraža kot $f(x, A) = (x, A\tau(x))$ za neko gladko funkcijo $\tau\colon \mathbb{R}^4 \to \operatorname{Spin}(1, 3)$. Vzemimo za primer

$$\tau(x) = \begin{pmatrix} e^{i\vartheta(x)} & \\ & e^{-i\vartheta(x)} \end{pmatrix},$$

za neko nekonstantno gladko realno funkcijo $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$. Če $\tau(x)$ upodobimo s spinorsko upodobitvijo, dobimo

$$\kappa(\tau(x)) = \begin{pmatrix} \tau(x) & \\ & \tau(x) \end{pmatrix},$$

transformiran kinetični člen Diracovega Lagrangiana (masni je očitno umeritveno invarianten) pa zaradi delovanja avtomorfizma f na spinorsko polje ψ, ki je dano kot $f\psi = (\kappa \circ \tau)\psi$, postane

$$\langle f\psi, D(f\psi)\rangle_S = i\psi^\dagger(\kappa \circ \tau)^\dagger \gamma_0 \gamma^\mu \partial_\mu((\kappa \circ \tau)\psi).$$

Težava nastane pri faktorju

$$\partial_\mu((\kappa \circ \tau)\psi) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\vartheta} & & & \\ & \mathrm{e}^{-i\vartheta} & & \\ & & \mathrm{e}^{i\vartheta} & \\ & & & \mathrm{e}^{-i\vartheta} \end{pmatrix} \partial_\mu\psi + i(\partial_\mu\vartheta) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\vartheta} & & & \\ & -\mathrm{e}^{-i\vartheta} & & \\ & & e^{i\vartheta} & \\ & & & -\mathrm{e}^{-i\vartheta} \end{pmatrix} \psi,$$

saj drugi člen pokvari umeritveno invariantnost. Iz te zagate nas reši sklopitev z umeritvenim poljem, ki je tema naslednjega podrazdelka. Sklopitev spinorskega polja z umeritvenim namreč povrne umeritveno invariantnost, kar v nekem smislu odraža dejstvo, da je ob vsakem fermionskem polju v naravi navzoče tudi neko umeritveno polje. V primeru elektromagnetizma bi to opažanje izrekli kot: vsak elektron vedno spremlja elektromagnetno umeritveno polje.

4.4.2 Interakcija spinorskega polja z umeritvenim poljem

Za konec brez dokazov skicirajmo idejo konstrukcije geometrijskega modela interakcije spinorskega polja z umeritvenim – za poglobljeno razpravo naj bralec obišče [2, poglavje 7] in [6, poglavje 6.11].

Za opis interakcije spinorskega polja z umeritvenim je potrebno najprej ustvariti orodje, ki glavni spin sveženj $\pi_S\colon S(M) \xrightarrow{\mathrm{Spin}(1,3)} M$ spoji s trivialnim svežnjem $\pi\colon P \xrightarrow{U(1)} M$, spojiti pa moramo tudi ostale sestavine naše teorije: povezave in upodobitve.

Spoj $P_1 \circ P_2$ glavnih svežnjev $\pi_i\colon P_i \to M$ $(i = 1, 2)$ je množica

$$P_1 \circ P_2 = \{(p_1, p_2) \in P_1 \times P_2 \mid \pi_1(p_1) = \pi_2(p_2)\}$$

s sveženjsko preslikavo $\pi\colon P_1 \circ P_2 \to M$, dano s predpisom $\pi(p_1, p_2) = \pi_1(p_1) = \pi_2(p_2)$. Desno delovanje grupe $G_1 \times G_2$ na $P_1 \circ P_2$ je dano s predpisom

$$(p_1, p_2) \cdot (g_1, g_2) = (p_1 \cdot g_1, p_2 \cdot g_2),$$

in ob tem postane

$$\pi\colon P_1 \circ P_2 \xrightarrow{G_1 \times G_2} M$$

glavni sveženj s strukturno grupo $G_1 \times G_2$.** Dalje, definiramo lahko preslikavi $\pi^i\colon P_1 \circ P_2 \to P_i$, dani s predpisoma $\pi^i(p_1, p_2) = p_i$. S to definicijo postaneta

$$\pi^1\colon P_1 \circ P_2 \xrightarrow{G_2} P_1 \quad \text{in}$$
$$\pi^2\colon P_1 \circ P_2 \xrightarrow{G_1} P_2$$

**Če je bralcu blizu koncept *povleka* svežnja, bo v omenjeni konstrukciji prepoznal enakost $P_1 \circ P_2 = {\pi_1}^* P_2 = {\pi_2}^* P_1$.

glavna svežnja; tu smo identificirali $G_1 \cong G_1 \times \{1\}$ in $G_2 \cong \{1\} \times G_2$. Omenjeno konstrukcijo opišemo z naslednjim komutativnim diagramom.

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \circ P_2 \arrow[dl, "\pi^1"'] \arrow[dr, "\pi^2"] \arrow[dd, "\pi"] & \\
P_1 \arrow[dr, "\pi_1"'] & & P_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

Dalje, definiramo *spoj povezav* ω_1 in ω_2 na P_1 in P_2 kot objekt

$$(\omega_1 \oplus \omega_2) := (\pi^1)^* \omega_1 \oplus (\pi^2)^* \omega_2,$$

ki je diferencialna 1-forma na $P_1 \circ P_2$ z vrednostmi v $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Rutinski postopek pokaže, da je $\omega_1 \oplus \omega_2$ res povezava na spoju $P_1 \circ P_2$ glavnih svežnjev.

Podobno storimo tudi z upodobitvami. Če sta $\rho_i \colon G_i \to \mathrm{GL}(V)$ upodobitvi Liejevih grup, lahko ob dodatnem pogoju *komutiranja*, tj.

$$\rho_1(g_1)\rho_2(g_2) = \rho_2(g_2)\rho_1(g_1) \quad \text{za vse } g_i \in G_i, \tag{4.25}$$

definiramo *upodobitev produkta* $G_1 \times G_2$ kot

$$\begin{aligned} \rho_1 \times \rho_2 \colon G_1 \times G_2 &\to \mathrm{GL}(V), \\ (g_1, g_2) &\mapsto \rho_1(g_1)\rho_2(g_2), \end{aligned}$$

pri čemer pogoj (4.25) potrebujemo, da je $\rho_1 \times \rho_2$ sploh upodobitev.

Tako imamo vse sestavine, da lahko tvorimo glavni sveženj, ki služi kot osnova za opis interakcije umeritvenega polja fotonov (elektromagnetnega polja) s spinorskim poljem. Vzemimo:

i) glavni spin sveženj $\pi_S \colon S(M) \xrightarrow{\mathrm{Spin}(1,3)} M$ s povezavo ω_S in spinorsko upodobitvijo $\kappa \colon \mathrm{Spin}(1,3) \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^4)$,

ii) trivialni sveženj $\pi_P \colon P \xrightarrow{\mathrm{U}(1)} M$ z neko povezavo ω in upodobitvijo $\rho \colon \mathrm{U}(1) \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^4)$, dano z $\rho(\mathrm{e}^{i\vartheta})\psi = \mathrm{e}^{i\vartheta}\psi$ za vse $\vartheta \in [0, 2\pi)$ in $\psi \in \mathbb{C}^4$.

Po predgovoru zdaj tvorimo njun spoj $S(M) \circ P$, ki ga imenujemo *spoj glavnega spin svežnja z elektromagnetnim glavnim svežnjem*. Jasno je, da upodobitvi κ in ρ komutirata, zato lahko tvorimo upodobitev

$$\kappa \times \rho \colon \mathrm{Spin}(1,3) \times \mathrm{U}(1) \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^4).$$

V tem kontekstu definiramo *spinorsko polje* kot prerez *spinorskega svežnja*

$$S := (S(M) \circ P) \times_{(\kappa \times \rho)} \mathbb{C}^4.$$

Vsako spinorsko polje se tedaj na poljubni kontraktibilni odprti podmnožici $U \subset M$ izraža kot $\Psi = [(\varepsilon, s), \psi]$, kjer je $\varepsilon \colon U \to S(M)$ neki prerez glavnega spin svežnja,

