Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Grundlagen der Matrizenrechnung

Definition Matrix

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Weil die Matrix m Zeilen und n Spalten hat, nennt man sie $m \times n$ Matrix oder (m,n)-Matrix. Merke: Zeile zuerst, Spalte später!

Addition und Subtraktion

Zwei Matrizen der gleichen Grösse können addiert und subtrahiert werden. Diese Operationen werden *elementweise* durchgeführt, d.h. es werden einfach die entsprechenden Elemente addiert bzw. subtrahiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

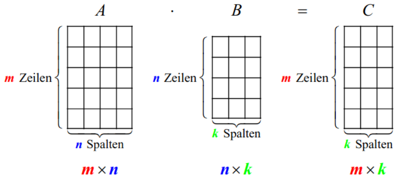
Skalare Multiplikation

Matrizen können elementweise mit einem Skalar (einer reellen Zahl) multipliziert werden:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 \\ 5\cdot 3 & 5\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

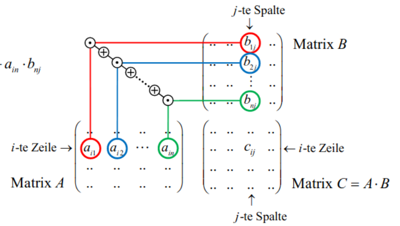
Multiplikation

Die Multiplikation von Matrizen ist *nicht* elementweise definiert!
Damit zwei Matrizen A und B miteinander multipliziert werden können, muss gelten: Die Anzahl Spalten von A ist gleich der Anzahl Zeilen von B. Das Ergebnis hat gleich viele Zeilen wie A und gleich viele Spalten wie B.



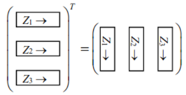
Das Element c_{ij} der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Ergebnismatrix C wird so berechnet:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$



Transponierte

Die Transponierte einer $m \times n$-Matrix ist eine $n \times m$-Matrix. Man erhält diese, indem man die Zeilen zu Spalten macht (und umgekehrt):



$$\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0.2 & 11 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 0.2 & 3 \\ -1 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Addition und skalare Multiplikation

Für beliebige $m \times n$-Matrizen A und B sowie für einen beliebigen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. *Kommutativ-Gesetz:* $A + B = B + A$
2. *Assoziativ-Gesetz:* $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. *Distributiv-Gesetz:* $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ und $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

Rechenregeln für Multiplikation

Für beliebige Matrizen A, B und C von geeigneten Typ sowie für einen beliebigen Skalar λ gilt:

1. *Assoziativ-Gesetz:* $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. *Distributiv-Gesetz:* $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ und $(A + B) \cdot C = A \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
3. *Regel zur Multiplikation mit einem Skalar:* $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ!!!
Im Allgemeinen gilt: $A \cdot B \neq B \cdot A$!

Lineare Gleichungssysteme LGS

Jedes LGS entspricht einer Matrizengleichung:

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}}_{\vec{c}}$$

Wir fassen A und $\vec{c}$ zur *erweiterten Koeffizientenmatrix* zusammen:

$$(A|\vec{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

Gauss-Jordan-Verfahren

1. Wir bestimmen die am weitesten links stehende Spalte mit Elementen $\neq 0$. Wir nennen diese Spalte die *Pivot-Spalte*.
2. Ist die oberste Zahl in der Pivot-Spalte $= 0$, dann vertauschen wir die erste Zeile mit der obersten Zeile, die in der Pivot-Spalte ein Element $\neq 0$ hat.
3. Die oberste Zahl in der Pivot-Spalte ist nun eine Zahl $a \neq 0$. Wir dividieren die erste Zeile durch a. So erhalten wir die führende Eins.
4. Nun wollen wir unterhalb der führenden Eins lauter Nullen erzeugen. Dazu addieren wir passende Vielfache der ersten Zeile zu den übrigen Zeilen. Wir lassen nun die erste Zeile aussen vor und wenden die ersten vier Schritte auf den verbleibenden Teil der Matrix an. Dieses Verfahren wiederholen wir so oft, bis die erweiterte Koeffizientenmatrix Zeilenstufenform hat.
5. Nun arbeiten wir von unten nach oben und addieren jeweils geeignete Vielfache jeder Zeile zu den darüber liegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu erzeugen.

