Jornada primera

En torno a la coherencia de las partes en los cuerpos sólidos

Interlocutores:
SALVIATI, SAGREDO, SIMPLICIO

SALVIATI. Extenso campo de investigación ofrece a los entendimientos estudiosos la constante actividad de vuestro famoso arsenal, venecianos, y muy particularmente en lo que a la mecánica se refiere; puesto que aquí se halla, entregado constantemente a la construcción de toda clase de artefactos y de máquinas, un gran número de artesanos, entre los cuales forzosamente ha de haber algunos muy peritos y con gran habilidad en la exposición, no sólo a causa de las observaciones realizadas por sus antecesores, sino también en virtud de las que ellos mismos van continuamente haciendo.

SAGREDO. Estás en lo cierto. Y yo, que soy curioso por naturaleza, visito con frecuencia estos lugares, por mero pasatiempo, y para observar la labor de estos a quienes nosotros, por la superioridad que tienen sobre los demás artesanos, llamamos "principales" (*proti*). El trato con estas gentes me ha ayudado más de una vez en mis investigaciones sobre la razón de algunos hechos, no sólo maravillosos, sino también recónditos y aun increíbles. También es verdad que a veces me han dejado perplejo y sumido en la desesperanza de llegar a comprender, cómo se explica aquello, cuyas razones no alcanza mi entendimiento, pero cuya verdad atestiguan mis sentidos. Y aunque eso, que hace un instante nos dijo aquel buen viejo, es un dicho y una frase asaz vulgar, con todo yo la juzgaba completamente falsa, como muchas otras, que andan en boca de

los ignorantes, introducidas por ellos, según creo, para hacer ver que saben algo de cosas que no entienden.

SALVIATI. ¿Te refieres, sin duda, al aserto que él profirió, cuando averiguábamos por qué razón empleaban tan gran aparato de sostenes, andamios y otros reparos y refuerzos, alrededor de aquella gran nave que se debía botar; cosa que no sucedía con las naves de menor tamaño; y él respondió que todo eso se hacía, para evitar el peligro de que el buque se partiera (*direnare*) bajo el enorme peso de su vasta mole, peligro que no amenaza a los navíos pequeños?

SAGREDO. A eso me refiero, y principalmente a la última conclusión que él añadió, la que he considerado siempre como falso concepto del vulgo; en una palabra, que en éstas y otras máquinas semejantes, no se puede argumentar de las pequeñas a las grandes, porque muchos proyectos de máquinas tienen éxito en tamaño pequeño y no dan resultado en el grande. Sin embargo, si las razones de la mecánica tienen sus fundamentos en la geometría, en la que veo que el grandor y la pequeñez no hacen cambiar las leyes a que están sujetos los círculos, triángulos, cilindros, conos, y cualquier otra figura sólida; no alcanzo a comprender, por qué una máquina grande, cuando está fabricada en todas sus piezas conforme a las proporciones de otra menor, que es fuerte y resistente para el propósito a que ha sido destinada, no ha de poder también ella ser capaz de resistir los encontronazos adversos, que le sobrevengan.

SALVIATI. La opinión del vulgo es absolutamente falsa; y tan falsa que con la misma verdad puede aducirse su contraria, diciendo que muchas máquinas podrán construirse en gran tamaño, más perfectas que en pequeño; así, por ejemplo, un reloj que señale y dé las horas, con más precisión se hará de grande, que de pequeño tamaño. Mejor fundamento buscan para ese mismo aserto algunos más inteligentes, que ponen en la imperfección de la materia, sujeta siempre a muchas

alteraciones e imperfecciones, la causa de la disconformidad entre el resultado de tales máquinas grandes y lo que se deduce de las puras y abstractas leyes geométricas. Pero no sé si podré afirmar, sin incurrir en cierta nota de arrogancia, que ni aun el recurrir a las imperfecciones de la materia, capaces de contaminar las purísimas demostraciones matemáticas, es bastante para disculpar la inobediencia de las máquinas en concreto a las mismas en abstracto e ideales; además, yo diría que aun prescindiendo de todas las imperfecciones en la materia y suponiéndola perfectísima, inalterable y exenta de toda mutación accidental, el solo hecho de ser material, haría que la máquina mayor, fabricada de la misma materia y con las mismas proporciones que la menor, respondiera con plena exactitud a la menor en todo, menos en la solidez y resistencia contra las violentas acometidas; y cuanto más grande sea, tanto más débil será proporcionalmente. Y como supongo que la materia es inalterable, vale decir siempre la misma, no cabe duda que ella, como cualidad (*affezzione*) eterna y necesaria, puede dar origen a demostraciones, no menos que las demás escuetas y puras matemáticas.

Así pues, Sagredo, debes abandonar la opinión que tenías, y que coincide con la de muchos otros estudiosos de la mecánica, de que las máquinas y estructuras (*fabbriche*), compuestas de una misma materia, con estricta observancia de unas mismas proporciones entre sus respectivas partes, deben ser igualmente, o por mejor decir, proporcionalmente eficientes para resistir y para ceder a las acometidas y choques exteriores; porque se puede demostrar geométricamente que las mayores son siempre, en proporción, menos resistentes que las menores; de tal modo que, en último término, no sólo las máquinas y obras artificiales, sino también las cosas de la naturaleza tienen, necesariamente señalado, un límite que ni el arte ni la naturaleza pueden traspasar; digo traspasar, con tal que se observen siempre las mismas proporciones y la identidad de la materia.

SAGREDO. Ya siento trastornado mi cerebro y, cual nube repentinamente desgarrada por el relámpago, aturdirse mi men-

te de momentánea e insólita luz, que desde lejos me ilumina y de pronto mezcla y oscurece ideas extrañas y confusas. De cuanto has dicho, paréceme que debería deducirse la imposibilidad de hacer de una misma materia dos mecanismos semejantes, pero de diferente tamaño, y resistentes en igual proporción entre sí; y aun cuando esto se lograra, sería imposible encontrar dos solos listones de un mismo leño semejantes entre sí en solidez y resistencia, pero desiguales en tamaño.

SALVIATI. Así es, Sagredo, y para tener mayor seguridad de que ambos coincidimos en el mismo concepto, yo digo que si redujéramos un listón de madera a tal largura y grosor, que hincado, por ejemplo, contra un muro en ángulo recto, es decir paralelo a la horizontal, quedara reducido a la máxima largura con que puede sostenerse, a tal extremo que alargado un pelo más, se quebrase, abatido por su propio peso, éste sería único en el mundo; de modo que siendo, por ejemplo, su largura cien veces mayor que su grosor, ningún otro listón de la misma materia podrá hallarse que, siendo su largura cien veces mayor que su grosor, sea, como aquél, apto para sostenerse precisamente a sí mismo y nada más; todos los mayores se quebrarán y los más pequeños podrán sostener, además de su propio peso, algún otro. Y esto que yo digo de la propiedad de sostenerse a sí mismo, se puede entender también de todo otro experimento; y así, si un tablón (*corrente*)* pudiera soportar el peso de otros diez tablones iguales, una viga semejante a él no podrá, por el contrario, soportar el peso de diez vigas iguales.[1]

Pero se ha de notar, en obsequio tuyo y de Simplicio, que las conclusiones verdaderas, aunque a primera vista parezcan improbables, con sólo que se las explane un poco, deponen el ropaje que las ocultaba y desnudas y simples muestran alegremente sus secretos. ¡Quién no ve que un caballo, al caer de una

* Qué es lo que Galileo quiere significar con la palabra "corrente", puede verse en la Jornada III, *Del movimiento naturalmente acelerado*, Teorema II, Corolario L Salviati. *(N. del T.)*

altura de tres o cuatro codos (*braccia*)* se romperá los huesos, pero que un perro cayendo de la misma altura, y un gato desde otra de ocho o diez codos, no sufrirán mal ninguno; lo mismo que pasará con un grillo que caiga de una torre o una hormiga que se precipite de los cuernos de la luna! ¿No quedan ilesos los muchachos en una caída que costaría a los ancianos la fractura de las piernas o de la cabeza? Y lo mismo que los animales más pequeños son proporcionalmente más robustos y fuertes que los mayores, así también las plantas se sustentan mejor. Y creo que ya vosotros dos comprendéis que una encina de doscientos codos de altura no podría sostener sus ramas extendidas, a semejanza de una de mediano tamaño, y que la naturaleza no podría hacer un caballo grande por veinte caballos, ni un gigante diez veces más alto que un hombre, a no ser por milagro o alterando mucho las proporciones de los miembros y en particular de los huesos, engrosándolos desproporcionadamente sobre la simetría de los huesos comunes. De igual modo, el creer que, entre los mecanismos artificiales, sean igualmente factibles y conservables los muy grandes y los pequeños, es un error manifiesto. Y así, por ejemplo, pequeños pilares (*guglie*), columnitas y otras figuras sólidas, se podrán manejar, tumbar o erigir sin peligro de fractura, mientras que las muy grandes, por cualquier accidente adverso, se harán pedazos; y esto sólo en razón de su propio peso. Aquí es necesario que yo os cuente un caso digno de saberse, como son todos los

* Difícil es conocer la longitud exacta que Galileo asignaba al *braccio*. Esta medida tenía distintos valores en las diversas regiones de Italia, y aun dentro de cada región, según la materia que se medía.

Al implantarse en Italia el Sistema Métrico Decimal, tenía el "braccio", los siguientes valores, en metros: en Bolonia 0,640; en Florencia 0,584; en Génova 0,578; en Milán 0,595; en Módena 0,648; en Parma 0,542; para la agrimensura y 0,644 para las telas; en Reggio 0,530; en Venecia 0,683 para la lana y 0,639 para la seda.

Como se verá, oscilaba su longitud entre los 0,53 m en Reggio, y los 0,68 m en Venecia.

Teniendo en cuenta que en España había el *codo común*, de 0,418 m, el *codo mayor* o morisco, de 0,552 m. y el *codo real*, de 0,574 m: hemos resuelto traducir el vocablo "braccio" por "codo". *(N. del T.)*

acontecimientos inesperados, y principalmente cuando el partido tomado para obviar un inconveniente, se convierte después en causa principal del desastre. Había una gruesa columna de mármol, tendida y apoyada por sus dos extremos, sobre dos trozos de viga. Después de cierto tiempo ocurriósele a un artesano que, para tener mayor seguridad de que no se rompiera por la mitad, cediendo bajo su propio peso, estaría bien ponerle, además, en el medio un tercer soporte similar; pareció oportuno el consejo, pero el resultado demostró ser contraproducente, puesto que no habían pasado muchos meses y la columna estaba hendida y rota, justamente sobre el nuevo apoyo del medio.

SIMPLICIO. Accidente en verdad asombroso y por cierto inesperado (*praeter spem*), supuesto que se produjera por haberle añadido el nuevo sostén del medio.

SALVIATI. De ahí se derivó seguramente y, al conocer la razón del hecho, desaparece la sorpresa; porque, depositados en tierra plana los dos trozos de la columna, se vio que una de las vigas, sobre la cual se apoyaba uno de los extremos, se había podrido y hundido por la continua acción del tiempo, y al permanecer la del medio firme y fuerte, fue causa de que la mitad de la columna quedase en el aire, sin el apoyo de uno de los soportes; por esta causa su excesivo peso hizo que ocurriera, lo que no hubiera sucedido de hallarse apoyada solamente sobre los dos soportes primeros, porque al hundirse uno cualquiera de ellos, la columna le hubiera seguido. No cabe duda que este accidente no hubiera ocurrido en una pequeña columna, aun de la misma piedra y de una largura correspondiente a su espesor, con la misma proporción del grosor y la largura de la columna grande.

SAGREDO. Ya estoy plenamente convencido de la verdad del hecho, pero no alcanzo a comprender la razón de por qué no aumenta la solidez y la resistencia en la misma proporción en que aumenta el material; y mucho más me confunde el que,

por el contrario, veo que en otros casos la solidez y la resistencia a la fractura aumenta mucho más de lo que se acrece el engrosamiento de la materia; que si, por ejemplo, en un muro se fijan dos clavos, uno dos veces más grueso que el otro, aquél soportará no solamente doble peso más que éste, sino triple y aun cuádruple.

SALVIATI. Puedes decir óctuplo y no andarás lejos de la verdad, ni este hecho está contra aquél, aunque a primera vista aparezca tan diverso.

SAGREDO. Entonces, Salviati, explícame estas dificultades y aclárame estas dudas, si encuentras el modo, porque sospecho que este problema de la resistencia es un campo lleno de hermosas y útiles ideas, y, si te place que esto sea el tópico de nuestros razonamientos de hoy, a mí, y creo que también a Simplicio, nos será muy grato.

SALVIATI. No puedo negarme a complacerte, con tal que pueda recordar aquello que ya antes aprendí de nuestro Académico,* quien sobre esta materia había hecho muchas especulaciones, y todas, según es su costumbre, geométricamente demostradas; de tal modo que, no sin razón, podría ésta llamarse una nueva ciencia. Porque si bien algunas de sus conclusiones ya habían sido observadas antes por otros, y en primer lugar por Aristóteles, sin embargo no son éstas las más hermosas, ni han sido (y esto es lo que más importa) demostradas apodícticamente desde sus fundamentos primarios e indubitables. Y porque, como digo, quiero convencerte con demostraciones y no persuadirte con razonamientos verosímiles, dado que tengas aquellos conocimientos de las conclusiones mecánicas, por otros hasta aquí tratadas, que son necesarios para nuestro co-

* *Académico* es el mismo Galileo. Suele decirse que él mismo se llamaba así porque pertenecía a la academia "Cimento". No será difícil percatarse de que debajo de ese nombre se esconde la tendencia platónica de Galileo, en contra de la aristotélica que primaba en su tiempo. *(N. del T.)*

metido, nos conviene ante todo considerar qué sucede cuando fracturamos un trozo de madera o de otro sólido de firme cohesión. Porque éste es el hecho fundamental en que consiste el primero y simple principio que, como muy conocido, conviene suponer.

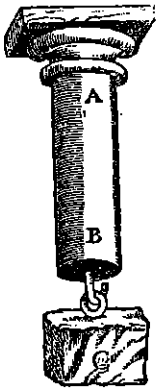

Fig. 1

Para su más clara explicación, figurémonos el cilindro o prisma A B, de madera o de otra materia sólida y coherente, afirmado en A por la parte superior y pendiendo verticalmente, al que en el otro extremo B, se le haya suspendido el peso C; es claro que cualquiera sea la tenacidad y coherencia que guarden entre sí las diversas partes de este sólido, con tal que no sea infinita, podrá ser superada por el solicitante peso C, cuya gravedad suponemos que pueda acrecentarse cuanto nos plazca, y ese sólido se romperá como una cuerda. Y así como en la cuerda sabemos que su resistencia deriva de la cantidad de hebras de cáñamo que la componen, así en la madera, corren a lo largo las fibras y filamentos que la hacen extraordinariamente más resistente a la fractura de lo que sería cualquier cuerda del mismo grosor. Pero en el cilindro de piedra o de metal, la coherencia (que parece todavía mayor) de sus partes depende de un gluten distinto de los filamentos o fibras; y sin embargo, sometidos a fuerte tensión también ellos se quiebran.

SIMPLICIO. Si esto sucede como tú dices, comprendo bien que las fibras de un leño, tan largas como el leño mismo, pueden hacerlo sólido y resistente contra la fuerza que se haga para romperlo; pero una cuerda compuesta de fibras de cáñamo, de sólo dos o tres codos de largo cada una, ¿cómo ha de poder hacerse de una largura de cien, permaneciendo igualmente resistente? Por otra parte, me gustaría oír también tu parecer acerca de la unión de las partes de los metales, de las piedras y de otras materias carentes de tales filamentos, la que, sin embargo, si yo no me engaño, es todavía más tenaz.

SALVIATI. Habrá que hacer una digresión a campos de estudio nuevos y no muy necesarios para nuestro intento, si es que nos proponemos dar solución a las dificultades que tú has propuesto.

SAGREDO. Pero, dado que nos reunimos por propia voluntad, sin estar obligados a ningún método rígido y conciso, si las digresiones pueden dar origen al conocimiento de nuevas verdades, ¿en qué nos perjudica el hacer digresiones ahora, para no perder conocimientos que nos brinda esta ocasión? Tanto más que quizá, abandonada, no se nos volverá a presentar. Además ¿quién sabe si no podemos así frecuentemente descubrir curiosidades más hermosas que las soluciones primeramente buscadas? Te ruego, por tanto, yo también, dar satisfacción a Simplicio y a mí, que no estoy menos curioso y ansioso que él por entender cuál es aquel gluten que tan tenazmente mantiene unidas las partes, de por sí separables, de los sólidos; conocimiento que, además, nos es necesario para entender la coherencia de las partes de los filamentos mismos de que están compuestos algunos sólidos.

SALVIATI. Estoy a vuestras órdenes, puesto que así os agrada. La primera dificultad consiste en saber, cómo pueden las fibras de una cuerda de cien codos de largo, guardar entre sí tan estrecha cohesión (a pesar de no tener cada una de ellas más de dos o tres codos) que se haya de requerir gran violencia para separarlas. Pero dime, Simplicio, ¿no podrías tú tener uno de los extremos de una sola fibra de cáñamo tan estrechamente entre tus dedos que, tirando yo del otro, antes de arrancarla de tu mano, la rompiese? Claro que sí. Por consiguiente, si las fibras del cáñamo estuvieran, no sólo en sus extremos, sino en toda su longitud, retenidas con gran fuerza por algo que las apretase ¿no es cosa manifiesta que el arrancarlas de quien las oprime, sería mucho más difícil que el romperlas? Mas en la cuerda, la misma acción de retorcerla hace que las fibras se opriman recíprocamente de modo que, estirando después con gran fuerza la cuerda, sus fibras se rompen antes de separarse, como queda de mani-

fiesto al ver que, en el lugar de la rotura, las fibras ni siquiera tienen un codo de largo, como deberían tener si la fractura de la cuerda se produjese, no por la rotura de las fibras, sino por su sola y mutua separación, escurriéndose.

SAGREDO. Añádase, en confirmación de esto, que a veces la cuerda se rompe, no por ser estirada longitudinalmente, sino sólo por la excesiva torsión. Éste es para mí un argumento concluyente, porque las hebras están entre sí de tal manera comprimidas, que las compresoras no permiten a las comprimidas escurrirse aquel mínimo que les sería necesario, para alargar la espira, a fin de poder circundar la cuerda, que en la torsión se acorta y en consecuencia engruesa un poco.

SALVIATI. Dices muy bien; pero mira cómo unas verdades traen en pos a las otras. Ese hilo que, apretado entre los dedos no sigue al que, tirando de él con alguna fuerza, intentara sacarlo de entre ellos, resiste porque está retenido por una doble presión; pues hay que convenir en que no oprime menos el dedo superior contra el inferior que éste contra aquél. Y no cabe duda que, si de estas dos presiones, se pudiese retener una sola, subsistiría la mitad de aquella resistencia que dependía de las dos juntas; pero, como no se puede, con alzar, v. g., el dedo superior, levantar su presión sin remover también la otra, conviene, con un nuevo artificio, conservar una de ellas y encontrar el modo de que el mismo hilo se oprima a sí mismo contra el dedo u otro cuerpo sólido, sobre el que se apoye, y hacer así que la misma fuerza que tira de él para separarlo, lo apriete tanto más cuanto más enérgicamente tire de él. Esto se conseguirá con sólo envolver en forma de espiral el hilo mismo en torno al sólido. Para entender mejor esto recurriremos a una figura. Sean los cilindros A B y C D, y entre ellos tendido el hilo E F, que para mayor claridad supondremos ser un cordel. No hay duda que oprimiendo fuertemente uno contra otro los dos cilindros, el cordel F-E, de cuyo extremo F se tira, resistirá no pequeña violencia antes de escurrirse por entre los dos sólidos que lo oprimen; pero si separamos a uno de ellos,

el cordel, aunque continúe tocando al otro, no por ello dejará de escurrirse libremente, sin que tal contacto pueda retenerlo. Pero si reteniéndolo, aunque sea débilmente, sujeto en la extremidad superior del cilindro A, lo enrollamos en torno de él en forma de espiral A F L O T R, y tiramos desde el extremo R, es claro que comenzará a oprimir al cilindro; y si las espirales y vueltas fueran muchas, al tirar fuertemente se apretará cada vez más la cuerda sobre el cilindro; y haciéndose, con la multiplicación de las espirales, más extenso el contacto y en consecuencia menos superable, se hará cada vez más difícil el escurrirse el cordel y el ceder a la fuerza solicitante.

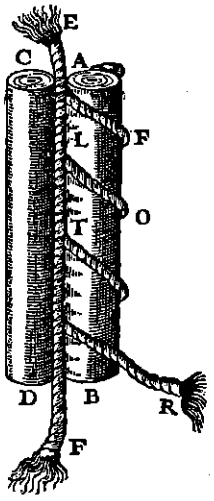

Fig. 2

¿Y quién no ve que ésta es precisamente la resistencia de las fibras que con mil y mil espirales semejantes entretejen la gruesa cuerda? En realidad la presión de semejantes torsiones liga tan tenazmente, que de unos cuantos juncos, que por no ser muy largos, tienen que ser también pocas las vueltas de espira con que se entrelazan entre sí, se componen solidísimas cuerdas, que me parece que se llaman *suste*.

SAGREDO. Tus palabras han hecho cesar en mi mente lo maravilloso de dos hechos cuyas razones yo no comprendía bien. Uno era el ver cómo dos o a lo más tres vueltas de cuerda alrededor del torno (*fuso*) del árgano podían no solamente retenerla e impedir que escurriéndose cediese, solicitada por la inmensa fuerza del peso que ella sostiene, sino, lo que es todavía más interesante, hacer que al girar el árgano su mismo torno, con el sólo contacto de la cuerda que lo ciñe, pudiese, con las sucesivas vueltas, arrastrar y levantar enormes piedras, mientras los brazos de un débil muchacho van reteniendo y recogiendo el otro extremo de la misma cuerda. El otro se refiere a un simple pero ingenioso trebejo ideado por un joven parien-

te mío, para poder, con una cuerda, descolgarse desde una ventana sin lacerarse cruentamente las palmas de las manos, como poco tiempo antes le había acaecido con grave daño. Haré, para que mejor se entienda, un pequeño dibujo. Alrededor de un cilindro de madera A B, del grosor de un bastón y casi de un palmo de largo, excavó una estría en forma de espiral de cerca de una vuelta y media y de una anchura capaz de la cuerda que quería adaptarle. Hizo entrar ésta por la espira del extremo A y salir por el extremo B, envolviendo después el cilindro y la cuerda en un tubo de madera o de lata pero hendido a lo largo y encajado de tal manera que pudiese dilatarse y contraerse fácilmente. Y abarcando luego y apretando con ambas manos ese tubo, después de atar la retenida a un firme sostén de arriba, se suspendió con los brazos; y resultó tal la compresión de la cuerda entre el tubo envolvente y el cilindro, que a capricho, apretando fuertemente las manos, podía sostenerse sin deslizarse, y aflojándolas un poco se deslizaba lentamente a su gusto.

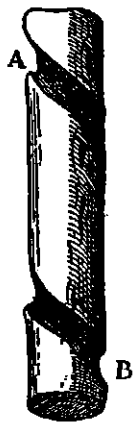

Fig. 3

SALVIATI. Ingeniosa la estratagema; y para una entera explicación de su naturaleza, me parece tan envuelta en sombras, que habría que aducir otras consideraciones. Pero yo no quiero por ahora hacer más digresiones sobre este particular, máxime queriendo vosotros oír mi parecer sobre la resistencia que a la fractura ofrecen los demás cuerpos, cuya contextura no se compone de filamentos, como la de las cuerdas y la de la mayor parte de las maderas, sino que la coherencia de sus partes parece consistir en otras causas, que, a mi juicio, se reducen a dos temas; uno de ellos es la tan pregonada repugnancia que la naturaleza tiene a admitir el vacío; por el otro, es necesario (no siendo suficiente el del vacío) introducir algún gluten, sustancia viscosa o cola que una tenazmente las partículas de que esos cuerpos se componen. Hablaré primero del vacío, demostrando con claros experimentos cuál y cuán grande es su poder.

Sean dos placas de mármol, metal o vidrio extraordinariamente planas, pulidas y bruñidas. Si colocamos a una de plano sobre la otra, con toda facilidad conseguiremos hacer resbalar a la de encima, siempre que nos plazca (argumento convincente de que ningún gluten las une). Pero intentemos separarlas, manteniéndolas equidistantes, y encontraremos tal repugnancia a la separación, que la superior levantará y llevará tras sí a la otra, por gruesa y pesada que sea, sosteniéndola levantada definitivamente. Esto nos prueba de modo evidente el horror de la naturaleza a tener que admitir, aun por brevísimo tiempo, el espacio vacío que entre las dos láminas quedaría antes que la afluencia del aire ambiente lo hubiese ocupado, llenándolo.

También se puede observar que si las dos placas no han sido completamente pulidas, y por ello su contacto no es del todo perfecto, al intentar separarlas lentamente, no hallamos más resistencia que la gravedad; sin embargo, si levantamos repentinamente la superior, veremos que la inferior se levanta y cae de súbito, siguiendo a la de arriba sólo durante el brevísimo instante de tiempo requerido para la expansión de la pequeña cantidad de aire interpuesto entre las dos láminas, que no adaptaban bien, y para la penetración del aire ambiente.

No cabe duda de que esta misma resistencia, que tan sensiblemente percibimos entre las dos placas, ha de existir también de modo parecido, y por lo menos como causa concomitante de la coherencia, entre las partes de los sólidos.

SAGREDO. Permíteme que te interrumpa para exponer una reflexión particular, que se me ha ocurrido en este momento. Es la siguiente: el ver cómo la lámina inferior sigue a la superior y se levanta durante su movimiento rápido, nos da la seguridad de que, contra las afirmaciones de muchos filósofos, incluso probablemente el mismo Aristóteles, el movimiento en el vacío no es instantáneo. Si lo fuera, las dos planchas se separarían sin ninguna repugnancia, puesto que el mismo instante de tiempo bastaría para su separación y para la afluencia del aire ambiente a llenar el vacío que entre las dos quedara. El hecho, pues, de que la plancha inferior siga a la superior, nos lleva a concluir

que el movimiento en el vacío no es instantáneo, pero al mismo tiempo, nos obliga a admitir que entre esas planchas existe algún vacío, al menos durante brevísimo tiempo, es decir, durante todo el que transcurre en el movimiento del ambiente, mientras afluye a llenar el vacío; puesto que si allí no quedase vacío, no habría necesidad ni de afluencia ni de movimiento del ambiente. Será, pues, necesario admitir que a veces se produce el vacío, aunque sea por violencia o contra las leyes de la naturaleza (bien que, en mi opinión, nada existe contra la naturaleza, salvo lo imposible, lo cual por esa razón nunca acaece).

Se me ocurre aquí otra dificultad; y es que, si bien el experimento me convence de la verdad de la conclusión, mi entendimiento no queda del todo satisfecho con la causa a la que tal efecto se atribuye. Porque, como el efecto de la separación de las dos planchas es anterior al vacío, que se producirá como consecuencia de esa separación; y como me parece que la causa debe preceder al efecto, si no en el tiempo, por lo menos en la naturaleza, y que de un efecto positivo, positiva debe ser también la causa; no puedo comprender cómo de la adherencia de dos planchas y de su repugnancia a separarse, efectos que ya están en acto, se pueda atribuir la causa al vacío, que todavía no existe, sino que debería seguirse de ellos. Y de acuerdo a la sentencia certísima del filósofo, las cosas que no existen no pueden producir efectos.

SIMPLICIO. Pero ya que concedes este axioma a Aristóteles, no podrás negarle otro tan hermoso y verdadero como éste: y es que la naturaleza nunca intenta realizar aquello cuya existencia repugna. Y de esta sentencia me parece que depende la solución de tu duda. Desde el momento en que un espacio vacío repugna en sí mismo, la naturaleza veda hacer aquello de lo cual el vacío se seguirá como necesaria consecuencia: y tal es la separación de las dos planchas.

SAGREDO. Ahora, admitida como satisfactoria la solución que a mi dificultad ha dado Simplicio,[2] paréceme, siguiendo el hilo de mi raciocinio, que esta misma repugnancia al vacío debería ser suficiente para mantener unidas las partes de un sólido de piedra o de metal, o de cualquier otro cuerpo de mayor cohesión y resistencia a la fractura. Porque si, según tengo entendido, de un solo efecto una sola es la causa, o aunque sean muchas, se reducen a una sola; ¿por qué el vacío, que sin duda existe, no basta para explicar todas las resistencias?

SALVIATI. Por ahora no quiero abordar el debate de si el vacío, sin ningún otro sostén, es bastante de por sí solo para mantener unidas las partes separables de los cuerpos sólidos; pero yo os aseguro que el vacío que obra como causa suficiente en el caso de las dos planchas, no basta por sí solo para el firme ligamiento de las partes de un sólido cilindro de mármol o de metal, las que, sometidas a fuerzas que actúen sobre ellas violentamente, terminan por separarse y dividirse. Y si yo hallara un modo de distinguir esta ya conocida resistencia dependiente del vacío, sin ninguna otra sujeción, que es bastante por sí sola como ligamiento, y lograra haceros ver que ella sola no es suficiente para producir tal efecto, ¿no me concederíais que es necesario introducir alguna otra? Ayúdalo, Simplicio, ya que él está dudando sobre lo que debe responder.

SIMPLICIO. Siendo la conclusión tan lógica y clara, no es posible que la hesitación de Sagredo verse sobre ella.

SAGREDO. Lo has adivinado, Simplicio. Estaba pensando que, si no basta cada año ese millón en oro que viene de España, para pagar al ejército, será necesario allegar otros bastimentos, fuera del dinero, para las soldadas de los hombres de tropa. Pero sigue, Salviati y, suponiendo que yo admita tu conclusión, muéstranos el modo de separar, de las otras, la acción del vacío, y midiéndola, haznos ver que ella por sí sola es insuficiente para producir el efecto de que se habla.

SALVIATI. Tu familiar (*demonio*) te asiste.* Diré el modo de

* El vocablo "demonio" parece usado en el sentido del δατμων griego. Lo hemos traducido por "familiar" que es la palabra usada por nuestros clásicos. *(N. del T.)*

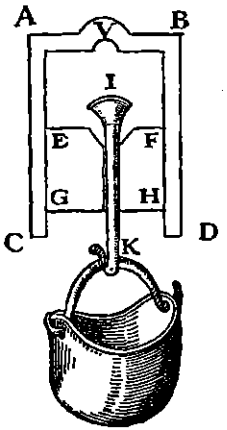

Fig. 4

apartar de los otros el poder del vacío, después, la manera de medirlo. Para aislarlo, tomaremos una materia continua, cuyas partes estén exentas de toda resistencia a la separación, menos de la del vacío, tal como es el agua, según lo ha demostrado extensamente en alguna de sus obras nuestro Académico. Si se pudiera conseguir un cilindro de agua, y al estirarlo, se sintiese que sus partes se resisten a la separación, esta resistencia no podría atribuirse a ninguna causa más que al vacío. Para realizar este experimento he ideado un artefacto cuyo diseño me ayudará a explicarlo mejor que las palabras. Supongamos que C A B D es el perfil de un cilindro de metal o mejor de vidrio, vacío y perfectamente torneado por adentro, en cuya concavidad se introduce con justísima adaptación un cilindro de madera, cuyo perfil señalo con E G H F, capaz de moverse hacia arriba y hacia abajo. Éste debe tener, en el centro un orificio por donde pase una varilla de hierro, encorvada en el extremo K, y que vaya engrosándose en el extremo I en forma de cono. La parte superior del foramen practicado en la madera, debe estar excavado en forma cónica, adaptado exactamente para recibir la extremidad cónica I de la varilla I K, siempre que se tire hacia abajo por la extremidad K. Insertemos la madera o tapón, si lo queremos llamar así, E H en el cilindro hueco A D, de modo que no llegue hasta el extremo superior de ese cilindro, sino que quede dos o tres dedos más abajo; este espacio debe llenarse con agua, la que se introducirá, poniendo el tubo con la abertura C D hacia arriba y apretando sobre el tapón E H, al tiempo que se mantiene el cono I un poco separado de su respectiva concavidad en la madera, para dar salida al aire, que al apretar el tapón se escapará por el orificio de la madera; por ello se habrá tenido la precaución de hacer ese horado un poco más amplio de lo que requiere el grosor de la varilla de hierro I K.

