一端固定一段做受迫振动的有界弦的奇点分析

有界弦的$x=0$端固定，$x=l$端受迫作谐振动$sin\omega t$，弦的初始位移和初始速度均为零，这个定解问题是[1]：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ (0<x<l) \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=sin\omega t \\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

其中，$\omega\neq\frac{n\pi a}{l}$，$n=1,2,3\ldots$

1 分离变量法求解定解问题

首先将非齐次边界条件化为齐次边界条件。由于弦在$x=l$端作受迫振动$\sin\omega t$，所以该定解问题必有一个特解与$x=l$端同步振动，可设特解为$v(x,t)=X(x)\sin\omega t$，代入方程和边界条件可得：

$$v(x,t)=\frac{sin\frac{\omega x}{a}sin\omega t}{sin\frac{\omega l}{a}}$$

令$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$，得到$w(x,t)$满足的定解问题为：

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=0,\ (0<x<l) \\ w|_{x=0}=0,\ w|_{x=l}=0 \\ w|_{t=0}=0,\ w_t|_{t=0}=-\omega\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{sin\frac{\omega l}{a}} \end{cases}$$

对于该定解问题，用分离变量法求得解为[2]：

$$w(x,t)=2a\omega l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\omega l)^2-(n\pi a)^2}sin\frac{n\pi at}{l}sin\frac{n\pi x}{l}$$

2 ω在$\frac{n\pi a}{l}$附近的函数图像变化及物理意义分析

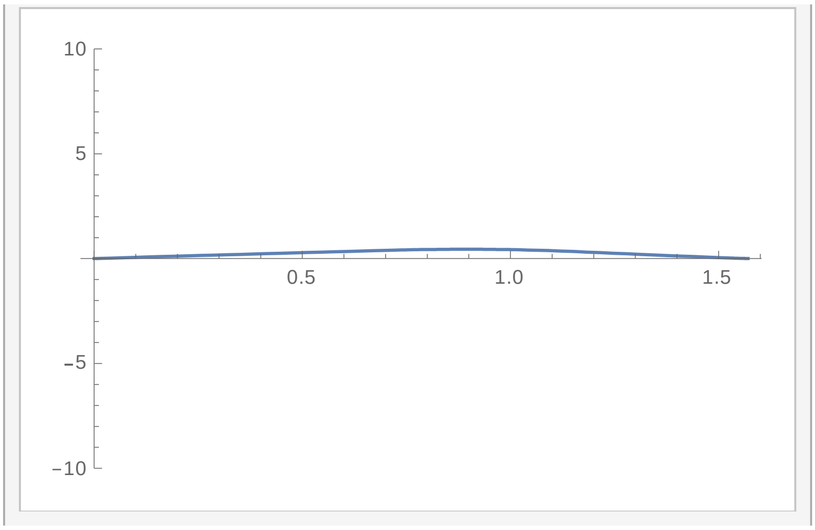
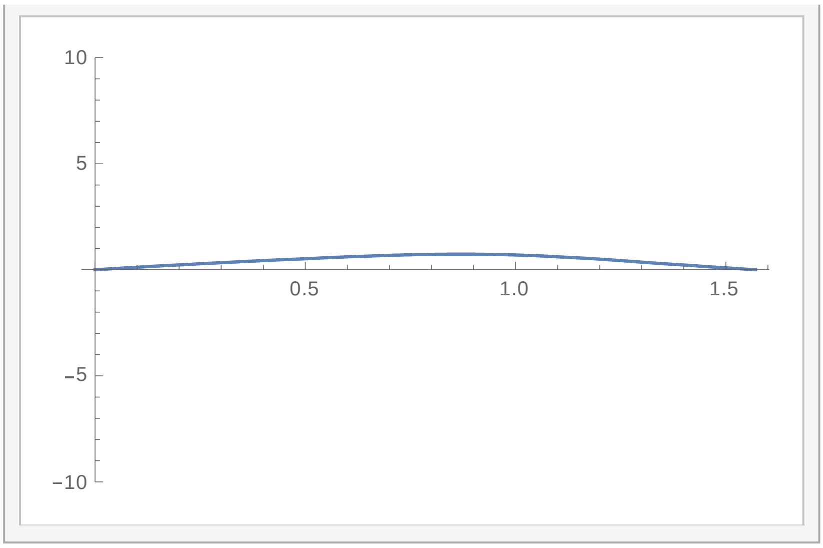
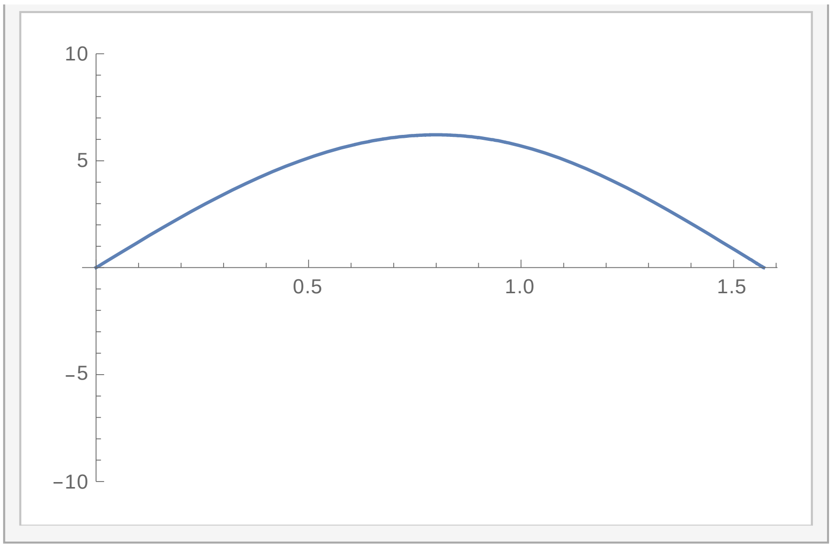
2.1 解的数学形式分析