Das Gauss-Jordan-Verfahren bringt die erweiterte Koeffizientenmatrix auf *reduzierte Zeilenstufenform*, d.h.

- Alle Zeilen, die nur Nullen enthalten, stehen zuunterst (falls vorhanden).
- Wenn eine Zeile nicht nur aus Nullen besteht, so ist die vorderste Zahl $\neq 0$ eine Eins. Sie wird als *führende Eins* der Zeile bezeichnet.
- Eine führende Eins, die weiter unten als eine andere führende Eins steht, steht auch weiter rechts.
- Jede Spalte, in der eine führende Eins steht, enthält sonst nur Nullen.

Bestimmung der Lösungen eines LGS aus der reduzierten Zeilenstufenform

Wir ordnen den Spalten der Koeffizientenmatrix die entsprechenden Unbekannten zu. Unbekannte, die zu einer Spalte **mit** führender Eins gehören, heissen *führende Unbekannte*. Unbekannte, die zu einer Spalte **ohne** führender Eins gehören, heissen *freie Unbekannte*.

Beispiel

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

1 führende Einsen

führende Unbekannte: x_1, x_3
freie Unbekannte: x_2, x_4

Wir setzen die freien Unbekannten je mit einem Parameter $\lambda, \mu, \ldots \in \mathbb{R}$ gleich.

Beispiel
$x_2 = \lambda$, $x_4 = \mu$

Wir übersetzen jede Zeile mit führender Eins in eine Gleichung und lösen diese nach der führenden Unbekannten auf.

Beispiel
1. Zeile: $x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 5 \Rightarrow x_1 = 5 + 2\lambda - 3\mu$
2. Zeile: $x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow x_3 = 3 - \mu$

Nun fassen wir die Unbekannten in einem Vektor zusammen und formen so um, dass die Parameter jeweils als Faktor vor einem Vektor stehen.

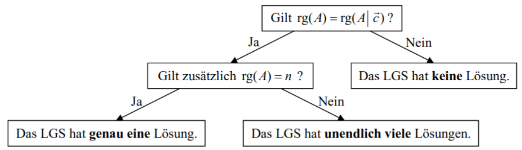
Beispiel

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2\lambda - 3\mu \\ \lambda \\ 3 - \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\textit{Parameterdarstellung}} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Rang

$rg(A) =$ Gesamtanzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen (Wenn Matrix A auf ZSF).

Kriterien für die Anzahl Lösungen eines LGS



Vektorgeometrie

Definitionen

- Betrag eines Vektors -> Länge
- Vektor mit Betrag 0 -> Nullvektor
- Vektor mit Betrag 1 -> Einheitsvektor oder normiert
- $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$ -> Linearkombination
- Zwei Vektoren sind *kollinear*, wenn es eine Gerade g gibt, zu der beide parallel sind.
- Drei Vektoren sind *komplanar*, wenn es eine Ebene gibt, zu der alle parallel sind.
- Linearkombination: $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2$ diese reellen Zahlen heissen *Komponenten* des Vektors $\vec{a}$ -> $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Zu jedem Punkt P der Ebene bzw. des Raumes definieren wir den *Ortsvektor* $\vec{r}(P) = \vec{OP}$

Rechnen mit Vektoren

Addition	Skalare Multiplikation	Gegenvektor
$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$	$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$	$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ **mit** $P_1 = (x_1; y_1; z_1), P_2 = (x_2; y_2; z_2)$**:** $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$

Betrag eines ebenen Vektors	Betrag eines räumlichen Vektors
$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Skalarprodukt

Definition Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

Dabei ist φ der Zwischenwinkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}(0 \le \varphi \le \pi)$ Wir definieren ausserdem: $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0, \vec{0} \cdot \vec{b} = 0$

