Funktionen

Begriff einer Funktion

Definition 1

Eine Funktion f ist eine Vorschrift, die jedem Element aus einer Menge D genau ein Element einer Menge W zuordnet. Die Menge D wird als *Definitionsbereich* bezeichnet, die Menge W wird als Wertebereich bezeichnet.

Darstellungen von Funktionen

Spezielle Funktionen

Identitätsfunktion: Funktion, welche alle Variablen auf sich selbst abbildet. $f(x) = x$
Konstante Funktion: Funktion, welche alle Variablen auf denselben Funktionsweg abbildet. $f(x) = 3$

Nullstelle einer Funktion

Eine Stelle $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = 0$ heisst Nullstelle der Funktion f. Beispiel: Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse

Operationen mit Funktionen

Definition 2

Wir betrachten eine (beliebige) Menge D und zwei Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $\mapsto f(x)$ und $g : D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x)$.
Dann können wir die folgenden Operationen definieren:

$$\begin{aligned}
f+g: &\quad D \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f(x)+g(x) \\
f-g: &\quad D \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f(x)-g(x) \\
f\cdot g: &\quad D \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f(x)\cdot g(x) \\
\frac{f}{g}: &\quad D \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \\
c\cdot f: &\quad D \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto c\cdot f(x)
\end{aligned}$$

Komposition und Umkehrfunktion

Komposition

Definition 3

Für zwei gegebene Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$, ist die Funktion $g \circ f : A \to C$ definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
Diese neue Funktion heisst Komposition von f und g.

Umkehrfunktion

Definition 4

$g(y) :=$ Urbild von y ($= x$ mit der Eigenschaft: $f(x) = y$)
Diese Funktion heisst *Umkehrfunktion* und wird auch mit f^{-1} bezeichnet.

Werkzeug: Summenzeichen

$$a_s + a_{s+1} + a_{s+2} + \dots + a_n \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Rechenregeln für Summenzeichen

$$\sum_{k=s}^{n}(c\cdot a_k) = c\cdot a_s + c\cdot a_{s+1} + \dots + c\cdot a_n = c\cdot \sum_{k=s}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=s}^{n}(a_k \cdot b_k) = a_s + b_s + a_{s+1} + b_{s+1} + \dots + a_n + b_n = \sum_{k=s}^{n} a_k + \sum_{k=s}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=s}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k = \sum_{k=s}^{m} a_k = \sum_{r=s}^{m} a_r = \sum_{i=s}^{m} a_i$$

Spezielle Summen

Natürliche Summe

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Betragsfunktionen

Definition 5

Für eine Zahl a bezeichnet der Betrag den Abstand von a zum Nullpunkt der Zahlengeraden.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Der Graph der Funktion $fx = |x|$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Polynome

Polynomfunktion

Definition 6

Eine Polynomfunktion ist eine Funktion der Form:

$$y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 \text{ mit } a_n \neq 0$$

$n:$ Grad der Polynomfunktion
$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}:$ Koeffizienten
Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

Horner-Schema

Effizientes Verfahren um ein Polynom auszurechnen.
Nach unten wird addiert, diagonal mit x_0 multipliziert.

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0		$b_3 \cdot x_0$	$b_2 \cdot x_0$	$b_1 \cdot x_0$	$b_0 \cdot x_0$
	b_3	b_2	b_1	b_0	$f(x_0)$

Zerlegungssatz

Ist x_0 eine Nullstelle der Polynomfunktion $f(x)$, dann gibt es eine bestimmte Polynomfunktion $q(x)$, so dass gilt:

$$f(x) = (x - x_0)\cdot q(x) \quad \text{für jedes } x$$

Nullstellen von Polynomfunktionen

Satz 1 Eine Polynomfunktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

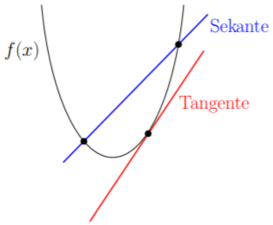
x_0 heisst *m-fache Nullstelle* (oder *Nullstelle der Multiplizität m*) der Polynomfunktion $f(x)$, falls es eine bestimmte Polynomfunktion $g(x)$ gibt, so dass gilt:

$$f(x) = (x - x_0)^m \cdot g(x) \quad \text{für jedes } x$$

Ableitungen

Geometrische Interpretation

Der Differenzquotient entspricht der Steigung einer Sekanten des Graphen der Funktion f, die Ableitung entspricht der Steigung der Tangente (bei$(x_0, f(x_0))$).



Die Ableitungsfunktion

$$f'(x), \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}$$

Bei gegebener Funktion $f(x) = c$ gilt $f'(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
Bei gegebener Funktion $f(x) = x^k$ mit $k \neq 0$ gilt $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$.

Die *zweite Ableitung* erhält man, indem man die Ableitungsfunktion noch einmal ableitet. Die dritte in dem man die zweite noch einmal ableitet und so weiter.

Ableitungsregeln

Faktorregel

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

Beispiel: $(4x^3)' = 4 \cdot (x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$

Summenregel

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Beispiel: $(7x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 14x + 6)' = (7x^5)' - (3x^3)' + (5x^2)' - (14x)' + (6)' = 35x^4 - 9x^2 + 10x - 14$

Produkteregel

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beispiel: $f(x) = ((3x^3 + x^2)(4x^2 + 1))$. Gesucht: $f'(x)$.

$$u = 3x^3 + x^2, u' = 9x^2 + 2x$$
$$v = 4x^2 + 1, v' = 8x$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'v + uv' = (9x^2 + 2x)(4x^2 + 1) + (3x^3 + x^2) \cdot 8x$$
$$= 36x^4 + 9x^2 + 8x^3 + 2x + 24x^4 + 8x^3 = 60x^4 + 16x^3 + 9x^2 + 2x$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiel: $f(x) = (\frac{3x^2 - x}{2x^3 + 1})$. Gesucht: $f'(x)$.

$$u = 3x^2 - x, u' = 6x - 1$$
$$v = 2x^3 + 1, v' = 6x^2$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'v = uv'}{v^2} = \frac{(6x-1) \cdot (2x^3 + 1) - (3x^2 - x) \cdot 6x^2}{(2x^3 + 1)^2}$$

Kettenregel

$$(F \circ u)'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$$

Beispiel:

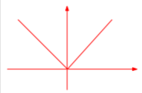
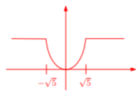
$$f(x) = (x^3 + 4)^{-2}$$
$$F(u) = u^{-2}, F'(u) = -2u^{-3}$$
$$u(x) = (x^3 + 4), u'(x) = 3x^2$$
$$\Rightarrow f'(x) = -2u^{-3} \cdot 3x^2 = -2(x^3 + 4)^{-3} \cdot 3x^2$$

Ableitungen bestimmter Funktionen

- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn die linksseitige mit der rechtsseitigen Ableitung übereinstimmt. Eine Funktion $f(x)$ heisst ableitbar, wenn die Ableitung an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs definiert ist.

$f(x) =$	$\|x\|$	$\min(x^2, 5)$	$\|\cos(x)\|$
Illustration			
nicht differenzierbar bei	$x = 0$	$x_0 = -\sqrt{5}, x_1 = \sqrt{5}$	$x \in \{\ldots - \frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\}$

Linearisierung einer Funktion

Die Funktionsgleichung für die Tangente von $f(x)$ an der Stelle x_0 lautet:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Newton Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Beispiel: $f(x) = x^3 + 5x - 4$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} =$
0	1	2	8	0.75
1	0.75	0.1719	6.6875	0.7243
2	0.7243	0.0015	6.5738	0.7241
3	0.7241	0.0002	6.5730	0.7241

Fixpunkte des Newton-Verfahrens

Unter einem Fixpunkt $\phi(x)$ versteht man ein x mit $\phi(x) = x$.
Unter einem Fixpunkt des Newton-Verfahrens versteht man einen Wert x mit folgender Eigenschaft: Ist $x_n = x$, so ist $x_{n+1} = x_n = x$.
Fixpunkte sind also alle Werte x mit der Eigenschaft $x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
Startet man das Newton-Verfahren mit einem Wert x_0 in der Nähe eines Fixpunktes, so strebt das Verfahren gegen diesen Fixpunkt.

Bestimmtes Integral

Definition Integral

Gegeben ist eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f. Wir unterteilen das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle I_k der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. In jedem Teilintervall I_k wählen wir eine Stelle x_k. Der Wert, zu dem

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$$

für ein immer grösser werdendes n tendiert, heisst: bestimmtes Integral von a bis b über $f(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx$$

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. Gegeben $b < a$. Dann gilt: $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
3. Gegeben ist $b \in [a, c]$. Dann gilt: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Stammfunktion

Eine Stammfunktion von f ist eine Funktion F, für die gilt:

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in I$$

Gegeben sind zwei Stammfunktionen F_1 und F_2 einer Funktion f. Dann gibt es eine Konstante c, so dass gilt:

$$F_2(x) = F_1(x) + c \qquad \text{für alle } x$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Gegeben ist eine Funktion f, die auf einem Intervall I stetig ist, und eine beliebige Stammfunktion F von f. Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Integrationsregeln

Gegeben sind zwei Funktionen f und g mit Stammfunktionen F bzw. G sowie eine Konstante c. Dann gilt:

1. $c \cdot F(x)$ ist eine Stammfunktion von $c \cdot f(x)$
2. $F(x) + G(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x) + g(x)$

Die Anwendung der obenstehenden Integrationsregeln zusammen mit dem Hauptsatz der Integralrechnung ergibt

1. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Integration von Polynomfunktionen

Stammfunktion von $f(x) = c$
$F(x) = c \cdot x$

Stammfunktion von $f(x) = x^n (n \in \mathbb{R}, n \neq -1)$
$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$

Stammfunktion von $g(x) = \frac{1}{x}$
$G(x) = \ln(|x|)$

Beispiel: $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$. Gesucht: $\int_1^2 (2x^2 + 3x - 1)dx$

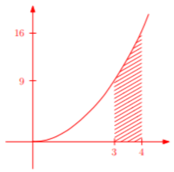
Stammfunktion von $2x^2 + 3x - 1$:

$$F(x) = 2 \cdot (\frac{1}{3}x^3) + 3 \cdot (\frac{x^2}{2}) - x = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2$$

$$\int_1^2 f(x)dx = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = \frac{49}{6}$$

Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das zwischen $x = 3$ und $x = 4$ durch den Graphen von $f(x) = x^2$ und die x-Achse begrenzt wird. Beobachtung: gesamtes Flächenstück liegt oberhalb der x-Achse.

Somit: gesuchter Inhalt $= \int_3^4 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{37}{3}$



Ableitungen und Integrale ausgewählter Funktionen

Potenz- und Logarithmus-Funktionen

1. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
2. $\int \ln(x)dx = x \cdot \ln(x) - x + C$
3. $\int \log_a(x)dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x) + C$

Trigonometrische Funktionen

- $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
- $\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + C$
- $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ resp. $\int (1 + \tan^2(x))dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) + C$
- $(\arcsin(x))' = (1 - x^2)^{-1/2}$ resp. $\int (1 - x^2)^{-1/2}dx = \arcsin(x) + C$
- $(\arccos(x))' = -(1 - x^2)^{-1/2}$ resp. $\int -(1 - x^2)^{-1/2}dx = \arccos(x) + C$
- $(arctan(x))' = (1 + x^2)^{-1}$ resp. $\int (1 + x^2)^{-1}dx = \arctan(x) + C$

Folgen und Reihen

	explizite Darstellung	implizite Darstellung	aufzählende Darstellung
arithmetische Folge $(c, d \in \mathbb{R})$	$a_n = c + (n-1)d$	$a_1 = c$ $a_{n+1} = a_n + d$	$c, c+d, c+2d, c+3d, \ldots$
geometrische Folge $(c, q \in \mathbb{R}, \quad q \neq 0, 1)$	$a_n = c \cdot q^{n-1}$	$a_1 = c$ $a_{n+1} = q \cdot a_n$	$c, c \cdot q, c \cdot q^2, c \cdot q^3, \ldots$
harmonische Folge	$a_n = \frac{1}{n}$	(nicht üblich)	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
Fibonacci-Folge	(nicht elementar)	$a_1 = 1, a_2 = 1$ $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$	$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Grenzwerte von Folgen

Beschränkte Folge

Eine Folge (a_n) heisst beschränkt, falls es eine positive reele Zahl M gibt, so dass gilt: $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls dies nicht der Fall ist, heisst die Folge unbeschränkt.
Eine Folge (a_n) heisst nach unten bzw. nach oben beschränkt, falls es eine reele Zahl m bzw. M gibt mit $m \leq a_n$ bzw. $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Grenzwert, formale Definition

Eine reelle Zahl g heisst Grenzwert oder Limes der Folge (a_n), wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ stets $|a_n - g| < \epsilon$ gilt.
Eine Folge heisst konvergent, wenn sie einen Grenzwert g hat.

Rechnen mit Grenzwerten

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot a) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) + \lim_{n\to\infty} (b_n) \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} (b_n) \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)}, \lim_{n\to\infty} (b_n) \neq 0, b \neq 0 \tag{4}$$

Rationale Funktion - Grenzwert bestimmen

1. Bruch mit der höchsten Potenz von n, die vorkommt kürzen
2. Das Verhalten der einzelnen Summanden für $n \to \infty$ untersuchen.
3. Grenzwert bestimmen

Fall 1 Zählergrad < Nennergrad:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0$$

Fall 2 Zählergrad > Nennergrad:

$$\frac{g(n)}{h(n)} \to \infty$$

Fall 1 Zählergrad = Nennergrad:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \frac{\text{führender Term von } g}{\text{führender Term von } h}$$

Eine spezielle Folge: $(1+\frac{1}{n})^n$ strebt gegen e.

Summenfolge

Die Summenfolge oder Reihe s der reellen Folge a ist definiert durch:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_2 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Arithmetische Reihe

Bei einer arithmetischen Folge ist die Differenz zweier aufeinanderfolgender Flieder konstant.
Die Summe der ersten n Elemente einer arithmetischen Folge ist:

$$s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3$$

Geometrische Reihe

Bei einer geometrischen Folge ist der Quotient zweier aufeinanderfolgenden Glieder Konstant.
Die Summe der ersten n Elemente einer geometrischen Folge ist:

$$s_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Grenzwerte von Reihen

Für den Grenzwert der Reihe s einer reellen Folge a schreiben wir:

$$g = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{l=1}^{\infty} a_k$$

Grenzwert einer arithmetischen Reihe

Jede arithmetische Reihe divergiert.

Grenzwert einer geometrischen Reihe

Wie verhält sich $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, wenn $n \to \infty$
Fall 1 $q > 1$ Die Reihe strebt gegen ∞ oder $-\infty$ hat aber keinen Grenzwert.
Fall 2 $q \leq -1$ Die Reihe strebt zwischen positiven und negativen Werten hin und her und hat keinen Grenzwert
Fall 3 $|q| < 1$ Die Reihe strebt gegen den Grenzwert $\frac{a_1}{1-q}$. Sie konvergiert also.

Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

Grenzwert einer Funktion im Endlichen

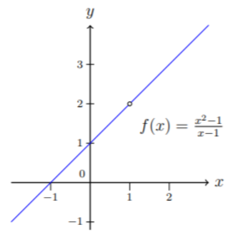
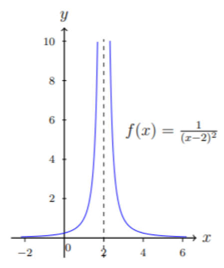
Rechenregeln

$$\lim_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot (\lim_{x\to x_0} f(x))$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x\to x_0} g(x))$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Stetigkeit von Funktionen

Eine Funktion $f(x)$ heisst stetig an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und $= f(x_0)$ ist.
Eine Funktion heisst stetig, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig ist.
Die Summe, die Differenz, das Produkt, die Komposition von stetigen Funktionen sind stetig.
Falls eine Funktion $f(x)$ auf einem Intervall $[a,b]$ stetig ist, und $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben, dann hat f in $[a,b]$ mindestens eine Nullstelle.

Grenzwerte von gebrochenrationalen Funktionen

Typ	Funktionswert strebt gegen	Beispiel
Typ 1: *Hebbare Definitionslücke* Hier haben Zählerpolynom und Nennerpolynom **beide** eine Nullstelle. Durch Kürzen mit dem entsprechenden Linearfaktor kann die Definitionslücke behoben werden	Funktionswert des *gekürzten Bruches*	 Bruch kürzen: $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$ $\Rightarrow$ Grenzwert $= 2$
Typ 2: *Polstelle* Hier hat **nur** das Nennerpolynom eine Nullstelle (nach allfälligem Kürzen)	$+\infty$ oder $-\infty$	

Anwendungen der Ableitung

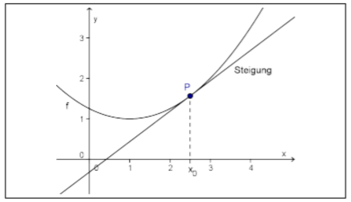
1. Ableitung

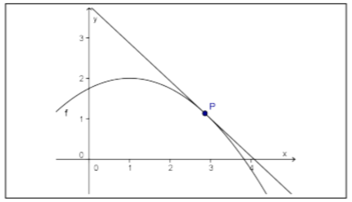
Die 1. Ableitung beschreibt die Veränderung der Funktion f. Sie kann als Steigung der Kurventangente interpretiert werden.

Die 1. Ableitung macht somit Aussagen darüber, an welchen Stellen die Funktion wächst resprektive fällt:

$f'(x_0) > 0$: f wächst beim Durchang durch den Punkt $P = (x_0, y_0)$

$f'(x_0) < 0$: f fällt beim Durchang durch den Punkt $P = (x_0, y_0)$



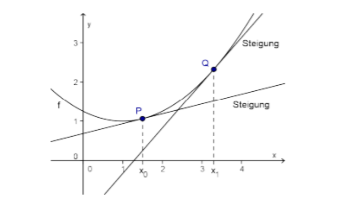


2. Ableitung

Die 2. Ableitung beschreibt die Veränderung der 1. Ableitung. Sie beschreibt das Krümmungsverhalten des Graphen.

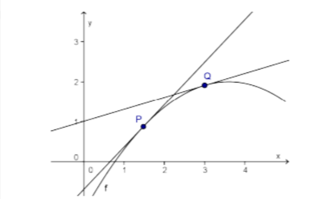
$f''(x_0) > 0$: Der Graph beschreibt eine Linkskurve

$f''(x_0) < 0$: Der Graph beschreibt eine Rechtskurve



Zunahme der **Tangentensteigung**

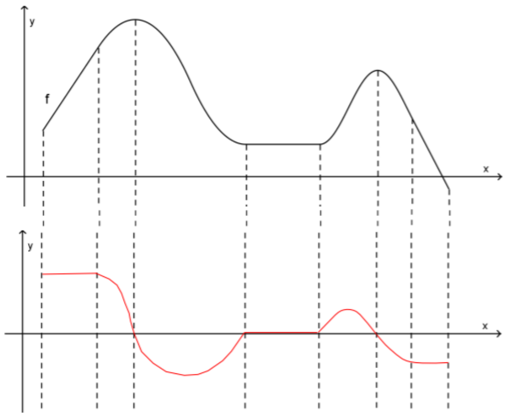
$f''(x_0) > 0$



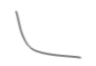
Abnahme der **Tangentensteigung**

$f''(x_0) < 0$

Beispiel



Aufgabe
Ergänzen Sie in der Tabelle die Ungleichheitszeichen und kreuzen Sie Zutreffendes an.

Graph von f				
f **wächst/fällt**	■ wächst ☐ fällt	■ wächst ☐ fällt	☐ wächst ■ fällt	☐ wächst ■ fällt
Vorzeichen von f'	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$
Krümmung von f	☐ rechts ■ links	■ rechts ☐ links	☐ rechts ■ links	■ rechts ☐ links
f' **wächst/fällt**	■ wächst ☐ fällt	☐ wächst ■ fällt	■ wächst ☐ fällt	☐ wächst ■ fällt
Vorzeichen von f''	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$

Monotonie-Untersuchungen

Für eine monoton wachsende, differenzierbare Funktion f gilt: Ihre Steigung ($f'(x)$) ist ≥ 0. Die Umkehrung ist ebenfalls richtig: Ist $f'(x) \geq 0$, so wächst f monoton.

Satz Monotonie

$f'(x)$ ist auf einem Intervall überall $\geq 0 \Leftrightarrow f$ ist auf diesem Intervall monoton steigend.
$f'(x)$ ist auf einem Intervall überall $\leq 0 \Leftrightarrow f$ ist auf diesem Intervall monoton fallend.

Beispiel Monotonie Aufgabe

Gesucht: Alle monotonen Abschnitte der Funktion $f(x) = x^3 - 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 9.$

Löse: $3x^2 - 9 = 0$:

$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$

Somit: Richtungs-Änderung bei $-\sqrt{3}$ und $\sqrt{3}$.

Monotone Abschnitte:

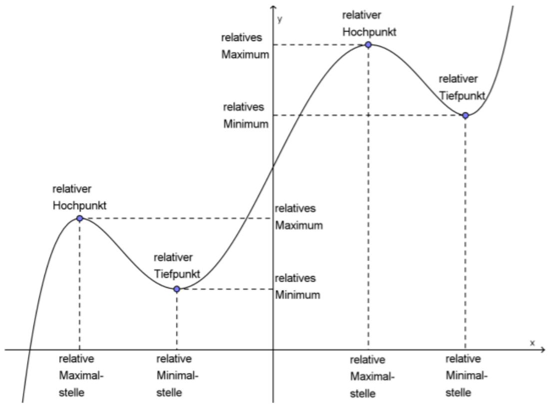
$\left.\begin{array}{l}(-\infty, -\sqrt{3}) \\ (\sqrt{3}, \infty)\end{array}\right\}$ monotones Wachstum

$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$: monotoner Abstieg

Relative Extrema

Eine Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Maximum, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass gilt $f(x) \leq f(x_0)$.

	x_0 heisst ...	$f(x_0)$ heisst ...	(x_0, y_0) heisst ...
Maximum	(relative) Maximal*stelle*	(relatives) Maximum oder auch Maximalwert	(relativer) Hochpunkt
Minimum	(relative) Minimal*stelle*	(relatives) Minimum oder auch Minimalwert	(relativer) Tiefpunkt
Oberbegriff	(relative) Extremal*stelle*	(relatives) Extremum oder auch Extremalwert	(relativer) Extremalpunkt



Randpunkte

Ein abgeschlossenes oder halboffenes Intervall besitzt Randpunkte:

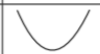
1. $[a, b)$: Randpunkt a
2. $(a, b]$: Randpunkt b
3. $[a, b]$: Randpunkte a, b

Die Punkte eines Intervalls, die keine Randpunkte sind, heissen innere Punkte von I.

Kandidaten für relative Extrema

Satz: 1. Hinreichende Bedingung für relative Extrema
Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein relatives *Maximum*.
Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein relatives *Minimum*.

Satz: 2. Hinreichende Bedingung für relative Extrema
Wenn $f'(x)$ bei x_0 von + zu - wechselt, dann hat f an der Stelle x_0 ein relatives *Maximum*.
Wenn $f'(x)$ bei x_0 von - zu + wechselt, dann hat f an der Stelle x_0 ein relatives *Minimum*.

	lokales Maximum	lokales Minimum
Skizze:		
notwendige Bed.	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$
hinreichende Bed.	$f'(x_0)$ wechselt von + zu -	$f'(x_0)$ wechselt von - zu +
hinreichende Bed.	$f''(x_0) < 0$ (resp. Rechtskrümmung)	$f''(x_0) > 0$ (resp. Linkskrümmung)

Wir betrachten die Funktion $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ auf dem Definitionsbereich $[0, 2]$.
Gesucht sind die relativen Hoch- und Tiefpunkte.

$f(x) = 2x^{0.5} - x$

$f'(x) = x^{-0.5} - 1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_0 = 1$ (Kandidat für Extremalstelle)

$f''(x) = -0.5x^{-1.5} \Rightarrow f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum bei $x_0 = 1$.

Also ist $(1, f(1)) = (1, 1)$ ein relativer Hochpunkt.

Qualitativer Verlauf von $f(x)$ (da $(1, 1)$ der einzige Hochpunkt ist):

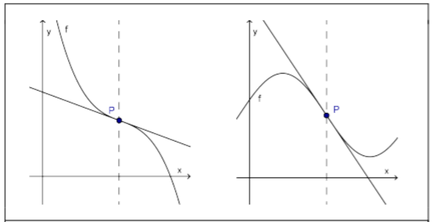
Analyse der Randpunkte

Funktion ist gegen links und gegen rechts monoton fallend $\Rightarrow$ Randpunkte sind Tiefpunkte.

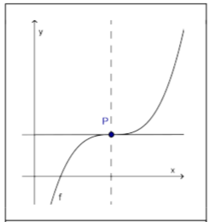
Also: Minima bei $x = 0$ und $x = 2 \Rightarrow (0, 0)$ und $(2, 2\sqrt{2} - 2)$ sind Tiefpunkte.

Wendepunkte und Sattelpunkte

Punkte, an denen sich das Krummungsverhalten des Graphen ändert (d.h. bei denen eine Linkskurve in eine Rechtskurve übergeht oder umgekehrt), heissen Wendepunkte. Wendepunkte mit horizontaler Tangente heissen Sattelpunkte.



Wendepunkte



Sattelpunkt

Bei Wendepunkten muss gelten: $f''(x) = 0$

Satz: Hinreichende Bedingung für Wendepunkte
Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, wenn gilt:

$$f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0$$

Beispiel
Wir weisen nach, dass $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + 2$ an der Stelle $x_0 = 1$ einen Sattelpunkt hat.