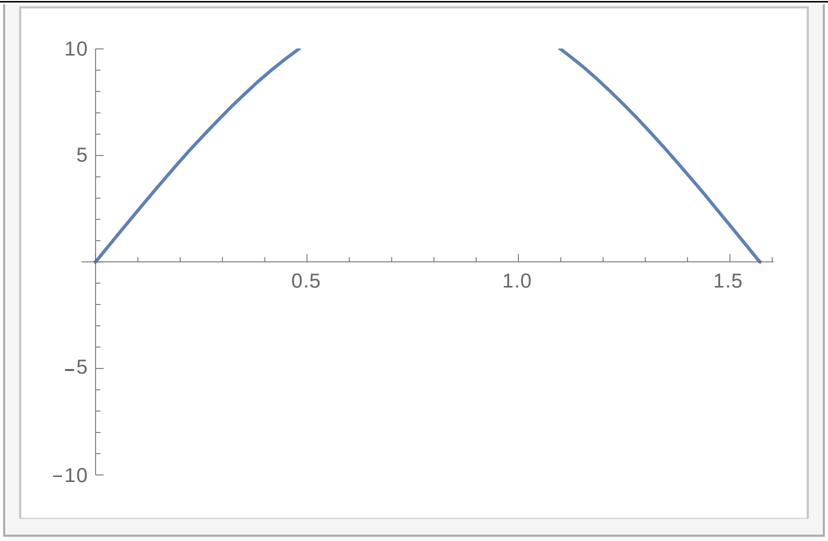
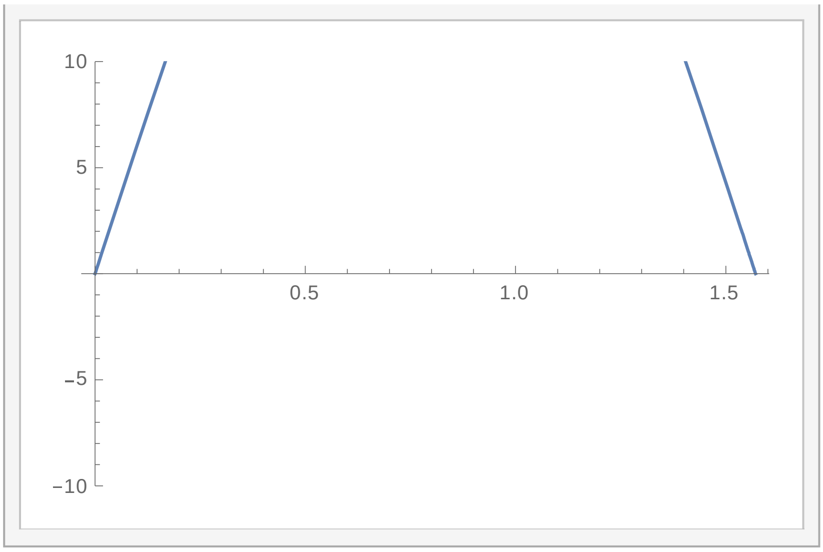
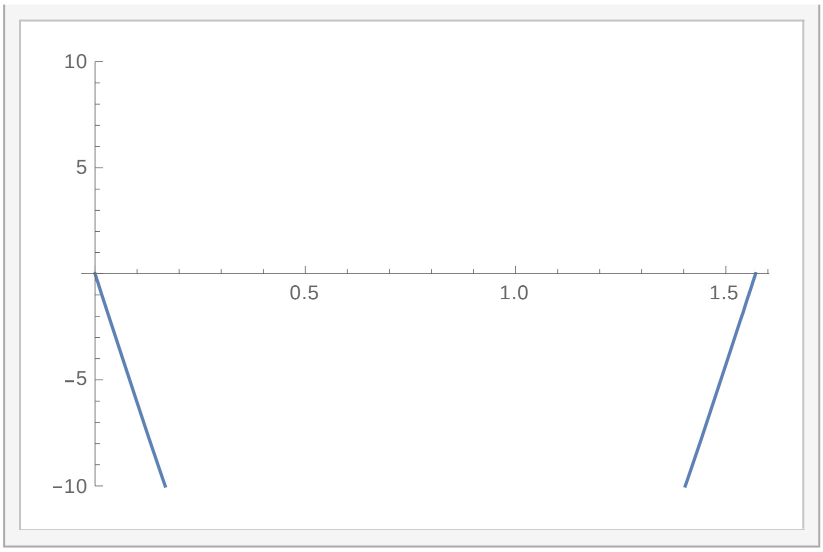
由 ω 在解中的形式可知，当$\omega=\frac{n\pi a}{l}$，$n=1,2,3\ldots$时，求和符号内分式分母为零，函数值趋于无穷。