Berechnung des Skalarproduktes aus der Komponentendarstellung der Vektoren

In der Ebene	Im Raum
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Wichtige Eigenschaften des Skalarproduktes

Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ und für jede beliebige Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $\vec{a}$ **und** $\vec{b}$ **sind genau dann zueinander orthogonal (senkrecht), wenn** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

(2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

(3) *Kommutativ-Gesetz:* $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(4) *Distributiv-Gesetze:* $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

(5) *Gemischtes Assoziativ-Gesetz:* $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$

Satz

Für die orthogonale Projektion eines Vektors $\vec{b}$ auf einen Vektor $\vec{a}$ gilt:

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \qquad |\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

Das Vektorprodukt

Definition

Das *Vektorprodukt* $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier räumlicher Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist der eindeutig bestimmte Vektor mit folgenden Eigenschaften:

- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$
- $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem.

Dabei ist φ der Zwischenwinkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}(0 \le \varphi \le \pi)$.
Wir definieren ausserdem: $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0}, \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$

Berechnung des Vektorproduktes aus der Komponentendarstellung der Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$a_1 \quad b_1$

Wichtige Eigenschaften des Vektorproduktes

Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ und für jede beliebige Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $\vec{a}$ **und** $\vec{b}$ **sind genau dann kollinear, wenn** $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

(2) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(3) *Antikommutativ-Gesetz:* $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

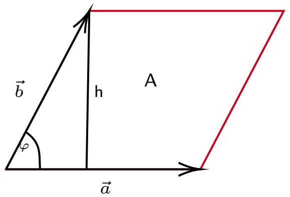
(4) *Distributiv-Gesetze:* $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

(5) *Gemischtes Assoziativ-Gesetz:* $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$

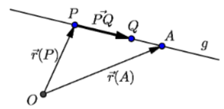
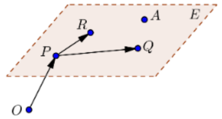
(6) Das normale *Assoziativ-Gesetz* gilt im Allgemeinen nicht: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \ne (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

Fläche des aufgespannten Parallelogramms

Der Betrag des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren aufgespannt wird.



Geraden und Ebenen

	Gerade	Ebene
Parameterdarstellung	$g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$  P: *Aufpunkt*, $\overrightarrow{PQ}$: *Richtungsvektor* Ein Punkt A liegt auf g, wenn es $\lambda_A \in \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda_A \cdot \overrightarrow{PQ}$.	$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu \cdot \overrightarrow{PR} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$  P: *Aufpunkt*, $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$: *Richtungsvektoren* Ein Punkt A liegt auf E, wenn es $\lambda_A, \mu_A \in \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda_A \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu_A \cdot \overrightarrow{PR}$.
Koordinatendarstellung	$g:\ ax + by + c = 0$ (nur in der Ebene!) Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Abstand zum Ursprung: $\frac{c}{\lvert\vec{n}\rvert}$ Ein Punkt $P = (x_P; y_P)$ liegt auf g, wenn $ax_P + by_P + c = 0$.	$E:\ ax + by + cz + d = 0$ Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ Abstand zum Ursprung: $\frac{d}{\lvert\vec{n}\rvert}$ Ein Punkt $P = (x_P; y_P; z_P)$ liegt auf E, wenn $ax_P + by_P + cz_P + d = 0$.

Umrechnung Parameterdarstellung → Koordinatendarstellung	
Gerade Für jedes $Q = (x; y)$ auf der Geraden g gilt: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$ Die Komponentengleichungen bilden ein LGS. Wir eliminieren λ und erhalten so eine Koordinatendarstellung von g.	**Ebene** Das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren liefert einen Normalenvektor $\vec{n}$; die Komponenten von $\vec{n}$ sind die Koeffizienten a, b, c der Koordinatendarstellung. Dann setzen wir die Koordinaten des Aufpunktes $P = (x_P; y_P; z_P)$ in die Koordinatendarstellung ein und bestimmen daraus d.
Umrechnung Koordinatendarstellung → Parameterdarstellung	
Gerade Wir wählen zwei Punkte P und Q, deren Koordinaten die Geradengleichung lösen. Dann ist $g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ eine Parameterdarstellung von g.	**Ebene** Wir wählen drei Punkte P, Q und R, deren Koordinaten die Ebenengleichung lösen. Dann ist $E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu \cdot \overrightarrow{PR} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ eine Parameterdarstellung von E.