Una vez extraído el aire, se tira de la varilla de hierro, de modo que su extremo en forma de cono I encaje perfectamente en la excavación de la madera y tape el orificio; luego se invierte el vaso dejándolo con la boca hacia abajo. Del gancho K se suspende un recipiente donde se pueda poner arena u otra materia pesada, y se cargará hasta que la superficie superior E F del tapón se separe de la inferior del agua, con la cual estaba unida solamente en virtud de la repugnancia al vacío. Pesando ahora el tapón con el hierro y con el recipiente y su contenido, obtendremos la cantidad de fuerza del vacío.

Tomemos ahora un cilindro de mármol o de vidrio de igual grosor que el de agua y añadámosle un peso tal, que juntamente con el peso propio del mármol o del vidrio, sea igual exactamente a la suma de todos los pesos antes citados.

Si la rotura sobreviene, podremos afirmar sin ninguna duda, que las partes del mármol o del vidrio están unidas solamente en virtud del vacío; pero si no basta, y para romperlo hay que añadirle un peso cuatro veces mayor, habrá que admitir que la resistencia al vacío es de las cinco partes una, y que la otra es cuádruple de la del vacío.

SIMPLICIO. No puede negarse que es ingeniosa la invención, pero me parece sujeta a muchas dificultades, que me la hacen dudosa. Porque ¿quién nos asegura que no puede entrar el aire por entre el vidrio y la madera, aunque se envuelva bien con estopa u otra materia muelle (*cedente*)? Además, para que el cono I cerrase bien el orificio, tal vez no fuera suficiente ungirlo con cera o trementina. Por otra parte, ¿por qué no podrían las partes del agua expandirse y rarefacerse? ¿Por qué no ha de poder penetrar aire o exhalaciones u otras sustancias más sutiles, por los poros de la madera o del mismo vidrio?

SALVIATI. Con gran destreza nos ha propuesto Simplicio sus dificultades, y en parte nos ha sugerido el remedio en cuanto a la penetración del aire por la madera o entre la madera y el vidrio. Pero yo, además de esto, quiero dejar puntualizado, que podremos al mismo tiempo hacernos cargo, con la adqui-

sición de nuevos conocimientos, de si estas dificultades tienen razón de ser o no. Porque si el agua fuese, aunque sólo por violencia, expansible por naturaleza, como sucede con el aire, el tapón descendería; y si practicamos en la parte superior del vidrio un menisco (*ombelico*) prominente, como el señalado con V, en el caso de que penetrara aire o cualquier otra materia tenue y gaseosa por los poros del vidrio o de la madera, lo veríamos acumularse (dejándole paso el agua) en la prominencia V. Pero si nada de eso acontece, podemos tener la certeza de que nuestro experimento ha sido ensayado con las debidas cautelas, y sabremos que el agua no es expansible, ni el vidrio es permeable a ninguna materia, por sutil que ella sea.

SAGREDO. Gracias a estos razonamientos hallo la causa de un hecho, que desde hace largo tiempo me tenía maravillado y confuso.

Vi en cierta ocasión una cisterna, en la cual se había instalado una bomba, con el convencimiento, en realidad equivocado, de que así se podría sacar con menos trabajo una cantidad de agua igual o mayor que con los cangilones ordinarios; y tiene esta bomba su pistón y ánima tan alto, que el agua se hace salir por aspiración y no por impulsión, como sucede con las bombas que tienen el cilindro abajo. Ésta, cuando en la cisterna hay agua hasta una determinada altura, la saca en abundancia; pero, cuando el agua desciende hasta un nivel determinado, la bomba no funciona más. Yo creí, la primera vez que observé este fenómeno, que el émbolo estaría deteriorado; y cuando busqué al mecánico para que lo compusiera, me dijo que no estaba el defecto en la bomba, sino en el agua, que por haber descendido en demasía imposibilitaba su ascenso a tanta altura; y añadió que ni con bombas ni con ninguna otra máquina, que eleve el agua por aspiración, es posible hacerla subir un cabello más de dieciocho codos; y éste es el límite máximo de su altura, tanto si las bombas son anchas, como si son estrechas.

He sido tan poco sagaz que, sabiendo que una cuerda o un bastón de madera o una barra de hierro se pueden alargar tanto y tanto que por fin se rompen por su propio peso, teniéndolas fijas en alto, no me he hecho cargo de que lo mismo, con mayor facilidad, tendrá que suceder con una cuerda o barra de agua. Y ¿qué otra cosa es lo que se aspira con la bomba sino un cilindro de agua, que teniendo su sujeción en la parte superior, alargado más y más, finalmente llega a un término más allá del cual, vencido por su propio peso, que ha llegado a ser extraordinario, se rompe cual si fuera una cuerda?

SALVIATI. Tal es ciertamente la realidad de las cosas. Y como esta altura de dieciocho codos es el límite máximo de la altura a que puede sostenerse cualquier cantidad de agua, tanto si las bombas son anchas, como si son estrechas o estrechísimas cual una paja; siempre que pesemos el agua contenida en dieciocho codos de tubo, ya ancho ya estrecho, obtendremos el valor de la resistencia del vacío en los cilindros de cualquier materia sólida, iguales en grosor al calibre de los tubos propuestos. Y ya que hemos venido a parar a esto, intentemos demostrar que de todos los metales, piedras, maderas, vidrios, etc., se puede fácilmente hallar hasta qué largura podrán alargarse cilindros, fibras o barras, cualquiera sea su grosor, más allá de la cual no podrán sostenerse, sino que se quebrarán, cediendo a su propio peso.

Tomemos, por ejemplo, un hilo de cobre de cualquier grosor y longitud, y, sujeto en alto por uno de sus extremos, vayamos añadiéndole en el otro más y más peso hasta que finalmente termine por romperse. Sea el peso máximo que haya podido sostener, por ejemplo, cincuenta libras. Es evidente que cincuenta libras de cobre, además del peso propio del hilo, que supondremos de un octavo de onza, si fueren alargadas en forma de hilo de ese mismo grosor, darían la largura máxima del hilo que pudiera sostenerse a sí mismo. Mídase luego la largura del hilo que se rompió, y supongamos que era de un codo; como pesó un octavo de onza y sostuvo, además de sostenerse a sí mismo, a cincuenta libras, que son cuatro mil ochocientos octavos de onza, diremos que todos los hilos de cobre, sea cual fuere su grosor, pueden sostenerse hasta la largura de cua-

tro mil ochocientos un codos, y nada más. Y así, si una varilla de cobre puede sostenerse hasta la largura de cuatro mil ochocientos un codos, la resistencia que ella encuentra dependiente del vacío, comparada con la restante, es tanta cuanto supone el peso de una varilla de agua de dieciocho codos de largo y de un grosor igual al que tenía la de cobre. Y hallándonos con que el cobre es nueve veces más pesado que el agua, sabremos que en cualquier varilla de cobre la resistencia a la fractura, dependiente del vacío, es igual al peso de dos codos de la misma varilla.[3]

Con un razonamiento y método semejantes se podrían hallar las longitudes máximas con que puedan sostenerse los hilos o varillas de todas las materias sólidas, y al mismo tiempo qué parte desempeña el vacío en esa resistencia.

SAGREDO. Sólo falta que nos digas en qué consiste el resto de la resistencia, es decir cuál es el gluten o visco que retiene unidas las partes de un sólido, fuera del que deriva del vacío. Porque yo no puedo imaginarme un gluten, que no se abrase y consuma durante dos o tres o cuatro meses, ni aun siquiera durante diez o cien, dentro de un horno encandecido, en el cual el oro o el vidrio, después de haber estado licuefactos durante mucho tiempo, una vez afuera, al enfriarse, sus partes vuelven a unirse y ligarse como antes. Además, la misma dificultad que tengo respecto a la ligación de las partes del vidrio, la tendría respecto a las partes del gluten, es decir, sobre qué es aquello que las tiene tan sólidamente unidas.

SALVIATI. Hace poco te dije que te auxiliaba tu familiar (*demonio*). Yo me hallo ahora en la misma necesidad. Y, además, yo, para quien es de todo punto palpable que el horror al vacío es sin duda lo que no permite, sino con gran esfuerzo, la separación de las dos planchas y principalmente de los dos grandes trozos de la columna de mármol o de bronce, no alcanzo a comprender por qué no haya de tener lugar y ser de igual modo causa de la coherencia de las partes más pequeñas, y aun de las mínimas en última instancia, de las mismas materias. Y, puesto que de un efecto una sola es la causa verdadera y potísima, mientras yo no encuentre otro gluten; ¿por qué no voy a tantear si el del vacío, que existe sin duda, puede ser suficiente?

SIMPLICIO. Si desde luego has demostrado que la resistencia del gran vacío, en la separación de las dos grandes partes de un sólido, es insignificante en comparación de la que tiene unidas las partículas más diminutas; ¿cómo no quieres tener por absolutamente cierto que ésta es del todo diversa de aquélla?

SALVIATI. A esto ya respondió Sagredo, diciendo que se pagaba a cada uno de los soldados particulares con dineros recaudados por imposiciones generales en sueldos y en ochavos, si un millón en oro no bastaba para pagar a todo el ejército.

Y ¿quién sabe si algunos otros diminutos vacíos no actúan entre las diminutas partículas, de manera que para todo sea de la misma moneda aquello con que se mantienen unidas todas las partes? Os voy a decir algo que me ha pasado por la imaginación, y os lo ofrezco, no como verdad inconclusa, sino como una cierta idea, todavía inmatura y sujeta a más altas consideraciones: quedaos con lo que os guste y juzgad el resto como mejor os plazca. Cuando considero alguna vez, cómo al ir reptando el fuego entre las minúsculas partículas de éste o de aquel metal, que tan sólidamente están unidas, termina por separarlas y desunirlas, y cómo después, al extinguirse el fuego, tornan a unirse con la misma tenacidad de antes, sin que la cantidad de oro disminuya en nada, y en muy poco la de los demás metales, aunque hayan estado sometidos a la acción del fuego durante mucho tiempo; pienso que esto podría suceder, porque las sutilísimas partículas del fuego, penetrando por los diminutos poros del metal (entre los cuales, por su exigüidad, no podrían pasar los mínimos del aire ni de otros muchos fluidos), al llenar los pequeñísimos vacíos entre ellas existentes, librarían las más diminutas partículas de aquél, de la fuerza con que los mismos vacíos atraen a las unas hacia las otras, impidiendo su separación. Y así, al poder moverse libre-

mente, su masa se haría fluida, permaneciendo en ese estado, mientras los mínimos del fuego (*ignicoli*) subsistieran entre ellas; pero al apagarse después aquéllos, y dejar los prístinos vacíos, tornaría su original atracción, y en consecuencia la ligación de las partes.

Y a la pregunta de Simplicio, paréceme que se puede responder, que si bien tales vacíos serían diminutos, y en consecuencia, por separado podrían ser fácilmente vencidos, sin embargo su innumerable multitud multiplica las resistencias innumerablemente (si así puede decirse). Cuál y cuánta sea la fuerza que resulta de un número inmenso de insignificantes fuerzas (*momenti*) unidas en conjunto, quedaría de manifiesto con el evidentísimo argumento de ver nosotros que un peso de millones de libras, sostenido por grosísimas maromas, cede al fin y se deja vencer y levantar por el asalto de innumerables átomos de agua, los cuales, o empujados por el austro o porque difluidos en finísima neblina, se van moviendo por el aire, llegan a recalar entre las fibras de las tensas maromas, sin que la inmensa fuerza del peso pendiente pueda impedirles la entrada; de modo que, penetrando por los angostos intersticios, engruesan las cuerdas y en consecuencia las acortan, por lo cual la pesadísima mole es por fuerza elevada.

SAGREDO. No cabe duda de que mientras una resistencia no sea infinita, puede ser sobrepujada por una multitud de diminutas fuerzas, de tal manera que hasta un número de hormigas podría echar por tierra a una nave cargada de granos. Porque los sentidos nos demuestran a diario que una hormiga transporta con desenvoltura un granito, y es claro que en la nave no hay infinitos granos, sino comprendidos dentro de un cierto número, mayor que el cual se podrá tomar otro que lo sobrepase cuatro o seis veces; y si a éste le ponemos uno igual de hormigas en actividad, terminarán por conducir a tierra el grano y la nave misma. Es también cierto que se necesitará que el número sea grande, como lo es también, a mi parecer, el de los vacíos que tienen unidos los mínimos (*minimi*) del metal.[4]

SALVIATI. Pero aun cuando se necesitase que fueran infinitas, ¿tú lo tendrías por imposible, acaso?

SAGREDO. No, si el metal fuese una mole infinita; de otro modo...

SALVIATI. ¿De otro modo, qué? Ahora, ya que de paradojas se trata, veamos si de algún modo se puede demostrar que, en una extensión continua y finita, no repugna que se puedan hallar infinitos vacíos. Y al mismo tiempo se verá, si no otra cosa, por lo menos apuntada una solución del más maravilloso problema que el mismo Aristóteles puso entre los que él llama admirables (*ammirandi*), quiero decir entre las cuestiones mecánicas. La solución pudiera ser tal vez tan explicativa y concluyente como la que el mismo Aristóteles da, y diversa también de aquella que tan agudamente comenta el muy docto monseñor de Guevara. Pero antes es necesario considerar una proposición que nadie ha tratado hasta ahora, de la cual depende la solución del problema, que después, si yo no me engaño, lleva en pos de sí otras nociones nuevas y admirables. Para mejor entenderlo, tracemos con todo cuidado una figura. Con este objeto, supongamos un polígono equilátero y equiángulo, de cuantos lados se quiera, descripto en torno al centro G; y sea por ahora un hexágono ABCDEF; semejante al cual y concéntrico con él, trazaremos otro menor, que notaremos HIKLMN. Prolonguemos indefinidamente hacia S el lado AB del mayor, y en el mismo sentido prolonguemos el correspondiente lado HI del menor, trazando la línea HT, paralela a la AS, y por el centro tírese la GV, paralela a estas dos. Hecho esto, imaginemos al polígono mayor rodando sobre la línea AS, y transportando consigo al polígono menor. Es claro, que por estar fijo el punto B, extremo del lado AB, al comenzar la rotación, el ángulo A se ha de elevar, y el punto C bajará, describiendo el arco CQ, hasta que el lado BC coincida con la línea BQ, que es igual a él. En tal rotación el ángulo I del polígono menor se elevará sobre la línea IT, por ser la IB oblicua con AS; y el punto I no volverá nuevamente sobre la paralela IT hasta que el pun-

to C haya llegado a Q. Ahora bien, el punto I habrá caído en O, después de haber descrito el arco IO, fuera de la línea HT, y entonces el lado IK habrá pasado a OP. Pero, mientras tanto,

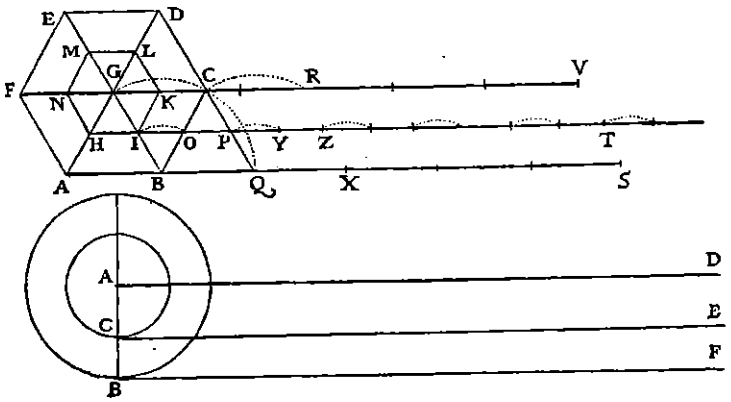

Fig. 5

el centro G habrá marchado siempre fuera de la línea GV, sobre la cual no volverá sino después de haber descrito el arco GC. Dado este primer paso, el polígono mayor habrá venido a apoyarse con el lado BC sobre la línea BQ. Y el lado IK del menor sobre la línea OP, habiendo saltado toda la parte IO, sin tocarla, y el centro G habrá venido a parar en C, haciendo todo su recorrido fuera de la paralela GV, hasta que finalmente toda la figura haya vuelto a ocupar una posición semejante a la primera; de modo que, prosiguiendo la rotación y efectuando el segundo paso, el lado DC del polígono mayor, se adaptará a la parte QX, el KL del menor (después de haber saltado el arco PY), caerá en YZ, y el centro, marchando siempre fuera de la línea GV, caerá en ella solamente en R, después del gran salto CR. Por fin, efectuada una rotación completa, el polígono mayor habrá calcado sin ninguna interrupción sobre su línea AS, seis líneas iguales en conjunto a su perímetro; el polígono menor habrá igualmente impreso seis líneas iguales a su contorno, pero con discontinuidad, a causa de la interposición de cinco arcos, bajo los cuales quedan las cuerdas, partes de la paralela

HT, no tocadas por el polígono; y finalmente, el centro G nunca habrá coincidido con la paralela GV, salvo en seis puntos. Con esto podéis comprender que el espacio recorrido por el polígono menor, es casi igual al recorrido por el mayor; es decir, la línea HT igual a la AS, con la sola diferencia de una cuerda de uno de estos arcos, siempre que entendamos la línea HT en conjunto con los espacios de los cinco arcos. Ahora bien, quiero que comprendáis que esto que he demostrado y expuesto en el ejemplo de los hexágonos, se cumple en todos los demás polígonos, de cualquier número de lados, con tal que sean semejantes, concéntricos y conexos (*congiunti*), y que supongamos que con la rotación del mayor, rueda también el otro cuanto se quiera menor. Debéis comprender que las líneas, recorridas por ellos, son aproximadamente iguales, computando en el espacio recorrido por el menor, los espacios bajo los pequeños arcos no tocados en ninguna parte por el perímetro de ese polígono menor.

Por consiguiente, el gran polígono de mil lados recorre y rectifica, en consecuencia, una línea recta igual a su contorno; y al mismo tiempo el pequeño recorre una línea próximamente igual, pero compuesta de mil partecitas iguales a sus mil lados e interrumpida por la interposición de mil espacios vacíos, que vamos a llamar así en relación con las mil pequeñas líneas tocadas por los lados del polígono. Lo dicho hasta aquí no ofrece ninguna dificultad ni duda.

Pero decidme: si en torno a un centro cualquiera, v. g. el punto A, describimos dos círculos concéntricos y conexos entre sí, y si desde los puntos C, B de sus diámetros, trazamos las tangentes CE, BF, y por el centro A, la AD paralela con éstas, al efectuar el círculo mayor una rotación sobre la línea BF (igual a su circunferencia, así como a las otras dos líneas CE, AD), cuando haya tenido lugar una rotación completa ¿qué habrá hecho el círculo menor, y qué el centro? Éste seguramente habrá recorrido y tocado toda la línea AD, y la circunferencia de aquél habrá rectificado con sus contactos toda la línea CE, haciendo lo mismo que hicieron los anteriores polígonos. Con esta única diferencia, que el perímetro del polígono me-

nor no tocó a la línea HT en todas sus partes, sino que dejó sin tocar, por la interposición de los vacíos saltados, un número de partes igual al que tocaron sus lados. Sin embargo, aquí en el caso de los círculos, la circunferencia del círculo menor jamás se separa de la línea CE, dejando sin tocar alguna de sus partes, ni nunca deja de estar en contacto algún punto de la circunferencia con otro correspondiente de la recta. Ahora bien, ¿cómo puede el círculo menor recorrer sin saltos una línea de longitud mayor que su circunferencia?

SAGREDO. Estaba pensando, si podría decirse que, así como el centro del círculo, de por sí solo, deslizándose a lo largo de la línea AD, está constantemente en contacto con ella, a pesar de ser un punto solo, así también podrían los puntos de la circunferencia menor, arrastrados por el movimiento de la mayor, ir deslizándose por algunas partecitas, de la línea CE.[5]

SALVIATI. Esto no puede ser, por dos razones. La primera, porque no habría mayor razón para que uno de los puntos de contacto, por ejemplo el C, fuera deslizándose sobre alguna parte de la línea CE, y los otros no. Y aunque esto sucediera, siendo tales puntos de contacto (por ser puntos) infinitos, los deslizamientos sobre la CE serían infinitos, y siendo extensos (*quanti*), harían una línea infinita; sin embargo la CE es finita. La otra razón es, que cambiando el círculo grande, durante su rotación, continuamente de punto de contacto, no puede menos de cambiarlo también el círculo menor, no siendo posible trazar desde cualquier otro punto, que no sea el punto B, una línea recta hasta el centro A y que pasara por el punto C; de modo que al cambiar la circunferencia grande el punto de contacto, lo cambia también la pequeña, sin que ningún punto de la pequeña toque más que un punto de su recta CE. Todavía más, en la rotación de los polígonos, ni siquiera un punto del perímetro del menor se adapta a más de un punto de la línea que ese mismo perímetro conmensura. Fácilmente podemos entender esto, considerando que la línea IK es paralela con

BC; por consiguiente, hasta que la BC no venga a adaptarse sobre la BQ, la IK permanece levantada sobre la IP, sin caer sobre ella hasta el instante mismo en que BC se une con la BQ; y entonces, toda en conjunto la línea IK se une con OP, para elevarse inmediatamente sobre ella.

SAGREDO. Es cuestión verdaderamente intrincada, y no se me ocurre solución ninguna; pero dime la que se te ocurre a ti.

SALVIATI. Recurriré a la consideración de los polígonos, antes mentados, cuyo comportamiento es inteligible y queda ya comprendido. Y diré que, así como en los polígonos de cien mil lados, a la línea recorrida y conmensurada por el perímetro del mayor, es decir por sus cien mil lados desplegados consecutivamente, es igual la conmensurada por los cien mil lados del menor, pero con la intercalación de cien mil espacios vacíos interpuestos; así también diré, que en los círculos (que son polígonos de infinitos lados) la línea recorrida por los infinitos lados del círculo grande, dispuestos consecutivamente, es igual en longitud a la recorrida por los infinitos lados del menor, pero en este último caso, con la interposición de otros tantos espacios vacíos entre esos lados; y así como los lados no son finitos en número (*quanti*),* sino infinitos (*infiniti*), así también los vacíos interpuestos no son finitos (*quanti*), sino infinitos: es decir, aquéllos son infinitos puntos plenos todos; y éstos son infinitos puntos, en parte plenos y en parte vacíos. Y aquí quiero que notéis, que al resolver y dividir una línea en partes finitas en número (*quante*) y por consiguiente pasibles de ser numeradas, no es posible disponerlas en una longitud mayor que la ocupada por ellas cuando formaban un todo continuo y estaban unidas sin la interposición de otros tantos espacios vacíos. Pero si nos la imaginamos resuelta en partes no finitas en

* Galileo usa las palabras "quanto", "quanta", "quanti", "quante", para expresar la extensión tanto numeral como cuantitativa; y además para indicar lo finito. La palabra castellana que mejor lo traduciría es "mensurable". Mas para evitar dificultades hemos traducido estos vocablos de diversos modos según las circunstancias. *(N. del T.)*

número (*non quante*), es decir en sus infinitos indivisibles, la podemos concebir prolongada indefinidamente (*in inmenso*) sin la interposición de espacios extensos vacíos, pero sí con la de infinitos indivisibles vacíos. Ahora bien, todo lo dicho de las simples líneas, es extensivo a las superficies y a los cuerpos sólidos, considerándolos compuestos de infinitos átomos no extensos (*non quanti*). Al querer dividirlos en partes extensas, no cabe duda que no podremos disponerlos en espacios más amplios que el primero ocupado por el sólido, a no ser con la interposición de espacios extensos vacíos; vacíos, digo, por lo menos de la materia del sólido. Pero si suponemos hecha la postrera y última resolución en los primarios (*primi*) componentes no extensos (*non quanti*) e infinitos (*infiniti*), podremos concebir tales componentes extendidos en espacio inmenso, no con la interposición de espacios extensos vacíos, sino solamente con la de infinitos vacíos no extensos. Y de este modo no repugna el que se extienda v. g. una pequeña bolita de oro en un espacio grandísimo, sin admitir espacios extensos vacíos, siempre que admitamos que el oro está compuesto de infinitos indivisibles.[6]

SIMPLICIO. Paréceme que sigues por el camino de aquellos vacíos, que cierto antiguo filósofo propugnaba.*

SALVIATI. Pero te has olvidado de añadir "que no admitía la Providencia divina", como en un caso semejante añadió, aunque venía muy poco al caso, un cierto antagonista de nuestro Académico.

SIMPLICIO. Bien supe, y no sin repugnancia, de la inquina malevolente del contendor, mas yo no tocaré semejantes teclas, no sólo por motivos de buena crianza, sino también porque sé cuán desacordes están con tu bien templada y equilibrada mente, tanto religiosa y pía como católica y creyente.

* Se refiere a Demócrito, filósofo atomista griego del siglo V antes de Cristo. *(N. del T.)*

Pero tornando a nuestro propósito, los razonamientos anteriores han suscitado en mí muchas dificultades de las que yo no sabría librarme. Y para comenzar por una, veamos ésta. Si las circunferencias de los dos círculos son iguales a las dos rectas CE, BF, ésta tomada como un continuo, aquélla con la interposición de infinitos puntos vacíos; ¿cómo la AD, descrita por el centro, que es un punto solo, ha de poder decirse igual a éste, estando ella formada por infinitos puntos? Además, el componer la línea de puntos, lo divisible de indivisibles, y lo extenso de inextensos, presenta escollos asaz difíciles de sortear; y aun la misma necesidad de admitir el vacío, tan concluyentemente rechazado por Aristóteles, no carece de análogas dificultades.

SALVIATI. Existen realmente éstas y otras más. Pero no debemos olvidar que se trata de infinitos e indivisibles, unos y otros incomprensibles para nuestro entendimiento, aquéllos por su grandeza, y éstos, por su pequeñez. A pesar de todo esto, vemos que el pensamiento humano no quiere abstenerse de abordarlos, discurriendo acerca de ellos. De él quiero yo también independizarme un poco, para aducir una fantasía propia, que si no concluye necesariamente, al menos por su novedad, habrá de causar sorpresa. Mas acaso el alejarnos tanto, en nuestras digresiones, del camino comenzado, podría pareceros importuno y poco grato.

SAGREDO. Dichosos nosotros que podemos gozar del beneficio y privilegio que significa el conversar con los vivos y entre amigos, y más todavía de temas no impuestos ni necesarios, cosa muy diferente del tratar con los libros muertos, que nos suscitan mil dudas y no nos resuelven ninguna. Haznos, pues, partícipes de las consideraciones que el curso de nuestros razonamientos te sugiere, que no nos ha de faltar tiempo, puesto que estamos libres de urgentes obligaciones, para continuar y resolver los demás tópicos planteados. Ademas, las dudas sugeridas por Simplicio, de ningún modo deben quedar sin respuesta.

SALVIATI. Hagámoslo así, si tal es vuestro deseo. Y comenzando por la primera, que consistía en saber cómo se puede concebir que un solo punto sea igual a una línea; ya que no puedo hacer otra cosa por ahora, procuraré aquietar o al menos mitigar una improbabilidad con otra semejante o mayor, como a veces una maravilla se desvanece con un milagro. Esto lo conseguiré demostrando que dos superficies iguales junto con dos sólidos también iguales y colocados sobre las superficies citadas, que les servirán de base, van disminuyendo, tanto éstos como aquéllas, continua, uniforme y simultáneamente, persistiendo sus residuos siempre iguales entre sí, hasta que por fin llegan, tanto las superficies como los sólidos, a finalizar sus constantes igualdades precedentes, uno de los sólidos con una de las superficies en una larguísima línea, y el otro sólido con la otra superficie en un solo punto; es decir, éstos en un solo punto, aquéllos en infinitos.

SAGREDO. Tal proposición me parece verdaderamente asombrosa; mas veamos su explicación y su demostración.

SALVIATI. Es necesario trazar una figura, porque la prueba es puramente geométrica. Supongamos el semicírculo AFB, cuyo centro es C; y en torno a él el paralelogramo rectángulo ADEB; desde el centro a los puntos D, E tracemos las rectas CD, CE. Después, figurémonos el radio CF, inmóvil y perpendicular a una de las dos líneas AB, DE, y supongamos que alrededor de él gira toda la figura. Es evidente que el rectángulo ADEB describirá un cilindro, el semicírculo AFB una semiesfera, y el triángulo CDE un cono. Hecho esto, supongamos ser retirado el hemisferio, quedando el cono y lo que reste del cilindro, a lo cual, por quedar de forma semejante a una escudilla, llamaremos también "escudilla". Demostraremos en primer lugar que el volumen de la escudilla y el del cono son iguales;[7] y después, trazado un plano paralelo al círculo que es base de la escudilla, cuyo diámetro es la línea DE y el centro F, demostraremos que un tal plano, que pasaría v. g. por la línea GN, cortando a la escudilla por los puntos G,

I, O, N, y al cono por los puntos H, L, determina la parte del cono CHL siempre de igual volumen que la parte de la escudilla, cuyo perfil representan los triángulos GAI, BON. Se probará, además, que también la base del mismo cono, o sea el círculo cuyo diámetro es HL, es de área igual a la superficie circular, base de aquella parte de la escudilla, que es, por decirlo así, una corona de anchura igual a la línea GI. (Notad, entre tanto, lo que son las definiciones de los matemáticos; son una imposición de nombres, o si lo preferís, abreviaciones del hablar, creadas e introducidas, para evitar la engorrosa tarea que tanto vosotros como yo sentimos en estos momentos, por no habernos puesto de acuerdo en llamar v. g., a esta superficie, "corona circular" [*nastro circolare*] y al agudísimo sólido de la escudilla, "cuchilla anular" [*rascio rotondo*].) Sin embargo, sea cual fuere el nombre con que os plazca designarlos, básteos comprender que el plano trazado a cualquier altura, con tal que sea paralelo a la base, es decir al círculo cuyo diámetro es DE, corta siempre, iguales entre sí, a los dos sólidos, o sea a la parte del cono CHL y a la parte superior de la escudilla; y del mismo modo a las dos superficies, bases de tales sólidos, es decir, a la citada corona y al círculo HL, también entre sí iguales.

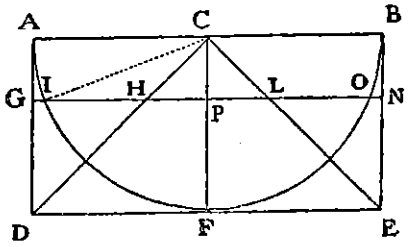

Fig. 6

De aquí se sigue el hecho sorprendente, antes citado: si suponemos que el plano secante va ascendiendo sucesivamente hacia la línea AB, las partes cortadas de los sólidos son siempre iguales, lo mismo que son también siempre iguales las superficies que forman sus bases. Por fin, subiéndolo más y más, tanto los dos sólidos (siempre iguales) como sus bases (superficies siempre iguales) van a terminar, un par de ellos en una circunferencia de un círculo, y el otro par en un solo punto, pues no otra cosa son el borde superior de la escudilla y la cús-

pide del cono. Ahora bien, puesto que durante la disminución de los dos sólidos, la igualdad entre ellos va persistiendo siempre hasta el fin, parece justo decir que los términos superiores y últimos de tales aminoraciones persisten entre sí iguales, y de ninguna manera el uno infinitamente mayor que el otro. Parece, pues, que la circunferencia de un círculo inmenso puede decirse igual a un solo punto. Esto, que sucede en los sólidos, sucede igualmente en las superficies, sus bases, ya que también ellas, conservando siempre la igualdad durante la común disminución, van por fin a hallar como término propio, en el instante de su última disminución, una la circunferencia de un círculo, la otra un solo punto. ¿Y por qué no habrían de llamarse iguales, si son las últimas reliquias y vestigios dejados por grandores iguales? Nótese, además, que aun cuando tales recipientes tuvieran capacidad para contener a los inmensos hemisferios celestes, tanto sus bordes superiores como los ápices de los conos contenidos, conservando siempre entre sí la igualdad, irían a terminar, aquéllos en circunferencias iguales a las de los círculos máximos de los orbes celestes, y éstos en simples puntos. Por lo tanto, conforme a lo que tales especulaciones nos persuaden, también todas las circunferencias de círculos, por diferentes que sean, pueden llamarse iguales entre sí, y cada una igual a un solo punto[8] (por ser superficies nulas).

