Мухаммадиев Руслан
st117317
st117317@student.spbu.ru

Кр 2.1

Алгем, 2 семестр

2024.05.09

Задача 6.
Определить тип поверхности в зависимости от параметра k: $kx^2+5y^2-3z^2+14yz-2y+10z-3=0$

Решение: Общее ур-е: $\alpha_{11}x^2+2\alpha_{12}xy+2\alpha_{13}xz+2\alpha_{23}yx+\alpha_{22}y^2+\alpha_{33}z^2+2\alpha_{14}x+2\alpha_{24}y+2\alpha_{34}z+\alpha_{44}=0$
$kx^2+5y^2-3z^2+14yz-2y+10z-3=0$
Считаем инварианты:

$$\begin{cases} I_1=\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}=k \\ I_2=\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{13} & \alpha_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix}=-64-3k+5k=-64+2k \\ I_4=\begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \end{vmatrix}=0 \\ I_3=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & -3 \end{vmatrix}=-64k \end{cases}$$

Рассмотрим k при I_3, так как от значения I_3 зависят дальнейшие действия.
При k = 0:

$$\left.\begin{matrix} I_3=0 \\ I_2\neq 0 \\ I_4=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\frac{\overline{I_3}}{I_2}=0, \lambda_1<\lambda_2, \lambda_3=0.$$

Находим собственные числа $I_3(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 7 \\ 0 & 7 & -3-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+2x^2+64x$$

$$\lambda^3-2x^2-64x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=1-\sqrt{65} \\ \lambda_2=1+\sqrt{65} \\ \lambda_3=0 \end{cases}$$

Находим $\overline{I_3}$:

$$\overline{I_3}=\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{13} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{24} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{44} \end{vmatrix}=0$$

Подставляем все известные параметры в уравнение:
$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\frac{\overline{I_3}}{I_2}=0$
$(1-\sqrt{65})x'^2+(1+\sqrt{65})y'^2=0$
$\frac{x'^2}{1-\sqrt{65}}+\frac{y'^2}{1+\sqrt{65}}=0$
Получается, что это пара пересекающихся плоскостей.
При k < 0:
$k<0$, тогда $I_3>0$ и $I_2<0$
Находим собственные числа $I_3(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} k-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 7 \\ 0 & 7 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2(2+k) + \lambda(64-2k) - 64k$$

$$\lambda^3 - \lambda^2(2+k) - \lambda(64-2k) + 64k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 1+\sqrt{65} \\ \lambda_2 = k \\ \lambda_1 = 1-\sqrt{65} \end{cases}$$

Подставляем все известне параметры в уравнение (когда мы подставим k вместо λ_2 вынесем -1, так как $k < 0$):

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0$

$(1-\sqrt{65})x'^2 - ky'^2 + (1+\sqrt{65})z'^2 = 0| : (-1)$

$(\sqrt{65}-1)x'^2 + ky'^2 - (1+\sqrt{65})z'^2 = 0$

$\frac{x'^2}{k(1+\sqrt{65})} + \frac{y'^2}{\sqrt{65}^2 - 1^2} - \frac{z'^2}{k(\sqrt{65}-1)} = 0$

$\frac{x'^2}{k(1+\sqrt{65})} + \frac{y'^2}{64} - \frac{z'^2}{k(\sqrt{65}-1)} = 0$

У нас получилась коническая поверхность.

При k $>$ 0:

$k > 0$, тогда $I_3 < 0$. Также, при $k > 0$ I_2 может быть положительным и отрицательным, но тк $I_3 \neq 0$ мы не будем рассматривать I_2, тк он не появляется в уравнении.

Найдем собственные числа $I_3(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} k-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 7 \\ 0 & 7 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2(2+k) + \lambda(64-2k) - 64k$$

$$\lambda^3 - \lambda^2(2+k) - \lambda(64-2k) + 64k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1+\sqrt{65} \\ \lambda_2 = k \\ \lambda_3 = 1-\sqrt{65} \end{cases}$$

Подставляем все известные параметры в уравнение:

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0$

$(1+\sqrt{65})x'^2 + ky'^2 - (\sqrt{65}-1)z'^2 = 0$

$\frac{x'^2}{k(\sqrt{65}-1)} + \frac{y'^2}{64} - \frac{z'^2}{k(1+\sqrt{65})} = 0$

У нас снова получилась коническая поверхность.

Ответ:

$$\begin{cases} \text{при k} < 0 \text{ получилась коническая пов-ть. ур-е: } \dfrac{x'^2}{k(1+\sqrt{65})} + \dfrac{y'^2}{64} - \dfrac{z'^2}{k(\sqrt{65}-1)} = 0 \\ \text{при k} = 0 \text{ получилась пара пересекающихся плоскостей. ур-е: } \dfrac{x'^2}{1-\sqrt{65}} + \dfrac{y'^2}{1+\sqrt{65}} = 0 \\ \text{при k} < 0 \text{ получилась коническая пов-ть. ур-е: } \dfrac{x'^2}{k(\sqrt{65}-1)} + \dfrac{y'^2}{64} - \dfrac{z'^2}{k(1+\sqrt{65})} = 0 \end{cases}$$