Integrationsmethoden

Substitution

Beispiel Integral: $\int \cos\left(x^2\right) \cdot x \,\mathrm{d}x$

1. Substitutionsgleichung für x: $u = g(x)$
   Bsp: $u = x^2$
2. Substitutionsgleichung für dx: $\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{du}{g'(x)}$
   Bsp: $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$
3. Integralsubstitution: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \varphi(u)\,\mathrm{d}x$
   Bsp: $\int \cos\left(x^2\right) \cdot x \,\mathrm{d}x = \int \cos(u) \cdot x \cdot \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2}\cos(u)\,\mathrm{d}u$
4. Integration: $\int \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \Phi(u) + C$
   Bsp: $\int \frac{1}{2}\cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin(u) + C$
5. Rücksubstitution (Bei unbestimmten Integralen)
   Bsp: $\frac{1}{2}\sin(u) + C = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$

Substitution Spezialfall

Ist die Funktion $u(x)$ linear, so lässt sich das Integral mit Hilfe einer Abkürzung bestimmen. Für eine Funktion f und Konstanten a, b gilt:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b)$$

Partielle Integration

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel 1

$\int x \cdot e^x \,\mathrm{d}x$

$u(x) = x$ $\quad v'(x) = e^x$

$u'(x) = 1$ $\quad v(x) = e^x$

$\int x \cdot e^x \,\mathrm{d}x = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \,\mathrm{d}x = x \cdot e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$

Kontrolle: $((x-1)e^x)' = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' = e^x + (x-1)e^x = x \cdot e^x \checkmark$

Beispiel 3 ("versteckte" Produkte)

$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int \ln(x) \cdot 1\,\mathrm{d}x$

$u(x) = \ln(x)$ $\quad v'(x) = 1$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad v(x) = x$

$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int \ln(x) \cdot 1\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x + C$

Beispiel 4 (Rückführung auf das Anfangsintegral)

$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$

$u(x) = \cos(x)$ $\quad v'(x) = \cos(x)$

$u'(x) = -\sin(x)$ $\quad v(x) = \sin(x)$

$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x =$

$\int \cos(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x) \cdot \sin(x) - \int(-\sin(x)) \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x$

$= \cos(x)\sin(x) + \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x)\sin(x) + \int 1 - \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$

$= \cos(x)\sin(x) + x - \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$

Lässt man die Zwischenschritte weg, bleibt die Gleichung:

$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x)\sin(x) + x - \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x.$

$\Rightarrow 2\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x)\sin(x) + x + C \Rightarrow \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos(x)\sin(x)+x}{2} + \tilde{C}$

Partialbruchzerlegung

Achtung: Bei unecht gebrochenrationalen Funktionen zuerst mit Polynomdivision umformen!

Beispiel Integral: $f(x) = \frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4}$

1. Nullstellen des Nenners h(x) mit Multiplizitäten bestimmen:
   a) Bsp: Erraten: $x_1 = 1$
   b) Linearfaktor abspalten mithilfe des Hornerschemas
   c) Verbleibendes Polynom: $p(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$
2. Jeder dieser Nullstellen wird eine Summe von Brüchen zugeordnet:
   x_1 ist einfache Nullstelle $\rightarrow \frac{A}{x-x_1}$
   x_1 ist n-fache Nullstelle $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n}$
   Bsp: $x_1 \rightarrow \frac{A}{x-1}$ $\quad x_2 \rightarrow \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$
3. f(x) wird mit der Summe aller Partialbrüche gleichgesetzt:
   Bsp: $f(x) = \frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n}$
4. Bestimmung der Konstanten
   a) Alle Partialbrüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen
      Bsp: $\frac{A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}$
   b) Durch einsetzen von x-Werten erhält man ein lineares Gleichungssystem
      Bsp: $x = 1 \rightarrow 2 = A$ etc.
   c) Gleichungssystem lösen

Integration der Partialbrüche

$$\int \frac{1}{x-x_0}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|x-x_0| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-x_0)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u^-r}\,\mathrm{d}u = \frac{u^{-r+1}}{-r+1} + C = \frac{(x-x_0)^{-r+1}}{1-r} + C$$
$$= \frac{1}{(1-r)(x-x_0)^{r-1}} + C$$

Muster für die jeweiligen Integrationsmethoden

Methode	Muster	Beispiel
Substitution	$\int g(f'(x)) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$	$\int e^{\cos(x)} \cdot \sin(x)$
partielle Integration	$\int \underset{\text{nach Ableiten einfacher}}{\overset{u}{\uparrow}} \cdot \underset{\text{nach Integration nicht komplizierter}}{\overset{v}{\uparrow}}$	$\int x \cdot e^x\,\mathrm{d}x$
Partialbruchzerlegung	$\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$	$\int \frac{4x^2+x+17}{4x^3+6x+3}\,\mathrm{d}x$