SAGREDO. La exposición me parece tan aguda y peregrina, que yo, aunque pudiese, no quisiera oponérmele, porque juzgaría casi sacrílego deslucir tan hermosa estructura, mancillándola con alguna ofensa pedantesca. Mas, para nuestra mayor satisfacción, ten a bien aducir esa prueba, que llamas geométrica, de que persiste siempre la igualdad entre los sólidos y entre sus bases; porque me imagino que habrá de ser muy aguda, ya que tan sutil es la reflexión filosófica que de tal conclusión depende.

SALVIATI. La demostración es, sin embargo, breve y fácil. Reasumamos la figura indicada, en la cual, por ser recto el ángulo IPC, el cuadrado del radio IC es igual a la suma de cuadrados de los lados IP, PC; mas el radio IC es igual a la AC y ésta a la GP, y la CP es igual a la PH; por consiguiente, el cuadrado de la línea GP es igual a la suma de los cuadrados de las IP, PH, y el cuádruplo de ese cuadrado a los cuádruplos de los otros, es decir, el cuadrado del diámetro GN es igual a la suma de los dos cuadrados IO, HL. Y puesto que los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros, el círculo que tiene por diámetro a GN será igual a la suma de los círculos cuyos diámetros son IO, HL; y quitado el círculo común cuyo diámetro es IO, el resto del círculo GN será igual al círculo que tiene por diámetro HL. Esto en cuanto a la primera parte;[9] en cuanto a la segunda, prescindiremos por ahora de la demostración; primero, porque si la queremos ver, la hallaremos en la duodécima proposición del libro segundo de *De centro gravitatis solidorum* (del centro de gravedad de los sólidos), aducida por el señor Lucas Valerio, nuevo Arquímedes de nuestra época, quien se sirvió de ella con propósito diferente; segundo, porque en nuestro caso basta el haber visto que las superficies antes mencionadas, son siempre iguales, y que, disminuyendo siempre de modo igual, van a terminar la una en un solo punto y la otra en la circunferencia de un círculo, mayor todavía que el más grande que se quiera, porque en esta sola consecuencia versa nuestra admiración.

SAGREDO. Tan ingeniosa es la demostración, como admirable la reflexión hecha sobre ella. Pero oigamos alguna cosa, acerca de la segunda dificultad propuesta por Simplicio, si es que acerca de ella tienes alguna particularidad que decirnos, aunque yo bien creería que no, siendo una controversia tan ardorosamente sostenida.

SALVIATI. Apuntaré un pensamiento particular mío, repitiendo, en primer lugar, lo que poco ha dije, y es que lo infinito es de por sí solo incomprensible para nosotros, como lo son también los indivisibles; pensad ahora lo que serán reunidos en conjunto. Sin embargo, si queremos componer la línea de

puntos indivisibles, es necesario hacerlos infinitos; y así conviene tomar en consideración al mismo tiempo lo infinito y lo indivisible. Muchas son las cosas referentes a este propósito que a veces han pasado por mi mente, parte de las cuales y quizá las más importantes, podría ser que de improviso no se me ocurrieran; pero durante el transcurso del razonamiento podrá acontecer que, al suscitar yo, a ti y en particular a Simplicio, objeciones y dificultades, ellas a su vez me hagan recordar lo que sin tal estímulo hubiese quedado durmiendo en la subconciencia (*fantasía*). Sin embargo, con la acostumbrada libertad séame permitido traer a cuento alguna de nuestras humanas fantasías, pues así podemos con justicia llamarlas, en comparación con las doctrinas sobrenaturales, las únicas que con verdad y seguridad pueden decir la última palabra en nuestras controversias; guías infalibles en nuestras tenebrosas e inseguras sendas, o más bien laberintos.

Entre las primeras dificultades que se suelen alegar contra los que hacen componer de indivisibles el continuo, suele estar el que un indivisible unido a otro indivisible no produce nada divisible, porque si esto sucediera, se seguiría que aun lo indivisible fuera divisible; dado que si dos indivisibles, como ser dos puntos, reunidos hicieren una cantidad, cual sería una línea divisible, con mucha mayor razón sería divisible la que estuviera compuesta de tres, de cinco, de siete y de otros números (*moltitudini*) impares. Ahora bien, al ser estas líneas seccionables en dos partes iguales, hacen seccionable aquel indivisible que estaba colocado en el medio. A ésta y a otras objeciones del mismo tipo se da satisfacción en parte, con decir que un grandor divisible y extenso no puede estar constituido ni por dos puntos solos, ni por diez ni por cien ni por mil, pero que sí lo puede estar por infinitos.

SIMPLICIO. Aquí surge de súbito una duda, que me parece insoluble; y es que estando seguros de que existe una línea mayor que otra, si contienen ambas a dos infinitos puntos, es fuerza confesar que se da en un mismo género, alguna cosa mayor que lo infinito, porque la infinidad de los puntos de la línea

mayor excederá a la infinidad de los puntos de la menor. Ahora bien, esto de darse un infinito mayor que lo infinito, me parece concepto que de ningún modo puede comprenderse.

SALVIATI. Estas dificultades son de las que derivan del modo que tenemos nosotros de discurrir con nuestro entendimiento finito acerca de los infinitos, asignándoles aquellos atributos que damos a las cosas finitas y limitadas; lo que reputo inconveniente, porque juzgo que estos atributos de prevalencia (*maggioranza*), subvalencia (*minorità*) e igualdad (*egualità*) no convienen a los infinitos, de los cuales no se puede decir que uno es mayor o menor o igual al otro. Para probarlo, se me ocurre un razonamiento que, para mayor claridad en su desarrollo, propondré en forma de preguntas a Simplicio, promotor de la dificultad.

Supongo muy bien sabido de vosotros, cuáles son los números cuadrados y cuáles los no cuadrados.

SIMPLICIO. Sé muy bien que el número cuadrado es el que resulta de la multiplicación de otro número por sí mismo: así el cuatro y el nueve, etc., son números cuadrados, ya que se originan uno del dos y el otro del tres, multiplicados por sí mismos.

SALVIATI. Muy bien; y sabéis, además, que así como los productos se llaman cuadrados, los que los producen, o sea los que se multiplican, se llaman lados (*lati*) o raíces. Por consiguiente, los otros que no nacen de números multiplicados por sí mismos, no son cuadrados. De donde, si yo dijere que todos los números, incluyendo los cuadrados y los no cuadrados, son más que los cuadrados solos, habré enunciado una proposición, realmente verdadera. ¿No es así?

SIMPLICIO. No se puede decir lo contrario.

SALVIATI. Si después yo preguntare, cuántos son los números cuadrados, se podría con toda verdad responder, que son

tantos como son sus respectivas raíces, puesto que todo cuadrado tiene su raíz, y toda raíz su cuadrado, sin que haya ningún cuadrado que tenga más de una raíz, ni raíz ninguna que tenga más de un cuadrado.*

SIMPLICIO. Así es.

SALVIATI. Mas si yo preguntare, cuántas son las raíces, no podrá negarse que son tantas como sean todos los números, porque no hay ningún número que no sea raíz de algún otro; y sentado esto, habrá que decir que los números cuadrados son tantos como sean todos los números, ya que son tantos como sus raíces, y raíces son todos los números. Y sin embargo nosotros en un principio dijimos que los números en conjunto son muchos más que todos los cuadrados, por ser no cuadrados la mayor parte. Todavía más, la multitud de cuadrados va disminuyendo progresivamente, a medida que pasamos a números más grandes; porque hasta cien hay diez cuadrados, que es como decir que son cuadrados una décima parte; en diez mil, sólo la centésima parte son cuadrados; en un millón sólo la milésima. Y sin embargo, en un número infinito, si pudiéramos concebirlo, sería necesario decir que son tantos los cuadrados, cuantos son todos los números en conjunto.

SAGREDO. ¿Y qué se puede decidir en tal coyuntura?

SALVIATI. No veo que se pueda llegar a otra decisión, sino a decir que es infinita la totalidad de los números, infinitos los cuadrados, infinitas sus raíces; y que la multitud de cuadrados no es menor que la de la totalidad de los números, ni ésta mayor que aquélla, y en última instancia, que los atributos de "igual", "mayor" y "menor", no tienen lugar en los infinitos, sino sólo en las cantidades limitadas. Por ello, cuando Simplicio me propone varias líneas desiguales, y me pregunta cómo puede ser que no haya en las mayores más puntos que en las menores, yo le respondo que no hay más, ni menos, ni tantos, sino infinitos en cada una.[10] Porque si yo le respondiese que en una los puntos son tantos como son los números cuadrados; en otra mayor, tantos como son la totalidad de los números; en otra pequeñita, tantos como son los cubos, ¿acaso no podría haberle dado satisfacción, al poner más en una que en otra, y sin embargo infinitos en cada una? Y esto en cuanto a la primera dificultad.

* El Autor considera solamente la raíz cuadrada positiva. *(N. del T.)*

SAGREDO. Ten la bondad de esperar un momento, y permíteme que yo añada a lo dicho hasta aquí un pensamiento, que ahora se me ocurre. Dado que sean ciertas las cosas dichas hasta ahora, paréceme que no sólo no se puede decir que un infinito es mayor que otro infinito, sino que ni siquiera es mayor que un finito, porque si el número infinito fuese mayor, por ejemplo, de un millón, se seguiría que pasando del millón a otros y otros constantemente mayores, nos acercaríamos hacia lo infinito; y no es así; antes por lo contrario, a medida que vamos pasando a números más grandes, nos vamos alejando cada vez más del número infinito; porque en los números, cuanto más grandes se elijan, siempre más y más raros son los números cuadrados contenidos en ellos; ahora bien, en el número infinito, los cuadrados no pueden ser menos que la totalidad de los números, como hace un momento acabamos de inferir. Luego el aproximarnos hacia números cada vez mayores y mayores, es un alejarnos del número infinito.

SALVIATI. Y así, de tu ingenioso razonamiento se concluye que los atributos de "mayor", "menor" e "igual" no sólo no tienen lugar entre los infinitos, sino que ni siquiera lo tienen entre los infinitos y los finitos.

Paso ahora a otra consideración, y es, que al admitir que la línea y todo continuo son divisibles en partes siempre divisibles, no veo cómo se podrá eludir el que su composición conste de infinitos indivisibles, porque una división y subdivisión que pueda proseguirse perpetuamente, supone que las partes son infinitas, ya que de otro modo la subdivisión tendría un lí-

mite; y el que sean infinitas las partes, entraña como consecuencia el que sean no extensas (*non quante*), porque infinitas partes extensas (*quanti infiniti*) determinarían una extensión infinita (*estensione infinita*). Y por lo tanto el continuo está compuesto de infinitos indivisibles (*d'infiniti indivisibili*).

SIMPLICIO. Mas si podemos proseguir siempre la división en partes extensas (*quante*), ¿qué necesidad tenemos de introducir, a este respecto, las inextensas (*non quante*)?

SALVIATI. El mismo hecho de poder proseguir perpetuamente la división en partes extensas (*quante*), introduce la necesidad de admitir que la composición consta de infinitos no extensos (*infiniti non quanti*). Sin embargo, para puntualizar más, te pido me contestes concretamente, si las partes extensas (*quante*) en un continuo [limitado] son, a tu entender, finitas o infinitas.

SIMPLICIO. Te respondo que son infinitas y finitas: infinitas en potencia, y finitas en acto. Infinitas en potencia, es decir antes de la división; pero finitas en acto, o sea después de ser divididas; pues no se concibe que las partes estén en acto en su todo, sino después de ser divididas o al menos indicadas; de lo contrario se dice que están en potencia.

SALVIATI. De modo que no se puede decir que una línea de veinte palmos de largo, por ej., contiene en acto veinte líneas de a palmo cada una, sino después de la división en veinte partes iguales; antes se dice que las contiene solamente en potencia. Pero sea de ello lo que te plazca, y dime si, hecha en acto la división de las partes, el todo original aumenta o disminuye o si permanece con el mismo grandor.

SIMPLICIO. Ni crece ni mengua.

SALVIATI. Así lo creo yo también. Por consiguiente, las partes extensas (*quante*) en el continuo, ya estén en acto, ya estén

en potencia, no hacen a su cantidad ni mayor ni menor; pero es cosa clara que partes extensas (*quante*) contenidas en acto en su todo, si son infinitas lo hacen de grandor infinito. Por consiguiente, partes extensas, aunque sólo existan en potencia, infinitas, no pueden estar contenidas, si no es en un grandor infinito; luego en el [grandor] finito no pueden estar contenidas ni en potencia ni en acto partes extensas infinitas.

SAGREDO. ¿Cómo, pues, podrá ser verdad que el continuo pueda incesantemente dividirse en partes capaces siempre de nueva división?

SALVIATI. Parece que la distinción entre acto y potencia nos hace factible por una parte, lo que sería imposible por otra. Mas yo veré de ajustar mejor esta partida, haciendo otra compulsa; y a la pregunta de si las partes extensas en el continuo limitado son finitas o infinitas, responderé todo lo contrario de lo que respondió antes Simplicio; esto es que ni son finitas ni infinitas.

SIMPLICIO. Esto nunca lo hubiera podido responder yo, no creyendo que se diese término medio alguno entre lo finito y lo infinito, de modo que debiera de resultar manca o defectuosa la división o distinción que establece de una cosa ser o finita o infinita.*

SALVIATI. Paréceme que lo es. Y al hablar de las cantidades discretas, creo que entre las finitas y las infinitas hay un tercer término medio, que es el corresponder a cada número dado (*segnato*); de modo que al preguntar, en el caso presente, si las partes extensas en el continuo son finitas o infinitas, la respuesta más conducente sería decir que no son finitas ni infinitas, sino tantas, que corresponden a cada número dado. Para esto es necesario que no estén comprendidas dentro de ningún núme-

* En este párrafo y en los inmediatos anteriores se echa de ver la tendencia filosófica de Simplicio de la que hablamos en el Prólogo del Traductor. *(N. del T.)*

ro limitado, porque no corresponderían a uno mayor; pero tampoco es necesario que sean infinitas, porque ningún número dado (*assegnato*) es infinito. Así al arbitrio del solicitante, tratándose de una línea dada, podremos presentársela dividida en cien partes extensas y en mil y en cien mil, conforme al número que más le plazca; pero dividida en infinitas, esto ya no. Concedo, pues, a los señores filósofos que el continuo contiene todas las partes extensas que se quiera, y les admito que las contiene en acto o en potencia, a su gusto y voluntad; pero les voy a replicar después, que así como en una línea de diez estadales, están contenidas diez líneas de un estadal cada una, y cuarenta de una vara cada una, y ochenta de un codo, etc.;* así también contiene ella infinitos puntos.[11] Llamadles en acto o en potencia, como más os plazca, que yo por mi parte, Simplicio, en este particular me remito a tu parecer y criterio.

SIMPLICIO. No puedo menos de alabar tu disertación; pero mucho me temo que esa paridad en el estar contenidos los puntos como las partes extensas, no sea del todo exacta, ni que a ti te sea tan factible el dividir en infinitos puntos una línea dada, como les será a aquellos filósofos el dividirla en diez estadales o en cuarenta varas; antes bien, tengo por imposible en absoluto llevar a efecto tal división, de tal modo que será ésta una de aquellas potencias que nunca se reducen a acto.

SALVIATI. El que una cosa no sea factible sino con trabajo o diligencia o con gran espacio de tiempo, no la hace imposible, pues pienso que tú mismo no te desempeñarías muy fácilmente en hacer la división de una línea en mil partes, y mucho menos si tuvieras que dividirla en 937 u otro gran número primo. Pero si yo pudiere convertir esta división, que tú, al parecer, juzgas imposible, en cosa tan hacedera como resultaría para uno que la debiera dividir en cuarenta partes, ¿te avendrías a admitirla de mejor grado en nuestra conversación?

* Las medidas italianas usadas por Galileo están sustituidas en la traducción por medidas castellanas. *(N. del T.)*

SIMPLICIO. Me gusta tu modo de proceder, cómo haces a veces, con cierta benevolencia; y a tu pregunta respondo que esa facilidad es más que suficiente, siempre que el resolverla en puntos no fuese más dificultoso que el dividirla en mil partes.

SALVIATI. Quiero decirte una cosa que te causará asombro, a propósito del querer o poder dividir la línea en sus infinitos, siguiendo el mismo procedimiento que se aplica para dividirla en cuarenta, sesenta o más partes, o sea al ir dividiéndola en dos y luego en cuatro, etc. Quien por este procedimiento creyese encontrar sus infinitos puntos, se engañaría grandemente; porque con un tal proceso ni siquiera se llegaría durante toda la eternidad a la división de todas las partes extensas (*quante*). Pero en cuanto a los indivisibles, está tan lejos el poder alcanzar por tal camino el ansiado término, que más bien creo que uno se aleja de él; y mientras piensa, prosiguiendo la división y multiplicando la multitud de las partes, aproximarse a la infinidad, creo que se aleja de ella cada vez más. La razón es ésta. Al discutir hace poco, llegábamos a la conclusión de que en el número infinito era necesario que los cuadrados y los cubos fuesen tantos como la totalidad de los números, porque unos y otros son tantos como sean sus raíces, y raíces son todos los números. Vimos, en seguida, que cuanto mayores números se elegían, tanto más escasos se daban en ellos sus cuadrados, y más raros todavía sus cubos. Por consiguiente, es claro que a medida que vayamos pasando a números mayores, nos vamos separando más del número infinito; de donde se sigue que, volviendo para atrás (ya que ese proceso nos aleja cada vez más del término buscado), si algún número puede decirse infinito, éste es la unidad. Y verdaderamente en ella se cumplen los necesarios requisitos y condiciones del número infinito; me refiero al contener en sí tantos cuadrados, como cubos, y como números [naturales] hay en conjunto.

SIMPLICIO. Yo no comprendo bien cómo se debe entender esta cuestión.

SALVIATI. El asunto no admite en sí duda ninguna, porque la unidad es cuadrado, es cubo, es cuadrado de cuadrado, y todas las demás potencias (*dignità*) sin que haya ninguna particularidad esencial a los cuadrados, a los cubos, etc. que no convenga a la unidad; así, por ej., es propiedad de los números cuadrados el tener entre sí un número medio proporcional; tomad cualquier número cuadrado como uno de los términos, y sea el otro la unidad; siempre hallaréis un número medio proporcional.

Sean los números cuadrados 9 y 4; entre el 9 y el uno tenéis el 3 como medio proporcional; entre el 4 y el uno media el 2; y entre los dos cuadrados 9 y 4 está como medio el 6. Propiedad de los cubos es el tener entre sí necesariamente dos números medios proporcionales; suponed 8 y 27, desde luego son medios entre ellos 12 y 18; y entre el uno y el 8 median el 2 y el 4; y entre el uno y el 27, el 3 y el 9.[12] Por lo tanto concluyamos que el único número infinito es la unidad. Y éstas son de las maravillas que sobrepujan la capacidad de nuestra imaginación, y que deberían hacernos conscientes de cuán gravemente uno se equivoca, cuando quiere discurrir acerca de los infinitos con los mismos atributos con que discurrimos acerca de los finitos, cuyas naturalezas nada tienen de común entre sí.

A propósito de esto, no quiero callaros una admirable propiedad, que se me ocurre en este instante, y que explica la infinita diferencia, o más bien oposición y contrariedad de naturaleza (*l'infinita differenza anzi repugnanza e contrarietà di natura*), que encontraría una cantidad limitada al pasar a infinita. Tracemos la recta AB, de la longitud que se quiera; tomado en ella un punto cualquiera, como el C, que la divida en partes desiguales, digo que si un par de líneas parten desde los puntos extremos A, B, y guardando entre sí la misma proporción que tienen los segmentos AC, BC, llegan a encontrarse, los puntos de su intersección caerán todos en la circunferencia de un mismo círculo. Por ejemplo: si parten las AL, BL de los puntos A, B, y, teniendo entre sí la misma proporción que tienen las partes AC, BC, van a concurrir en el punto L; y si otras dos líneas AK, BK, reteniendo también una misma proporción, concurren en K; y si se comportan de un modo semejantes los pares AI, BI; AH, HB; AG, GB; AF, FB; AE, EB, digo que los puntos de concurrencia L, K, I, H, G, F, E, caen todos en la circunferencia de un mismo círculo. Según esto, si nos imaginamos el punto C moviéndose continuadamente, de tal manera que las líneas prolongadas desde él hasta los términos fijos A, B, mantengan siempre la misma proporción que tienen las primeras partes AC, CB, ese punto C describirá la circunferencia de un círculo [C, L, K, I, H,... M], tal como en seguida demostraré. El círculo de tal modo descripto, irá siendo siempre mayor y mayor infinitamente, a medida que el punto C se vaya acercando al punto medio [de AB], que supondremos ser O; e irá siendo cada vez menor a medida que el punto C se vaya aproximando al extremo B. De modo que los infinitos puntos que pueden tomarse en la línea OB (moviéndose de acuerdo a la indicada ley) podrán describir círculos del grandor que se quiera, más pequeños que la pupila del ojo de una pulga, y más grandes que el ecuador del cielo (*primo mobile*).

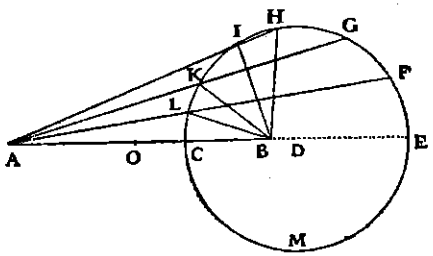

Fig. 7

Ahora, si al desplazarse cualesquiera de los puntos comprendidos entre los términos O, B, todos ellos describen círculos, y los más próximos a O los describen inmensos; si desplazamos el mismo punto O y seguimos moviéndolo de acuerdo a la ley establecida, o sea que las líneas trazadas desde él hasta los puntos A, B, retengan la proporción* que tienen las líneas primeras AQ, OB [que son iguales], ¿qué clase de línea se producirá? Se producirá la circunferencia de un círculo, pero de

* En ésta como en otras ocasiones, debería traducirse, de acuerdo al lenguaje matemático actual, *razón* cuando se trata sólo de dos cantidades, y no "proporción", pero se ha querido conservar en lo posible, las palabras originales. *(N. del T.)*

un círculo mayor que todos los más grandes [círculos], de un círculo, en consecuencia, infinito; pero se describe también una línea recta y perpendicular sobre la BA, trazada desde el punto O y prolongada a lo infinito, sin volver jamás a unir su último término con el primero, como lo hacían las demás; pues la descripta por el movimiento limitado del punto C, después de haber descripto el semicírculo superior CHE, procedía a describir el inferior EMC, reuniendo sus términos extremos en el punto C. Mas el punto O, habiéndose desplazado para describir su círculo, como hacen todos los demás puntos de la línea AB (porque también los puntos de la otra parte OA describirán sus círculos, y serán mayores los descritos por los puntos más próximos a O), no puede retornar a su punto de partida, porque el círculo que él describe es el mayor de todos y, por consiguiente, infinito; en efecto, describe una línea recta infinita, como circunferencia de su círculo infinito.

Considerad ahora la diferencia que hay entre un círculo finito y uno infinito, puesto que el segundo altera su naturaleza de tal modo que no sólo pierde totalmente el ser, sino también el poder ser: con toda claridad comprendemos que no puede darse un círculo infinito; y esto trae como consecuencia, que tampoco puede existir una esfera infinita, ni cuerpo alguno, que sea infinito, ni una dada (*figurata*) superficie infinita. ¿Y qué diremos ahora de una tal metamorfosis en el pasar de lo finito a lo infinito?[13] ¿Y por qué hemos de sentir mayor repugnancia, si al buscar lo infinito entre los números, los hemos hallado en la unidad? Si al desmenuzar un sólido en muchas partes, y seguir reduciéndolo a finísimo polvo, llegamos a tenerlo resuelto en sus infinitos átomos ya indivisibles; ¿por qué no hemos de poder decir que ha retornado a un solo continuo, pero quizá fluido como el agua o el mercurio o el mismo metal licuefacto? ¿No vemos licuarse en vidrio las piedras, y al mismo vidrio, con el mucho fuego, hacerse más fluido que el agua?

SAGREDO. ¿Hemos de pensar, entonces, que las sustancias se hacen fluidas, porque se resuelven en los primitivos infinitos indivisibles, sus componentes?

SALVIATI. Yo no atino a encontrar mejor expediente para interpretar ciertos fenómenos sensibles, entre los cuales está el siguiente. Cuando yo tomo un cuerpo duro, como piedra o metal, y con un martillo o una agudísima lima lo voy reduciendo cuanto puedo a polvo diminuto e impalpable, es claro que sus mínimos, aun cuando por su pequeñez sean imperceptibles uno por uno a nuestra vista y tacto, son no obstante extensos (*quanti*), con forma propia (*figurati*) y numerables. Sucede con ellos que, amontonados, se sostienen en montón; y si excavamos en ellos un hoyo hasta cierta profundidad, la excavación permanecerá abierta, sin que las moléculas de alrededor concurran a rellenarla; agitados o removidos, se aquietarán tan pronto como el motor exterior los abandone. Estos mismos efectos se dan en todos los conglomerados de mayores y mayores corpúsculos de cualquier figura, aun esférica, como vemos en los acervos de mijo, de trigo, de perdigones de plomo, y de cualquier otra materia.

Mas si intentáramos ver tales propiedades en el agua, no las descubriremos; sino que cuando se la eleva, inmediatamente se aplana, a no ser que algún vaso u otro sostén externo la retenga; cuando se la ahoya, afluye inmediatamente a llenar la cavidad; cuando se la agita, sigue fluctuando por largo tiempo y extendiendo sus ondas a grandes distancias. Paréceme que de esto podemos con toda razón deducir que los mínimos del agua, en los cuales parecería estar resuelta (porque tiene menos consistencia que el más fino polvo, o tal vez no tiene consistencia alguna), son muy diferentes de los mínimos extensos y divisibles; y yo creería que la única diferencia consiste en que los del agua son indivisibles. Me parece que la misma transparencia purísima del agua nos da pie para tal conjetura; porque si tomamos el cristal más transparente que haya y comenzamos a quebrantarlo y triturarlo, una vez que ha sido reducido a polvo, pierde la transparencia, y más la pierde cuanto más se lo pulveriza; mas el agua, que está desmenuzada (*trita*) en sumo grado, es, sin embargo, sumamente diáfana. El oro y la plata, reducidos (*polverizati*) por medio de ácidos (*acque forti*) más finamente de lo que puede hacerse por medio de cualquier li-

ma, quedan hechos polvo (*pur restano in polvere*), pero no devienen fluidos, ni se licuan antes que los indivisibles (*gl'indivisibili*) del fuego o de los rayos del sol los disuelvan, a mi parecer, en sus primarios y últimos (*primi altissimi*) componentes infinitos, indivisibles.

SAGREDO. Esto que tú has traído a cuento acerca de la luz, varias veces lo he observado yo, no sin asombro; he visto licuar en un instante el plomo por medio de un espejo cóncavo de tres palmos de diámetro. De ahí he dado en pensar que si el espejo fuese muy grande y terso y de figura parabólica, licuaría también en brevísimo tiempo cualquier otro metal, viendo que aquél que ni era muy grande ni bien pulimentado y, de concavidad esférica, licuaba con tanto poder el plomo y quemaba cualquier combustible. Tales hechos me hacen creer en las maravillas de los espejos de Arquímedes.

SALVIATI. Hablando de los efectos de los espejos de Arquímedes, lo que me hace creíble cualquiera de los milagros narrados por más de un escritor, es la lectura de los libros del mismo Arquímedes, ya de antes leídos y estudiados por mí con infinito estupor; y si alguna duda me hubiera quedado, la obra que últimamente ha dado a luz acerca del espejo ustorio, el P. Buenaventura Cavalieri,* y que yo he leído con admiración, sería suficiente para disipar en mí cualquier dificultad.

SAGREDO. También yo he visto ese tratado, y lo leí con gusto y con gran asombro; y como ya de antemano tenía conocimiento de la persona, he venido a corroborar la opinión que de él me había formado, de que llegará a ser uno de los matemáticos más conspicuos de nuestra época. Pero volviendo al efecto maravilloso de los rayos solares en la licuefacción de los metales, ¿debemos acaso creer que una acción tan violenta se efectúa sin movimiento, o más bien con movimiento, pero velocísimo?

* Francisco Buenaventura Cavalieri 1598-1647, geómetra italiano discípulo de Galileo y autor de la teoría de los invisibles. *(N. del T.)*

SALVIATI. Vemos que las otras ustiones (*incendii*) y resoluciones (*dissoluzioni*) se efectúan con movimiento, y con movimiento velocísimo: véanse las acciones de los rayos, de la pólvora en las minas y en los petardos; y en suma, cómo al ser avivada por los fuelles la llama de los carbones, mezclada con vapores densos e impuros, acrece su poder para la licuefacción de los metales. De ahí que yo no podría comprender que la acción de la luz, aunque purísima, pueda producirse sin movimiento, y sin movimiento velocísimo.

SAGREDO. Pero ¿de qué clase y cuán grande estimaremos ser esta velocidad de la luz? ¿Es acaso instantánea, momentánea o más bien, como son los otros movimientos, durable? ¿No nos sería posible, por medio de experimentos, adquirir la certeza de cómo es?

SIMPLICIO. La experiencia cotidiana nos muestra que la propagación de la luz es instantánea; pues cuando a lo lejos dispara un cañón, el resplandor del fogonazo llega a nuestros ojos sin interposición de tiempo, mas el estampido lo oímos sólo después de un notable intervalo de tiempo.

SAGREDO. ¡Eh! Simplicio, de esta conocidísima experiencia solamente se deduce que el sonido necesita más tiempo que la luz, para llegar hasta nosotros, pero no se sigue de ahí que la propagación de la luz sea instantánea, y no temporal, por más veloz que ella sea. Esta observación no tiene más peso que aquella otra que dice: "Tan pronto como el Sol asoma en el horizonte, llega a nuestros ojos su resplandor"; porque ¿quién me asegura que sus rayos no han llegado a dicho punto antes que a nuestra vista?

SALVIATI. La inconsecuencia de éstas y otras observaciones semejantes, me hizo pensar una vez en el modo de poder comprobar sin error, si la iluminación o sea la propagación de la luz, es verdaderamente instantánea; porque el movimiento asaz veloz del sonido nos asegura que la propagación de la luz

no puede menos de ser velocísima. El experimento que se me ocurrió, fue el siguiente. Sean dos individuos, cada uno de los cuales pone una luz dentro de una linterna u otro receptáculo, de modo que, con la interposición de la mano puedan ir tapándola y descubriéndola a la vista del compañero. Colóquense uno frente a otro a pocos codos de distancia y vayan adiestrándose en descubrir y ocultar su luz a la vista del compañero, de modo que, cuando uno vea la luz del otro, descubra inmediatamente la suya. Esta correspondencia, después de algunas respuestas intercambiadas de uno y otro lado, quedará tan ajustada, que al acto de descubrir del uno, corresponderá inmediatamente, sin error sensible, el acto de descubrir del otro; de modo que al descubrir uno su luz, verá al mismo tiempo aparecer a su vista la luz del otro. Una vez conseguido el ajuste (*pratica*) en pequeñísimas distancias, pónganse los compañeros, con sus luces, a dos o tres millas de distancia, y volviendo a repetir de noche el experimento, observen atentamente si las respuestas a sus actos recíprocos de descubrir y ocultar la luz, se verifican por el mismo tenor de las que se hacían desde más cerca; si se verifican así, podremos concluir con bastante seguridad, que la propagación de la luz es instantánea; porque si necesitare tiempo, en una distancia de tres millas, que suponen seis, para ir una y venir la otra, la demora deberá ser fácilmente observable. Si las observaciones hubieren de hacerse a mayores distancias, como ser ocho o diez millas, podríamos servirnos del telescopio, con tal que cada uno de los observadores ajuste el suyo al lugar donde se ha de operar con las luces durante la noche. Pues aun cuando las luces sean pequeñas, y por consiguiente invisibles a simple vista desde tanta distancia, podrán con toda facilidad taparse y descubrirse. Y con la ayuda de los telescopios, de antemano ajustados y fijos, se las podrá ver cómodamente.

SAGREDO. El experimento me parece invención tan segura como ingeniosa. Pero dinos a qué conclusión has llegado al practicarlo.