Hilfs-Berechnungen: $f'(x) = -2x^2 + 4x - 2$, $\quad f''(x) = -4x + 4$, $\quad f'''(x) = -4$

Einsetzen ergibt:

$f'(1) = 0 \;\}$ horizontale Tangente

$\left.\begin{array}{l} f''(1) = 0 \\ f'''(1) \neq 0 \end{array}\right\}$ Wendepunkt

$\Rightarrow$ Bei 1 ist ein Sattelpunkt.

Deutung von Extrema und Wendepunkten

$f(x)$	**Funktion**
$f'(x)$	Ableitung der Funktion
relativer Hochpunkt	•① Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes x in einer kleinen Umgebung von x_0 gilt: $f(x) \leq f(x_0)$ •② In diesem Punkt gilt (abgesehen von Spezialfällen) $f'(x_0) = 0$. •③ Vor dem Hochpunkt gilt: $f'(x) > 0$, nachher: $f'(x) < 0$.
Wendepunkt Linkskurve $\to$ Rechtskurve	•④ Vor dem Wendepunkt gilt: $f''(x) > 0$, nachher: $f''(x) < 0$. •⑤ Die Ableitung hat an der entsprechenden Stelle ein Maximum.

Kurvendiskussion

Fragenkatalog für die Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich?
2. Symmetrieeigenschaften (gerade/ungerade), Periode?
3. Schnittpunkte mit Achsen, Polstellen?
4. Randpunkte bzw. Verhalten, wenn x gegen die Grenzen des Definitionsbereichs strebt?
5. Kandidaten für Extrema bestimmen und untersuchen
6. Wendepunkte suchen
7. Tabelle von Werten aufstellen (falls noch nötig)

Achtung: Meistens ist es nicht nötig, alle der obigen Schritte durchzuführen. Manchmal sind einige der Fragen auch praktisch unbeantwortbar (z.B. Nullstellen). Ein wichtiger Aspekt der Kurvendiskussion besteht darin, für eine gegebene Funktion jeweils die "passenden" Schritte zu finden, um mit möglichst wenig Rechenaufwand zu einer guten Skizze des Graphen zu kommen.

Beispiel $\quad f(x) = \dfrac{-5x^2 + 5}{x^3} = -5x^{-1} + 5x^{-3}$

1. Definitionsbereich: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
2. Symmetrieeigenschaften: ungerade (da alle Exponenten ungerade sind)
3. Nullstellen: ± 1 $\qquad$ Schnittpunkt mit y-Achse: keine $\qquad$ Polstellen: 0
4. Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$:
   Grad Nenner > Grad Zähler $\Rightarrow f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0, \quad f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$
5. Kandidaten für Extrema: $f'(x) = 5x^{-2} - 15x^{-4} \stackrel{!}{=} 0$
   $$\begin{aligned} \Rightarrow 5x^{-2} &= 15x^{-4} \quad | \cdot x^4 \\ 5x^2 &= 15 \\ x^2 &= 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \text{Kandidaten: } x_1 = \sqrt{3} \approx 1.73,\ x_2 = -\sqrt{3} \approx -1.73 \end{aligned}$$
   Einsetzen ergibt: $f(1.73) = -1.92$.
   Tests für Kandidaten:
   $f''(x) = -10x^{-3} + 60x^{-5}$. Einsetzen ergibt $f''(1.73) > 0 \Rightarrow$ rel. Minimum in $(1.73, -1.92)$.
   Wegen der Symmetrie: rel. Maximum in $(-1.73, 1.92)$
6. Kandidaten für Wendepunkte:
   $$f''(x) = -10x^{-3} + 60x^{-5} \stackrel{!}{=} 0$$
   $$\begin{aligned} \Rightarrow 10x^{-3} &= 60x^{-5} \quad | \cdot x^5 \\ 10x^2 &= 60 \\ x^2 &= 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6} \Rightarrow \text{Kandidaten: } x_1 = \sqrt{6} \approx 2.45,\ x_2 = -\sqrt{6} \approx -2.45 \end{aligned}$$
   Einsetzen ergibt: $f(2.45) = -1.70$.
   Tests für Kandidaten:
   $f'''(x) = 30x^{-4} - 300x^{-6}$. Einsetzen gibt: $f'''(2.45) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt in $(2.45, -1.70)$.
   Wegen der Symmetrie: Wendepunkt in $(-2.45, 1.70)$.

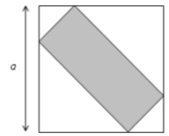
Extremwertaufgaben

Eine Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein *absolutes* $\left\{\begin{array}{c} \textit{Maximum} \\ \textit{Minimum} \end{array}\right\}$ wenn für jedes x im Definitionsbereich von f gilt: $\left\{\begin{array}{c} f(x_0) \geq f(x) \\ f(x_0) \leq f(x) \end{array}\right\}$

Hilfreiche Schritte beim Lösen von Extremwertaufgaben

1. Zielgrösse identifizieren.
2. Unabhängige Variable identifizieren.
3. Definitionsbereich bestimmen.
4. Zielgrösse als Funktion der unabhängigen Variablen ausdrücken; ev. eine qualitative Skizze des Graphen machen.
5. Relative Maxima resp. Minima bestimmen; Randpunkte auch berücksichtigen!
6. Untersuchen, welche der relativen Extrema auch absolute Extrema sind (inklusive – bei offenen und halboffenen Intervallen – Betrachtung der Funktion in der Nähe des Randes)
7. Die gesuchte Information aus den Berechnungen extrahieren.
   (Ev. nachschauen, nach welcher Grösse gefragt wurde: Extremal*stelle*? Extremal*wert*? Extremal*punkt*?)

Beispiel 1
Einem Quadrat der Seitenlänge a soll ein Rechteck mit grösstmöglichem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Die Seiten des Rechtecks sollen parallel zu den Diagonalen des Quadrates sein.



1. Zielgrösse: Flächeninhalt A des Rechtecks
2. Unabhängige Variable:
   Abstand x der Rechteck-Ecke zur Quadrat-Ecke
3. Definitionsbereich: $(0, a)$
4. Zielgrösse als Funktion der unabhängigen Variablen ausdrücken:
   $f(x) = \text{Länge} \cdot \text{Breite} = \sqrt{x^2 + x^2} \cdot \sqrt{(a-x)^2 + (a-x)^2} = \sqrt{2} \cdot x \cdot \sqrt{2} \cdot (a - x) = 2x(a - x)$
   (Alternative: weisse Dreiecke von der Quadrat-Fläche abziehen.
   Dies ergibt $f(x) = a^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{(a-x)^2}{2} = 2ax - 2x^2$.)
5. Relative Maxima bestimmen
   $f'(x) = (2ax - 2x^2)' = 2a - 4x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$.
   $f''(x) = -4 < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum bei $\frac{a}{2}$.
6. Verhalten am Rand:
   $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 2a \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 2a \cdot a - 2a^2 = 0$
7. Gesuchte Information:
   Für $x = \frac{a}{2}$ bekommt man ein Rechteck mit maximalem Inhalt.

Beispiel 2

Gegeben ist die Kurve $f(x) = x^2$. Welcher Punkt auf dieser Kurve hat den kleinsten Abstand vom Punkt $(-1, 2)$?

1. Zielgrösse: Abstand d zum Punkt $(-1, 2)$

2. Unabhängige Variable: Wert der x-Koordinate

3. Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

4. Zielgrösse als Funktion d. unabhängigen Variablen:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (x^2-2)^2}$$

Vereinfachung:

$$d^2 = (x+1)^2 + (x^2-2)^2 = x^2 + 2x + 1 + x^4 - 4x^2 + 4 = \underbrace{x^4 - 3x^2 + 2x + 5}_{g(x)}$$

Es reicht, das Minimum von $g(x)$ zu finden (dies ist automatisch das Minimum von d).

5.

$g'(x) = 4x^3 - 6x + 2 \overset{!}{=} 0$

Durch Raten: $x_0 = 1$ ist eine Nullstelle.
Faktorisierung mit Horner-Schema:

	4	0	-6	2
1		4	4	-2
	4	4	-2	0

$\Rightarrow 4x^3 - 6x + 2 = (x-1)(4x^2+4x-2) = 2(x-1)(2x^2+2x-1)$

Nullstellen mit Mitternachtsformel berechnen: $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{4} \Rightarrow x_1 = 0.37\, x_2 = -1.37$

Vergleich der 3 Kandidaten, um zu entscheiden, welcher das Minimum liefert:
$g(1) = 5, \quad g(0.37) = 5.34, \quad g(-1.37) = 0.15$

$\Rightarrow x = -1.37$ ist Minimalstelle, gesuchter Punkt ist $(-1.37, (-1.37)^2) = (-1.37, 1.88)$