Мухаммадиев Руслан
st117317
st117317@student.spbu.ru

Кр 2.1
Алгем, 2 семестр

2024.05.09

Задача 6.2.
Определить тип поверхности в зависимости от параметра k: $kx^2 - 8z^2 - 16yz + 12y + 2z + 5 = 0$

Решение: Общее ур-е: $\alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{13}xz + 2\alpha_{23}yx + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{14}x + 2\alpha_{24}y + 2\alpha_{34}z + \alpha_{44} = 0$
$kx^2 - 8z^2 - 16yz + 12y + 2z + 5 = 0$
Считаем инварианты:

$$\begin{cases} I_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = k \\ I_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{13} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = -64 - 8k + 0 = -64 - 8k \\ I_4 = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 6 \\ 0 & -8 & -8 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -128k \\ I_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & -8 & -8 \end{vmatrix} = -64k \end{cases}$$

Рассмотрим k при I_3, так как от значения I_3 зависят дальнейшие действия.
При k = 0:

$$\left.\begin{matrix} I_3 = 0 \\ I_2 \neq 0 \\ I_4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\overline{I_3}}{I_2} = 0, \lambda_1 < \lambda_2, \lambda_3 = 0.$$

Находим собственные числа $I_3(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -8 \\ 0 & -8 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 8x^2 + 64x$$

$$\lambda^3 + 8x^2 - 64x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4 - 4\sqrt{5} \\ \lambda_2 = -4 + 4\sqrt{5} \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Находим $\overline{I_3}$:

$$\overline{I_3} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{13} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{24} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = -128$$

Подставляем все известные параметры в уравнение:
$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\overline{I_3}}{I_2} = 0$
$(-4 - 4\sqrt{5})x'^2 + (-4 + 4\sqrt{5})y'^2 + \frac{-128}{-64} = 0$
$\frac{x'^2}{-4+4\sqrt{5}} - \frac{y'^2}{4+4\sqrt{5}} = \frac{1}{32}$
Получается, что это гиперболический цилиндр.
При k > 0:
$k > 0$, тогда $I_3 < 0$
Находим собственные числа $I_3(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} k-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -8 \\ 0 & -8 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2(k-8) + \lambda(64+8k) - 64k$$

$$\lambda^3 - \lambda^2(k-8) - \lambda(64+8k) + 64k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4+4\sqrt{5} \\ \lambda_2 = k \\ \lambda_3 = -4-4\sqrt{5} \end{cases}$$

Подставляем все известне параметры в уравнение:

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0$

$(-4+4\sqrt{5})x'^2 + ky'^2 + (-4-4\sqrt{5})z'^2 + \frac{-128k}{-64k} = 0$

$(-4+4\sqrt{5})x'^2 + ky'^2 - (4+4\sqrt{5})z'^2 = -2$

$\frac{x'^2}{k(4+4\sqrt{5})} + \frac{y'^2}{64} - \frac{z'^2}{k(-4+4\sqrt{5})} = -\frac{1}{32k}$

У нас получился двуполостный гиперболоид.

При k $<$ 0:

$k < 0$, тогда $I_3 > 0$

Находим собственные числа $I_3(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} k-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -8 \\ 0 & -8 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2(k-8) + \lambda(64+8k) - 64k$$

$$\lambda^3 - \lambda^2(k-8) - \lambda(64+8k) + 64k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -4+4\sqrt{5} \\ \lambda_2 = k \\ \lambda_1 = -4-4\sqrt{5} \end{cases}$$

Подставляем все известные параметры в уравнение (когда мы подставим k вместо λ_2 вынесем -1, так как $k < 0$):

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0$

$(-4-4\sqrt{5})x'^2 - ky'^2 + (-4+4\sqrt{5})z'^2 + 2 = 0| : (-1)$

$(4+4\sqrt{5})x'^2 + ky'^2 - (-4+4\sqrt{5})z'^2 - 2 = 0$

$\frac{x'^2}{k(-4+4\sqrt{5})} + \frac{y'^2}{64} - \frac{z'^2}{k(4+4\sqrt{5})} = \frac{1}{32k}$

Так как мы вынесли -1 из k, правая часть является положительной. Поэтому, у нас получился однополостный гиперболоид.

Ответ:

$$\begin{cases} \text{при k} < 0 \text{ получился однополостный гиперболоид. ур-е: } \dfrac{x'^2}{k(-4+4\sqrt{5})} + \dfrac{y'^2}{64} - \dfrac{z'^2}{k(4+4\sqrt{5})} = \dfrac{1}{32k} \\ \text{при k} = 0 \text{ получился гиперболический цилиндр. ур-е: } \dfrac{x'^2}{-4+4\sqrt{5}} - \dfrac{y'^2}{4+4\sqrt{5}} = \dfrac{1}{32} \\ \text{при k} < 0 \text{ получился двуполостный гиперболоид. ур-е: } \dfrac{x'^2}{k(4+4\sqrt{5})} + \dfrac{y'^2}{64} - \dfrac{z'^2}{k(-4+4\sqrt{5})} = -\dfrac{1}{32k} \end{cases}$$