$s\colon U \to P$ umeritev elektromagnetnega glavnega svežnja in je $\psi \in C^\infty(U, \mathbb{C}^4)$. Povezava $\omega_S \oplus \omega$ porodi na spinorskem svežnju kovariantni odvod, ki ga označimo z $\nabla^{\omega_S \oplus \omega}$. Izkaže se, da se slednji lokalno, v notaciji kot zgoraj, izraža kot

$$\nabla_X^{\omega_S \oplus \omega} \psi = \mathrm{d}\psi(X) + \kappa_*(A_\varepsilon^{\omega_S}(X))\psi + \rho_*(A_s^\omega(X))\psi,$$

kjer sta $A_\varepsilon^{\omega_S} = \varepsilon^* \omega_S$ in $A_s^\omega = s^*\omega$. Na spinorskem svežnju S lahko tedaj definiramo *sklopljen Diracov operator*

$$D^\omega \Psi = i\eta^{\mu\nu} e_\mu \cdot \nabla_X^{\omega_S \oplus \omega} \Psi,$$

ki je v fizikalni literaturi običajno označen z $\not{D}_A$.[††]

Diracova forma H, definirana z enačbo (4.18), je $(\mathrm{Spin}(1,3) \times \mathrm{U}(1))$-invariantna, kar ni težko videti. Po analogiji s posledico 4.41 to pomeni, da na spinorskem svežnju inducira psevdo metriko $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, s tem pa tudi psevdo skalarni produkt $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_S$, ki je dan, kot vedno, z integralom. Z nekoliko več dela se lahko po analognem postopku kot v dokazu izreka 4.47 prepričamo, da je D^ω sebiadjungiran glede na $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_S$, tj. velja

$$\langle\!\langle D^\omega \Phi, \Psi \rangle\!\rangle_S = \langle\!\langle \Phi, D^\omega \Psi \rangle\!\rangle_S$$

za vse $\Psi, \Phi \in \Gamma^\infty(S)$, če le M nima roba.

Končno, definiramo *Yang–Mills–Diracov Lagrangian*

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{YMD}\colon \Gamma^\infty(S) \times \mathscr{A}(P) \to C^\infty(M, \mathbb{C}),\\
&\mathscr{L}_{YMD}(\Psi, \omega) = \operatorname{Re} \langle \Psi, D^\omega \Psi \rangle_S - m \langle\!\langle \Psi, \Psi \rangle\!\rangle_S - \frac{1}{2} \langle F_M^\omega, F_M^\omega \rangle_{\mathrm{Ad}(P)},
\end{aligned}$$

kjer prvi člen interpretiramo kot kinetični člen, ki vsebuje sklopitev spinorskega polja z umeritvenim (elektromagnetnim) poljem; spomnimo, da je F_M^ω ukrivljenostna 2-forma na M povezave ω z vrednostmi v adjungiranem svežnju, kot v posledici 2.125. Po analogiji s prejšnjimi razdelki definiramo tudi akcijo

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{YMD}\colon \mathcal{D}_{\mathcal{S}_{YMD}} \to C^\infty(M, \mathbb{C}),\\
&\mathcal{S}_{YMD}(\Psi, \omega) = \operatorname{Re} \langle \Psi, D^\omega \Psi \rangle_S - m \langle\!\langle \Psi, \Psi \rangle\!\rangle_S - \frac{1}{2} \langle F_M^\omega, F_M^\omega \rangle_{\mathrm{Ad}(P)},
\end{aligned}$$

kjer je $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{YMD}} := \{(\Psi, \omega) \in \Gamma^\infty(S) \times \mathscr{A}(P) \mid S_{YMD}(\Psi, \omega) < \infty\}$. Prepričamo se lahko, da je $\mathscr{L}_{YMD}$ invarianten na umeritvene transformacije $f \in \mathrm{Aut}(S(M) \circ P)$, pri čemer lahko izrazimo $f = f_1 \times f_2$ za natanko en par $f_1 \in \mathrm{Aut}(S(M))$ in $f_2 \in \mathrm{Aut}(P)$. Invariantnost na umeritvene transformacije natančneje zdaj pomeni

$$\mathscr{L}_{YMD}(f^{-1}\Psi, f_2^*\omega) = \mathscr{L}_{YMD}(\Psi, \omega).$$