Schnittpunkte und Schnittgeraden

Schnittpunkt: Punkt der auf allen beteiligten Geraden und Ebenen liegt.
Schnittgerade: Besteht aus allen Punkten zweier Ebenen, die sowohl auf der einen als auch auf der anderen Ebene liegen.
Berechnung: Aus den Gleichungen der beteiligten Geraden und Ebenen ein LGS aufstellen und dieses auflösen.

Abstände

Punkt A – **Gerade** $g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$	**Punkt** $A = (x_A; y_A; z_A)$ – **Ebene** $E:\ ax + by + cz + d = 0$
$\frac{\lvert\overrightarrow{PA} \times \vec{a}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert}$	$\frac{\lvert ax_A + by_A + cz_A + d\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$

Quadratische Matrizen

Definition

Quadratisch: Matrix hat gleich viele Zeilen wie Spalten ($m = n$).
Hauptdiagonale: Elemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nm}$
Diagonalmatrix: Alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonale sind $= 0$
Einheitsmatrix: Diagonalmatrix, bei der alle Diagonalelemente $= 1$ sind.

Inverse Matrizen

Definitionen

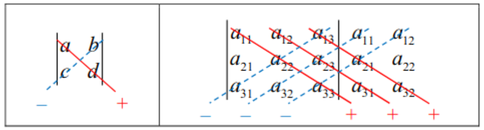
Inverses: Matrix A^{-1}, für die gilt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
Invertierbar: Auch *regulär*. Wenn eine Matrix eine Inverse hat. Andernfalls *singulär*.

Inverse einer 2x2-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Um die Inverse einer grösseren Matrix A zu berechnen, wendet man das Gauss-Jordan-Verfahren auf die Matrix $(A|E)$ and. Wenn A invertierbar ist, führt dieses auf die Matrix $(E|A^{-1})$.

Determinanten



Berechnung der Determinante einer n x n Matrix nach Laplace

1. Feste Zeile oder feste Spalte wählen (i oder j)
2. Determinante nach folgender Formel entwickeln:

Entwicklung nach der i-ten Zeile:	Entwicklung nach der j-ten Spalte:
$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$	$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$

a_{ij} ist das Element der Matrix A der i-ten Zeile und j-ten Spalte.
A_{ij} ist die Matrix, die man erhält, wenn man bei A die i-te Zeile und j-te Spalte weglässt.

Geometrische Interpretation der Determinante

Der Betrag der Determinante einer 2×2 Matrix ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Spalten der Matrix (aufgefasst als Vektoren) aufgespannt wird.
Der Betrag der Determinante einer 3×3 Matrix ist gleich dem Volumeninhalt des Spats, das von den Spalten der Matrix (aufgefasst als Vektoren) aufgespannt wird.

Wichtige Eigenschaften der Determinante

(1) Für die Einheitsmatrix E gilt: $\det(E) = 1$

(2) Für eine $n \times n$-Dreiecksmatrix U gilt: $\det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$

(3) Für jede quadratische Matrix A gilt: $\det(A^T) = \det(A)$

(4) Für alle $n \times n$-Matrizen A und B gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(5) Für jede invertierbare Matrix A gilt: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

(6) Für jede $n \times n$-Matrix A und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

Lineare Unabhängigkeit

Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ sind linear unabhängig, wenn gilt: $0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_k$ ist die einzige Linearkombination. Andernfalls sind sie linear unabhängig.

Koeffizientenmatrix, Determinante, Lösbarkeit des Gleichungssystems

Für eine quadratische $n \times n$-Matrix A sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $\det(A) \neq 0$

(2) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

(3) Die Zeilen von A sind linear unabhängig.

(4) $\mathrm{rg}(A) = n$

(5) A ist invertierbar.

(6) Das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung.