Мухаммадиев Руслан
st117317
st117317@student.spbu.ru

Кр 2.1

Алгем, 2 семестр

2024.05.09

Задача 1.
Найти репер Френе для кривой $x = 2t, y = t^4 + 1, z = t^2$ в такой точке М, где нормальная плоскость кривой ортогональна прямой $x - 1 = y/2 = z + 2$

Решение:
$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ \vec{r}'(t) & 2 & 4t^3 & 2t \\ \vec{r}''(t) & 0 & 12t^2 & 2 \end{array}$$

$\vec{\tau}(t)$ - вектор касательной, равный $\{1,2,1\} \Rightarrow \vec{\tau}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \{1,2,1\} \Rightarrow \frac{\{2,4t^3,2t\}}{\sqrt{4+16t^6+4t^2}} = \{1,2,1\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4+16t^6+4t^2}} = 1 \\ \dfrac{4t^3}{\sqrt{4+16t^6+4t^2}} = 2 \\ \dfrac{2t}{\sqrt{4+16t^6+4t^2}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4+16t^6+4t^2} = 2 \\ \sqrt{4+16t^6+4t^2} = 2t^3 \\ \sqrt{4+16t^6+4t^2} = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+16t^6+4t^2 = 4 \\ 4+16t^6+4t^2 = 4t^6 \\ 4+16t^6+4t^2 = 4t^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16t^6+4t^2 = 0 \\ 4+12t^6+4t^2 = 0 \\ 4+16t^6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t^6+t^2 = 0 \\ 1+4t^6+t^2 = 0 \\ 1+4t^6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2(4t^4+1) = 0 \Rightarrow t = 0, t \in \mathbb{R} \text{ и } t^4 = -\dfrac{1}{4}, t \in \mathbb{C}. \text{ Игнорируем } t \in \mathbb{C} \\ 4t^6+t^2+1 = 0 \Rightarrow \text{ Все } t, \text{которые здесь получаются - комплексные. Игнорируем } t \in \mathbb{C} \\ t^6 = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow t^6 = -\dfrac{1}{4}, t \in \mathbb{C} - \text{ игнорируем } t \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Получается, что у нас только один корень: $t = 0$.
Находим репер Френе при $t = 0$:

$$\begin{cases} \vec{\tau}(t) = \{1,2,1\} \\ \vec{\nu}(t) = \dfrac{(\vec{r}' \times \vec{r}''(t)) \times \vec{r}'(t)}{|(\vec{r}' \times \vec{r}''(t)) \times \vec{r}'(t)|} \\ \vec{\beta}(t) = \dfrac{\vec{r}' \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}' \times \vec{r}''(t)|} \end{cases}$$

$$\vec{\beta}(t) = \frac{\left\{\begin{vmatrix} 4t^3 & 2t \\ 12t^2 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 2t \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4t^3 \\ 0 & 12t^2 \end{vmatrix}\right\}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 4t^3 & 2t \\ 12t^2 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 2t \\ 0 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 4t^3 \\ 0 & 12t^2 \end{vmatrix}^2}} = \frac{\left\{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\right\}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2}} = \frac{\{0,-4,0\}}{4} = \{0,-1,0\}$$

$\vec{\nu}(t) = \frac{\vec{\tau}(t) \times \vec{\beta}(t)}{|\vec{\tau}(t) \times \vec{\beta}(t)|} = \frac{\{0,-1,0\} \times \{1,2,1\}}{|\{0,-1,0\} \times \{1,2,1\}|} = \{\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

Ответ: $\begin{cases} \vec{\tau}(t) = \{1,2,1\} \\ \vec{\nu}(t) = \{\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\} \\ \vec{\beta}(t) = \{0,-1,0\} \end{cases}$