Variiranje Yang–Mills–Diracove akcije po spinorskem polju Ψ pokaže, da je Ψ kritična točka Yang–Mills–Diracove enačbe natanko tedaj, ko velja *minimalno sklopljena Diracova enačba*

$$D^\omega \Psi - m\Psi = 0, \tag{4.26}$$

[††]Tukaj A ustreza naši povezavi ω na $\pi_P\colon P \xrightarrow{\mathrm{U}(1)} M$.

kar se v primeru, ko je M prostor Minkowskega, poenostavi v

$$\gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} - A_{\mu})\psi - m\psi = 0,$$

kjer smo lokalno povezavno 1-formo na M izrazili z $iA_{\mu} = i\rho_{*}A_{\mu} \in C^{\infty}(M, i\mathbb{R})$. V fiziki je ta enačba poznana kot *Diracova enačba z minimalno sklopitvijo*; ponavadi se pred A_{μ} v tej enačbi pojavi še skalar $e > 0$, ki opisuje sklopitveni faktor – naboj elektrona. Po drugi strani, z variiranjem po ω pokažemo, da je ω kritična točka Yang–Mills–Diracove enačbe natanko tedaj, ko velja t. i. *nehomogena Yang–Millsova enačba*

$$\delta_{\omega}F_{M}^{\omega} = J_{D}(\Psi), \tag{4.27}$$

kjer je $J_{D}(\Psi) \in \Omega^{1}(M, \mathrm{Ad}(P))$ 1-forma, enolično določena s pogojem

$$\langle \alpha_{M}, J_{D}(\Psi) \rangle_{\mathrm{Ad}(P)} = \mathrm{Re}\, \langle \Psi, \alpha_{M} \cdot \Psi \rangle_{S}\,.$$

Tu je operacija $\cdot\colon \Omega^{1}(M, \mathrm{Ad}(P)) \times \Gamma^{\infty}(S) \to \Gamma^{\infty}(S)$ definirana z neke vrste kombiniranjem Cliffordovega množenja in upodobitve ρ (slednja se pojavi v tem produktu na podoben način kot v definiciji 3.39). 1-formo $J_{D}(\Psi)$ predvidljivo imenujemo *Yang–Mills–Diracov tok*. Enačbi (4.26) in (4.27) skupaj predstavljata sistem parcialnih diferencialnih enačb, ki jih lahko bralec (vsaj lokalno) poskusi zapisati in kontemplirati o njihovi rešljivosti.

Za zaključek povejmo še, da v primeru, ko je strukturna grupa namesto U(1) enaka SU(2), fizikalno opisujemo sklopitev nukleonov (protonov in nevtronov) z umeritvenima bozonoma W in Z; ustrezen vektorski prostor, na katerem modeliramo dvojico protona in nevtrona, je $\mathbb{C}^{4} \oplus \mathbb{C}^{4}$. Ustrezna spinorska upodobitev je $\kappa \oplus \kappa$, upodobitev $\rho\colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{4} \oplus \mathbb{C}^{4})$ pa je dana s predpisom

$$\rho \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{P} \\ \psi_{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\psi_{P} + b\psi_{N} \\ c\psi_{P} + d\psi_{N} \end{pmatrix}$$

za vse $\psi_{P}, \psi_{N} \in \mathbb{C}^{4}$; ustrezna Diracova forma je prav tako dana na očiten način, torej s $H \oplus H$, kjer je H Diracova forma na $\mathbb{C}^{4}$. Opis interakcije protona in nevtrona z umeritvenim poljem šibkih bozonov je bila v manj rigoroznem fizikalnem jeziku ravno vsebina Yangovega in Millsovega članka [26] iz leta 1954. Več o fizikalnih aspektih opisanega modela lahko bralec prebere v [6, poglavje 7], še mnogo več zanimivih fizikalnih aspektov teorije umeritvenih polj pa lahko najde v [17].