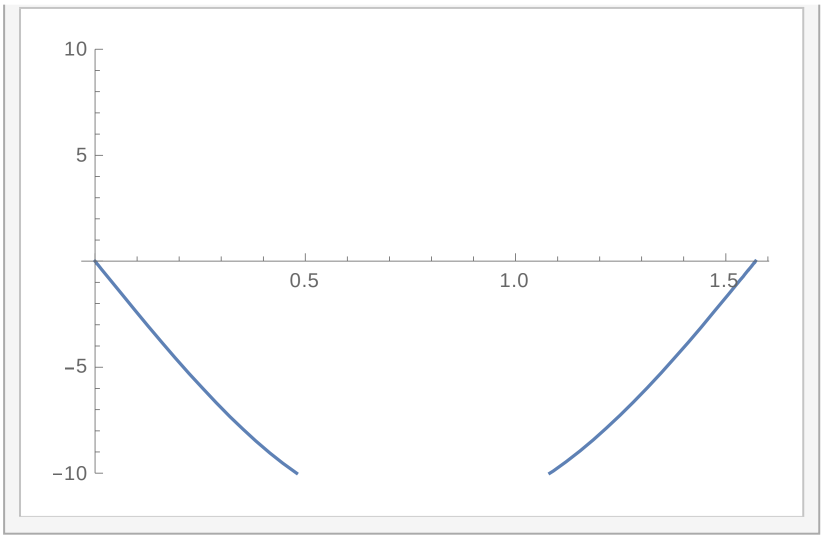
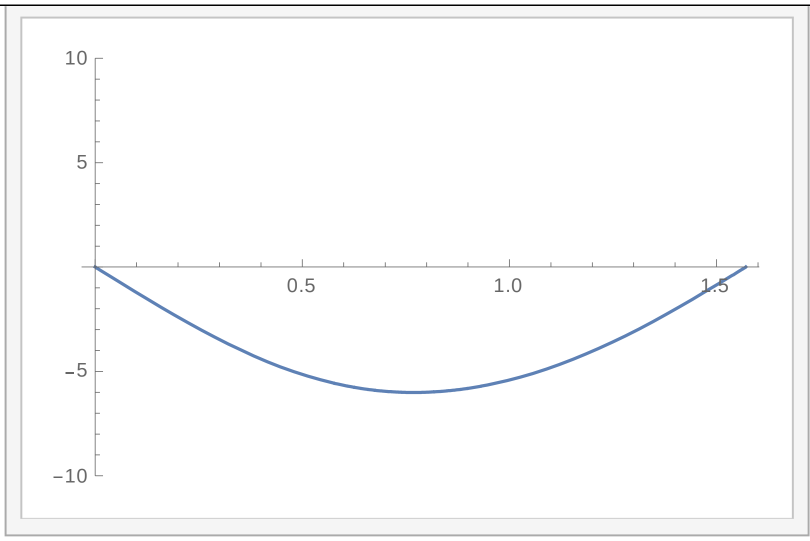
2.2 利用数学分析软件 Mathematica 绘制图像