SALVIATI. Ciertamente no he realizado el experimento sino en pequeñas distancias, o sea de menos de una milla, y no he podido tener la seguridad de si es instantánea la aparición de la luz opuesta; pero si no es instantánea, por lo menos es velocísima y aun diría momentánea, y por ahora la compararía con el movimiento que vemos producirse en el resplandor del relámpago, visto entre las nubes a ocho o diez millas de distancia. Nosotros distinguimos el origen de esta luz, y podríamos decir el manantial y la fuente, en un lugar determinado entre esas nubes, pero inmediatamente se propaga con amplísima expansión entre las circundantes. Esto parece ser un argumento en favor de que esa propagación requiere algún tiempo, porque si fuese instantánea y no gradual, parece que no podríamos distinguir su origen, o su centro, por decirlo así, de sus repliegues y prolongaciones extremas.[14] Pero ¿en qué piélagos vamos nosotros poco a poco engolfándonos inadvertidamente? ¿Entre los vacíos, entre los infinitos, entre los indivisibles, entre los movimientos instantáneos, para no poder jamás, después de mil discusiones, arribar a puerto?

SAGREDO. Realmente, cosas son éstas en gran desproporción con nuestro entendimiento. Pues ved: el infinito, buscado entre los números, parece terminar en la unidad; de los indivisibles nace lo siempre divisible; lo vacío parece que no se encuentra si no es mezclado inseparablemente con lo pleno. En fin, en estas cosas se trueca de tal manera la naturaleza de lo que comúnmente juzgamos, que hasta la circunferencia de un círculo deviene una línea recta infinita. Y si la memoria no me falla, es ésta la proposición que tú, Salviati, tienes que poner de manifiesto por medio de su correspondiente demostración geométrica. Si te place, estaría bien comenzar ya, sin más digresiones.

SALVIATI. Estoy a tus órdenes; mas para tu mejor comprensión, resolveré primero el siguiente problema:

Dada una línea recta dividida en partes desiguales según la proporción que se quiera, describir un círculo tal, que dos lí-

neas rectas trazadas desde los extremos de la línea dada a cualquier punto de la circunferencia, retengan la misma proporción que tienen entre sí las partes de esa línea dada, de modo que sean homólogas las que partan de los mismos puntos.

Sea la recta dada AB, dividida a capricho en dos partes desiguales por el punto C, es necesario describir un círculo tal, que si a cualquiera de los puntos de su circunferencia concurren dos rectas trazadas desde los extremos A, B, guarden entre sí la misma proporción que tienen entre sí las partes AC, BC, de modo que sean homólogas las que parten del mismo punto. Alrededor de C, como centro, y con la parte menor CB de la línea dada, como radio, supóngase descrito un círculo, a cuya circunferencia sea tangente desde el punto A la recta AD, prolongada indefinidamente hacia E; sea el punto de contacto en D, y únase D con C mediante una línea [DC] que será perpendicular a la AE. A la BA sea perpendicular la BE, la que al ser prolongada cortará a AE, por ser agudo al ángulo A, sea la intersección en el punto E, desde el cual se tira a la AE una perpendicular, que al prolongarse corte en F a la AB, prolongada infinitamente. Digo, en primer lugar, que las dos rectas FE, FC son iguales. Porque si trazamos la EC, tendremos que en los dos triángulos DEC, BEC, los lados DE, EC del uno son iguales a los BE, EC del otro, porque DE, EB son tangentes al círculo DB; y las bases DC, CB también son iguales; por consiguiente, los dos ángulos DEC, BEC serán iguales. Y como al ángulo BCE, para ser recto, le falta el ángulo CEB, y al ángulo CEF, también para ser recto, le falta el ángulo CED, siendo tales complementos iguales, los ángu-

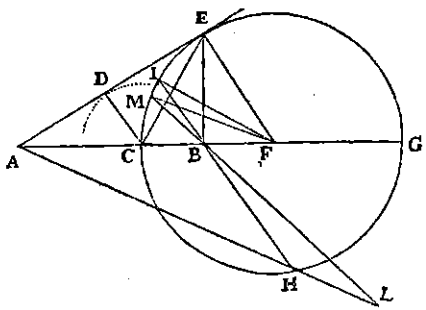

Fig. 8

los FCE, FEC serán iguales; y en consecuencía, los lados FE, FC también lo serán. Si se toma al punto F como centro, y con el radio FE, se describe un círculo, pasará por el punto C; descríbase, y sea CEG. Éste es el círculo pedido; y todo par de líneas que, partiendo de los puntos A, B, encuentren a la circunferencia de dicho círculo en alguno de sus puntos, guardarán entre sí la misma proporción que tienen los segmentos AC, BC, que concurren al punto C. Esto es manifiesto en lo tocante a las dos líneas AE, BE que se encuentran en el punto E, por estar el ángulo E del triángulo AEB bisecado por la recta CE; por esta causa, la misma proporción que tiene AC con BC, la tiene AE con BE. Lo mismo probaremos de AG, BG, terminadas en el punto G. Porque siendo (por la semejanza de los triángulos AFE, EFB) AF a FE como EF a FB, es decir, AF a FC como CF a FB, será (*dividendo*), AC a CF (o sea FG) como CB a BF, y toda la AB a toda la BG, como una CB a una BF y (*componendo*) será AG a GB como CF a FB, es decir EF a FB, o sea AE a EB y AC a CB: lo que había que probar.[15] Tomemos ahora otro punto cualquiera en la circunferencia, por ej. H, al cual concurren las AH, BH; del mismo modo, digo, que AC es a CB como es AH a HB. Prolónguese HB hasta hallar la circunferencia en I, y únanse IF. Por ser, según hemos visto, AB a BG, como CB a BF, el rectángulo ABF* será igual al rectángulo CBG o sea a IBH; y por ello AB a BH como IB a BF. Pero los ángulos en el B son iguales, por consiguiente, AH es a HB como IF o sea EF es a FB, y como AE es a EB.[16]

Digo, además, que es imposible que las líneas que guarden tal proporción, partiendo de los extremos A, B, concurran en ningún punto, ni dentro ni fuera del círculo CEG. Porque, supongamos que ello fuera posible; sean en este caso AL, BL las dos líneas que concurren en el punto L, fuera del círculo; prolónguese la LB hasta el punto M de la circunferencia, y únanse MF. Siendo AL a BL como AC es a BC, o sea como MF a FB, tendremos dos triángulos ALB, MFB, que tienen propor-

* El autor llama rectángulo ABF al producto de AB x BF, es decir a su superficie. *(N. del T.)*

cionales los lados en torno a los dos ángulos ALB, MFB, iguales los ángulos con vértice en el punto B, y los dos remanentes FMB, LAB menores que rectos (porque el ángulo recto en el punto M tiene por base todo el diámetro CG, y no sólo la parte BF; y el otro [ángulo] en el punto A es agudo, porque la línea AL, homóloga de AC, es mayor que la BL, homóloga de BC). Por consiguiente, los triángulos ABL, MBF son semejantes, y por lo tanto, AB es a BL como MB es a BF; de donde se deduciría que el rectángulo ABF es igual al rectángulo MBL; pero se ha demostrado que el rectángulo ABF es igual al CBG; por consiguiente el rectángulo MBL es igual al rectángulo CBG, lo que es imposible: luego la intersección no puede caer fuera del círculo.[17] Del mismo modo se demostrará que no puede tampoco caer dentro; por consiguiente, todas las intersecciones caen en la circunferencia misma.

Pero ya es hora de satisfacer el deseo de Simplicio, mostrándole que el resolver la línea en sus infinitos puntos, no sólo no es imposible, sino que ni siquiera ofrece mayor dificultad que el dividirla en sus partes extensas (*quante*), pero hecha una salvedad, a la que espero, Simplicio, no podrás negarte. Es ésta: tú no me exigirás que separe uno de otro los puntos, y que te los haga ver distintos uno por uno sobre este papel; porque yo me contentaría con que tú, sin separar una de las otras las cuatro o seis partes de una línea, me mostrares señaladas sus divisiones, o a lo menos, plegadas en ángulos, formando un cuadrado o un hexágono; pues abrigo el convencimiento de que en estos casos considerarías suficientemente distintas las partes y la división realmente efectuada.

SIMPLICIO. Ciertamente sí.

SALVIATI. Pues bien; si el doblar una línea en ángulos formando, ya un cuadrado, ya un octágono, ya un polígono de cuarenta, de cien o de mil ángulos, es una alteración suficiente para reducir a acto aquellas cuatro, ocho, cuarenta, cien y mil partes, que primero estaban, a tu decir, en potencia en la línea recta; cuando yo forme con esa línea un polígono de infinitos lados, o sea, cuando yo la doble en una circunferencia de círculo, ¿no podré, con la misma razón, decir que he reducido a acto esas partes infinitas, que, según tú, estaban primeramente en potencia contenidas en ella, mientras era recta?

Ni puede uno negar que la resolución en sus puntos infinitos, se efectúa con tanta verdad, como la resolución en cuatro partes, para formar un cuadrado, o en mil para formar un polígono de mil ángulos; puesto que en tal resolución no falta ninguna de las condiciones que se dan en el polígono de mil o de cien mil lados. Este último polígono, puesto sobre una línea recta, la toca con uno de sus lados, es decir con una de sus cien mil partes; el círculo, que es polígono de infinitos lados, toca a la misma recta con uno de sus lados, que es un solo punto, distinto de todos sus contiguos, y por esta razón tan separado y distinto de ellos, como lo está un lado del polígono de los lados restantes. Y lo mismo que un polígono, al rodar sobre un plano, imprime, con los sucesivos contactos de sus lados, una línea recta igual a su perímetro, así también el círculo, rodando sobre un tal plano, traza, con sus infinitos contactos sucesivos, una línea recta igual a su propia circunferencia. Ahora, yo no sé, Simplicio, si los peripatéticos, de quienes yo admito, como muy verdadero, el concepto de que el continuo es divisible en partes siempre divisibles, de modo que continuando una tal división y subdivisión, jamás se llegaría al fin, querrán concederme a mí que ninguna de sus tales divisiones es la última, como en realidad no lo es, porque siempre queda otra más, sino que la final y última es la que lo resuelve en infinitos indivisibles; a la cual concedo que no se llegaría jamás dividiendo sucesivamente en mayor y mayor multitud de partes. Pero haciendo uso del método que yo propongo, para separar y resolver toda la infinitud (*tutta la infinità*) de un solo golpe (recurso que no debería negárseme), me parece que ellos deberían conformarse y admitir que el continuo está compuesto de átomos absolutamente indivisibles, máxime siendo éste, quizá de entre todos, el camino más apto para salir de intrincadísimos laberintos, tales como el ya mencionado de la cohesión de las partes de los sólidos, y el comprender el problema de la ra-

refacción y de la condensación, sin incurrir, por causa de la primera, en el inconveniente de tener que admitir espacios vacíos, y por causa de la segunda, la penetrabilidad (*penetrazione*) de los cuerpos: dos inconvenientes que, a mi parecer, pueden evitarse perfectamente con sólo admitir la mencionada composición por medio de indivisibles.

SIMPLICIO. Yo no sé lo que responderían los peripatéticos, pues creo que las consideraciones hechas por ti, les llegarían en gran parte como novedades; y podría acaecer que ellos hallaran respuestas y soluciones poderosas para soltar esos nudos, que yo, por falta de tiempo y fragilidad de ingenio, no sabría al presente deshacer. Mas, dejando por ahora esta parte de la cuestión, oiría de buen grado cómo la introducción de estos indivisibles facilite entender la condensación y la rarefacción, eludiendo al mismo tiempo el vacío y la penetrabilidad de los cuerpos.

SAGREDO. Con ansia oiría yo también hablar de cosas tan oscuras para mi entendimiento. Todavía más; me gustaría no quedar defraudado con respecto a lo que hace un momento insinuó Simplicio; es decir, las razones de Aristóteles para refutar el vacío, y en consecuencia, las soluciones que tú les das, o sea los argumentos que tienes para admitir lo que él niega.

SALVIATI. Haremos ambas cosas. En cuanto a lo primero, es necesario que, así como en lo tocante a la rarefacción nos servíamos de la línea rectificada por el círculo menor, mayor que su propia circunferencia, mientras era movido por la rotación del mayor, así también, para entender la condensación, mostraremos cómo durante la rotación hecha por el círculo menor, el mayor rectifica una línea recta menor que su circunferencia. Para mayor claridad, procedamos antes a la consideración de lo que sucede en los polígonos.

En una figura semejante a aquella otra [fig. 5], sean dados los hexágonos ABC, HIK en torno al centro común L. y hagámoslos rodar sobre las paralelas HOM, AB*c*. Manteniendo fijo

el vértice I del polígono menor, hágase rodar el polígono hasta que el lado IK caiga sobre la paralela [HOM]; en este movimiento el punto K describirá el arco KM, y el lado KI coincidirá con la parte IM.

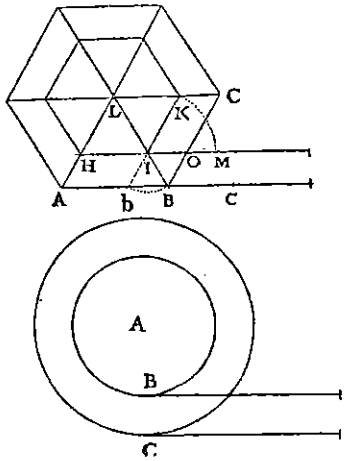

Fig. 9

Mientras tanto es necesario ver qué hará el lado CB del polígono mayor. Como la rotación se hace sobre el punto I, el extremo B de la línea IB, marchando hacia atrás, describirá el arco B*b* bajo la paralela *c*A, de tal modo que cuando el lado KI llegue a coincidir con la línea MI, el lado BC coincidirá con la línea *bc*, habiendo avanzado solamente una distancia igual a la parte B*c*, y habiendo retrocedido otra igual a la parte que subtiende el arco B*b*, la cual se sobrepone a la línea BA. Si continuamos por este tenor la rotación del polígono menor, éste describirá y desarrollará sobre su paralela una línea igual a su perímetro; pero el mayor desarrollará una línea menor que su perímetro; menor en una cantidad igual a la suma de tantas líneas *b*B, como lados menos uno tiene el polígono. Esta línea será aproximadamente igual a la descripta por el polígono menor, excediéndola solamente en una cantidad igual a *b*B. Aquí, pues, asoma sin dificultad la razón, por la cual el polígono mayor (llevado por el menor) no desarrolla con sus lados una línea mayor que la desarrollada por el menor; y es, porque una parte de cada uno de sus lados se sobrepone al precedente contiguo.

Pero si consideramos los dos círculos en torno al centro A, y apoyados sobre sus respectivas paralelas, tocando el menor a la suya en el punto B, y el mayor a la suya en el punto C; aquí, al comenzar el menor su rotación, no se verificará que el punto B quede por un momento inmóvil, de modo que la línea BC, marchando hacia atrás, transporte el punto C, como acontecía

en los polígonos, en donde permaneciendo fijo el punto I, hasta caer el lado KI sobre la línea IM, la línea IB retrotraía el punto B, término del lado CB, hasta B*b*, de modo que el lado BC caía en *bc*, sobreponiendo a la línea BA la parte Bb y avanzando hacia adelante sólo con la parte B*c*, igual a IM, o sea igual a un lado del polígono menor. Por motivo de estas superposiciones, que son los excesos de los lados mayores sobre los menores, los restantes avances, iguales a los lados del polígono menor, vienen a componer, durante una revolución completa, una línea recta igual a la descripta y rectificada por el polígono menor.

Pero si ahora queremos aplicar el mismo razonamiento al caso de los círculos, será conveniente decir que mientras los lados de cualquier polígono están comprendidos dentro de un cierto número, los lados del círculo son infinitos; aquéllos son extensos y divisibles, éstos son inextensos e indivisibles. Los vértices del polígono, durante la rotación, están fijos por algún tiempo, es decir cada uno durante una fracción del tiempo de una rotación completa, equivalente a la parte que él representa en todo el perímetro. De modo semejante en los círculos, las demoras de los vértices de sus infinitos lados son instantáneas (*momentanee*), porque la misma fracción representa un instante de tiempo extenso (*quanto*), que un punto de una línea, que contiene infinitos. Los retrocesos hechos por los lados del mayor no son de todo el lado, sino tan sólo de su exceso sobre el lado del menor, ganando hacia adelante tanto espacio como es la longitud de dicho lado menor; pero en los círculos, el punto o lado C, en la demora instantánea del vértice B, retrocede tanto como es su exceso sobre el lado B, y avanza por delante tanto como es el mismo lado B. Por consiguiente, los infinitos lados indivisibles, del círculo mayor, por medio de sus infinitos retrocesos indivisibles, hechos durante las infinitas demoras instantáneas de los infinitos vértices de los infinitos lados del círculo menor, y por medio de sus infinitos avances, iguales a los infinitos lados de ese mismo círculo menor, producen y describen una línea igual a la descrita por el círculo menor, la que contiene en sí infinitas superposiciones no extensas (*non quante*), que forman una contracción o condensación sin ninguna compenetración de partes extensas; cosa que no puede suceder en la línea dividida en partes extensas (*quante*), tal como es el perímetro de cualquier polígono, que rectificado en línea recta, no se puede reducir a una longitud menor, si no es haciendo que los lados se sobrepongan y se compenetren. Esta contracción de partes no extensas, pero sí infinitas, sin la compenetración de partes extensas, así como aquella primera expansión, antes mencionada, de infinitos indivisibles por la interposición de vacíos indivisibles, es a mi parecer, lo más que puede decirse concerniente a la contracción (*condensazione*) y rarefacción de los cuerpos, sin necesidad de introducir la penetrabilidad (*penetrazione*) de los cuerpos ni los espacios extensos vacíos. Si en esto halláis algo que os guste, tomadlo en consideración; si no, juzgadlo baladí, incluyendo también mis observaciones, y procurad que cualquier otro aquiete vuestro entendimiento con explicaciones mejores. Voy a añadir sólo dos palabras: que estamos en el campo de los infinitos y de los indivisibles.

SAGREDO. Confieso francamente que son ideas sutiles, nuevas y peregrinas para mis oídos; por lo demás, en cuanto a si de hecho la naturaleza procede o no de acuerdo con esta ley, yo no sabría qué pensar. Sin embargo, mientras yo no encuentre nada más satisfactorio, para no quedar del todo en el aire, me atendré a esta explicación. Pero quizá Simplicio hallará el modo (lo que yo no he podido conseguir hasta ahora) de explicar la explicación que dan los filósofos en materia tan abstrusa. Porque, en verdad, todo lo que hasta ahora he leído acerca de la contracción (*condensazione*) es para mí tan denso, y lo referente a la rarefacción (*rarefazione*) tan sutil, que mi pobre intelecto (*vista*) ni comprende esto ni penetra aquello.

SIMPLICIO. De mí sé decir, que estoy lleno de confusión, y que encuentro serios tropiezos por una y otra senda, y en particular por esta nueva; porque según esta teoría, una onza de oro se podría rarefacer, y expandir en una mole mayor que la

tierra, y toda la tierra condensarse y reducirse hasta ser menor que una nuez; cosa que yo no creo, ni creo que tú mismo creas. Los razonamientos y demostraciones que tú has hecho hasta aquí, por ser matemáticos, abstractos y alejados de la materia sensible, paréceme que, aplicados al mundo físico y natural, no se comportarían de acuerdo con estas reglas.*

SALVIATI. Hacer ver lo invisible, ni yo podría hacerlo, ni creo que encuentres quien lo haga. Pero ¿no nos dicen nuestros sentidos, a medida de su posibilidad, que el oro (ya que de oro has hablado) admite una inmensa expansión de sus moléculas (*parti*)? No sé si habrás tenido la oportunidad de ver la manera que tienen los aurífices de tratar el oro "tirado" [hilado], el cual sólo en la superficie es realmente oro, pues la materia interior es plata. La manera de "tirarlo" es la siguiente: toman un cilindro o si lo preferís una varilla de plata, de cerca de medio codo de longitud, y de un grosor igual a tres o cuatro veces el dedo pulgar, la doran con panes de oro batido, sin sobreponer nunca más de ocho o diez de éstos, que son tan delgados, según sabéis, que casi pueden flotar por el aire. Una vez dorado, comienzan a "tirarlo" con inmensa fuerza, haciéndolo pasar por los agujeros de la hilera; y siguen haciéndolo pasar y repasar continuamente por agujeros cada vez más angostos, hasta que, con tanto pasarlo y repasarlo, lo dejan tan fino como un cabello de mujer o quizá más fino; y sin embargo, permanece dorado en la superficie. Dejo ahora a vuestra consideración, la finura y expansión a que se habrá reducido la sustancia del oro.

SIMPLICIO. Yo no veo que de este proceso se deduzca, como consecuencia, una tenuidad de la sustancia del oro tan asombrosa como tú pretendes: primero, porque ya la primera doradura se hizo con diez panes de oro, que suponen notable grosor; segundo, porque al "tirar" y sutilizar esa plata, lo que gana en largura lo pierde en grosor, quedando así una dimen-

* Sin embargo, qué poco alejadas de las teorías modernas sobre constitución de las estrellas gigantes rojas como Betelgeuse y enanas blancas como Sirio B. *(N. del T.)*

sión compensada con la otra, sin que la superficie aumente tanto que, para revestir esa plata con oro, necesitemos reducir éste a mayor tenuidad de la que tenían los primitivos panes.

SALVIATI. Te equivocas en extremo, Simplicio, porque la superficie aumenta directamente como la raíz cuadrada del alargamiento, según lo puedo demostrar geométricamente.

SAGREDO. No sólo por mí, sino también por Simplicio, te rogaría nos hicieras ver esa demostración, si te parece que podemos comprenderla.

SALVIATI. Veré si así de improviso la recuerdo. Por de pronto es manifiesto que aquel primer grueso cilindro de plata y el larguísimo hilo "tirado", son dos cilindros de igual volumen, porque la plata es la misma. Ahora, con tal que yo pueda demostrar la proporción existente entre las superficies de los cilindros de igual volumen, tendremos lo que buscamos. Digo, pues, que:

Las superficies de los cilindros de igual volumen, prescindiendo de sus bases, guardan entre sí la misma proporción que tienen las raíces cuadradas de sus respectivas longitudes.

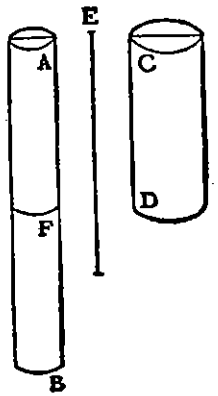

Fig. 10

Sean dos cilindros iguales [en volumen] con sus respectivas alturas AB, CD, entre las cuales es media proporcional la línea E. Digo que la superficie del cilindro AB, prescindiendo de las bases, en relación a la superficie del cilindro CD, omitiendo también sus bases, guarda la misma proporción que la línea AB guarda con la línea E, proporción que es, como la raíz cuadrada de AB a la raíz cuadrada de CD. Córtese ahora el cilindro AB por F y sea la altura AF igual a CD. Ahora bien, como las bases de cilindros iguales [en volumen] están entre sí en razón inversa de la

de sus alturas, el círculo base del cilindro CD será al círculo base del cilindro AB, como la altura BA es a la DC; además, por ser los círculos entre sí, como son los cuadrados de sus diámetros, dichos cuadrados tendrán la misma proporción que la BA a la CD. Al ser BA a CD, como el cuadrado de BA al cuadrado de E, son también proporcionales los cuatro cuadrados; y como consecuencia, lo habrán de ser también sus lados; luego la línea AB es a E, como el diámetro del círculo C es al diámetro del círculo A. Pero como los diámetros son proporcionales a las circunferencias, y las circunferencias son proporcionales a las superficies de los cilindros de igual altura, tenemos que la línea AB es a la E, como la superficie del cilindro CD es a la del cilindro AF. Ahora bien, puesto que la altura AF es a la AB, como la superficie AF es a la superficie AB; y como la altura AB es a la línea E, como la superficie CD a la AF; se sigue, por la (*perturbata*) que la altura AF, es a E, como la superficie CD a la superficie AB; y (*convertendo*), la superficie del cilindro, AB es a la superficie del cilindro CD como la línea E es a AF, es decir a la CD, o también como AB es a E, que es la raíz cuadrada de la razón de AB a CD: lo que se quería demostrar.[18]

Ahora, si a nuestro propósito aplicamos lo hasta aquí demostrado; suponiendo que el cilindro de plata, que al ser dorado no tenía más de medio codo de longitud y un grosor de dos o tres veces el dedo pulgar, después de haber sido adelgazado hasta la finura de un cabello, se alargó hasta veinte mil codos (y acaso más), nos hallaríamos con que la superficie aumentó doscientas veces más de lo que era. En consecuencia, los diez panes de oro sobrepuestos, se extendieron en una superficie doscientas veces mayor, dándonos la certeza de que el oro que cubre la superficie de tantos codos de hilo, no tiene más espesor de una vigésima parte de un pan ordinario de oro batido. Imaginaos ahora, cuál sea su tenuidad, y si es posible que se haya conseguido sin una inmensa expansión de partes; y si este experimento no nos lleva a admitir que los cuerpos físicos (*materie fisiche*) están compuestos de infinitos indivisibles. Bien es verdad que esta tesis está corroborada por otros argumentos más concluyentes y de mayor peso.

SAGREDO. La demostración me parece tan bella, que aun cuando no tuviera la fuerza de persuadirnos, en cuanto al original propósito a que se destinaba (aunque a mi parecer tiene mucha), de todos modos, ha sido muy bien empleado el tiempo dedicado a escucharla.

SALVIATI. Ya que tanto gustáis de estas demostraciones geométricas, aportadoras de conquistas seguras, os diré la compañera de ésta que da satisfacción a una curiosísima pregunta. En la precedente hemos visto lo que acontece con cilindros iguales [en volumen], pero de diferentes alturas o más bien longitudes. No estará mal saber lo que sucede con los cilindros iguales en superficie, pero desiguales en altura; entendiendo sólo las superficies [laterales] que los circundan, o sea no comprendiendo las dos bases, superior e inferior. Digo, pues, que:

Los cilindros rectos, cuyas superficies, no incluyendo las bases, son iguales, tienen entre sí la misma proporción que la de sus alturas, tomadas inversamente.

Sean iguales las superficies de los dos cilindros AE, CF pero mayor la altura de CD que la altura de AB.

[Sup. AE = Sup. CF ; CD > AB]*

Digo que el cilindro AE guarda con el cilindro CF la misma proporción que guarda la altura CD con la AB.

[Sup. AE : Sup. CF = CD : AB]

Por ser la superficie CF igual a la superficie AE, será el cilindro CF menor [en volumen] que el AE, pues de

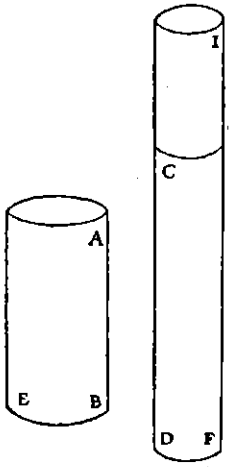

Fig. 11

* Las fórmulas que van intercaladas entre [ ] en cuerpo más pequeño, interpretan en el simbolismo matemático, la expresión anterior. (Ver nota 19.)

ser igual, sería su superficie mayor que la superficie AE, de acuerdo a la proposición precedente; y con mayor razón lo sería, si este mismo cilindro CF fuese más grande que AE. Supongamos el cilindro ID igual [en volumen] al AE.

$$[\text{Vol. ID} = \text{Vol. AE}];$$

entonces, por el teorema precedente, la superficie del cilindro ID es a la superficie del AE, como la altura IF es a la media proporcional entre IF y AB.

$$[\text{Sup. ID} : \text{Sup. AE} = \text{IF} : \sqrt{\text{IF x AB}}]$$

Pero siendo, por dato [del problema], la superficie AE igual a la CF, y guardando la superficie ID con respecto a la CE la misma proporción que la altura IF con la CD, se sigue que la CD es media proporcional entre IF y AB.

$$[\text{Sup. ID} : \text{Sup. CF} = \text{IF} : \text{CD} = \text{Sup. ID} : \text{Sup. AE}]$$

y comparando con la anterior:

$$[\text{CD} = \sqrt{\text{F X AB}} ; \text{IF} : \text{CD} = \text{CD} : \text{AB}]$$

Por otra parte, siendo el cilindro ID igual [en volumen] al cilindro AE, ambos tendrán una misma proporción con el cilindro CF; pero el ID es al CF como la altura IF es a la CD; luego el cilindro AE tendrá con el CF la misma proporción que la línea IF con la CD, es decir, la misma que CD tiene con AB;

$$[\text{Vol. AE} : \text{Vol CF} = \text{Vol. ID}: \text{Vol. CF} = \text{IF} : \text{CD} = \text{CD}: \text{AB}]$$

lo que se quería demostrar.[19]

Aquí radica la explicación del siguiente hecho, que llama la atención de las gentes del pueblo; cómo puede suceder que una misma pieza de tela más larga que ancha, si se hace con ella un saco, para meter el trigo, según se acostumbra hacer poniéndole el fondo de tabla, tenga más capacidad, si usamos para altura del saco la parte ancha de la tela, que si hacemos lo contrario; vale decir, que si la tela tuviera seis codos de ancho y doce de largo, tendrá más capacidad al rodear la tabla del fondo con los doce de largo, quedando el saco de seis codos de altura, que si se rodea el fondo con los seis de ancho, quedando el saco de doce por altura. Ahora, de lo demostrado se deduce no sólo el dato genérico de que tiene más capacidad en un sentido que en otro, sino también el conocimiento específico y particular de cuánto mayor es esa capacidad; la cual será tanto mayor, cuanto más bajo sea el saco, y tanto menor cuanto más alto. Así en las medidas antedichas, siendo la tela doble más larga que ancha, cosida a lo largo, contendrá la mitad menos que cosida a lo ancho. Del mismo modo si tenemos una estera de veinticinco codos por siete, para hacer un escriño; doblada longitudinalmente, contendrá tan sólo siete medidas, de las mismas que contendría veinticinco, de haber sido doblada a lo ancho.[20]

SAGREDO. De este modo voy, con particular complacencia, adquiriendo nuevos conocimientos curiosos y útiles a la vez. Mas en lo tocante al último tópico tratado, creo que entre las personas ignaras de la geometría, no habrá un cuatro por ciento que no se equivoquen, creyendo que los cuerpos con superficies iguales, son en todo iguales [en volumen]. En el mismo error se incurre cuando se habla de las superficies, al determinar, como muchas veces sucede, las dimensiones de distintas ciudades; pues se cree tener conocimiento cabal, cuando se conoce la longitud de sus murallas, sin advertir que puede haber dos murallas iguales, y ser mucho mayor el espacio contenido en una que el contenido en la otra. Y sucede esto no sólo entre las superficies [de polígono] irregulares, sino también entre las de los regulares, de los cuales los de mayor número de lados tienen siempre mayor superficie que los de menos lados; de modo que el círculo, como polígono de infinitos lados, es el polígono de mayor superficie entre todos los polígonos de igual perímetro. Recuerdo haber visto con especial complacen-

cia esta demostración al estudiar la Esfera de Sacrobosco, ayudado de un erudito comentario.

SALVIATI. Es muy cierto; y además, al hacerme recordar este pasaje me diste ocasión de encontrar, según se deduce de una brevísima y sencilla demostración, que el círculo es la mayor [en superficie] de todas las figuras isoperímetras, y que, entre las demás figuras, las de mayor número de lados son mayores que las de menor número.

SAGREDO. Y yo que encuentro especial placer en ciertas proposiciones y demostraciones escogidas y no triviales, te ruego, aún a pique de resultarte importuno, que nos hagas copartícipes de tu demostración.

