Funktionen

Begriff einer Funktion

Definition 1

Eine Funktion f ist eine Vorschrift, die jedem Element aus einer Menge D genau ein Element einer Menge W zuordnet. Die Menge D wird als *Definitionsbereich* bezeichnet, die Menge W wird als Wertebereich bezeichnet.

Darstellungen von Funktionen

Spezielle Funktionen

Identitätsfunktion: Funktion, welche alle Variablen auf sich selbst abbildet. $f(x) = x$
Konstante Funktion: Funktion, welche alle Variablen auf denselben Funktionsweg abbildet. $f(x) = 3$

Nullstelle einer Funktion

Eine Stelle $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = 0$ heisst Nullstelle der Funktion f. Beispiel: Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse

Operationen mit Funktionen

Definition 2

Wir betrachten eine (beliebige) Menge D und zwei Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $\mapsto f(x)$ und $g : D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x)$.
Dann können wir die folgenden Operationen definieren:

$$\begin{aligned} f+g: &\quad D \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f(x)+g(x) \\ f-g: &\quad D \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f(x)-g(x) \\ f\cdot g: &\quad D \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f(x)\cdot g(x) \\ \frac{f}{g}: &\quad D \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \\ c\cdot f: &\quad D \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto c\cdot f(x) \end{aligned}$$

Komposition und Umkehrfunktion

Komposition

Definition 3

Für zwei gegebene Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$, ist die Funktion $g \circ f : A \to C$ definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
Diese neue Funktion heisst Komposition von f und g.

Umkehrfunktion

Definition 4

$g(y) :=$ Urbild von y ($= x$ mit der Eigenschaft: $f(x) = y$)
Diese Funktion heisst *Umkehrfunktion* und wird auch mit f^{-1} bezeichnet.

Werkzeug: Summenzeichen

$$a_s + a_{s+1} + a_{s+2} + \ldots + a_n \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Rechenregeln für Summenzeichen

$$\sum_{k=s}^{n}(c\cdot a_k) = c\cdot a_s + c\cdot a_{s+1} + \ldots + c\cdot a_n = c\cdot \sum_{k=s}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=s}^{n}(a_k\cdot b_k) = a_s + b_s + a_{s+1} + b_{s+1} + \ldots + a_n + b_n = \sum_{k=s}^{n} a_k + \sum_{k=s}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=s}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k = \sum_{k=s}^{m} a_k = \sum_{r=s}^{m} a_r = \sum_{i=s}^{m} a_i$$

Spezielle Summen

Natürliche Summe

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Betragsfunktionen

Definition 5

Für eine Zahl a bezeichnet der Betrag den Abstand von a zum Nullpunkt der Zahlengeraden.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Der Graph der Funktion $fx = |x|$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Polynome

Polynomfunktion

Definition 6

Eine Polynomfunktion ist eine Funktion der Form:

$$y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \text{ mit } a_n \neq 0$$

$n :$ Grad der Polynomfunktion
$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} :$ Koeffizienten
Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

Horner-Schema

Effizientes Verfahren um ein Polynom auszurechnen.
Nach unten wird addiert, diagonal mit x_0 multipliziert.

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0		$b_3\cdot x_0$	$b_2\cdot x_0$	$b_1\cdot x_0$	$b_0\cdot x_0$
	b_3	b_2	b_1	b_0	$f(x_0)$

Zerlegungssatz

Ist x_0 eine Nullstelle der Polynomfunktion $f(x)$, dann gibt es eine bestimmte Polynomfunktion $q(x)$, so dass gilt:

$$f(x) = (x - x_0)\cdot q(x) \quad \text{für jedes } x$$

Nullstellen von Polynomfunktionen

Satz 1 Eine Polynomfunktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

x_0 heisst *m-fache Nullstelle* (oder *Nullstelle der Multiplizität m*) der Polynomfunktion $f(x)$, falls es eine bestimmte Polynomfunktion $g(x)$ gibt, so dass gilt:

$$f(x) = (x - x_0)^m \cdot g(x) \quad \text{für jedes } x$$

Ableitungen

Geometrische Interpretation

Der Differenzquotient entspricht der Steigung einer Sekanten des Graphen der Funktion f, die Ableitung entspricht der Steigung der Tangente (bei$(x_0, f(x_0))$).