Мухаммадиев Руслан
st117317
st117317@student.spbu.ru

Кр 2.2

Алгебра и геометрия, 2 семестр

2024.05.04

Задача 3.
Вычислить инварианты, написать каноническое уравнение и определить тип кривой второго порядка: $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$

Решение: Общее ур-е: $\alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \alpha_{22}y^2 + 2\alpha_{13}x + 2\alpha_{23}y + \alpha_{33} = 0$ $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$
Считаем инварианты:

$$\begin{cases} I_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} = 10 \\ I_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 16 \end{cases}$$

$I_2 \neq 0 \Rightarrow$ находим $I_2(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 8 \end{cases}$$

Далее находим I_3: $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -8 \\ 3 & 5 & -8 \\ -8 & -8 & -16 \end{vmatrix} = -512$

Нам известны все параметры. Подставим их в уравнение:
$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$
$2x'^2 + 8y'^2 + \frac{-512}{16} = 0$
$2x'^2 + 8y'^2 - 32 = 0$
$\frac{x'^2}{4^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1, a \geqslant b \Rightarrow$ - эллипс
Ответ: $\frac{x'^2}{4^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1$, Эллипс