SALVIATI. Puedo hacerlo con muy pocas palabras, demostrando el siguiente teorema:

> *El círculo es medio proporcional entre dos polígonos cualesquiera regulares y semejantes entre sí, de los cuales uno le esté circunscripto y el otro le sea isoperímetro. Por otra parte, siendo el* [área] *círculo el menor de todos los polígonos circunscriptos, es por lo contrario el mayor de todos los isoperímetros. Además, de entre los mismos polígonos circunscriptos, los que tienen más ángulos son menores que los que tienen menos; pero a lo contrario, de entre los isoperímetros, los que tienen más ángulos son mayores.*

Sean los dos polígonos semejantes A y B, el A circunscriba al círculo A, y el B sea isoperímetro con el mismo círculo: digo que el círculo es medio proporcional entre los polígonos. En efecto: (trazado el radio AC), y siendo todo círculo igual a un triángulo rectángulo, de cuyos catetos uno sea igual al radio AC y el otro igual a la circunferencia; y de modo similar, siendo el polígono A igual al triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos sea igual a la misma recta AC, y el otro igual al perímetro del mismo polígono; es evidente que el polígono circunscripto guar-

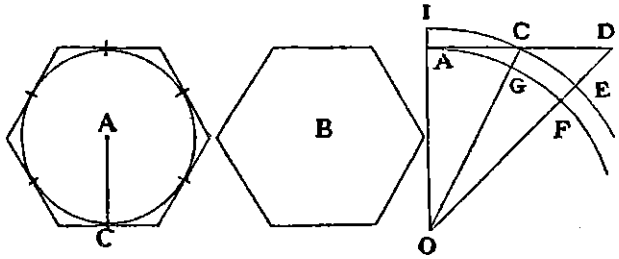

Fig. 12

da con el círculo la misma proporción que su perímetro guarda con la circunferencia del mismo círculo, o sea con el perímetro del polígono B, que suponemos ser igual a dicha circunferencia.

$$\left[\frac{\text{Sup. A}}{\text{Sup. circ.}} = \frac{\text{perím. A}}{\text{circunf.}} = \frac{\text{perím. B}}{\text{perím. A}}\right]$$

Pero, siendo figuras semejantes, los polígonos A y B, el [área de] A será a B, como el cuadrado de su perímetro es al del perímetro de B.

$$\left[\frac{\text{Sup. A}}{\text{Sup. circ.}} = \frac{(\text{Perím. A})^2}{(\text{Perím. B})^2} = \frac{(\text{Sup. A})^2}{(\text{Sup. circ.})^2}\right]$$

Luego el [área del] círculo A es medio proporcional entre [las áreas de] los polígonos A y B.

$$\left[\frac{\text{Sup. A}}{\text{Sup. circ.}} = \frac{\text{Sup. circ.}}{\text{Sup. B}}; \text{ c.d. d.}\right]$$

Y siendo el [área del] polígono A mayor que la del círculo A, es claro que el [área del] círculo A es mayor que la del polígono B, su isoperímetro, y en consecuencia, es el mayor de todos los polígonos regulares isoperímetros del círculo.

En cuanto a la segunda parte, que consistía en demostrar que entre los polígonos que circunscriben un mismo círculo, el que tiene menos lados es [de área] mayor que el que tiene más lados; y que por el contrario, de entre los polígonos isoperímetros el que tiene más lados es [de área] mayor que el que tiene menos lados; demostraremos así. En el círculo cuyo centro es O y radio OA, trazar la tangente AD, y en ella admitamos, por ejemplo, que AD es la mitad del lado de un pentágono circunscripto, y AC la mitad del lado de un heptágono; tracemos las rectas OGC, OFD, y con centro O y distancia OC descríbase el arco ECI. Ahora, por ser el triángulo DOC mayor que el sector EOC, y el sector COI mayor que el triángulo COA.

$$[\text{Triáng. DOC} > \text{Sect. EOC}]$$
$$[\text{Sect. COI} > \text{Triáng. COA}]$$

el triángulo DOC tendrá mayor proporción respecto al triángulo COA, que la que el sector EOC tiene respecto al sector COI, o sea que el sector FOG al sector GOA. *Componiendo y permutando*:

$$\left[\frac{\text{Triáng. DOC}}{\text{Triáng. COA}} > \frac{\text{Sect. EOC}}{\text{Sect. COI}} = \frac{\text{Sect. FOG}}{\text{Sect. GOA}}\right]$$

el triángulo DOA guarda mayor proporción con el sector FOA, que el triángulo COA con el sector GOA,

$$\left[\frac{\text{Sect. FOG} + \text{Sect. GOA}}{\text{Sect. GOA}} > \frac{\text{Triáng. DOC} + \text{Triáng. COA}}{\text{Triáng. COA}}\right]$$

$$\left[\frac{\text{Triáng. COA}}{\text{Sect. GOA}} > \frac{\text{Triáng. DOA}}{\text{Sect. FOA}}\right]$$

y diez triángulos DOA, con relación a diez sectores FOA, tendrán mayor proporción que catorce triángulos COA con catorce sectores GOA; es decir, el pentágono circunscripto tendrá con el círculo mayor proporción, que la que tiene el heptágono; por lo cual el pentágono será [de área] mayor que el heptágono. Supongamos ahora un heptágono y un pentágono isoperímetros al mismo círculo; digo que el heptágono es [de área] mayor que el pentágono. Porque, siendo el [área del] círculo, medio proporcional entre la del pentágono circunscripto y la del pentágono su isoperímetro, e igualmente medio proporcional entre la del heptágono circunscripto y la del isoperímetro;

$$\left[\frac{\text{P circ.}}{\text{Círculo}} = \frac{\text{Círculo}}{\text{Pisop.}}\,;\ \frac{\text{H circ.}}{\text{Círculo}} = \frac{\text{Círculo}}{\text{Hisop.}}\right]$$

habiendo sido demostrado, además, que el pentágono circunscripto es mayor que el heptágono circunscripto;

$$[\text{P circ.} > \text{H circ.}];$$

ese pentágono tendrá, respecto al círculo, mayor proporción que el heptágono, o sea que el círculo tendrá mayor proporción a su pentágono isoperímetro que a su heptágono isoperímetro;

$$\left[\frac{\text{P círc.}}{\text{Círculo}} > \frac{\text{H círc.}}{\text{Círculo}}\right] \therefore \left[\frac{\text{Círculo}}{\text{Pisop.}} > \frac{\text{Círculo}}{\text{Hisop.}}\right]$$

por consiguiente, el pentágono es menor que el heptágono isoperímetro.

$$[\text{P isop.} < \text{H isop.}]$$

Lo que se quería demostrar.[21]

SAGREDO. Ingeniosa la demostración y muy aguda.* Pero ¿hasta dónde nos hemos abismado en la geometría, por considerar las dificultades suscitadas por Simplicio? En verdad son de gran peso, y en particular, la referente a la condensación, me parece durísima.

* Después de *"y muy aguda"* Galileo añadió a la edición original, en el ejemplar de que hablamos en [Prólogo del Traductor] lo siguiente:

y que a primera vista parece contener una contradicción; puesto que la causa de ser el polígono de más lados mayor que su isoperímetro de menos lados, proviene de que el circunscripto de más lados es menor que el circunscripto de menos lados. (Fin del agregado.)

SALVIATI. La condensación y la rarefacción son movimientos opuestos; donde se dé una inmensa rarefacción, no podrá negarse una no menos enorme condensación. Pero rarefacciones inmensas, y, lo que causa más admiración, casi instantáneas, las estamos viendo todos los días. ¿No es desmedida la rarefacción de un poco de pólvora de cañón, haciendo explosión en una vastísima mole de fuego? Y fuera de esto, ¿qué decir de la expansión, casi sin límite, de la luz que produce? Y si aquel fuego y esta luz se reuniesen, cosa no imposible, porque ya antes estuvieron contenidos dentro de ese pequeño espacio ¿qué condensación no sería la suya? Vosotros, sólo con fijaros un poco, hallaréis millares de tales rarefacciones, mucho más fáciles de observar que las condensaciones, pues las materias densas son más notorias y accesibles a nuestros sentidos. En el uso de la leña, la vemos con toda facilidad resolverse en fuego y luz, pero no tan fácilmente vemos al fuego y a la luz condensarse para constituir la madera; vemos que los frutos, las flores y otras mil materias sólidas, en gran parte se resuelven en olores, mas no así podemos observar la reunión de los átomos olorosos para constituir los cuerpos olientes. Mas donde falte la observación de los sentidos, debe sustituirla la razón, que bastará para hacernos capaces de comprender el movimiento existente, no sólo en la rarefacción y resolución de los sólidos, sino también en la condensación de las sustancias tenues y rarefactas en sumo grado. Por otra parte, tratemos de especular cómo podrían realizarse la condensación y la rarefacción de los cuerpos capaces de condensarse y rarefacerse, en el supuesto caso de que excluyamos el vacío y la penetrabilidad de los cuerpos; lo que no quita que en la naturaleza puedan existir materias que no admitan tales accidentes, y en consecuencia, no den lugar a eso que tú llamas inconvenientes e imposibles. Finalmente, Simplicio, por un acto de condescendencia para con vosotros los filósofos, me he fatigado especulando, si podrían llevarse a cabo la condensación y la rarefacción sin admitir la penetrabilidad de los cuerpos y la existencia de los espacios vacíos; hechos negados y abominados por vosotros. Si quisierais admitirlos, no hallaríais en mí tan enérgico opositor. Sin embargo, o admitís estas dificultades, o aceptáis mis puntos de vista, o debéis aportar otros más apropiados.[22]

SAGREDO. En cuanto a negar la penetrabilidad, estoy completamente de acuerdo con los filósofos peripatéticos. En cuanto a lo del vacío, quisiera oír ponderar los argumentos con que Aristóteles lo impugna, y las razones con que le replicas tú, Salviati. Simplicio me va a complacer, aduciendo con precisión la prueba del filósofo, y tú, Salviati, la refutación.

SIMPLICIO. Aristóteles, si mal no recuerdo, se rebela contra ciertos [filósofos] antiguos, que introducían el vacío, como necesario para el movimiento, diciendo que no podía efectuarse éste sin aquél. En contraposición con esto, Aristóteles demuestra que, por el contrario, la realización del movimiento (según veremos) destruye la afirmación del vacío. Su procedimiento es el siguiente. Hace dos suposiciones: la primera es de dos móviles de distinta gravedad, moviéndose en idéntico medio; la segunda es de un mismo móvil, moviéndose en distintos medios. En cuanto a la primera supone que los móviles de distinta gravedad, se mueven en un medio idéntico con diferentes velocidades, que mantienen entre sí la misma proporción que sus res-

pectivos pesos, de modo que un móvil, por ejemplo, diez veces más pesado que otro, se moverá con velocidad diez veces mayor. En la segunda suposición, acepta que las velocidades de un mismo móvil, en diferentes medios, tienen entre sí proporción inversa de la que tienen las condensaciones o densidades de tales medios; de modo que si la condensación del agua, por ejemplo, fuese diez veces mayor que la del aire, pretende que la velocidad en el aire debe ser diez veces mayor que la velocidad en el agua. De este segundo supuesto saca él su demostración en esta forma: Puesto que la tenuidad del vacío supera en grado infinito a la corporeidad, por tenue que ella sea, de cualquier medio pleno, todo móvil que en el medio pleno recorra cualquier espacio durante cualquier tiempo, en el vacío tendría que moverse instantáneamente; pero un movimiento instantáneo es imposible; luego es imposible que se dé el vacío en virtud del movimiento.

SALVIATI. Como se ve, el argumento es *ad hominem*,* es decir contra los que admitían el vacío como necesario para el movimiento. Pero si yo concediese que el argumento es concluyente, y concedo simultáneamente que en el vacío no se da movimiento, la posición del vacío tomado absolutamente y no en relación al movimiento, no queda invalidada. Mas para decir lo que tal vez hubieran podido responder los antiguos, a fin de que se aprecie mejor la fuerza probatoria del argumento de Aristóteles, paréceme que podríamos ir contra las suposiciones de aquél, negándolas ambas a dos. En cuanto a la primera, dudo mucho que Aristóteles haya jamás sometido a experimento, si es verdad que dos piedras, una diez veces más pesada que la otra, dejadas caer al mismo tiempo desde una altura, supongamos de cien codos, fuesen de tal modo diferentes en sus velocidades que, al llegar a tierra la mayor, nos halláramos con que la menor no había descendido más de diez codos.

* Argumento "ad hominem" es el que se funda en principios admitidos por el adversario y utilizados por nosotros para refutarlo prescindiendo de su verdad. *(N. del T.)*

SIMPLICIO. Por sus palabras se ve que él da a entender que sí lo ha experimentado, porque dice: *"veremos que el más pesado"*; ahora bien, ese *"verse"* implica la realización del experimento.

SAGREDO. Sin embargo, Simplicio, yo que no he hecho la prueba, te aseguro que una bala de cañón que pese cien, doscientas libras o aún más, no se anticipará ni siquiera en un palmo en llegar a tierra, a una bala de mosquete que pese media libra, aun cuando vengan de doscientos codos de altura.

SALVIATI. Sin ninguna otra experiencia, con sólo una breve y concluyente demostración, podríamos claramente probar no ser verdad que un móvil más pesado, se mueva con más velocidad que otro menos pesado, siendo los móviles de la misma materia y tales como quiere Aristóteles. Pero antes dime, Simplicio, si tú admites que cada cuerpo pesado tiene asignada por la naturaleza su propia velocidad de caída, de tal modo que no se pueda acrecérsela o disminuírsela si no es haciendo uso de una fuerza u oponiéndole resistencia.

SIMPLICIO. No se puede dudar que un mismo móvil en un mismo medio tiene establecida por naturaleza una determinada velocidad, que no se puede acrecer sino confiriéndole nuevo impulso, ni disminuir sino con algún impedimento que la retarde.

SALVIATI. Por consiguiente, si tuviésemos dos móviles de velocidades naturales diferentes, sería de esperar que, uniendo el más tardo con el más veloz, éste sería en parte retardado por el más tardo, y el más tardo en parte acelerado por el más veloz. ¿No eres tú de mi misma opinión?

SIMPLICIO. Creo indudablemente que así debe suceder.

SALVIATI. Pero si esto es así, y es también verdad que una piedra grande se mueve, supongamos, con ocho grados de velocidad, y una menor con cuatro, al unir las dos, el sistema

compuesto tendrá que moverse con velocidad menor de ocho grados; sin embargo las dos piedras unidas, hacen una piedra mayor que la primera, que se movía con ocho grados de velocidad; luego esta más grande se mueve con menos velocidad que la menor:* lo que está contra de tu suposición.

* En lugar de *"luego esta más grande se mueve con menos velocidad que la menor"*, que se lee en el original y en el códice G, Galileo sustituyó sobre el ejemplar del cual se habló [en el Prólogo del Traductor] lo siguiente:

sin embargo, este compuesto (que es mayor que la primera piedra sola) se moverá más lentamente que la primera piedra sola, que es menor.

Ya ves, pues, que del suponer que el móvil más pesado se mueve más velozmente que el menos pesado, yo infiero que el más pesado se mueve más lentamente.

SIMPLICIO. Me hallo desconcertado, porque a mi parecer, la piedra menor unida a la mayor le añade peso, y añadiéndole peso, no veo cómo no ha de añadirle velocidad, o al menos no disminuírsela.

SALVIATI. Aquí cometes otro error, Simplicio, porque no es verdad que la piedra acrezca el peso de la mayor.

SIMPLICIO. ¡Oh! esto sobrepasa mi comprensión.

SALVIATI. No la sobrepasará, sin embargo, una vez que yo te haya hecho ver el equívoco en que andas fluctuando. Advierte que es necesario distinguir, entre los cuerpos pesados puestos en movimiento, y los mismos en reposo. Una gran piedra puesta en la balanza, no sólo adquiere mayor peso al superponerle otra piedra, sino que hasta la añadidura de un copo de estopa, la hará aumentar de peso las seis o diez onzas que pesará la estopa; mas si tú dejaras caer libremente desde lo alto la piedra envuelta en la estopa ¿crees tú que durante la caída, la estopa habrá de gravitar sobre la piedra acelerando su movimiento, o crees más bien que lo retardará, sosteniéndola en parte? Sentimos peso sobre nuestras espaldas, mientras pretendemos oponernos a la caída que realizaría el cuerpo pesado que llevamos encima; pero si nosotros descendiésemos con la misma velocidad con que descendería naturalmente ese peso, ¿cómo quieres que pese y gravite sobre nosotros? ¿No ves que esto sería igual que pretender herir con la lanza a uno que corre delante de ti, con más velocidad de la que llevas tú al perseguirlo? Debes, pues, colegir que en la caída libre y natural, la piedra menor no gravita sobre la mayor, y en consecuencia, no le añade peso, como hace en el reposo.

SIMPLICIO. ¿Y si posamos la mayor sobre la menor?

SALVIATI. Le haría aumentar de peso, si su movimiento fuera más veloz; pero ya hemos quedado en que si la menor fuese más tarda, retardaría en parte la velocidad de la mayor, de modo que el conjunto vendría a ser menos veloz, aun siendo él mayor que la piedra más grande de las dos; lo que va contra tu hipótesis. De esto se deduce, que tanto los móviles grandes como los pequeños, se mueven con igual velocidad, si tienen una misma gravedad específica.

SIMPLICIO. Tu raciocinio se desarrolla admirablemente bien. Sin embargo, se me hace difícil creer que un perdigón de plomo y una bala de cañón se hayan de mover con la misma velocidad.

SALVIATI. Mejor dirías, un grano de arena y una muela de molino. No me gustaría que tú, Simplicio, haciendo como suelen hacer muchos, divirtieras el hilo del raciocinio de su principal intento, y te atuvieses a alguna palabrita mía, que faltase a la verdad en el grueso de un cabello, y que bajo este cabello quisieras esconder errores de algún otro, tan grandes como maroma de navío. Aristóteles dice: "Una bola de hierro de cien libras, cayendo de una altura de cien codos, llega a tierra, antes que otra de una libra haya descendido un solo codo". Yo digo

que llegan al mismo tiempo. Al hacer el experimento, tú te encuentras con que la mayor se anticipa en dos dedos a la menor; es decir que cuando la grande toca tierra, está la otra a dos dedos de distancia. Ahora, querrías esconder bajo estos dos dedos, los noventa y nueve codos de Aristóteles, y hablando de mi error mínimo, pasar en silencio ese otro tan enorme. Aristóteles declara que, móviles de diferente gravedad en un mismo medio, se mueven (por lo que a la gravedad atañe) con velocidades proporcionales a sus respectivos pesos, y lo ejemplifica con móviles, en los que se pueda aislar el puro y neto efecto de la gravedad, eliminando toda otra consideración tanto de sus formas, como de los mínimos momentos (*i minimi momenti*) , cosas que, al recibir del medio grandes alteraciones, alteran el simple efecto de la sola gravedad. Por esta razón vemos al oro, la más densa de todas las substancias, andar flotando por el aire, después de ser batido en finísimos panes; lo mismo hacen las piedras reducidas a finísimo polvo. Pero si tú quieres defender la proposición [como] universal, deberás demostrar que en todos los graves se mantiene idéntica la proporción de las velocidades, y que una piedra de veinte libras, se mueve diez veces más veloz que una de dos; lo que puedo asegurarte que es falso, y que, cayendo de una altura de cincuenta o cien codos, llegan a tierra en el mismo instante.

SIMPLICIO. Quizá tratándose de extraordinarias alturas de millares de codos, sucedería lo que no vemos suceder en estas alturas más pequeñas.

SALVIATI. De haber creído esto Aristóteles, tú le achacarías otro error que sería un embuste; porque como no existen en la tierra tales alturas perpendiculares, es evidente que Aristóteles no pudo verificar el experimento; y sin embargo, intenta persuadirnos de que lo hizo, al decir que tal efecto se "ve".

SIMPLICIO. En realidad Aristóteles no se vale de este principio, sino de aquel otro que parece no ser pasible de tales dificultades.

SALVIATI. Tan falso es el uno como el otro; y me sorprende el que no descubras por ti mismo la falacia, y que no repares en que, si fuera verdad que un mismo móvil en medios de diferente tenuidad (*sottilità*), rarefacción (*rarità*), y consistencia (*cedenza*), como son el aire y el agua, se moviese en el aire con mayor velocidad que en el agua, según la proporción entre la densidad del aire y la del agua, se seguiría que todo móvil que descendiese por el aire, descendería también por el agua. Pero esto es tan falso, que muchísimos de los cuerpos que en el aire descienden, en el agua no sólo no descienden, sino que suben a la superficie.

SIMPLICIO. Yo no comprendo la necesidad de tu deducción; y más diré, Aristóteles habla de los móviles pesados, que descienden en uno y otro medio, y no de los que descienden en el aire, y suben a flor de agua.

SALVIATI. Tú alegas en pro del Filósofo unos descargos, que él rechazaría de plano, para no agravar el primer error. Pero dime si la consistencia (*corpulenza*) del agua, o lo que sea eso que retarda el movimiento, guarda una determinada proporción con la consistencia del aire, que lo retarda menos; y de tenerla asígnasela a tu voluntad.

SIMPLICIO. La tiene; y pongamos que están en proporción de diez a uno; y que por ello la velocidad de un grave que descienda en ambos elementos, será diez veces más lenta en el agua, que en el aire.

SALVIATI. Tomo en seguida uno de esos graves que van hacia abajo en el aire, pero no van en el agua, cual sería una bola de madera, y te ruego que le asignes la velocidad que más te guste, mientras desciende por el aire.

SIMPLICIO. Pongamos que se mueve con veinte grados de velocidad.

SALVIATI. Muy bien. Y no hay duda de que una tal velocidad, con respecto a cualquier otra menor, guardará la misma proporción que guarda la consistencia del agua con la del aire; y entonces esta [menor] velocidad será de dos solos grados. Por consiguiente, en buena ley, conforme a la suposición (*assunto*) de Aristóteles, deberíamos concluir que la bola de madera que en el aire, diez veces menos resistente (*piú cedente*) que el agua, se mueve descendiendo con veinte grados de velocidad, en el agua debería descender con dos, y no venir desde el fondo a la superficie, como lo hace. A no ser que quieras decir que el subir a flor de agua, cuando se trata de madera, es lo mismo que bajar al fondo con dos grados de velocidad; lo que no creo. Pero ya que la bola de madera no va al fondo, espero me concederás que podríamos encontrar alguna otra bola de una materia distinta de la madera, que descienda en el agua con dos grados de velocidad.

SIMPLICIO. Sin duda se podría, pero de una materia mucho más pesada que la madera.

SALVIATI. Esto es lo que voy buscando. Pero esta segunda bola, que en el agua desciende con dos grados de velocidad ¿con qué velocidad descenderá en el aire? Os veréis obligados a responder (de acuerdo a la norma de Aristóteles) que se moverá con veinte grados; pero veinte grados de velocidad le has asignado tú mismo a la bola de madera. Luego ésta y la otra, mucho más pesada, se moverán en el aire con igual velocidad. Ahora bien ¿cómo concilia el Filósofo ésta, su conclusión, con aquella otra de que los móviles de diferente gravedad se mueven en el mismo medio con distintas velocidades, tan distintas como sean sus gravedades respectivas? Pero sin meternos en más profundas consideraciones ¿cómo has hecho tú para no observar propiedades frecuentísimas y en extremo palpables, y no percatarte de que dos cuerpos, que en el agua se moverán cien veces más velozmente el uno que el otro, en el aire puede que el más veloz no aventaje al otro en un solo centésimo? Por ejemplo, un huevo de mármol descenderá en el agua cien veces más rápido que uno de gallina, y sin embargo por el aire, en una altura de veinte codos, no se le anticipará ni en cuatro dedos. En suma, el mismo grave que, en una profundidad de diez codos de agua, llegará al fondo en tres horas, en el aire los atravesará en el tiempo de una o dos pulsaciones, y otros (como ser una bola de plomo) los atravesaría tal vez en menos de doble tiempo.* Y en esto sé bien, Simplicio, que tú comprendes que no hay lugar para ninguna distinción ni respuesta. Concluyamos, por consiguiente, que tal argumento no prueba nada contra el vacío; y aun cuando concluyese, solamente destruirla los espacios notablemente grandes, los cuales ni yo supongo, ni creo que aquéllos supusieran que existen en la naturaleza, aun cuando pudieran tal vez hacerse por fuerza, según parece desprenderse de varios experimentos, que sería largo enumerar aquí.

* En lugar de *"y otros (como ser una bola de plomo) los atravesaría tal vez en menos de doble tiempo"* que se lee en el cód. G y en la edición original, Galileo sustituyó, en el ejemplar de que hablamos en el Prólogo:

Y de este experimento se seguiría que la densidad del agua supera en más de dos mil veces a la del aire; y por el contrario, otro cuerpo (como ser una bola de plomo) atravesará en el agua los mismos 10 codos, quizás en un tiempo poco más del doble de aquel en que atravesaría otro tanto espacio por el aire. (Fin del agregado.)

SAGREDO. Como veo que Simplicio se calla, aprovecharé la ocasión para decir algo yo. Ya que tan palmariamente has demostrado no ser verdad, que móviles de diferente peso, se muevan en el mismo medio con velocidades proporcionadas a sus respectivos pesos, sino con velocidades iguales, bien entendido que se ha de tratar de graves de la misma materia o del mismo peso específico, y no (a mi entender) de diversos pesos específicos (porque no creo que intentes convencernos de que una bola de corcho se mueve con la misma velocidad que una de plomo); y habiendo, además, demostrado muy claramente,

no ser cierto que el mismo móvil en medios de diversa resistencia retenga en su velocidad o lentitud (*tardità*) la misma proporción que las resistencias; me resultaría gratísimo oír cuáles son las proporciones observadas en uno y otro caso.

SALVIATI. Son temas amenos, y muchas veces he meditado en ellos. Te explicaré el razonamiento hecho al respecto, y los resultados a que he llegado. Después de haberme cerciorado de que no es verdad que un mismo móvil, en medios de diversa resistencia, guarde en su velocidad la proporción de las consistencias (*cedenze*) de esos medios; ni que, en el mismo medio, móviles de distinto peso, retengan en sus respectivas velocidades la proporción de esos pesos (entendido también de los pesos específicamente diferentes); comencé a correlacionar estos dos hechos, observando qué sucedería con móviles de diferente peso, puestos en medios de diversas resistencias. Y advertí que la diversidad de velocidades es todavía mayor en los medios más resistentes que en los más fluidos (*cedenti*) ; y esto con tales diferencias, que dos móviles que, descendiendo por el aire, difieren muy poco en velocidad de movimiento, en el agua se moverá el uno con diez veces mayor rapidez que el otro. Aún más; puede haber uno que descienda rápidamente en el aire, y que en el agua no sólo no descienda, sino que permanezca del todo privado de movimiento, y lo que es todavía más, que suba a flote: porque podremos quizás hallar alguna clase de madera, o algún nudo o raíz de aquellos que puedan mantenerse en reposo en el agua, y que desciendan velozmente en el aire.

SAGREDO. Muchas veces me he empeñado, con toda mi paciencia, en reducir al mismo peso del agua una bola de cera, que de por sí sola no se va al fondo, añadiéndole granos de arena, hasta que se mantuviese en suspensión en medio de aquélla; pero nunca, por más solicitud que empleara, llegué a conseguirlo. Por ello yo no sé si podremos hallar otra substancia que, por naturaleza, sea en su gravedad tan semejante al agua, que puesta en ésta pueda sostenerse a cualquier altura.

SALVIATI. En esto, como en mil otras actividades, son algunos animales más diligentes que nosotros. En tu caso, los peces hubieran podido darte una lección, por ser tan peritos en esta habilidad, que a su propio arbitrio mantienen el equilibrio, no sólo en una clase de agua, sino también en las que difieren entre sí notablemente, ya por propia naturaleza, ya porque sobreviene una turbia, ya por saladura, cosas que llevan consigo grandes diferencias. Se equilibran, digo, tan exactamente que sin moverse un ápice, permanecen en quietud a cualquier profundidad. Esto, a mi parecer, lo consiguen, sirviéndose de un órgano que a tal efecto les ha dado la naturaleza; es decir, de la vejiguilla [natatoria] que tienen en el cuerpo, y que por un meato angostísimo se les comunica con la boca, por el cual, a voluntad, o expulsan parte del aire, contenido en dicha vejiguilla, o subiendo a flor de agua, tragan más aire, haciéndose, con tal maña, más o menos pesados que el agua, y manteniendo el equilibrio a su placer.

SAGREDO. Valiéndome yo de otro ardid, engañé a varios amigos, ante quienes me había jactado de conseguir un justo equilibrio entre aquella bola de cera y el agua. Eché en el fondo del vaso un poco de agua salada, y encima otra dulce; así pude mostrarles la bola parada en medio del agua, y volviendo siempre hacia el medio cuando se la empujaba hasta el fondo o se la subía a la superficie.

SALVIATI. No carece de utilidad este experimento; porque tratando, en especial los médicos, de las diversas propiedades del agua, entre ellas principalmente de la mayor levedad o gravedad de una sobre otra; con una bola semejante, equilibrada de modo que quede dudosa, por así decir, entre descender y ascender en una misma agua, por mínima que sea la diferencia de peso entre dos aguas, si tal bola desciende en una, ascenderá en la otra, que sea más pesada. Y es tan exacto este experimento que será suficiente agregar dos granos de sal a seis libras de agua, para hacer salir del fondo a la superficie la misma bola que antes había descendido. En confirmación de la exactitud

de esta experiencia, y al mismo tiempo, como prueba clara de que el agua no ofrece resistencia a su división, te diré, además, que no sólo el hacerla más pesada, mezclándola con substancias más graves que ella, produce tan notable diferencia, sino que también el calentarla o enfriarla un poco, produce el mismo efecto, y con tan sutil reacción (*operazione*), que cuatro gotas de otra agua un poco más caliente o un poco más fría, añadidas a las seis libras, harán que la bola ascienda o descienda: descenderá echándole la caliente, ascenderá agregándole la fría. Ya ves, por consiguiente, cómo se engañan esos filósofos que quieren poner en el agua alguna viscosidad u otra adherencia de partes, que la hagan resistente a la división y penetrabilidad.

SAGREDO. Acerca de esto he leído razonamientos muy concluyentes en un tratado de nuestro Académico. Pero me queda un vivo escrúpulo, del que no puedo librarme; porque si entre las partes del agua no hay ninguna clase de tenacidad ni cohesión ¿cómo pueden sostenerse esas enormes gotas en relieve, especialmente sobre las hojas de las coles, sin aplanarse ni resbalar?

SALVIATI. Aunque sea muy cierto que quien tiene la verdad de su parte, puede resolver cuantas objeciones le sean puestas en contra, yo no me preciaré de poder hacerlo; sin que por eso deba mi ineptitud deslustrar el candor de la verdad. En primer lugar, yo confieso no saber a qué se debe el que se sostengan tan hinchados y grandes esos globos de agua, aunque sé muy bien que no deriva de una cohesión interna de sus partes; por lo tanto, la razón de tal efecto debe residir necesariamente afuera. Que no es interna, lo prueban los experimentos aducidos, y lo confirma este otro de suma eficacia. Si las partes de esa agua que se sostiene en forma esférica, mientras el aire la circunda, obedecieran a una causa interna para proceder así, con mucha mayor razón se sostendrían al estar circundadas por un medio en el que tuviesen, para caer, menos propensión de la que tienen en el aire ambiente. Un tal medio sería cualquier fluido más grave que el aire, v. g., el vino; y entonces el vino,

al ser vertido alrededor del globo de agua, podría ir elevándose, elevándose en torno, sin que las partes del agua, conglutinadas entre sí por la viscosidad interna, se disolvieran. Pero no les sucede esto; antes al contrario, no bien se pone esa agua en contacto con el licor que la rodea, sin esperar a que éste se eleve mucho a su alrededor, se disuelve y extiende, quedándosele debajo, si el vino es tinto. Luego la causa de tal efecto es externa, y quizá procede del aire ambiente. Y efectivamente hay un gran antagonismo entre el aire y el agua, antagonismo que yo he podido observar en el siguiente experimento. Si yo lleno de agua una esfera de cristal, que tenga un orificio del calibre de una paja, y una vez llena le doy vuelta dejándola boca abajo; no por ello, el agua, aunque pesadísima y siempre dispuesta a descender por el aire, y el aire, aunque ligerísimo y siempre pronto a subir por el agua, se ponen de acuerdo, aquélla en descender saliendo por el orificio, y éste en subir, entrando, sino que ambos a dos permanecen reacios y tercos. Por lo contrario, si aplicamos a ese orificio un vaso lleno de vino tinto, que es casi imperceptiblemente menos pesado que el agua, en seguida lo veremos subir lentamente con trazos rojizos a través del agua, y al agua descender con igual lentitud por el vino, sin merarse en lo más mínimo, hasta que por fin la esfera se llene de vino, y el agua haya descendido al fondo del vaso aplicado debajo. Ahora, ¿qué se puede decir o argumentar, fuera de una incompatibilidad entre el agua y el aire, para mí misteriosa, pero quizás...?[23]

SIMPLICIO. Me siento tentado de la risa, al ver la antipatía que Salviati siente por la [palabra] antipatía, que ni siquiera se decide a pronunciarla; y sin embargo es tan a propósito para resolver la dificultad.

SALVIATI. Sea, pues, ella, en honor a Simplicio, la solución de nuestra duda, y, dejando las digresiones, volvamos a nuestro propósito. Hemos visto que la diferencia de velocidad, en los móviles de gravedad diferente, es muchísimo mayor en los medios más y más resistentes; ¿pero qué más? en un medio de

azogue, el oro no sólo se va a fondo con más rapidez que el plomo, sino que es el único que desciende, mientras los otros metales y piedras, todos salen a la superficie y flotan; sin embargo, entre bolas de oro, de plomo, de cobre, de pórfido o de otras materias pesadas, la diferencia de movimiento por el aire será casi del todo imperceptible, pues seguramente que una bola de plomo, al final de un descenso de cien codos, no se habrá adelantado en cuatro dedos a otra de cobre. Después de ver esto, soy de opinión que si se suprimiese totalmente la resistencia del medio, todas las materias descenderían con la misma velocidad.

SIMPLICIO. Seria afirmación es ésta, Salviati. Sin embargo yo no creeré nunca que en el mismo vacío, si por ventura en él fuera posible el movimiento, se moverían con igual velocidad un trozo de plomo y un copo de lana.

SALVIATI. Poco a poco, Simplicio. No es tan recóndita tu dificultad, ni soy yo tan inavisado, como para creer que no se me haya ocurrido, y que no le haya hallado, en consecuencia, la respuesta. Mas para mi explicación y para tu más fácil inteligencia, oye mi razonamiento. Nos proponemos investigar qué sucedería con móviles de gran diferencia de peso, en un medio cuya resistencia fuese nula, de modo que toda la diferencia de velocidad que se diera entre esos móviles, hubiera que atribuirla a la desigualdad de peso. Y aunque es verdad que un espacio del todo vacío de aire y de cualquier otro cuerpo, aun tenue y penetrable (*cedente*), sería apto para mostrar a nuestros sentidos lo que buscamos; ya que carecemos de un tal espacio, iremos observando lo que sucede en los medios más sutiles y menos resistentes, en comparación con lo que vemos suceder en los otros menos sutiles y más resistentes. Porque si nos encontrásemos con el hecho de que los móviles de diferente peso, difieren cada vez menos en velocidad, a medida que se hallan en medios cada vez más penetrables, y que finalmente, aun con extraordinarias diferencias de peso, en el medio más tenue de todos, si bien no vacío, la diferencia de velocidad es

insignificante y casi imperceptible, paréceme que podremos conjeturar con mucha probabilidad, que en el vacío serían iguales sus respectivas velocidades.[24] Por lo tanto, consideremos lo que sucede en el aire, en el cual vamos a suponer una vejiga inflada, porque ofrece una superficie lisa y de material ligerísimo; el aire que ella lleva dentro, nada o poco pesará, en un medio del mismo aire, porque poco se podrá comprimir. De modo que la gravedad quedará reducida al insignificante peso de la película, que no equivaldrá a la milésima parte del peso de un trozo de plomo tan grande como esa vejiga inflada. Si dejamos caer éstas desde una altura de cuatro o seis codos, ¿cuánto espacio te parece, Simplicio, que se adelantaría en la caída el plomo a la vejiga? Ten la seguridad que no se adelantaría el triple ni siquiera el doble, aun cuando tú ya lo habrías hecho mil veces más veloz.

SIMPLICIO. Podría ser que en el principio del movimiento, o sea en los cuatro o seis primeros codos, sucediese tal como dices; pero en el progreso de un largo trayecto, creo que el plomo la dejaría atrás en el espacio, no sólo seis de las doce partes, sino también ocho y aun diez.

SALVIATI. También yo creo lo mismo, y no dudo que en distancias muy grandes, podría el plomo haber recorrido cien millas de espacio, antes que la vejiga hubiese recorrido una sola. Pero esto, mi buen Simplicio, que tú aduces como hecho en oposición a mi tesis, es lo que con más fuerza la confirma. Es mi intención (lo repito) declarar que no es la diversidad de peso la causa de las diferentes velocidades de los móviles distintos en gravedad, sino que estas diferencias dependen de accidentes exteriores y en particular de la resistencia del medio; de modo que eliminada ésta, todos los móviles se moverían con los mismos grados de velocidad. Esto lo deduzco principalmente de lo que tú mismo admites ahora y que es certísimo; esto es, que las velocidades de los móviles muy diferentes en peso van difiriendo más y más a medida que van siendo mayores y mayores los espacios que ellos atraviesan. Tal hecho no se

daría si dependiese de los diferentes pesos. Porque siendo éstos siempre los mismos, también debería mantenerse siempre la misma proporción entre los espacios recorridos, mientras por el contrario, vemos que la proporción va creciendo siempre a medida que el movimiento continúa. Así, un móvil pesadísimo en un descenso de un codo, no se anticipará a otro muy liviano en la décima parte de tal espacio, pero en una caída de doce codos, se le adelantará en una tercera parte, y en una de cien, le llevará una antelación de 90/100, etc.

SIMPLICIO. Todo está bien, pero, siguiendo tus huellas, si la diferencia de peso en móviles de distinta gravedad no puede ocasionar cambio alguno en la proporción de sus respectivas velocidades, dado que sus pesos no cambian; tampoco el medio, que suponemos ser siempre el mismo, podrá ocasionar alteración ninguna en la proporción de las velocidades.

SALVIATI. Aguda es tu objeción contra mi aserto y es de todo punto necesario resolverla. Digo, por lo tanto, que un cuerpo grave tiene a natura el principio intrínseco de moverse hacia el centro común de gravedad, o sea de nuestro globo terrestre, con movimiento constantemente acelerado, y acelerado uniformemente; es decir, que en tiempos iguales se hacen adiciones iguales de nuevos momentos y grados de velocidad.[25] Esto sucedería, entiéndase bien, siempre que fuesen eliminados todos los obstáculos accidentales y externos, entre los cuales hay uno que nosotros no podemos eliminar, que es el impedimento del medio o elemento pleno, mientras ha de ser horadado y desplazado hacia los lados por el móvil en la caída. A este movimiento transverso, el medio, aunque fluido, penetrable y quieto, se opone con resistencia ora mayor y ora menor progresivamente, según que haya de henderse con más lentitud o con más rapidez para dar paso al móvil; el cual, como he dicho, marcha por naturaleza con movimiento continuamente acelerado, y va, por consiguiente, encontrando continuamente mayor resistencia en el medio, y por ello un retardo y disminución en la adquisición de nuevos grados de velocidad, hasta que finalmente la velocidad llega a tal punto, y la resistencia del medio a tal magnitud, que equilibrándose entre sí, impiden que continúe la aceleración, y reducen al móvil a un movimiento ecuable y uniforme, en el cual continúa manteniéndose indefinidamente.[26] Hay, pues, en el medio, un acrecentamiento de resistencia, no porque cambie su esencia, sino porque se altera la rapidez con que él debe abrirse y desplazarse hacia los lados, para ceder el paso al cuerpo en caída, que va continuamente acelerándose. El ver ahora que, la resistencia del aire al leve momento de la vejiga, es enorme, y al gran peso del plomo es pequeñísima, me hace tener por seguro que si desapareciese el aire del todo, al ofrecer inmensa facilidad a la vejiga, y muy poca al plomo, las respectivas velocidades se igualarían.

Sentado, pues, el principio de que en un medio, donde por razón del vacío o por otra causa cualquiera no existiese resistencia ninguna, que obstaculizara la velocidad del movimiento, las velocidades de todos los móviles serían iguales; podremos muy apropiadamente establecer las proporciones de las velocidades de móviles semejantes y desemejantes en un mismo medio y en diversos medios plenos, y por lo tanto resistentes. Y esto lo conseguiremos con sólo fijarnos en cuánto sustrae la gravedad del medio a la gravedad del móvil; gravedad ésta que es el único instrumento con que el móvil se abre camino, rechazando las partes del medio hacia los lados, operación que no tiene lugar en un medio vacío; y por ello, no hemos de esperar ninguna diferencia proveniente de las diversas gravedades. Y por ser manifiesto que el medio sustrae, de la gravedad del cuerpo contenido en él, un peso igual al de su propia materia desplazada; si hacemos mermar en esa proporción las velocidades de los móviles, que en un medio no resistente serían (según hemos supuesto) iguales, habremos conseguido nuestro intento. Así, por ejemplo, supuesto que el plomo sea diez mil veces más pesado que el aire, y el abenuz solamente mil veces; de las velocidades de estas dos sustancias, que serían iguales tomadas absolutamente o sea suprimida toda resistencia, el aire quita al plomo, de los diez mil grados, uno; pero al abenuz le resta de mil grados, uno; vale decir, de diez mil, diez. Por consiguiente, si el

plomo y el abenuz descendieran por el aire desde una altura cualquiera, la que, quitada la retardación del aire, deberían recorrer en el mismo tiempo, el aire quitará a la velocidad del plomo uno de los diez mil grados pero al abenuz le quita diez de los diez mil. Vale decir, que dividida la altura desde donde parten esos móviles en diez mil partes, el plomo llegará a tierra, dejando atrás al abenuz diez o acaso nueve de las diez mil partes. ¿Y qué otra cosa es esto, sino decir que cayendo una bola de plomo desde una torre de doscientos codos, se anticipará a una de abenuz en menos de cuatro dedos? El abenuz pesa mil veces más que el aire, pero aquella vejiga inflada pesa solamente cuatro veces más: luego el aire sustrae a la velocidad intrínseca y natural del abenuz, uno de los mil grados; pero a la de la vejiga, que tomada absolutamente sería idéntica, el aire le resta de cuatro partes, una. En consecuencia, cuando la bola de abenuz, cayendo de la torre llegue a tierra, la vejiga habrá recorrido sólo tres cuartas partes. El plomo es doce veces más pesado que el agua, y el marfil solamente pesa el doble. Por consiguiente, a sus respectivas velocidades absolutas, que serían iguales, el agua le resta, en el plomo la duodécima parte y en el marfil la mitad. Luego, cuando el plomo haya descendido en el agua once codos, el marfil habrá bajado seis. Raciocinando de acuerdo a este principio, encontraremos que las experiencias, a mi parecer, se ajustan mucho mejor con este cómputo, que con el de Aristóteles. Con un procedimiento semejante encontraremos la proporción entre las velocidades del mismo móvil en diferentes medios fluidos, pero no parangonando las diversas resistencias de los medios, sino considerando los excesos de gravedad del móvil sobre las gravedades de los medios. Por ejemplo, el estaño es mil veces más grave que el aire, y diez veces más que el agua; por consiguiente, dividida la velocidad absoluta del estaño en mil grados, en el aire, que le resta la milésima parte, se moverá con novecientos noventa y nueve grados, y en el agua con novecientos solamente; admitiendo que el agua le reste sólo la décima parte de su gravedad, y el aire la milésima.

Tomemos un sólido poco más grave que el agua, como sería, *verbi gratia*, la madera de roble. Pongamos que, si una bola

de roble pesa, digamos, mil dracmas, un volumen igual de agua pesase novecientas cincuenta, y uno de aire pesara dos; es evidente que de ser su velocidad absoluta de mil grados, en el aire quedaría reducida a novecientos noventa y ocho, y en el agua a cincuenta solamente; dado que de mil grados de gravedad el agua le reste novecientos cincuenta, dejándole sólo cincuenta. Tal sólido, en efecto, se movería casi veinte veces más velozmente en el aire que en el agua, desde que el exceso de su gravedad sobre la del agua es la vigésima parte de la suya propia. Aquí quiero que consideremos que, no pudiendo ir al fondo en el agua, sino las sustancias que la superen en peso específico, y por consiguiente que sean muchos centenares de veces más pesadas que el aire, para establecer cuál es la proporción de sus respectivas velocidades en el aire y en el agua, podríamos sin notable error hacernos cuenta que el aire no resta cosa de importancia a la gravedad absoluta y en consecuencia a la velocidad absoluta de las sustancias. Así pues, una vez hallado distintamente el exceso de gravedad de éstas sobre la gravedad del agua, diremos que la velocidad de estas sustancias a través del aire guarda con respecto a la propia velocidad por el agua, la misma proporción que guarda su gravedad total con relación al exceso de ésta sobre la gravedad del agua. Por ejemplo, una bola de marfil pesa veinte onzas, un volumen igual de agua pesa diecisiete; luego la velocidad del marfil en el aire es a su velocidad en el agua, como veinte a tres, aproximadamente.

SAGREDO. Enorme adelanto he hecho en una materia de por sí tan curiosa y en la que muchas veces, aunque sin provecho, he fatigado mi mente. Nada faltaría para poder llevar a la práctica estas especulaciones, sino hallar el modo de venir en conocimiento de la gravedad del aire respecto a la del agua, y por consiguiente también respecto a otras materias graves.

SIMPLICIO. Mas si nos encontraremos con que el aire, en vez de gravedad tuviera ligereza, ¿qué se debería decir de las anteriores disertaciones, por otra parte tan ingeniosas?

SALVIATI. Convendría decir que han sido realmente aéreas, ligeras y vanas. Pero ¿te atreverías tú a dudar de la gravedad del aire, cuando tienes en Aristóteles un texto clarísimo, que la afirma, diciendo que todos los elementos excepto el fuego, tienen gravedad, aun el mismo aire? Prueba de ello (añade) es que un odre inflado pesa más que desinflado.

SIMPLICIO. El que un odre o balón inflado pese más, yo lo atribuiría, no a la gravedad que pueda tener el aire, sino a los muchos vapores densos que en estas nuestras bajas regiones se mezclan con él; por motivo de los cuales yo diría que se acrece la gravedad del odre.

SALVIATI. No me gustaría que lo dijeras tú, y mucho menos que se lo hicieras decir a Aristóteles: porque si, al hablar él de los elementos e intentar persuadirme por medio de un experimento de que el elemento aire es grave, al llegar a la prueba me dijere: "toma un odre y llénalo de vapores densos, y observa cómo aumenta de peso", yo le diría que aun pesaría más, si lo llenara de harina; pero añadiría en seguida, que un tal experimento prueba que la harina y los vapores densos son pesados, pero en cuanto al aire, me quedaría con la misma duda anterior. Sin embargo, el experimento de Aristóteles es bueno y su proposición es verdadera. No podría decir lo mismo de alguna otra razón, también invocada por un cierto filósofo, cuyo nombre no recuerdo, pero tengo conciencia de haberlo leído, quien argumenta que el aire es más pesado que ligero, porque con mayor facilidad lleva los cuerpos graves hacia abajo que no los leves hacia arriba.

SAGREDO. Bien, a fe. Entonces, según este argumento, el aire deberá ser más pesado que el agua, porque todos los graves son llevados hacia abajo más fácilmente por el aire que por el agua, y todos los cuerpos leves van mejor a flote en ésta que en aquél, todavía más, innumerables graves que descienden en el aire, ascienden en el agua, e innúmeras sustancias se elevan en el agua y caen en el aire. Pero sean los espesos vapores o sea el

aire los causantes de la gravedad del odre, esto en nada se opone, Simplicio, a nuestro propósito de indagar qué sucede con los móviles que se mueven en esta nuestra atmósfera vaporosa. Mas tornando a lo que más me urge, y para más completo y cabal conocimiento de la presente materia, quisiera no sólo tener la certeza de que el aire es pesado (como tengo por seguro) sino también, de ser posible, me gustaría saber a cuánto alcanza su gravedad. Por consiguiente, Salviati, si has de complacerme también en esto, te ruego me hagas el favor de [comenzar].

SALVIATI. Que en el aire haya positiva gravedad, y no al revés, como algunos han creído, ligereza, la que quizá no se encuentre en ninguna sustancia, lo demuestra categóricamente el argumento que nos suministra el experimento del balón inflado, aducido por Aristóteles; porque de ser inherente al aire la cualidad de ligereza absoluta y positiva, al ser aumentado y compreso el aire, acrecería su ligereza, y en consecuencia la tendencia a elevarse: sin embargo, el experimento muestra lo contrario. En cuanto a la segunda pregunta, sobre el modo de investigar su gravedad, yo he procedido de la siguiente manera. He utilizado un frasco de vidrio, de gran capacidad, y de gollete angosto, al que adapté un dedal de cuero, atado muy apretado en la angostura del frasco, teniendo en el casquete (*capo*) de dicho dedal inserta y firmemente asegurada una válvula de balón, por la cual con auxilio de una jeringa hice pasar por fuerza al frasco gran cantidad de aire. Y como el aire es susceptible de extraordinaria condensación, podrán haber cabido en el frasco; otros dos o tres volúmenes de aire iguales al que ya contenía. Después pesé con toda precisión el frasco, con el aire comprimido dentro, en una balanza exactísima, equilibrando el peso con arena muy fina. Abrí después la válvula, dando salida al aire comprimido contenido en el recipiente, y al volver el recipiente a la balanza lo hallé notablemente más liviano. Fui sustrayendo arena del contrapeso, y conservándola aparte, hasta que la balanza quedó en equilibrio con lo restante del contrapeso, es decir con el frasco. No cabe duda de que el peso de la arena recobrada es el del aire introducido por fuer-

za en el frasco y puesto después en libertad. Mas hasta aquí tal experimento me certifica tan sólo que el aire contenido violentamente en el frasco pesaba tanto como la arena recobrada; pero cuánto pese determinada y definitivamente, ni lo sé por ahora ni lo puedo saber, si no mido la cantidad de aquel aire compreso. Para ello es necesario hallar un método, y yo creo haberlo conseguido con cualquiera de los dos procedimientos siguientes. El primero consiste en tomar otro frasco semejante al primero, de gollete angosto, en cuya angostura ciñamos fuertemente también un dedal, que por el otro extremo (*testa*) abrace la válvula de un segundo frasco, quedando atado alrededor con sólido nudo. Este segundo frasco debe tener en el fondo un horado, por el que se pueda introducir un punzón de hierro, para abrir, cuando nos convenga, dicha válvula, y dar así salida al exceso de aire del primer vaso, una vez pesado; pero, este segundo frasco debe estar lleno de agua. Dispuesto el conjunto de la manera indicada, y abriendo la válvula con el punzón, al escaparse impetuosamente el aire y pasar al vaso del agua, hará salir a ésta por el horado del fondo; y es evidente que la cantidad de agua que en tales circunstancias será expulsada, es igual al volumen y cantidad de aire escapado del otro vaso. Recogida tal agua, y vuelto a pesar el vaso aligerado del aire comprimido (se supone que de antemano fue pesado con dicho aire compreso) y retirada del modo indicado la arena superflua, es evidente que ella es el justo peso de un volumen de aire igual al volumen del agua desplazada y recobrada. Pesando ahora esta agua, veremos cuántas veces su peso contiene el peso de la arena recobrada, y podremos afirmar sin error que otras tantas veces es el agua más pesada que el aire. Será, en definitiva, no diez veces, como parece pretender Aristóteles, sino unas cuatrocientas veces más pesada, como demuestra este experimento.[27] El segundo procedimiento es más expeditivo, y puede hacerse con un solo vaso, o sea con el primero, preparado según queda dicho. En él no se ha de meter más aire que el que naturalmente contiene, pero hemos de introducir agua sin dejar escapar nada de aire; éste tendrá por fuerza que comprimirse, obligado a ceder bajo la presión del agua entrante. Hágase entrar la mayor cantidad de agua que sea posible, y se verá que sin gran violencia se podrán introducir los tres cuartos de la capacidad del frasco; póngase en la balanza y pésese escrupulosamente. Hecho esto, y teniendo el vaso con el gollete hacia arriba, ábrase la válvula, dando escape al aire: escapará un volumen igual al del agua contenida en el frasco. Una vez evadido el aire, póngase nuevamente el vaso en la balanza, y se verá que por la pérdida de aire es más liviano. Quitando ahora del contrapeso el peso sobrante, él representará la gravedad de un volumen de aire igual al agua del frasco.

SIMPLICIO. Realmente agudos e ingeniosos son los recursos que has empleado. Pero, si por una parte aparentan dar entera satisfacción al intelecto, por otra parte me llenan de incertidumbre. Porque siendo indubitablemente cierto que los elementos en sus propios ambientes (*regioni*) no son ni leves ni graves, no alcanzo a comprender cómo y dónde aquella porción de aire, que parece haber pesado v. g., cuatro dracmas de arena, pueda realmente tener tal gravedad en el aire, en el cual sin embargo bien puede retenerla la arena que lo contrapesó. Por esa razón creo que la experiencia debería haber sido practicada, no en el aire como elemento, sino en un medio donde el mismo aire pudiese manifestar la propiedad de su peso, si realmente la posee.

SALVIATI. Aguda por cierto es tu objeción, Simplicio, y por ello es necesario o que sea insoluble o que la solución no sea menos sutil. Es claro como la luz que aquel aire que, comprimido, pareció pesar tanto como aquella arena, al ser puesto en libertad en medio de su elemento no puede ya pesar, mientras que la arena seguirá pesando; y por ello, para realizar tal experimento, conviene elegir un medio o lugar en que tanto el aire como la arena, puedan gravitar. El medio, según varias veces hemos dicho, detrae del peso de cualquier sustancia que se sumerge en él, el equivalente del peso de un volumen del mismo medio igual al cuerpo sumergido; de modo que el aire quita al aire toda gravedad. Por consiguiente, para que la prueba pudie-

se ser hecha con exactitud, convendría hacerla en el vacío, donde todo grave acusaría su momento sin ninguna disminución. Y si nosotros pesáramos en el vacío una porción de aire, Simplicio ¿quedarás entonces conforme y seguro del hecho?

SIMPLICIO. Sinceramente sí; pero eso es un desiderátum y un pretender imposibles.

SALVIATI. Por eso mismo deberás quedar mucho más obligado para conmigo, si yo soy capaz de hacer, en obsequio tuyo, un imposible. De todos modos, yo no quiero venderte lo que ya te he regalado, porque ya en el experimento anterior, hemos pesado el aire en el vacío y no en el aire o en otro medio pleno. El que un medio fluido amengüe la gravedad de la masa que en él se sumerge, proviene, Simplicio, de que ese medio se resiste a ser hendido, desplazado y finalmente solevado. Prueba de ello es la presteza con que corre a henchir el espacio ocupado por la masa en él sumergida, tan pronto como ésta desaparece; porque si tal inmersión no le afectase en nada, el medio no reaccionaría contra ella. Ahora dime: cuando tú tienes en el aire el frasco ya lleno del mismo aire que naturalmente contiene, ¿qué escisión, desplazamiento, o en fin qué alteración sufre el aire exterior ambiente de parte de este segundo aire introducido por fuerza en el recipiente? ¿Acaso se agranda el frasco de modo que el medio ambiente deba desplazarse para dejarle lugar? Ciertamente, no. Entonces, podemos decir que el segundo aire no se sumerge en el medio ambiente, al no ocupar espacio, sino que es como si se metiese en el vacío; o mejor dicho, se mete realmente y se difunde en los espacios vacíos incompletamente llenos por el primer aire no condensado. En verdad, yo no alcanzo a ver ninguna diferencia entre dos naturalezas (*costituzioni*) de ámbito y ambiente (*ambito ed ambiente*), cuando en uno el ambiente no presiona al ámbito y en la otra el ámbito no empuja contra el ambiente: tales son la colocación de cualquier sustancia en el vacío, y la del segundo aire comprimido dentro del frasco. Por consiguiente, el peso de este aire condensado, es el mismo que tendría si estuviera libre-

mente esparcido en el vacío. También es verdad que el peso de la arena que lo contrapesó, como estaba al aire libre, sería un poco mayor en el vacío; por ello sería justo decir que el aire que fue pesado, es en realidad algo más leve que la arena usada como contrapeso, es decir tanto como pesase en el vacío un volumen de aire igual al de la arena.*

* Aquí Galileo añadió a la edición original, sobre el ejemplar de que se habló [en el Prólogo del Traductor], el siguiente trozo, que también falta en G:

SAGREDO. Verdaderamente ingenioso recurso que encierra la solución de un problema digno de admiración, al indicarnos, en sustancia y en pocas palabras, el modo, de hallar la gravedad de un cuerpo, que fuere pesado en el vacío, no pesándolo nosotros, sino en un medio, pleno de aire. La explicación es ésta: el aire substrae, de la gravedad absoluta de todo cuerpo grave colocado en él, un peso equivalente a un volumen de aire igual al volumen del mismo cuerpo. De manera que si pudiéramos acoplar con el mismo cuerpo, sin agrandarlo, una cantidad de aire igual a su volumen, pesándolo ahora, obtendríamos el peso absoluto que él pesaría en el vacío, dado que sin acrecentarlo en volumen, se le suma el peso que le restaba el aire como medio. Cuando, pues, en un frasco, ya lleno con el aire que contiene naturalmente, se introduce una cantidad de agua, sin dejar escapar nada del aire contenido, es claro que este aire naturalmente contenido se contrae y condensa en menor volumen, para dar lugar al agua entrante, y es evidente que el volumen del agua introducida ocupa el espacio que dejó un volumen igual de aire al contraerse. Por consiguiente, cuando se pesa en el aire el vaso así acondicionado, no cabe duda de que el peso del agua contiene, además, el peso de un volumen igual de aire; la suma de estos dos pesos es el peso que el agua sola tendría en el vacío. Si pesamos ahora el vaso completo y anotamos aparte el peso total, y después, dando salida al aire comprimido, volvemos a pesar todo el remanente (que por la pérdida del aire habrá disminuido de peso), la diferencia entre estos dos pesos nos dará la gravedad del aire comprimido, de

igual volumen que el agua. Hallando después el peso del agua sola y sumándole este peso, que tenemos aparte y que es el del aire comprimido, obtendremos el peso de la misma agua, sola en el vacío. Para hallar el peso del agua, habrá que sacarla del vaso, pesar el vaso solo y restar este peso del peso del vaso y agua juntos, obtenido antes; se comprende que la diferencia representa el peso del agua sola en el aire. (Fin del agregado.)

SIMPLICIO. Parecíame que los experimentos aducidos dejaban algo que desear; pero ahora quedo completamente satisfecho.

SALVIATI. Todo lo que llevo expuesto hasta ahora, y en particular esto de que la diferencia de gravedad, aunque sea enorme, no influye para nada en la diversificación de las velocidades de los móviles, de modo que, por lo que de ella depende, todos se moverían con igual celeridad, es tan nuevo, y, a primera vista, tan lejos de la verosimilitud, que si no hubiera modo de dilucidarlo y ponerlo más claro que la luz del sol, sería preferible no mencionarlo ni decir de ello una sola palabra. Pero ya que la he dejado escapar de mis labios, conviene que yo no olvide ningún experimento o razón que pueda corroborarla.

SAGREDO. No sólo éste, sino también otros muchos de vuestros asertos están tan lejos de las opiniones y doctrinas comúnmente aceptadas, que de divulgarse entre las gentes, te concitarían gran número de contendores, porque es condición humana que los hombres no vean con buenos ojos el que otros, en el campo de sus mismas actividades, descubran algo, verdadero o falso, no descubierto por ellos. Con marcarlos con el título poco grato a muchos oídos, de innovadores de doctrinas, se ingenian para cortar los nudos que no pueden desatar, y con minas subterráneas echan a perder edificios que, pacientes artesanos, con los instrumentos de costumbre, han ido construyendo. Más en cuanto a nosotros, exentos de tales pretensiones, los experimentos y razones hasta ahora aducidos, bastan para conformarnos. Con todo, si te quedan aún experimentos más palmarios y razones más eficaces, las oiremos con mucho gusto.

SALVIATI. El experimento hecho con móviles tan diferentes de peso como sea posible, haciéndolos caer de cierta altura, para observar si su respectiva velocidad es igual, admite cierta dificultad. Porque si la altura fuera grande, el medio al que el ímpetu del móvil en descenso debe abrir y desplazar lateralmente, ofrecerá mayor resistencia al pequeño momento del móvil más ligero, que a la violencia del más grave; por lo cual en un gran trecho el ligero se quedará atrás, y en alturas pequeñas, se podría dudar si realmente hay diferencia o si no será imperceptible en caso de haberla. Por este motivo di en la idea de reiterar tantas veces la caída desde pequeñas alturas y acumular tantas de estas mínimas diferencias de tiempo, por ventura existentes, entre la llegada del cuerpo pesado y la del cuerpo ligero a sus respectivos términos, que así sumadas hiciesen un tiempo no sólo observable sino perfectamente observable. Por otra parte, a fin de obtener los movimientos más lentos dentro de lo posible, porque en ellos es menor la resistencia del medio, que altera el efecto de la simple gravedad, se me ocurrió hacer descender los móviles sobre un plano inclinado, con poca inclinación sobre la horizontal; ya que en él, no menos que en la vertical, se podrá observar el modo de comportarse los graves de diferente peso. Yendo todavía más lejos, intenté también librarme de cualquier retardo que pudiera originarse del contacto de dichos móviles con el plano en declive. Finalmente cogí dos bolas, una de plomo y otra de corcho, la primera unas cien veces más pesada que la segunda, y suspendí las dos de sendos bramantes sutiles e iguales, de cuatro o cinco codos de longitud, atados en alto. Después, desviadas de la vertical una y otra bola, las puse en libertad simultáneamente, y ellas descendiendo por la circunferencia del círculo descrito por los hilos iguales, que son sus radios, avanzaron más allá de la vertical y retornaron atrás por el mismo camino, reiterando más de cien veces sus idas y venidas; con lo cual dejaron sensiblemente demostrado que la grave va tan a un tiempo con la ligera que

ni en cien oscilaciones, ni en mil, se les anticipa un mínimo momento de tiempo, sino que marchan con vaivén igual en sumo grado. También se percibe la acción del medio, que al dificultar algo el movimiento, disminuye bastante más las oscilaciones del corcho que las del plomo, pero sin hacerlas por ello más o menos frecuentes; así, aun cuando los arcos descritos por el corcho no tuvieran más de cinco o seis grados, y los del plomo cincuenta o sesenta, unos y otros eran recorridos en idénticos tiempos.

SIMPLICIO. Y siendo esto así, ¿cómo no habrá de ser la velocidad del plomo, mayor que la velocidad del corcho, haciendo aquél sesenta grados de recorrido durante el tiempo en que éste hace apenas seis?

SALVIATI. ¿Y qué dirás tú, Simplicio, si ambas a dos recorrieran sus trayectos en un mismo tiempo, cuando el corcho, alejado de la vertical treinta grados, atravesase un arco de sesenta, mientras el plomo, desviado del mismo punto medio sólo dos grados, recorriese un arco de cuatro? ¿No sería ahora relativamente más veloz el corcho? Y sin embargo, el experimento muestra suceder así. Porque observa: separado el péndulo de plomo, v. g., cincuenta grados de la perpendicular y dejado desde allí en libertad, oscila, y pasando casi otros cincuenta grados más allá de la vertical, describe un arco de casi cien grados; y volviendo de por sí mismo hacia atrás, describe otro arco un poco menor, y continuando sus oscilaciones, después de haber cumplido un gran número de ellas, termina por quedar quieto. Todas y cada una de estas oscilaciones se cumplen en sendos tiempos iguales, tanto la de noventa grados, como la de cincuenta, la de veinte, la de diez, y la de cuatro. De modo que, en consecuencia, la velocidad del móvil va siempre disminuyendo, puesto que en tiempos iguales va recorriendo sucesivamente arcos cada vez menores. Algo semejante, y aun podríamos decir idéntico, efectúa el corcho pendiente de un hilo de igual longitud, con la única diferencia de que se reduce a la quietud durante menor número de oscilaciones, por ser menos

apto, debido a su ligereza, para vencer el obstáculo del aire. No obstante, todas sus oscilaciones, grandes y pequeñas, se cumplen en tiempos iguales entre sí e iguales también a los tiempos de las oscilaciones del plomo. En conclusión; es verdad que, si mientras el plomo recorre un arco de cincuenta grados, el corcho recorre uno de diez, el corcho será en este caso más tardo que el plomo; pero sucederá también lo contrario, que el corcho recorra un arco de cincuenta, mientras el plomo recorre uno de diez o de seis; y así, en diferentes tiempos, nos hallaremos con que ora es más veloz el plomo, ora más veloz el corcho. Pero si los mismos móviles pasaran, en los mismos tiempos iguales, arcos también iguales, con toda seguridad se podría decir entonces que sus respectivas velocidades son también iguales.

SIMPLICIO. Yo no sé qué pensar del valor de tu argumento; eso que dices de que uno y otro móvil se mueven ora veloz, ora lento, y ora muy lento, origina en mi mente una confusión que no me deja ver claro, cómo pueda suceder que sus respectivas velocidades sean siempre iguales.

SAGREDO. Si no te es molesto, Salviati, permíteme decir dos palabras. Dime, Simplicio, ¿acaso no admites tú que se pueda asegurar con entera verdad, que las velocidades del corcho y del plomo son iguales, en el caso de que, abandonando el reposo ambos a dos en el mismo momento, y moviéndose por idénticos declives, recorrieran siempre espacios iguales en tiempos iguales?

SIMPLICIO. En este caso no cabe duda, ni habría nada que objetar.

SAGREDO. En los péndulos sucede que cada uno de ellos recorre ya sesenta grados, ya cincuenta, ya treinta, ya diez, ya ocho, ya cuatro, ya dos, etc., y cuando ambos recorren el arco de sesenta grados, lo recorren en el mismo tiempo; en el arco de cincuenta grados emplean el mismo tiempo uno y otro mó-

vil; lo mismo se diga en el arco de treinta, de diez y en todos los demás. De ahí se concluye que la velocidad del plomo en el arco de sesenta grados es igual a la velocidad del corcho en el mismo arco de sesenta grados, y que las velocidades en el arco de cincuenta son también iguales entre sí, y así en los demás; pero no decimos que la velocidad que se da en el arco de sesenta, sea igual a la velocidad dada en el arco de cincuenta, ni ésta igual a la del arco de treinta, etc.; sino que las velocidades van siendo menores a medida que los arcos son también más pequeños. Hecho que se infiere de comprobar por medio de nuestros sentidos, que un mismo móvil emplea tanto tiempo en recorrer un gran arco de sesenta grados, como en recorrer uno más pequeño de cincuenta, u otro muy pequeño de diez, o en suma en recorrer cualquiera de todos los arcos siempre en tiempos iguales. Sin embargo, es verdad que tanto el plomo como el corcho van retardando el movimiento según las disminuciones de los arcos, pero no por ello dejan de ir concordes en mantener la igualdad de las velocidades en todos los arcos iguales (*medesimi*) que ellos recorren. He querido decir esto, más por ver si he captado bien el concepto de Salviati, quien en esto, como en todas sus cosas, es tan diáfano que al resolver, en más de una ocasión, cuestiones no sólo oscuras sino también en apariencia antinaturales e inverosímiles ha dado ocasión (según algunos me han dicho) a uno de los profesores más renombrados, para desestimar sus invenciones, considerándolas triviales, por depender de fundamentos demasiado bajos y vulgares; como si la condición más admirable y más digna de loable estima en las ciencias demostrativas, no fuera el brotar y desarrollarse de principios conocidísimos, entendidos y concedidos de todos. Pero sigamos nosotros alimentándonos de estos livianos manjares.

Ya que Simplicio ha quedado satisfecho de entender y admitir que la gravedad interna de los diversos móviles no tiene la más mínima parte en la diferenciación de sus respectivas velocidades, pues todos, en cuanto de ella depende, se moverían con una misma velocidad; dinos, Salviati, en qué fundas tú las sensibles y aparentes desigualdades de movimiento, y respon-

de a la dificultad de Simplicio, que refirmo yo, de que una bala de cañón se mueve aparentemente con más velocidad que un perdigón de plomo; porque será poca la diferencia de velocidad [en este ejemplo] con respecto a la [diferencia] que le opongo yo, de móviles de la misma materia, de entre los cuales algunos de los mayores descenderán en menos de una pulsación el mismo trayecto, que los menores, en el mismo medio, no atravesarán en una hora, ni en cuatro ni en veinte; tales son las piedras y la diminuta arena, principalmente esa finísima que enturbia el agua, en cuyo medio no logra descender durante horas los dos codos que las chicas, no mucho más grandes, atraviesan en una pulsación.

SALVIATI. Cuál sea la acción del medio en retardar más los móviles, según sean entre sí específicamente menos graves, ya quedó explicado, al hacer ver que esto se funda en la substracción de peso. Pero cómo un mismo medio pueda con tan gran diferencia amenguar la velocidad de móviles sólo en tamaño diferentes, aun siendo de la misma materia y de la misma figura, es cosa que requiere, para su explanación, razonamiento más sutil que el que basta para comprender cómo una figura del móvil más dilatada o un movimiento del medio hecho contra el móvil, retardan la velocidad de éste. Yo reduzco la causa del presente problema a la aspereza y porosidad que se hallan por lo general y acaso necesariamente en las superficies de los cuerpos sólidos; asperezas que durante el movimiento van chocando con el aire. Prueba evidente de ello es el sentir nosotros susurrar los cuerpos, por más redondos que estén, cuando cruzan velozmente por el aire; y no sólo susurrar, sino también silbar y zumbar, si en ellos existen alguna hoquedad o alguna prominencia considerables. También se ve que cualquier cuerpo sólido redondo hace un poco de viento al girar en un torno. ¿Y qué más? ¿No sentimos el notable zumbido, y en tono bastante agudo, que produce la peonza, cuando sobre el suelo gira con gran celeridad? Lo agudo del silbido se va haciendo grave a medida que la velocidad de la rotación va disminuyendo: argumento convincente del roce de las asperezas casi im-

perceptibles de su superficie contra el aire. No hay duda de que, en la caída de los móviles, al rozar estas asperezas con el ambiente fluido, retardarán la velocidad, y más la retardarán cuanto mayor sea la superficie, tal como es la de los sólidos menores comparada con la de los mayores.

SIMPLICIO. Ten a bien esperar un momento, pues comienzo a confundirme. Porque entiendo bien y admito que el rozamiento del medio contra la superficie del móvil retarde el movimiento, y que más lo retarde cuando las superficies sean mayores, siendo igual todo lo demás; pero no comprendo con qué fundamento tú llamas mayor a la superficie de los sólidos menores. Además, si la superficie mayor debe ocasionar mayor retardo, según tú afirmas, los sólidos mayores deberían ser más tardos; lo que no es verdad. Es claro que esta dificultad se resuelve, diciendo que si bien el mayor tiene mayor superficie, tiene también mayor gravedad, y que el impedimento que ofrece la superficie mayor contra la mayor gravedad, no ha de prevalecer sobre el impedimento que ofrece la superficie menor contra la menor gravedad; por ello la velocidad del sólido mayor no deviene menor. Sin embargo no veo por qué razón se deba alterar la igualdad de las velocidades, siendo así que cuanto disminuye la gravedad motriz, otro tanto disminuye el poder de la superficie retardante.

SALVIATI. Resolveré en conjunto todas las dificultades. Por lo tanto tú, Simplicio, admites sin controversia, que si a uno de los móviles iguales de la misma materia y de figura similar (los cuales se moverían indudablemente con igual velocidad), se le disminuye la gravedad tanto como la superficie (conservando, no obstante, la semejanza en la figura), no por ello se disminuiría la velocidad del cuerpo amenguado.

SIMPLICIO. Creo que así debería acontecer, de atenernos a tu teoría, que pretende que la mayor o menor gravedad no influye en la aceleración ni en el retardo del movimiento.

SALVIATI. Yo lo refirmo, y admito también tu afirmación, de la que me parece seguirse, como consecuencia, que si la gravedad disminuyere más que la superficie, en el móvil de tal manera disminuido se daría cierto retardo de movimiento; retardo que iría aumentando en la misma proporción en que aumentara la disminución del peso sobre la disminución de la superficie.

SIMPLICIO. En esto no tengo nada que objetar.

SALVIATI. Pues sábete, Simplicio, que no se puede, en los sólidos, disminuir la superficie en la misma proporción que el peso, manteniendo la semejanza de las figuras. Porque, siendo claro que al disminuir un sólido grave, el peso disminuye tanto como el volumen, dado que el volumen disminuyera más rápidamente que la superficie (conservándose siempre la similitud de las figuras), también la gravedad debería disminuir más que la superficie. Pero la geometría nos enseña que la proporción entre volumen y volumen, en sólidos semejantes, es mayor que entre sus respectivas superficies. Para mejor comprensión, lo explicaré en casos concretos. Figúrate, por ejemplo, un dado de dos dedos de lado, de modo que cada una de sus caras tenga cuatro dedos cuadrados, y las seis, o sea su total superficie, veinticuatro dedos cuadrados. Imagínate después al mismo dado dividido, por medio de tres cortes, en ocho pequeños dados; cada uno de éstos tendrá un dedo de lado, y un dedo cuadrado en cada cara, siendo la superficie global seis dedos cuadrados, mientras el dado entero tenía veinticuatro de superficie. Repara ahora en que el dado pequeño es, en superficie, la cuarta parte de la superficie del grande (como seis lo es de veinticuatro); pero en volumen, es solamente un octavo: luego mucho más amengua el volumen, y en consecuencia el peso, que la superficie. Si continuamos con la subdivisión del dado pequeño en otros ocho, cada uno de estos últimos tendrá una superficie total de un dedo y medio cuadrados, que equivale a una decimosexta parte de la superficie del primer dado; pero su volumen es solamente la sexagésima cuarta parte. Nota, por lo tanto, cómo en estas dos

solas divisiones los volúmenes disminuyen cuatro veces más que sus propias superficies; y si quisiéramos seguir con las subdivisiones hasta reducir el primer sólido a diminuto polvo, encontraríamos la gravedad de los insignificantes átomos centenares y centenares de veces más disminuida que sus respectivas superficies. Esto que te he hecho ver en el ejemplo de los cubos, sucede en todos los sólidos semejantes entre sí, cuyos volúmenes están en proporción sesquiáltera de sus superficies.[28] Hazte cargo, ahora, con cuánta mayor proporción que en los móviles grandes, crece en los pequeños el impedimento originado por el rozamiento de la superficie del móvil con el medio. Si añadimos que las asperezas, en las pequeñísimas superficies de las partículas del polvo sutil, tal vez no son menores que las asperezas en las superficies de los sólidos mayores diligentísimamente pulidos, calcula qué fluido deberá ser el medio y cuán en absoluto deba carecer de resistencia a dejarse hender, para dar paso a tan débil fuerza; y entre tanto, advierte, Simplicio, que no me equivoqué al afirmar hace un momento que las superficies de los sólidos más pequeños son, en comparación, más grandes que las de los mayores.

SIMPLICIO. Quedo completamente convencido. Y tened por cierto que si yo hubiera de volver a comenzar mis estudios, seguiría el consejo de Platón, y comenzaría por las matemáticas, que proceden muy escrupulosamente, según veo, y no admiten como cierto nada que no esté concluyentemente demostrado.

SAGREDO. Gran placer he hallado en esta disertación. Mas antes de pasar adelante, mucho me gustaría oír la explicación de una frase que se me presentó como novedad, cuando hace un momento dijiste que los sólidos semejantes están entre sí en proporción sesquiáltera con sus superficies. Porque he visto y entendido bien la proposición, con su respectiva demostración, en que se prueba que las superficies de sólidos semejantes están en proporción de la segunda potencia de sus respectivos lados, y la otra que prueba que los mismos sólidos están en proporción de la tercera potencia de los mismos lados; pero la

proporción de los sólidos con sus respectivas superficies, ni recuerdo siquiera haberla oído mencionar.

SALVIATI. Tú mismo te das la respuesta, y aclaras la duda. Porque aquella cantidad que es cubo de una cosa, de la cual otra cantidad es cuadrado, ¿no viene a ser sesquiáltera de este cuadrado? Sin duda que sí. Pues bien, si las superficies están en proporción del cuadrado de las líneas, con las cuales están los sólidos en proporción del cubo ¿no podremos decir que los sólidos están en proporción a sesquiáltera con las superficies?

SAGREDO. Perfectamente entendido. Y si bien aún tendría que preguntar algunos otros detalles, atinentes a la materia de que se trata, sin embargo, si seguimos así de digresión en digresión tarde vamos a llegar a nuestro principal tema, sobre la diversidad de caracteres dada en las resistencias que los sólidos oponen a su fractura; por ello, si te place volvamos a tomar el hilo de lo que nos propusimos al principio.

SALVIATI. Dices bien; pero la variedad y multitud de cosas hasta ahora sometidas a examen, nos ha robado tanto tiempo, que muy poco del día nos restará para emplearlo en nuestro tema principal, lleno de demostraciones geométricas, que requieren especial atención. Por ello pienso sería mejor diferir la disertación hasta mañana, no sólo por la razón indicada, sino también porque podría traer conmigo algunas hojas en que tengo anotados por orden los problemas y teoremas, con la enunciación y demostración de las diversas fases de tal tema; las que tal vez no recordaría de memoria en el orden necesario.

SAGREDO. Me someto gustoso a tu parecer, principalmente porque, para terminar la sesión de hoy, tendré tiempo de oír la aclaración a ciertas dudas que me quedaban sobre la materia últimamente tratada. Una de ellas es si debemos estimar que la resistencia del medio pueda ser suficiente para poner término a la aceleración de los cuerpos, cuando éstos son de materia gravísima, de inmenso volumen y de figura esférica; y digo "es-

férica" para elegir la que está contenida en mínima superficie, y por consiguiente menos sujeta a retardación. Otra es acerca de las oscilaciones de los péndulos, y tiene dos puntos: primero, si todas las oscilaciones, tanto las grandes, como las medianas, como las pequeñas se efectúan verdadera y exactamente en tiempos iguales; segundo, cuáles son las proporciones de los tiempos en móviles suspendidos de hilos desiguales, de los tiempos, digo, de sus oscilaciones.

SALVIATI. Cuestiones realmente sugestivas, y, como sucede con todas las verdades, sospecho que cualquiera de ellas que elijamos, traerá en pos de sí tal cúmulo de consecuencias verdaderas y curiosas, que no sé si lo que resta de día nos alcanzará para discutirlas todas.

SAGREDO. Si fueren tan agradables como las pasadas, más grato me será gastar tantos días que no tantas horas, como nos quedan hasta la noche. Y creo que Simplicio no sentirá fastidio en tales razonamientos.

SIMPLICIO. Seguramente que no, y máxime cuando se trata de ciencias de la naturaleza, en torno a las cuales no se leen pareceres o discusiones de otros filósofos.

SALVIATI. Vengo, pues, a la primera, afirmando sin ninguna hesitación, no haber esfera tan grande ni de materia tan pesada que no sea frenada en su aceleración, y reducida a movimiento uniforme durante la continuación del movimiento, por la resistencia del medio, aunque éste sea muy tenue. Porque si un móvil durante su caída fuese capaz de adquirir, con la prosecución de su movimiento, el grado de velocidad que se quiera, ninguna velocidad que le sea conferida por un motor externo, podría ser tan grande, que él la rehusase y la perdiese merced al impedimento del medio; así, una bala de cañón que hubiese descendido por el aire, v. g., cuatro codos, y hubiese adquirido, digamos, diez grados de velocidad y que entrase con éstos en el agua, si la resistencia del agua no fuese suficiente para refrenar en la bala tal ímpetu, ésta lo acrecentaría, o al menos lo conservaría hasta el fondo. Pero no sucede así; antes al contrario, el agua, aunque sólo tenga una profundidad de algunos codos, lo atempera y debilita, de tal modo que el choque contra el fondo del río o del lago será levísimo. En consecuencia, es evidente que el agua que ha sido capaz de despojarlo de tal velocidad durante una brevísima travesía, ya no se la dejará conquistar jamás, ni siquiera en una profundidad de mil codos. ¿Cómo le va a permitir ganarla en mil codos, para quitársela después en cuatro? ¿Y para qué más? ¿No vemos que el inmenso ímpetu de la bala, al ser disparada por el cañón, es amortiguado por la interposición de unos cuantos codos de agua, de tal modo que la bala, lejos de dañar a la nave, apenas si llega a percutirla? También el aire, aunque fluido en sumo grado (*cedentíssima*) atempera la velocidad del móvil en caída, aunque sea muy pesado, como podemos ver en ejemplos similares. Porque si desde la cúspide de una torre altísima tiramos un arcabuzazo hacia el suelo, [la bala] entrará en tierra, menos que si hubiéramos disparado el arcabuz desde cuatro o seis codos de altura; signo evidente de que el ímpetu con que la bala salió del cañón, disparado en la picota de la torre, fue disminuyendo al descender por el aire. Por lo tanto, el descender desde cualquier inmensa altura, no bastará para hacerle adquirir aquel ímpetu, del que la resistencia del aire la priva, si de cualquier modo que sea le ha sido ya conferido. De modo semejante, el destrozo que causará en un muro un impacto de bala disparada por una culebrina a veinte codos de distancia, no creo que lo hiciera, viniendo a plomo desde una distancia tan inmensa como se quiera. Juzgo, por lo tanto, que existe un límite para la aceleración de cualquier móvil natural, que abandona el reposo; así como, que la resistencia del medio termina por reducirlo a movimiento uniforme, en el que se mantendrá indefinidamente.

SAGREDO. En verdad, los experimentos me parecen muy a propósito; pero a pesar de todo, el adversario podría hacerse fuerte, negando que tengan lugar en moles inmensas y muy pe-

sadas, y diciendo que una bala de cañón, cayendo de los cuernos de la luna o de la suprema región del aire, haría mayor percusión que saliendo del cañón.

SALVIATI. No hay duda de que pueden oponerse muchas dificultades, y que no todas se pueden redargüir con experimentos. Sin embargo, en esta objeción, parece haber algo que debe tomarse en cuenta; es decir, que hay mucho de verosimilitud en eso de que al caer un grave desde una altura, adquirirá tanto ímpetu al llegar a tierra, como habría sido necesario para elevarlo hasta la misma altura; como claramente se puede observar en un péndulo muy grave, que al ser desviado cincuenta o sesenta grados de la vertical, adquiere la velocidad y fuerza que son suficientes para volver a impulsarlo hasta una altura igual, prescindiendo, sin embargo, de la insignificancia que le resta el impedimento del aire. Para enviar una bala de artillería a una altura tal, que le fuera suficiente para adquirir un ímpetu tan grande, como el que le da la carga al salir del cañón, debería bastar con dispararla verticalmente hacia arriba con el mismo cañón, y observar después si al volver a caer hace un impacto igual al del choque hecho al ser disparada desde cerca: creo, muy fundadamente, que no sería tan violento. Por ello estimo que la velocidad de la bala, mismo al salir del cañón, sería de aquellas que jamás el impedimento del aire le permitiría adquirir, si descendiese con movimiento natural, partiendo del reposo, desde cualquier gran altura.[29]

Paso ahora a las otras preguntas referentes a los péndulos, materia que a muchos podría parecer demasiado árida, principalmente a aquellos filósofos que se hallan continuamente ocupados en los más profundos problemas de las cosas de la naturaleza; no obstante, yo no quiero despreciarla, alentado por el ejemplo del mismo Aristóteles, en quien admiro por sobre todas las cosas, el que no haya dejado, se puede decir, materia alguna en algo digna de consideración, que él no haya tocado.

Y ahora, acicateado por las preguntas, espero poder decirte alguna de mis ideas referentes a la música, materia nobilísima de la que han escrito tantos grandes hombres y aun el mismo Aristóteles, quien considera acerca de ella curiosos problemas. Por esta razón, si también yo deduzco de algunos experimentos fáciles y tangibles, las razones de ciertas propiedades maravillosas en materia de sonidos, podré esperar que mis razonamientos sean de tu agrado.

SAGREDO. No sólo bien recibidos, sino también, por lo que a mí se refiere, sumamente deseados, como que hallando deleite en todos los instrumentos de música, y habiendo meditado mucho acerca de las armonías, he quedado siempre en dudas y perplejo en lo concerniente a saber de dónde procede que me agrade más una que la otra, y que alguna no sólo no me deleite, sino que me moleste en sumo grado. Después, el trillado problema de las dos cuerdas, templadas al unísono, de modo que al sonido de una vibre la otra y resuene simultáneamente, permanece todavía sin solución para mí; así como tampoco están muy claras las razones de las consonancias y otras peculiaridades.

SALVIATI. Veamos si de estos nuestros péndulos se puede sacar alguna solución a todas estas dificultades. En cuanto a la primera duda sobre si verdadera y realmente un mismo péndulo cumple todas sus oscilaciones, máximas, intermedias y mínimas en tiempos exactamente iguales, yo me remito a lo que ya he oído a nuestro Académico; el cual demuestra bien que el móvil, que descienda por las cuerdas subtensas a cualquier arco, las recorrerá todas necesariamente en tiempos iguales, tanto la subtensa bajo ciento ochenta grados (o sea todo el diámetro), como las subtensas bajo cien, sesenta, diez, dos, medio grados, y la subtensa bajo cuatro minutos, a condición de que todas vayan a terminar en el punto inferior de tangencia con el plano horizontal. Después, acerca de aquellos que descienden por los arcos de las mismas cuerdas, elevados sobre la horizontal y que no sean mayores de un cuadrante, o sea de noventa grados, el experimento demuestra que todos son recorridos en tiempos iguales, pero más breves que los tiempos del trayecto

por las cuerdas; hecho que parece maravilloso, ya que a primera vista parece que debería suceder lo contrario. Porque siendo comunes los puntos extremos del principio y del fin del movimiento, y siendo la línea recta la más corta comprendida entre estos dos mismos términos, parece razonable que el movimiento efectuado sobre ella debiera cumplirse en el más breve tiempo. Sin embargo no es así, sino que el tiempo más breve, y en consecuencia el movimiento más veloz, es el que se lleva a cabo sobre el arco que tiene por cuerda a dicha línea recta.[30] Por lo tanto, en cuanto a la proporción de los tiempos de las oscilaciones de móviles pendientes de hilos de diferente longitud, esos tiempos están en la misma proporción que las raíces cuadradas de las longitudes de los hilos, o si se prefiere, las longitudes están en proporción de la segunda potencia de los tiempos; es decir, están entre sí como los cuadrados de los tiempos. De modo que si se quiere, v. g., que el tiempo de una oscilación de un péndulo, sea doble del tiempo de una oscilación de otro, es necesario que la longitud del hilo de aquél sea cuádruple de la longitud del hilo de éste. Y también, durante el tiempo de una oscilación del primero, efectuará tres oscilaciones el segundo, si el hilo del primero es nueve veces más largo que el del segundo. De donde se sigue que las longitudes de los hilos tienen entre sí la misma proporción que tienen los cuadrados de los números de vibraciones que se efectúan en un mismo tiempo.

SAGREDO. En este caso, si yo he entendido bien, podré cómodamente averiguar la longitud de un cordel pendiente desde una gran altura cualquiera, aun cuando el punto superior de sostén me fuese invisible, y se viera sólo el del extremo inferior. Porque si yo suspendo en el extremo inferior de dicho cordel un grave bastante pesado, y hago que vaya oscilando en vaivén, y que un amigo vaya contando un cierto número de sus oscilaciones, mientras yo voy simultáneamente contando también las oscilaciones de otro móvil suspendido de un hilo de un codo exacto de longitud, yo podré deducir la longitud del cordel, del número de oscilaciones de los dos péndulos, hechas durante un mismo tiempo. Por ejemplo, pongamos que durante el tiempo en que mi amigo haya contado veinte oscilaciones del cordel largo, yo cuente doscientas cuarenta de mi hilo de un codo de longitud; hallando los cuadrados de los dos números veinte y doscientos cuarenta, que son 400 y 57.600, respectivamente, diré que el cordel largo contiene 57.600 medidas de la misma clase de las que mi hilo contiene 400; y como el hilo es de un solo codo, dividiré 57.600 por 400, que me da 144; luego podré decir que el cordel tiene 144 codos de largo.

SALVIATI. No te habrás equivocado ni en un palmo, máxime si el cálculo fue hecho sobre un gran número de oscilaciones.

SAGREDO. Con frecuencia tú me das ocasión de admirar la riqueza y simultáneamente la suma prodigalidad de la naturaleza, mientras de cosas tan comunes, y podría decirse triviales, vas extrayendo datos tan curiosos y nuevos, y casi siempre diversos de lo que uno pudiera imaginarse. Mil veces he observado yo las oscilaciones, en particular de las lámparas que en algunas iglesias penden de cuerdas larguísimas, cuando inadvertidamente las mueve alguno; pero lo más que yo he podido sacar de tal observación ha sido la improbabilidad de la opinión de quienes pretenden que es el medio, es decir el aire, el que mantiene y continúa semejantes movimientos, porque me parece que en ese caso el aire debería tener un gran discernimiento, y al mismo tiempo muy poco que hacer, para gastar horas y horas de tiempo en empujar con tanta regularidad hacia acá y hacia allá un peso en suspensión. Pero que yo hubiese llegado a comprender que un mismo móvil, suspendido de una cuerda de cien codos de largo, desviado del punto muerto una vez noventa grados, y otra un solo grado o medio, empleare tanto tiempo en recorrer este arco mínimo, como en pasar el otro máximo, no creo que yo lo hubiese comprendido jamás, porque aun ahora me parece tener algo de imposible. Ahora estoy esperando que estas mismas simplísimas minucias me proporcionen unas explicaciones de los fenómenos de música, tales que puedan, al menos en parte, aquietar mi mente.

SALVIATI. En primer lugar es necesario advertir que cada péndulo tiene el tiempo de sus oscilaciones de tal modo determinado y prefijado, que resultaría imposible hacerlo mover con un período que no fuera su único período natural. Asga cualquiera con la mano la cuerda de donde pende el peso, y ponga todo el empeño que quiera en aumentarle o disminuirle la frecuencia de sus oscilaciones: se habrá fatigado en vano. Por el contrario, a un péndulo, aunque sea muy grave y esté en reposo, podremos ponerlo en movimiento con sólo soplarle en contra: y su movimiento llegará a ser considerable con sólo reiterar los soplos, pero con una frecuencia que coincida exactamente con la de sus oscilaciones. Porque, si al primer soplo lo hemos removido de la vertical medio dedo, repitiendo el soplo cuando, después de haber vuelto hasta nosotros, comience su segunda oscilación, le conferiremos nuevo movimiento, y así sucesivamente con otros soplos, pero dados a tiempo y no cuando el péndulo nos viene en contra (porque de lo contrario impediremos, y no ayudaremos su movimiento). Y si persistimos, multiplicando los impulsos llegaremos a conferirle tal ímpetu, que para hacerlo parar, se requerirá una fuerza mucho mayor que la de un soplo.

SAGREDO. Siendo yo niño, vi que un solo hombre, por medio de esta clase de impulsos dados a tiempo, hizo sonar una enorme campana, y al querer después pararla, se agarraron de la cuerda cuatro o seis, todos los cuales fueron levantados en alto, sin que tantos juntos pudieran contrarrestar el ímpetu que uno solo, por medio de empujoncitos regulados, le había conferido.

SALVIATI. Ejemplo que ilustra mi intento tan esmeradamente, como aptos son mis argumentos para dar razón del maravilloso problema de la cuerda de la cítara o del clavicémbalo, que agita y hace realmente sonar no sólo aquella cuerda que le está acordada al unísono, sino también la octava y la quinta. La cuerda, cuando ha sido herida, comienza y continúa sus vibraciones durante todo el tiempo que se siente durar su resonancia; estas vibraciones hacen vibrar y tremer el aire que las circunda, y luego dichos temblores y ondulaciones se propagan por un gran espacio y van a golpear en todas las cuerdas del mismo instrumento, y aun de otros próximos. La cuerda que está templada al unísono con la cuerda pulsada, estando dispuesta para cumplir sus vibraciones con la misma frecuencia, comienza a moverse un poco al primer impulso y al sobrevenirle el segundo, el tercero, el vigésimo y otros más, y todos en tiempos concordes y periódicos, termina por adquirir el mismo temblor de la primeramente pulsada, y se la ve con toda claridad ir dilatando sus vibraciones justamente con la misma amplitud de su motriz. Estas ondulaciones, que van extendiéndose por el aire, agitan y hacen vibrar, no sólo las cuerdas, sino también cualquier otro cuerpo dispuesto para tremer y vibrar con el mismo período de la cuerda vibrante; de manera que si uno fija en los bordes del instrumento varios trozos de cerdas o de otras materias flexibles, se verá que, al sonar el clavicémbalo, treme ya uno, ya otro de los cuerpos, a medida que vaya siendo herida la cuerda, cuyas vibraciones están con él, en un mismo período. Los restantes no se moverán al sonido de esta cuerda; ni éste temblará al sonido de otra cuerda. Si tocamos enérgicamente con el arco una cuerda grave de una viola, acercándole una copa de cristal fino y pulido, cuando el tono de la cuerda esté al unísono con el tono de la copa, ésta tremerá y resonará perceptiblemente. Que se difunde ampliamente la ondulación del medio en torno al cuerpo resonante, se ve claramente al hacer resonar una copa llena de agua, frotando con la yema del dedo sobre el borcellar; porque veremos al agua contenida ondear en orden regularísimo. Mejor todavía se podrá observar el mismo efecto, posando el pie de la copa en el fondo de alguna vasija grande, llena con agua hasta el borcellar de la copa; porque, si como antes, la hacemos resonar rozándola con un dedo, se verá que las ondulaciones del agua se propagan a gran distancia en torno a la copa, con gran velocidad y regularidad. Yo mismo, en varias ocasiones, he podido observar que, haciendo resonar del modo indicado una copa bastante grande y casi llena de agua, al principio se formaban las on-

das en el agua con extraordinaria uniformidad, y si por casualidad el tono de la copa saltaba una octava más alto, en el mismo instante podía ver cómo cada una de dichas ondas se dividía en dos; hecho que demuestra claramente que la frecuencia de la octava es doble.

SAGREDO. Más de una vez me ha ocurrido lo mismo, con gran contento y también utilidad míos. Porque durante mucho tiempo he estado perplejo acerca de las esencias de las consonancias, no pareciéndome que las razones comúnmente aducidas por los autores que hasta ahora han escrito doctamente de la música, fueran del todo concluyentes.* Afirman éstos, que el diapasón, o sea la octava, está contenida por la razón 2:1 (*dupla*),** y que la diapente, que nosotros llamamos quinta, está contenida por la razón 3:2 (*sesquialtera*), etc.; porque, tensa una cuerda sobre el monocordio, si se percute primero toda, y sólo la mitad después, poniéndole un puente en medio, se oye la octava, y si el puentecillo se pone al tercio de toda la cuerda, percutiéndola entera y después los dos tercios, nos da un intervalo de quinta; por lo cual dicen que la octava está contenida entre el dos y el uno, y la quinta entre el tres y el dos. Esta razón, digo, no me parecía concluyente, para poder estatuir en buena ley las razones 2:1 y 3:2, como frecuencias naturales del diapasón y de la diapante. Mi motivo era el siguiente: hay tres modos de hacer más agudo el sonido de una cuerda: el primero es, acortándola; el segundo es, estirándola más, vale decir templándola; el tercero es, adelgazándola. Reteniendo la misma tensión y el mismo grosor de la cuerda, si queremos oír la octava, hay que acortarla a la mitad, es decir pulsarla toda y después la mitad. Pero si, reteniendo la misma longitud y grosor, queremos, tendiéndola más, hacerla subir a la octava, no

* Son indudablemente autores que están dentro de la corriente pitagórica, tal vez por ello Galileo puso esa explicación en boca de Sagredo. *(N. del T.)*

** Las razones numéricas 3:2, 2:1, 9:4, 4:1 no están así anotadas en el original, sino expresadas en términos latinos, los que hemos dejado entre paréntesis por lo menos una vez cada uno, por respeto al original. *(N. del T.)*

basta con tenderla el doble más, sino que se necesita el cuádruplo; de modo que si primero estaba tensa con el peso de una libra, tendremos que suspenderle cuatro, para agudizarla hasta la octava. Por fin, si conservando la misma longitud y tensión, queremos una cuerda que, por ser más delgada, nos dé la octava, será necesario que conserve sólo la cuarta parte del grosor de la otra más grave. Y esto que digo de la octava, es decir, que su esencia, derivada de la tensión y del grosor de la cuerda, está en razón del cuadrado de la que se deriva de su longitud, puede aplicarse a todos los intervalos musicales. Porque aquello que nos da la longitud en la razón 3:2 (*sesquialtera*), es decir, al pulsarla primero toda y después los dos tercios, si queremos obtenerlo con la tensión o la delgadez, nos será necesario cuadrar la razón 3:2, tomando la razón 9:4 (*dupla sesquiquarta*), y si la cuerda grave estaba tensa con cuatro libras de peso, suspenderle a la aguda, no seis, sino nueve; y en cuanto al grosor, hacer a la cuerda grave más gruesa que la aguda en la proporción de nueve a cuatro, para obtener la quinta. Sentados estos experimentos en todo verdaderos, tuve la impresión de que esos sagaces filósofos no tenían fundamento alguno para establecer que la forma de la octava fuese la razón 2:1, más bien que la 4:1 (*quadrupla*), y que la quinta fuese la 3:2, más bien que la 9:4. Pero, como el contar las vibraciones de una cuerda, que al emitir sonido las hace frecuentísimas, es de todo punto imposible, hubiese quedado siempre con la duda de si sería cierto que la cuerda de la octava, más aguda, efectúa en un mismo tiempo doble número de vibraciones que la más grave, si las ondas, persistentes durante todo el tiempo que queramos, al hacer resonar y vibrar la copa, no me hubiesen demostrado sensiblemente, cómo en el mismo instante que uno siente saltar el tono a la octava, se ven originar otras ondas más pequeñas, que con infinita precisión dividen por la mitad a cada una de las primeras.

SALVIATI. Espléndida observación para poder distinguir una por una las ondas originadas por el vibrar del cuerpo que resuena; las mismas que después, difundidas por el aire, llegan a pro-

ducir en el tímpano de nuestros oídos la titilación que en el alma deviene sonido.[31] Pero ya que en el agua no podemos verlas y observarlas, sino durante el tiempo que perdura la fricción hecha con el dedo, y aun durante este mismo tiempo no son permanentes, sino que continuamente se están haciendo y deshaciendo, ¿no sería interesante, si uno pudiera hacer, con extraordinaria destreza, algunas que perduran largo tiempo, como meses o años, de modo que nos dieran la facilidad de poder medirlas y numerarlas cómodamente?

SAGREDO. Sinceramente, yo estimaría en mucho una tal invención.

SALVIATI. El descubrimiento fue del acaso, y mía fue sólo la observación, y el haber hecho de ella un recurso fundamental para probar una noble meditación, aunque en sí misma sea una vulgar hechura. Raía yo con un cincel de hierro cortante una lámina de latón, para quitarle algunas manchas; al ludir sobre ella con velocidad el cincel, oí por una o dos veces, entre muchos ludimientos, chirriar y salir un silbido muy agudo y claro; al mirar sobre la lámina, vi una gran serie de rayitas finísimas, paralelas y equidistantes unas de otras con distancias exactamente iguales. Volviendo a raer reiteradas veces, advertí que solamente en los ludimientos acompañados de chirrido, dejaba el cincel esas estrías sobre la lámina; mas cuando el ludimiento pasaba sin silbido, no quedaba ni la más mínima sombra de tales rayitas. Habiendo repetido después el juego varias veces, haciendo deslizar el cincel, ora con mayor, ora con menor velocidad, el silbido sobrevenía ya de tono más agudo, ya de tono más grave. Noté que las señales hechas durante el sonido más agudo estaban más juntas, y en el más grave más ralas, y aun a veces también, si un mismo ludimiento adquiría mayor velocidad hacia el final que hacia el principio, iba agudizándose el tono, y las rayitas se iban haciendo más numerosas, pero siempre marcadas con primor y con absoluta equidistancia. Además, en los ludimientos sibilantes, yo sentía temblar el hierro en mi puño y correr por la mano un

cierto estremecimiento. En suma, se ve y se siente que el hierro hace lo mismo que hacemos nosotros, cuando hablamos en voz baja y emitimos después una voz fuerte, porque cuando emitimos el aliento sin producir sonido, no sentimos producirse movimiento ninguno ni en la garganta ni en la boca, en comparación y respecto al gran temblor que sentimos producirse en la laringe y en las fauces al emitir la voz, principalmente cuando lo hacemos en tono grave y fuerte. También alguna vez pude notar entre las cuerdas del clavicémbalo, dos unísonos con los dos silbidos producidos al ludir del modo antedicho, y de lo más diferentes en tono; dos de los cuales precisamente distaban una quinta perfecta. Cuando después medí los intervalos de las estrías de uno y de otro ludimiento, vi que la extensión que contenía cuarenta y cinco espacios de una, contenía treinta de la otra, tal como es la frecuencia que se atribuye a la diapente. Pero aquí, antes de pasar adelante, quiero advertirte que de las tres maneras de hacer agudo un sonido, la que tú atribuyes a la sutileza de la cuerda, debe en realidad de verdad atribuirse al peso. Porque la alteración derivada del grosor corresponde cuando las cuerdas son de un mismo material. Así una cuerda de tripa, para hacer la octava, debe ser cuatro veces más gruesa que la otra también de tripa; y una de latón, cuatro veces más gruesa que otra de latón. Pero si yo, con una cuerda de latón, quiero hacer la octava a otra de tripa, no la he de hacer cuatro veces más gruesa, sino cuatro veces más pesada; de modo que, en cuanto al diámetro, esta de metal no será, sin embargo, cuatro veces más gruesa, sino cuádruple en peso, y tal vez sea más sutil que la que le corresponde en la octava más aguda, y que sea de tripa. Por ello sucede que encordando un clavicémbalo con cuerdas de oro y otro con cuerdas de latón, si fueren de la misma longitud, grueso y tensión, al ser el oro dos veces más pesado, alcanzará la encordadura a casi una quinta más grave. Y nótese aquí cómo la gravedad del móvil ofrece más resistencia que el grosor a la velocidad del movimiento, contra lo que pudiera creerse a primera vista. Porque parece muy razonable que la velocidad debería ser retardada por la resistencia del medio a ser hendido, más

en un móvil grueso y ligero, que en otro pesado y sutil. Sin embargo, en este caso sucede lo contrario.

Mas volviendo a nuestro primer propósito, digo que la razón próxima e inmediata de la esencia de los intervalos musicales, no es la longitud de las cuerdas, ni la tensión, ni el grueso, sino la proporción de los números de vibraciones y sacudidas de las ondas del aire que vienen a herir el tímpano de nuestros oídos, obligándolo a vibrar también con la misma frecuencia. Sentado esto, podremos quizá explicar muy razonablemente de dónde provenga el que algunos pares de esos sonidos, de tono diferente, sean percibidos con gran deleite por nuestros oídos, otros con menos y otros nos hieran con gran molestia. Ésta es la razón de las consonancias más o menos perfectas y de las disonancias. Lo molesto de éstas nacerá, creo yo, de las pulsaciones discordes de dos diversos tonos, que golpean sobre nuestros tímpanos desproporcionadamente; las disonancias serán desagradabilísimas, cuando las frecuencias de las vibraciones sean inconmensurables. Tal es el caso de dos cuerdas unísonas, cuando una de ellas suena con una parte de la otra tales como es el lado de un cuadrado en relación a su diagonal: discordancia semejante al tritono o semidiapente (*semidiapente*). Consonantes y deleitables serán aquellos pares de sonidos que lleguen a percutir con cierta regularidad en el tímpano. Regularidad que involucra, en primer lugar, que las percusiones, hechas dentro de un mismo tiempo, sean conmensurables en número, a fin de que la membrana del tímpano no deba estar en continuo tormento, doblándose de dos diversos modos, para adaptarse y corresponder a las pulsaciones siempre discordantes. Será, pues, la primera y más grata consonancia, la octava, puesto que por cada percusión que dé la cuerda grave sobre el tímpano, la aguda da dos, de modo que ambas van a herir conjuntamente, en una sí y en otra no, de las vibraciones de la cuerda aguda; así que de todo el número de las percusiones, la mitad concuerdan en batir simultáneamente. Mas las percusiones de las cuerdas unísonas se fusionan siempre en una, y por ello son como de una sola cuerda, y no hacen consonancia. La quinta deleita también, ya que por cada

dos pulsaciones de la cuerda grave, la aguda da tres, de donde se sigue que, numerando las vibraciones de la cuerda aguda, la tercera parte del conjunto concuerda en percutir a un tiempo, o sea que dos notas solitarias se interponen entre cada par de las concordes. En la diatesarón se interponen tres. En la segunda o sea en el tono de razón 9:8, por cada nueve vibraciones, una sola llega a percutir concordemente con la otra de la cuerda más grave; todas las demás son discordes, y el tímpano las percibe con molestia, y el oído las juzga disonantes.

SIMPLICIO. Desearía una más clara explicación de este raciocinio.

SALVIATI. Sea la línea AB la longitud de onda de una vibración de la cuerda grave, y la línea CD la de la cuerda aguda, que dará con la anterior la octava; y dividamos la AB por mitad, en E. Es evidente que, comenzando a vibrar las cuerdas en los puntos A y C, cuando la vibración aguda haya alcanzado el punto D, la otra se habrá extendido sólo hasta el punto medio E, donde, por no ser término del movimiento, no percute; sin embargo, sí hay percusión en D. Cuando una vibración retorna luego de D a C, la otra pasa de E a B, por lo cual ambas percusiones, la de B y la de C, baten conjuntamente sobre el tímpano. Y volviendo a reiterarse de modo similar las siguientes vibraciones, se concluirá que las vibraciones en C, D coinciden en percutir simultáneamente con las en A, B, alternando en una sí y en otra no. Pero las pulsaciones en los puntos extremos van siempre acompañadas por una de las C, D y siempre por la misma. Esto es evidente; porque, puesto que las ondas baten simultáneamente en A y C, al pasar una de A a B, va la otra de C a D y vuelve a C, de modo que baten al mismo tiempo en C y en B; y durante el tiempo en que vuelve una de B hasta A, va la otra desde C hasta D y torna a C, de modo que las percusio-

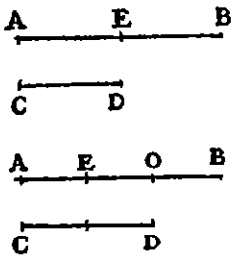

Fig. 13

nes en A, C son simultáneas. Sean ahora las dos vibraciones AB, CD las que producen la diapente, teniendo por ello sus tiempos en razón 3:2. dividamos la AB de la cuerda grave en tres partes iguales en E, O, y supongamos que las vibraciones comienzan en el mismo instante en los extremos A y C. Es evidente que en la percusión que se efectuará en el punto D, la vibración de AB habrá alcanzado solamente a O; por consiguiente, el tímpano recibe sólo la percusión de D. Después, en el retorno de D a C, la otra vibración pasa de O a B y vuelve a O, haciendo percusión en B, percusión aislada y a contratiempo (carácter que se ha de tener en consideración); porque al haber establecido que las primeras vibraciones comenzaron simultáneamente en los extremos A, C, la segunda, que fue la del extremo D sola, se hizo después del tiempo que requiere el paso desde C hasta D, o sea desde A hasta O; pero la siguiente, que se hace en B, dista de la otra sólo el tiempo que requiere el tránsito desde O hasta B, que es la mitad del anterior. Continuando luego el retorno desde O hasta A, mientras de C se va a D, llegan a efectuarse las dos pulsaciones simultáneamente en A y D. Siguen después otros períodos semejantes a éstos, o sea con la interposición de dos pulsaciones de la cuerda aguda, aisladas y solitarias, y una de la cuerda grave, también solitaria e interpuesta entre las dos solitarias de la aguda. De modo que si nos figuramos el tiempo dividido en momentos, esto es, en fracciones iguales; al suceder que en los dos primeros momentos de las pulsaciones concordes, hechas en A, C, se pasa a O, D, y se bate en D; que en el tercero y cuarto momento se vuelve de D a C, batiendo en C, y que de O se pasa por B y se vuelve a O, batiéndose en B; y que finalmente en el quinto y sexto momento, desde O y C se pasa a A y D, batiendo en ambas; tendremos en nuestro tímpano distribuidas las pulsaciones por el orden siguiente: dadas las pulsaciones de las dos cuerdas en el mismo instante, dos momentos después recibirá una percusión solitaria, en el tercer momento otra también solitaria, en el cuarto otra sola, y dos momentos después, o sea en el sexto, dos unidas al mismo tiempo. Aquí termina el período, y por decirlo así, la anomalía; período que continúa luego repitiéndose.

SAGREDO. Ya no puedo callar por más tiempo. Tengo que expresar la satisfacción que siento al ver tan adecuadamente expuestas las razones de algunos hechos, que durante tanto tiempo me tuvieron en tinieblas y calígine. Ahora veo por qué el unísono no difiere en nada de una sola voz; veo por qué la octava es la principal consonancia, pero tan semejante al unísono, que como unísono se toma y se acompaña con las demás. Es semejante al unísono, porque así como las pulsaciones de las cuerdas unísonas van todas a herir siempre a un mismo tiempo, estas de la cuerda grave de la octava van todas acompañadas de las de la aguda, y de éstas una se interpone solitaria y a intervalos iguales y en cierto modo sin hacer ningún desacuerdo; de ahí que tal consonancia deviene muy insípida y sin brío. Pero la quinta, con aquellos sus contratiempos, y con interponer entre los pares de las dos pulsaciones unidas, dos solitarias de la cuerda aguda y una también solitaria de la grave, y estas tres con un intervalo de tiempo equivalente a la mitad del que se da entre cada par y las solitarias de la aguda, hace una titilación y un cosquilleo sobre la membrana del tímpano, que, atemperando su dulzura con un dejo de acritud, parece besar suavemente y morder al mismo tiempo.

SALVIATI. Ya que tanto te complaces con estas primicias, es forzoso que yo te indique el modo, como también los ojos, no solamente el oído, puedan recrearse, viendo los mismos entretenimientos que el oído siente. Suspende tres bolas de plomo u otros graves semejantes, de tres hilos de diferente longitud, pero tales que, durante el tiempo en que el más largo cumple dos oscilaciones, el más corto haga cuatro y el mediano tres; lo que sucederá cuando el más largo tenga dieciséis palmos u otras medidas, de las cuales el mediano tenga nueve y el menor cuatro. Alejados todos simultáneamente del perpendículo y líberados después, se podrá ver una curiosa danza de estos hilos, con varios entrecruzamientos, pero tales que a cada cuarta oscilación del más largo, los tres juntos llegarán simultáneamente al mismo término, y después partirán de ahí, para reiterar de nuevo el mismo período. Esta mezcla de oscilaciones es la mis-

ma que, efectuada por las cuerdas, da al oído la octava con la quinta en medio. Y si con procedimientos semejantes se van graduando las longitudes de otros hilos, de modo que sus oscilaciones correspondan a las de otros intervalos musicales, pero consonantes, se verán más y más entrecruzamientos, y siempre tales que, en determinados tiempos y después de un número determinado de oscilaciones, todos los hilos (lo mismo si son tres que si son cuatro) coincidan en alcanzar en el mismo instante el término de sus oscilaciones, y en comenzar, partiendo de ahí, otro nuevo período. Pero cuando las oscilaciones de dos o más hilos sean inconmensurables, de modo que no coincidan jamás en terminar concordemente un determinado número de oscilaciones, o si aún no siendo inconmensurables, coinciden sólo después de mucho tiempo y después de un gran numero de oscilaciones; entonces la vista se confunde en el orden desordenado de la desconcertada danza, y el oído capta con fastidio las impulsiones destempladas de los tremores del aire, que van sin orden ni concierto, a herir el tímpano.

Pero, mis amigos, ¿adónde nos hemos dejado llevar durante tantas horas por esta variedad de problemas y de inesperadas disertaciones? Estamos al caer de la tarde, y poco o nada hemos tratado de la materia propuesta. Tanto nos hemos alejado, que apenas si recuerdo la primera introducción y el pequeño progreso que hicimos en establecer hipótesis y principios, referentes a las futuras demostraciones.

SAGREDO. Bien estará, entonces, poner fin por hoy a estas disertaciones, dando a la mente la oportunidad de ir serenándose durante el reposo de la noche, para volver luego mañana (si te determinas a complacernos) a las consideraciones esperadas y propuestas como tema principal.

SALVIATI. No faltaré mañana, a la misma hora de hoy, para complaceros y disfrutar al mismo tiempo de vuestra compañía.

FIN DE LA JORNADA PRIMERA

Notas de la Primera Jornada

[1] En lo que precede plantea, pues, Galileo el problema de la similitud mecánica, cuyo desarrollo ulterior ha llegado a constituir un capítulo importante de esta ciencia y es indispensable para toda experimentación, realizada mediante "modelos" de dimensiones reducidas.

[2] Galileo no llegó nunca a independizarse de la explicación metafísica que importa la hipótesis del "horror al vacío", heredada de los aristotélicos. Pero adviértanse las atinadas objeciones que pone en boca de Sagredo, y la circunstancia muy sugerente de que deja a Simplicio la responsabilidad de una explicación que evidentemente no le satisface.

[3] Por tanto, despreciable respecto de la resistencia debida a otras causas que, según Galileo, alcanzaría en el caso del cobre a 4801 codos. ¿Realizó él, efectivamente los experimentos que describe? Respecto del de la figura 4 ello es poco probable, pues hubiera consignado más precisamente sus resultados; su descripción tiene por objeto hacer comprender fácilmente que la altura de aspiración de una bomba mide, indirectamente, la "fuerza del vacío" (es decir, la presión atmosférica), y toma luego dicha altura como fundamento para sus cálculos. La considera de 18 codos (*bracia*); por tanto el "codo" a que se refiere debía ser equivalente a unos 60 centímetros. Con esta equivalencia resulta también satisfactorio el dato referente al cobre (unos 2900 m) que corresponde a una carga de ruptura de 25,5 kg mm^2.

[4] Es evidente que Galileo no ha conseguido explicar con esto la cohesión; puesto que, según sus propias consideraciones, la sección del cilindro es la magnitud determinante de la "fuerza del vacío", y aquélla no aumenta por estar subdividida en un enorme número de diminutos espacios vacíos. Tampoco es más feliz la explicación que sugiere de los fenómenos de fusión y solidificación. No podía conducirlo a mejores resultados una explicación metafísica como es la de "horror al vacío".

[5] Esta explicación es correcta: si la circunferencia mayor rueda sin *deslizamiento* sobre la recta DF, la circunferencia menor rueda *con deslizamiento* sobre CE; pero el deslizamiento de cada uno de sus puntos es infinitésimo, con lo cual la explicación de Sagredo coincide sustancialmente con la que expone a continuación Salviati. Es curioso

que, no obstante haber alcanzado Galileo la noción de "punto inextenso" (infinitésimo geométrico), que sin duda exige un gran poder de abstracción, no lo extendiera al movimiento, y excluyera tácitamente la idea de "desplazamientos infinitésimos". Esto muestra con cuánta lentitud y dificultad se elaboraron algunas de las ideas fundamentales de la ciencia.

[6] "La explicación del señor *Salviati* es aguda e ingeniosa, y no está lejos de nuestras ideas modernas, adoptadas en la geometría sintética de *Steiner*. Dos segmentos de longitudes cualesquiera pueden siempre tener tantos puntos, uno como el otro; para ello es suficiente proyectarlos desde el punto determinado por la intersección de las dos rectas que unen los extremos de los segmentos dados. Así también, en la geometría proyectiva, dos circunferencias concéntricas de radios cualesquiera tienen igualmente tantos puntos, si son correlacionadas entre sí desde un punto interior, a ambas. Tantos radios, tantas diferenciales de arco son imaginables, diríamos hoy. En todo caso, la rotación de los polígonos y círculos de Galileo es una ingeniosa idea." (O. V. OETTINGEN; OSTW. KLASS, nº 11, página 130.)

[7] El volumen del cilindro, siendo CF = R, es: $\pi R^2.R$; el de la semiesfera: $\frac{2}{3}\pi R^3$; luego el de la "escudilla" es $\frac{1}{3}\pi R^3$, igual al del cono: $\frac{1}{3}\pi R^2.R$.

[8] Una consideración superficial del asunto, sugeriría que, tendiendo el área de la corona circular y la del pequeño círculo, simultáneamente a cero, la demostración de Galileo es superflua. No es así, sin embargo. Si tomamos CP = PH = r como infinitésimo principal, el ingenioso razonamiento de Salviati demuestra que el área de la corona circular es infinitésimo de *segundo* orden, como el área del círculo (πr^2); pero siendo finito y constante su contorno exterior, ello sólo es posible si el ancho GI de la corona es del mismo orden. Y en efecto, poniendo ACI = α, será CI = R. cos α = R (1 – cos α) = 2R. *sen*^{2} $\alpha/2$; y éste es de segundo orden; pues *sen* α = r/R lo es de primer orden.

[9] Se tiene: $HP^2 = CI^2 - CP^2$; o sea: $r^2 = R^2 - r'^2$. Multiplicando ambos miembros por π, resulta la igualdad de las áreas de la base del cono y de la corona. Y como esto es cierto, cualquiera sea la altura del plano sector GN, se deduce por integración, la siguiente afirmación del texto, que también puede demostrarse geométricamente.

[10] Estas consideraciones conducen inmediatamente a la caracterización de los conjuntos infinitos, y la sugieren: Los conjuntos infinitos son los *coordinables con algunas de sus partes* (véase: J. REY PASTOR: *Funciones reales; I*, párrafos 3 y 6). Esta propiedad de los conjuntos infinitos, que generalmente se considera una adquisición de la matemática moderna, estaba ya ejemplificada, en los "Diálogos" de Galileo.

[11] Galileo ha distinguido, pues, nítidamente entre el continuo y los conjuntos numerables (discretos), y entre el infinito *potencial* (de las partes alícuotas o extensas del continuo) y el infinito actual (de sus puntos), dando del primero la definición correcta (véase: J. REY PASTOR: *Introducción a la Matemática Superior*; cap. I).

[12] Dados dos cuadrados perfectos, a^2 y $b^2 > a^2$, el número (entero) ab, es medio proporcional y está comprendido entre aquéllos. Análogamente, dados a^3 y $b^3 > a^3$, los números enteros a^2b y b^2a, están comprendidos entre ellos y satisfacen a la proporción: $a^3 : a^2b :: b^2a : b^3 :: a:b$.

[13] ¿Intenta Galileo demostrar aquí que el pasaje de lo finito al infinito conduce a

contradicciones? Es difícil decirlo. Su hallazgo del infinito en la unidad tiene, por otra parte, algo de la mística pitagórica, muy poco frecuente en él.

[14] Suele atribuirse a Galileo la afirmación de la instantaneidad de la propagación luminosa, que Descartes admitió posteriormente. Este párrafo del texto no deja lugar a dudas sobre su opinión al respecto. Además, nótese con cuánto ingenio imaginó la forma para eliminar el retardo de los operadores: realizar el experimento con pequeña y con gran distancia entre ellos, y observar en el segundo caso "si las respuestas de sus actos recíprocos, de descubrir y ocultar la luz, se verifican por el mismo tenor de los que se hacían desde más cerca". Ahora que conocemos la magnitud de la velocidad de propagación de la luz (300.000 km por segundo), el experimento de Galileo nos parece una ingenuidad por la insuficiencia de los medios; pero juntamente con las observaciones de Roehmer, fue el antecedente necesario, para llegar a los métodos que permitieron medirla.

[15] La demostración es, como sigue:

Por ser EC bisectriz del ángulo AEB:

$$AC:BC = AE:BE \qquad \text{(a)}$$

Por la semejanza de los triángulos AFE y EFB, es:

$$AF : FE = EF : FB,$$

o sea:

$$AF : FC = CF : FB.$$

Restando en cada razón el consecuente del antecedente ("dividiendo", dice el texto) :

$$AC : CF = CB : FB \qquad \text{(b)}$$
$$AC : FG = CB : BF$$

De donde alternando y ("componiendo")

$$\text{(c)} \qquad \frac{AC}{CB} = \frac{2FG}{2BF} = \frac{2FG + AC}{2BF + CB} = \frac{AG}{BF + CF} =$$

$$= \frac{AG}{BF + FG} = \frac{AG}{BG}\text{; c. d. d.}$$

[16] De la (b) de la nota anterior se deduce:

$$\frac{AC}{FG} = \frac{CB}{BF} = \frac{AC + CB}{FG + BF} = \frac{AB}{BG}$$

De donde: AB × BF = CB × BG = IB × BH;

o sea:

$$\frac{AB}{BH} = \frac{IB}{BF}.$$

Los triángulos ABH e IBF son, pues, semejantes, y:

$$\frac{AH}{HB} = \frac{IF}{FB} = \frac{EF}{FB} = \frac{AE}{EB} \qquad \text{(d)}$$

(por la semejanza de los triángulos EBF y ABE). Luego, por la (a)

(e) $$\frac{AH}{HB}=\frac{AC}{CB}\text{; c. d. d.}$$

17 Perteneciendo M a la circunferencia, se deducirá, como para I, según las (d) y (e) de la nota anterior:

(a) $$\frac{AL}{BL}=\frac{AC}{BC}=\frac{MF}{FB.}$$

Los triángulos ALB y FMB tendrían: los ángulos en B iguales, dos pares de lados proporcionales, según (a); y los ángulos en M y en A, agudos, pues el ángulo en M lo es por ser BF sólo una parte del diámetro CG, capaz del ángulo recto en M; y además, porque AL > BL, según (a) y en virtud de AC > BC por la (c) de la nota 15, el ángulo en B, es mayor que el ángulo en A, y éste es también agudo. Los triángulos nombrados serían, pues, semejantes, de donde resultaría:

$$\frac{AB}{BL}=\frac{MB.}{BF}\text{; o sea: } AB\times BF=BL\times MB$$

Pero de la (b) nota 15 se deduce:

$$\frac{CB}{BF}=\frac{AC+CB}{FG+BF}=\frac{AB}{BG}\text{; } AB\times BF=CB\times BG;$$

y por tanto: $CB\times BG=BM\times BL$;
lo que es imposible (pues $CB\times BG=BM\times BL'$, indicando con L', no escrita en la figura de Galileo, la intersección de ML, con la circunferencia).

18 La demostración de Galileo se sigue fácilmente utilizando el simbolismo algebraico. Se ha tomado

$$AF=CD.$$

Sean *d* y *b* los diámetros de las bases D y B. Por la igualdad de los volúmenes será:

(a) $$\frac{AB}{CD}=\frac{\text{Base D}}{\text{Base B}}=\frac{d^2}{b^2}$$

Pero, si E es la media proporcional entre AB y CD:

$$\frac{AB}{E}=\frac{E,}{CD}\text{ resulta: }\frac{AB^2}{E^2}=\frac{AB}{CD.}$$

Luego con la anterior:

$$\frac{AB^2}{E^2}=\frac{d^2}{b^2}\text{, y por tanto: }\frac{AB}{E}=\frac{d}{b}=\frac{\text{Sup. CD}}{\text{Sup. AF.}}$$

Por otra parte:

$$\frac{AF}{AB}=\frac{\text{sup. AF}}{\text{sup. AB;}}$$

"se sigue" (de las dos últimas)

$$\frac{AF}{E}=\frac{\text{sup. CD}}{\text{sup. AB;}}$$

y ("conmutando"):

$$\frac{\text{sup. AB}}{\text{sup. CD}}=\frac{E}{AF}=\frac{E}{CD}=\frac{AB}{E}=\sqrt{\frac{AB}{CD}}\text{, c. d. d.}$$

La demostración hubiera podido simplificarse:
De la igualdad de los volúmenes se deduce (según a):

$$\frac{b}{d}=\sqrt{\frac{CD}{AB}}$$

Por otra parte:

$$\frac{\text{sup. AB}}{\text{sup. CD}}=\frac{b\times AB}{d\times CD}=\sqrt{\frac{CD}{AB}}\times\frac{AB}{CD}=\sqrt{\frac{AB}{CD}}\text{; c. d. d.}$$

Estas simplificaciones aparecen de inmediato en el simbolismo algebraico; pero Galileo, sus contemporáneos y predecesores, carentes de tal simbolismo, debían servirse solamente de algunas propiedades de las proporciones, verbalmente enunciadas, cuyo número era forzosamente reducido; de allí la complejidad de sus demostraciones. En el caso actual, es probable que la última operación de la demostración simplificada no correspondiera a ningún "teorema" enunciado, o conocido por Galileo, acerca de las "razones"; y por eso introduce la media proporcional, E, con las consiguientes complicaciones.

19 Hemos intercalado las proporciones enunciadas en el texto con la notación moderna; y así lo haremos cuando sea oportuno. También en este caso la demostración puede simplificarse. De la igualdad de las superficies se deduce (véase la nota anterior) :

$$b\times AB=d\times CD\text{; }\frac{b}{d}=\frac{CD}{AB}$$

Por otra parte:

$$\frac{\text{Vol. AE}}{\text{Vol. CF}}=\frac{b^2\times AB}{d^2\times CD}=\left(\frac{b}{d}\right)^2\times\frac{AB}{CD}=\left(\frac{CD}{AB}\right)^2\times\frac{AB}{CD}\text{; c. d. d.}$$

20 Este ejemplo, y el anterior de los panes de oro, son ilustraciones recomendables para la enseñanza.

21 La demostración se simplifica así:

(a) $$(\text{Círculo})^2=\text{P.cir.}\times\text{P.isop.}=\text{H.cir.}\times\text{H.isop.;}$$

y con: P. cir. > H.cir.;
resulta: P. isop. < H.isop.; c.d.d.

Pero los antiguos no admitían igualdades sino entre números abstractos (razones de magnitudes) o entre magnitudes concretas. Actualmente sólo imponemos una condición menos restrictiva, a saber: que ambos miembros de una igualdad tengan las mismas "dimensiones". Nuestra igualdad (a) era, pues, inadmisible para aquéllos [la "dimensión": $(\textit{superficie})^2 = (\textit{longitud})^4$, no corresponde a ninguna magnitud concreta]. El razonamiento matemático no había alcanzado aún el grado de abstracción a que posteriormente lo condujo el simbolismo algebraico. Por eso los antiguos razonaban siempre sobre magnitudes concretas: segmentos, superficies, volúmenes. Y de esto proviene la complejidad de muchas de sus demostraciones; todo lo cual debe tenerse en cuenta para juzgar del mérito de las demostraciones de Galileo.

22 Es decir: Galileo ha intentado mostrar, mediante los ejemplos geométricos aducidos (rotación de los círculos; p. 49) que la hipótesis de la continuidad de la materia —impuesta por la negación de la posibilidad del vacío— no impide explicar su compresibilidad y expansibilidad; pero no se ha pronunciado en favor de aquella hipótesis. (Véase al respecto pág. 119 del texto).

23 Galileo había, pues, meditado sobre algunos fenómenos debidos a la *tensión superficial* de los líquidos, sin acertar con su explicación y concluyendo, erróneamente, que "no se derivan de una cohesión interna de sus partes". Pero la explicación de carácter metafísico, mediante "una incompatibilidad entre el agua y el aire", es aceptada solamente "en honor de Simplicio", el peripatético; lo que permite inferir la repugnancia que sentía por tales explicaciones.

24 Éste es el método de extrapolación de los resultados experimentales, tan empleado después en física, cuya aplicación no nos asegura, por cierto, la certeza de sus resultados, sino sólo "conjeturas muy probables".

25 La ley de variación de la velocidad durante la caída en el vacío, no es necesaria para lo que sigue, y por eso Galileo no se detiene por ahora a demostrarla, lo que hará en la Tercera Jornada; basta la afirmación de que aquélla aumenta continuamente, la que también será fundada después en nuevos experimentos.

26 Ésta es una de las más agudas inferencias de Galileo, y la más opuesta a la teoría aristotélica del movimiento: la posibilidad de un movimiento perpetuo, en ausencia de fuerzas que lo mantuvieran (inercia), era inconciliable con el principio metafísico de causalidad, si se admitía que las fuerzas son las "causas" del movimiento o "cambio de lugar"; porque entonces se llegaría a un efecto (cambio de lugar) sin causa (fuerza). Véase: P. PAINLEVÉ: *Les axiomes de la mécanique*; París, 1922; pág. 31 y siguientes.

27 La densidad del agua es unas ochocientas veces mayor que la del aire atmosférico; la precisión experimental de Galileo, no fue, en este caso, suficiente. El segundo método, que sigue, es más sencillo pero menos preciso, porque el peso del aire se obtiene por diferencia de otros dos enormemente mayores que aquél.

28 Es decir: los cuadrados de los volúmenes están entre sí como los cubos de las superficies.

29 Las ideas de Galileo son aquí confusas; la exactitud de su afirmación está supeditada al peso, densidad y velocidad inicial del proyectil, etc.

30 Se ha dicho, alguna vez, que Galileo pretendió dar aquí la solución del problema de la "bachistocrona", es decir, la curva de tiempo mínimo de descenso entre dos puntos dados (no pertenecientes a la misma vertical), en cuyo caso su afirmación sería errónea: tal curva no es un arco de circunferencia sino de cicloide. Pero del contenido de todo este párrafo resulta claro que no se planteó aquel problema general, sino solamente se propuso comparar los tiempos de descenso según los arcos de circunferencia y las respectivas cuerdas; y entonces su afirmación es exacta. Sobre el mismo asunto volverá Galileo más adelante.

31 Efectivamente; pero insuficiente para demostrar concluyentemente que la frecuencia de la "octava" es doble. En las ondas del líquido, sólo se observa que su longitud disminuye a la mitad; es decir, exactamente lo mismo que se hace al pulsar sólo la mitad de la cuerda. Ambas observaciones son, pues, equivalentes, aunque la conclusión es, desde luego, correcta.