为方便起见，令$a=1$，$l=\frac{\pi}{2}$，则$\frac{n\pi a}{l}=2n$，$n=1,2,3\ldots$，当$t=2.5$时，观察 ω=2 附近不同ω对函数图像的影响：

ω	函数图像

1	10 5 -5 -10 0.5 1.0 1.5
1.5	10 5 -5 -10 0.5 1.0 1.5
1.95	10 5 -5 -10 0.5 1.0 1.5

1.975	10 5 0.5 1.0 1.5 −5 −10
1.99	10 5 0.5 1.0 1.5 −5 −10
2.01	10 5 0.5 1.0 1.5 −5 −10

2.025	
2.05	

从图像中可以看出，当 ω 从 1 变化到 2 时，函数值逐渐变大，在奇点处趋向无穷，而奇点两端函数值相反，这与w(x,t)的解的形式相符，当$\omega=\frac{n\pi a}{l}$时，分母为零，故函数值为无穷。

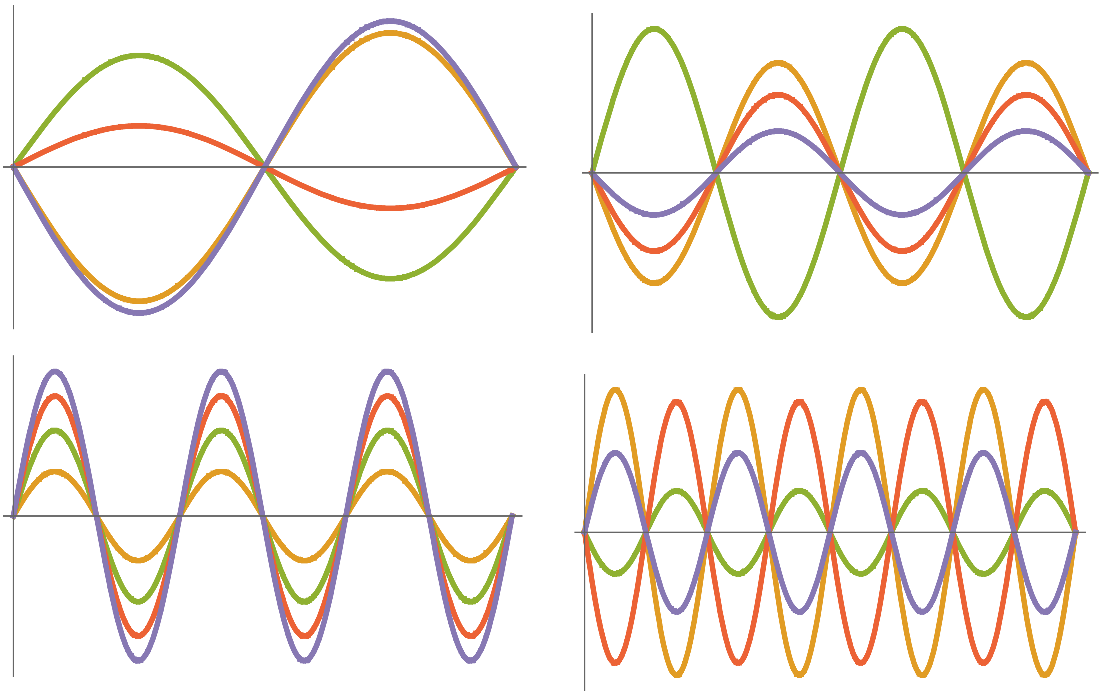
特别的，当$\omega=\frac{n\pi a}{l}$中的 n 变化时，函数图像周期随之变化，但在这里不做讨论。

从总和中提取四项：

$$\frac{2\sqrt{a^2}l\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{a^2}\pi t}{l}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi x}{l}\right]}{a^2\pi^2-l^2\omega^2}+\frac{2\sqrt{a^2}l\mathrm{Sin}\left[\frac{2\sqrt{a^2}\pi t}{l}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi x}{l}\right]}{4a^2\pi^2-l^2\omega^2}$$

$$-\frac{2\sqrt{a^2}l\mathrm{Sin}[\frac{3\sqrt{a^2}\pi t}{l}]\mathrm{Sin}[\frac{3\pi x}{l}]}{9a^2\pi^2-l^2\omega^2}+\frac{2\sqrt{a^2}l\mathrm{Sin}[\frac{4\sqrt{a^2}\pi t}{l}]\mathrm{Sin}[\frac{4\pi x}{l}]}{16a^2\pi^2-l^2\omega^2}$$

分别绘图：



可知总和中的每个项代表一个驻波。

2.3 物理意义分析

在机械振动的系统里，往往系统的固有频率ω_0是固定的，驱动力的频率 ω 可以调节，在这里驱动力 ω 就是边界条件$\sin\omega t$中的 ω，固有频率ω_0即为$\frac{n\pi a}{l}$，所以当 ω 趋向ω_0时，驱动力的频率与固有频率相近，系统振幅显著增大，反映在函数图像上就是函数值增大。

结论：

本文分析了一端固定一端受迫振动的有界弦的定解问题的解的函数图像在特殊奇点附近的变化及其代表的物理意义，利用数学工具 Mathematica 求解定解问题并通过绘制解的函数图像直观的展示了解的物理性质——由若干驻波叠加而成，与奇点处的函数值变化——趋向无穷。再结合相关的物理知识与函数形式分析知 ω 的物理意义为驱动力的频率，而奇点则代表弦的固有频率与驱动力的频率相等，代表发生共振现象，从而奇点处函数值趋向无穷。

参考文献：

[1] 韩颖达.基于达朗贝尔公式对一端固定一端受迫振动的有界弦问题的求解.大学物理，2017

[2] 严镇军.数学物理方法.中国科学技术大学出版社，2017