A Dodatek

A.1 Hodge-$\star$ operator

Naj bo V realen vektorski prostor dimenzije n, ki je opremljen s psevdo skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$; označili ga bomo tudi z g. Opišimo, kako ta porodi psevdo skalarni produkt na vektorskem prostoru $\Lambda^k(V^*)$ alternirajočih kovariantnih k-tenzorjev na V. Naj bo $(e_i)_i$ psevdo ortonormirana baza za V, torej velja

$$\langle e_i, e_j\rangle = g_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{če } i \neq j, \\ \epsilon_i \in \{-1, 1\} & \text{če } i = j, \end{cases}$$

in označujmo z $(e^i)_i$ dualno bazo za V^*, tj. $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Psevdo skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na V porodi na dualnem prostoru V^* psevdo skalarni produkt, ki je dan na dualni bazi s predpisom $\langle e^i, e^j\rangle = g^{ij} := g_{ij}$. Baza vektorskega prostora $\Lambda^k(V^*)$ je ob dani bazi $(e_i)_i$ za V dana z

$$\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}. \tag{A.1}$$

Na njej lahko definiramo

$$\left\langle e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}, e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}\right\rangle := \left\langle e^{i_1}, e^{j_1}\right\rangle \ldots \left\langle e^{i_k}, e^{j_k}\right\rangle = g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_k j_k} \tag{A.2}$$

in predpis razširimo na celoten prostor $\Lambda^k(V^*)$ po bilinearnosti. Po standardnem postopku se prepričamo, da je ta definicija neodvisna od izbire baze; ker je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ psevdo skalarni produkt na V, pa zgornji predpis podaja psevdo skalarni produkt na prostoru $\Lambda^k(V^*)$. Ker je vsak alternirajoč kovarianten k-tenzor linearna kombinacija tenzorjev iz množice (A.1), za poljubna $\alpha, \beta \in \Lambda^k(V^*)$ velja

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \epsilon_{i_1} \ldots \epsilon_{i_k} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \beta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}).$$

Povejmo nekaj o orientaciji vektorskega prostora. Dve urejeni bazi $(e_i)_i$ in $(f_i)_i$ vektorskega prostora *določata isto orientacijo*, če ima prehodna matrika med njima pozitivno determinanto; rečemo, da *določata obratno orientacijo*, če ima prehodna matrika med njima negativno determinanto. Na množici vseh urejenih baz vektorskega prostora V definiramo relacijo

$$(e_i)_i \sim (f_i)_i \text{ natanko tedaj, ko določata isto orientacijo.}$$

Ta relacija je ekvivalenčna, zato porodi dekompozicijo na množici vseh urejenih baz vektorskega prostora V. *Orientacija vektorskega prostora V* je izbira enega od teh dveh ekvivalenčnih razredov; baza vektorskega prostora je *orientirana*, če je predstavnik tega vnaprej izbranega ekvivalenčnega razreda.

Naj bo $(e_i)_i$ orientirana baza vektorskega prostora, ki pa je istočasno psevdo ortonormirana baza glede na psevdo skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *Volumski element* vektorskega prostora V je alternirajoč kovarianten n-tenzor $\omega_g \in \Lambda^n(V^*)$, definiran kot

$$\omega_g := e^1 \wedge \cdots \wedge e^n.$$

Tako definiran tenzor ω_g je očitno neničelen.

Opomba A.1. Tako definiran tenzor ω_g je neodvisen od izbire orientirane psevdo ortonormirane baze $(e_i)_i$. Res, naj bo $(\tilde{e}_i)_i$ še ena taka baza. Potem obstaja matrika $A \in \mathrm{SO}(p, n-p)$, da je $\tilde{e}_i = A^j{}_i e_j$. Tedaj je

$$(e^1 \wedge \cdots \wedge e^n)(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n) = \det[e^i(\tilde{e}_j)]_{i,j} = \det[e^i(A^\lambda{}_j e_\lambda)]_{i,j} = \det A = 1,$$

kjer smo na prehodu skozi prvi enačaj uporabili [10, trditev 14.11], na prehodu skozi zadnjega pa dejstvo, da je $A \in \mathrm{SO}(p, n-p)$. Velja pa tudi

$$(\tilde{e}^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}^n)(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n) = 1,$$

to pa po multilinearnosti in antisimetričnosti obeh tenzorjev implicira

$$e^1 \wedge \cdots \wedge e^n = \tilde{e}^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}^n.$$

Motivacija za vpeljavo Hodge-$\star$ operatorja je ta, da želimo za dan $1 \leq k \leq n$ k-tenzorju $e^1 \wedge \cdots \wedge e^k$ prirediti $n-k$ tenzor $e^{k+1} \wedge \cdots \wedge e^n$ (torej skupaj tvorita ravno volumski element).

Izrek A.2. *Naj bo V orientiran vektorski prostor s psevdo skalarnim produktom. Potem obstaja natanko en izomorfizem $\star\colon \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{n-k}(V^*)$, za katerega velja*

$$\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle\, \omega_g, \tag{A.3}$$

za vsaka dva $\alpha, \beta \in \Lambda^k(V^*)$.

Dokaz. Dokažimo enoličnost. Naj bo $(e_i)_i$ orientirana psevdo ortonormirana baza prostora V in naj bosta $\alpha = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} = \beta$, za neke indekse $1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq n$. Če linearni izomorfizem $\star$ obstaja, potem lahko $\star\beta$ razvijemo po bazi (A.1) prostora $\Lambda^{n-k}(V^*)$; še več, zaradi definicijske enakosti (A.3) lahko zapišemo kar

$$\star\beta = C e^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{i_n}$$

za neko konstanto $C \in \mathbb{R}$, kjer so indeksi $i_{k+1}, \ldots, i_n$ enolično določeni s pogojema $1 \leq i_{k+1} < \cdots < i_n \leq n$ in $\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{i_{k+1}, \ldots, i_n\} = \emptyset$. Če označimo $I = (i_1, \ldots, i_n)$, potem velja

$$\alpha \wedge \star\beta = C \operatorname{sgn}(\sigma_I)\, \omega_g = \langle \alpha, \beta \rangle\, \omega_g = \epsilon_{i_1} \ldots \epsilon_{i_k} \omega_g,$$

kjer je $\sigma_I := \left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{smallmatrix}\right)$. Iz tega sledi $C = \epsilon_{i_1} \ldots \epsilon_{i_k} \operatorname{sgn}(\sigma_I)$, zato je s predpisom

$$\star(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) = \epsilon_{i_1} \ldots \epsilon_{i_k} \operatorname{sgn}(\sigma_I)\, e^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{i_n} \tag{A.4}$$

na bazi (A.1) preslikava $\star$ enolično določena.

Za dokaz obstoja naj bo najprej $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$ neničeln in $\eta \in \Lambda^{n-k}(V^*)$ poljuben. Ker je volumski element ω_g neničeln in je $\Lambda^n(V^*)$ enorazsežen vektorski prostor, velja

$$\alpha \wedge \eta = D\omega_g,$$

za neko konstanto $D \in \mathbb{R}$. Ker je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ neizrojena bilinearna forma, obstaja $\bar{\star}\eta \in \Lambda^k(V^*)$, da je $D = \langle \alpha, \bar{\star}\eta \rangle$, saj bi sicer veljalo $\langle \alpha, \bar{\star}\eta \rangle = 0$ za vse $\bar{\star}\eta \in \Lambda^k(V^*)$, kar bi impliciralo $\alpha = 0$. Tenzor $\bar{\star}\eta$ je enolično določen, kot lahko vidimo (podobno kot v prejšnjem odstavku) z izbiro $\alpha = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ in $\eta = e^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{i_n}$ za neke indekse $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ in $1 \leq i_{k+1} < \cdots < i_n \leq n$ z dodatnim pogojem $\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{i_{k+1}, \ldots, i_n\} = \emptyset$. To pomeni, da je preslikava $\bar{\star}\colon \Lambda^{n-k}(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$ linearna injekcija med prostoroma iste razsenosti $\binom{n}{k}$, zato je izomorfizem. Vzemimo $\star\beta := (\bar{\star})^{-1}\beta$, tj. $\star$ definirajmo kot inverz preslikave $\bar{\star}$; tedaj za $\star$ po konstrukciji velja definicijska enakost (A.3). ■

Opomba A.3. Nekateri avtorji uporabljajo kar $\bar{\star}$ iz zadnjega dokaza za definicijo Hodge-$\star$ operatorja. Kot bomo videli v točki v) naslednje trditve, sta definiciji do predznaka natanko enaki.

