Мухаммадиев Руслан
st117317
st117317@student.spbu.ru

Кр 2.2

Алгебра и геометрия, 2 семестр

2024.05.02

Задача 4.
Определить тип поверхности второго порядка и написать её каноническое уравнение: $-1+4x+4z-4xy-4yz=0$

Решение: Общее ур-е: $\alpha_{11}x^2+2\alpha_{12}xy+2\alpha_{13}xz+2\alpha_{23}yx+\alpha_{22}y^2+\alpha_{33}z^2+2\alpha_{14}x+2\alpha_{24}y+2\alpha_{34}z+\alpha_{44}=0$

$-1+4x+4z-4xy-4yz=0$

Считаем инварианты:

$$\begin{cases} I_1=\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}=0-2+0=-2 \\ I_2=\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{23} & \alpha_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{13} & \alpha_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-8 \\ I_3=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{vmatrix}=0 \\ I_4=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -2 & 0 & 2\\ -2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} I_3=0 \\ I_4=0 \\ I_2\neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\frac{\overline{I_3}}{I_2}=0, \lambda_1<\lambda_2, \lambda_3=0.$$

Находим собственные числа для $I_3-E\lambda$:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & -2 & 0\\ -2 & -\lambda & -2\\ 0 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-8\lambda=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=-2\sqrt{2}\\ \lambda_2=2\sqrt{2}\\ \lambda_3=0\end{cases}$$

Найдем $\overline{I_3}$: $\overline{I_3}=\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{13} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ \alpha_{14} & \alpha_{34} & \alpha_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{14}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{24}\\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{44}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -2 & 2\\ -2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}=8$

Подставляем лямбды и все известные инварианты в уравнение:

$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\frac{\overline{I_3}}{I_2}=0$

$-2\sqrt{2}x'^2+2\sqrt{2}y'^2+\frac{8}{-8}=0$

$-2\sqrt{2}x'^2+2\sqrt{2}y'^2=1$

$x'^2-y'^2=\frac{1}{-2\sqrt{2}}$

$\frac{x'^2}{1}-\frac{y'^2}{1}=\frac{1}{-2\sqrt{2}}$

Эльдар, что это за поверхность?