Trditev A.4. *Naj bosta $\alpha, \beta \in \Lambda^k(V^*)$. Za Hodge-$\star$ operator na orientiranem prostoru V s psevdoskalarnim produktom indeksa p veljajo naslednje lastnosti:*

i) $\alpha \wedge \star\beta = \beta \wedge \star\alpha$,

ii) $\star 1 = \omega_g$,

iii) $\star\omega_g = (-1)^p$,

iv) $\langle \star\alpha, \star\beta \rangle = (-1)^p \langle \alpha, \beta \rangle$,

v) $\star\star\alpha = (-1)^{k(n-k)+p}\alpha$.

Dokaz. Za dokaz točke i) pripomnimo, da velja $\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \omega_g = \langle \beta, \alpha \rangle \omega_g = \beta \wedge \star\alpha$. Točka ii) sledi iz opažanja, da je 1 element prostora $\Lambda^0(V^*)$, zato je $1 \wedge \star 1 = \langle 1, 1 \rangle \omega_g = \omega_g$, velja pa $1 \wedge \star 1 = \star 1$, saj je vnanji produkt n-tenzorja z 0-tenzorjem enak skalarnemu množenju. Podobno za dokaz točke iii) opazimo, da je $\star\omega_g$ element prostora $\Lambda^0(V^*)$; ob izbiri orientirane psevdo ortonormirane baze $(e_i)_i$ je $\omega_g = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$, zato je

$$\omega_g \wedge \star\omega_g = \langle \omega_g, \omega_g \rangle \omega_g = \epsilon_1 \ldots \epsilon_n \omega_g.$$

Posledično velja $\star\omega_g = \epsilon_1 \ldots \epsilon_n = (-1)^p$.

Dokažimo iv). Enakost $\langle \star\alpha, \star\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ je dovolj pokazati na neki orientirani psevdo ortonormirani bazi prostora $\Lambda^k(V^*)$. Naj bosta $\alpha = e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}$ in $\beta = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$. Potem je

$$\begin{aligned}
\langle \star\alpha, \star\beta \rangle &= \epsilon_{j_1} \ldots \epsilon_{j_k} \epsilon_{i_1} \ldots \epsilon_{i_k} \operatorname{sgn}(\sigma_I) \operatorname{sgn}(\sigma_J) \left\langle e^{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{j_n}, e^{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{i_n} \right\rangle \\
&= \epsilon_{j_1} \ldots \epsilon_{j_k} \epsilon_{i_1} \ldots \epsilon_{i_k} \operatorname{sgn}(\sigma_I) \operatorname{sgn}(\sigma_J) \epsilon_{j_{k+1}} \ldots \epsilon_{j_n} \delta_{j_{k+1} i_{k+1}} \ldots \delta_{j_n i_n}
\end{aligned}$$

in opazimo, da je v primeru $j_\ell \neq i_\ell$ (za neki $\ell \leq k$) ta izraz enak nič, seveda pa je tedaj tudi $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. V obratnem primeru velja

$$\epsilon_{j_1} \ldots \epsilon_{j_k} \epsilon_{i_1} \ldots \epsilon_{i_k} \operatorname{sgn}(\sigma_I) \operatorname{sgn}(\sigma_J) = 1,$$

saj je $I = J$, in zgornji izraz postane

$$\langle \star\alpha, \star\beta \rangle = \epsilon_{j_{k+1}} \ldots \epsilon_{j_n} = (-1)^p \epsilon_{j_1} \ldots \epsilon_{j_k} = (-1)^p \langle \alpha, \beta \rangle .$$

Dokažimo v). Po točki iv) velja

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \beta \rangle \omega_g &= (-1)^p \langle \star\alpha, \star\beta \rangle \omega_g = (-1)^p \star \alpha \wedge \star\star\beta = (-1)^{k(n-k)+p} \star\star\beta \wedge \star\alpha \\
&= (-1)^{k(n-k)} \langle \star\star\beta, \alpha \rangle \omega_g = \left\langle \alpha, (-1)^{k(n-k)+p} \star\star\beta \right\rangle \omega_g
\end{aligned}$$

in iz neizrojenosti $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zdaj sledi želeno. ■

Opomba A.5. Na orientirani psevdo Riemannovi mnogoterosti definiramo preslikavo

$$\star\colon \Lambda^k T^*M \to \Lambda^{n-k} T^*M$$

po vlaknih; tako dobimo gladek izomorfizem vektorskih svežnjev, saj $\star$ tedaj slika gladka ogrodja v gladka ogrodja. Ker vsak morfizem vektorskih svežnjev inducira preslikavo med prerezi, tudi izomorfizem $\star$ vektorskih svežnjev inducira izomorfizem med vektorskima prostoroma $\Omega^k(M)$ in $\Omega^{n-k}(M)$, ki je implicitno definiran z enakostjo

$$\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \, \omega_g$$

za vse $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$, kjer je ω_g zdaj psevdo Riemannova volumska forma.

Literatura

[1] H. R. Alagia in C. U. Sánchez, *Spin Structures on Pseudo-Riemannian Manifolds*, [ogled 10. 9. 2020], dostopno na `inmabb.criba.edu.ar/revuma/pdf/v32n1/p064-078.pdf`.

[2] D. Bleecker, *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Boston, 1981.

[3] R. Bott in L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer, New York, 1982.

[4] T. Bröcker in T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Springer, New York, 2013.

[5] T. Friedrich, *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, Graduate Studies in Mathematics **25**, American Mathematical Society, Providence, 2000.

[6] M. J. Hamilton, *Mathematical Gauge Theory*, Springer International Publishing, Cham, 2017.

[7] A. Hatcher, *Vector Bundles and K-Theory*, [ogled 10. 9. 2020], dostopno na `pi.math.cornell.edu/ hatcher/VBKT/VB.pdf`.

[8] S. Kobayashi in K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Wiley-Interscience, 1996.

[9] H. B. Lawson in M.-L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.

[10] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, New York, 2013.

[11] J. M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*, Springer International Publishing, New York, 2018.

[12] J. Milnor in J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*, **76**, Princeton University Press, Princeton, 1974.

[13] S. A. Mitchell, *Notes on Principal Bundles and Classifying Spaces*, 2001, [ogled 10. 9. 2020], dostopno na `math.mit.edu/ mbehrens/18.906spring10/prin.pdf`.

[14] J. Mrčun, *Liejeve grupe*, [ogled 10. 9. 2020], dostopno na `fmf.uni-lj.si/ mrcun/preprints/lg.pdf`.

[15] G. L. Naber, *Topology, Geometry and Gauge fields*, Springer, New York, 2011.

[16] G. L. Naber, *The Geometry of Minkowski Spacetime*, Springer, New York, 2012.

[17] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, Hilger, Bristol, 1990.

[18] C. W. Norman, *Undergraduate Algebra: a first course*, Oxford University Press, Oxford, 1986.

[19] R. Podgornik in A. Vilfan, *Elektromagnetno polje*, DMFA, Ljubljana, 2014.

[20] F. Schwabl, *Advanced Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[21] M. D. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, 1979.

[22] L. W. Tu, *Differential geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes*, Springer, New York, 2017.

[23] S. Weinberg, *A model of leptons*, Phys. Rev. Lett. (1967) 1264–1266.

[24] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[25] C.-N. Yang, *Magnetic monopoles, fiber bundles, and gauge fields*, Annals of the New York Academy of Sciences (1977).

[26] C.-N. Yang in R. L. Mills, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*, Physical Review Letters (1954) 191.