# 基环树、负环与差分约束

李淳风

长郡中学

2024 年 9 月 28 日

# 前言

众所周知，$N$ 个点的树有 $N-1$ 条边。若在树上任意添加一条边，则会形成一个环。除了环之外，其余部分由若干棵子树构成。

我们把这种 $N$ 个点 $N$ 条边的连通无向图，即在树上加上一条边构成的恰好包含一个环的图，称为“基环树”。如果不保证连通，也可能是若干棵基环树组成的森林，简称为“基环树森林”。

在有向图中我们也有类似的概念。$N$ 个点，$N$ 条边，每个节点有且仅有一条入边的有向图就好像以“基环”为中心，有向外拓展的趋势，故称为“外向树”。当然，与之相对的，还有“内向树”。这两类也经常通称为基环树。当然，如果不保证连通，也有可能是“内/外向树森林”或别的形态。

基环树的结构仍然很简单，但比树上问题要复杂一些。处理基环树上问题一般都是先找出图中唯一的环，先把除了环之外的部分按照若干棵树处理，再在环上进行计算。

## 岛屿

你准备浏览一个公园，该公园由 $N$ 个岛屿组成，当地管理部门从每个岛屿 $i$ 出发向另外一个岛屿建了一座长度为 $L_i$ 的桥，不过桥是可以双向行走的。同时，每对岛屿之间都有一艘专用的往来两岛之间的渡船。相对于乘船而言，你更喜欢步行。你希望经过的桥的总长度尽可能长，但受到以下的限制：

- 可以自行挑选一个岛开始游览。
- 任何一个岛都不能游览一次以上。
- 无论任何时间，你都可以由当前所在的岛 $S$ 去另一个从未到过的岛 $D$。从 $S$ 到 $D$ 有如下方法：
  - 步行：仅当两个岛之间有一座桥时才有可能。对于这种情况，桥的长度会累加到你步行的总距离中。
  - 渡船：你可以选择这种方法，仅当没有任何桥和以前使用过的渡船的组合可以由 $S$ 走到 $D$ (当检查是否可到达时，你应该考虑所有的路径，包括经过你曾游览过的那些岛)。

注意，你不必游览所有的岛，也可能无法走完所有的桥。
请你编写一个程序，给定 $N$ 座桥以及它们的长度，按照上述的规则，计算你可以走过的桥的长度之和的最大值。
$2 \leq N \leq 10^6, 1 \leq L_i \leq 10^8$。

# 岛屿

根据题意，整个公园是一个基环树森林的状态。按照题目中给出的乘坐渡船的规则，一旦离开某棵基环树，就不能再通过渡船回来。因此，这道题目就是求各个基环树的最长链长度之和。
那么，如何求出基环树的最长链呢？我们可以分为两种情况来考虑：

- 最长链在去掉环之后的若干棵树中；
- 最长链经过了环，其两端分别在去掉环上所有边之后的两棵不同子树中。

我们可以先进行一次 DFS 找出基环树中的环，并找出环上的节点 $s_1, s_2, \cdots, s_t$。
从每个 $s_i$ 出发，在不经过其它环上点的前提下，对树进行 DFS 或 DP，求出第一种情况的答案，并统计 $D[s_i]$ 表示从 $s_i$ 出发走向以 $s_i$ 为根的子树内，能够到达的最远节点的距离。
这样，对于第二种情况，就相当于找到环上两个不同的节点 $s_i, s_j$，使得 $D[s_i] + D[s_j] + dist(s_i, s_j)$ 最大。其中 $dits(s_i, s_j)$ 表示 $s_i, s_j$ 在环上的距离，有逆时针、顺时针两种走法，取较大值即可。这个问题到这里就变成了一个环上问题，断环成链复制一遍后用单调队列即可 $O(N)$ 解决、

## 创世纪

上帝手中有 $N$ 种世界元素，每种元素可以限制另外 1 种元素，把第 $i$ 种世界元素能够限制的那种世界元素记为 $A[i]$。
现在，上帝要把它们中的一部分投放到一个新的空间中去建造世界。
为了世界的和平与安宁，上帝希望所有被投放的世界元素都至少有一个能够限制它的世界元素没有被投放。
上帝希望知道，在此前提下，他最多可以投放多少种世界元素？
$1 \leq N \leq 10^6$。

## 创世纪

上帝手中有 $N$ 种世界元素，每种元素可以限制另外 1 种元素，把第 $i$ 种世界元素能够限制的那种世界元素记为 $A[i]$。
现在，上帝要把它们中的一部分投放到一个新的空间中去建造世界。
为了世界的和平与安宁，上帝希望所有被投放的世界元素都至少有一个能够限制它的世界元素没有被投放。
上帝希望知道，在此前提下，他最多可以投放多少种世界元素？
$1 \le N \le 10^6$。

把每种世界元素当成一个节点，每个节点 $i$ 往 $A[i]$ 连边。显然，每个节点恰好有一条出边，所以这张图构成了内向树森林。内向树森林中每棵树是独立的，可以分别计算。对于一棵内向树，我们同样可以通过一次 DFS 找出图中唯一的环。任取环中一点 $p$，断开 $p$ 与 $A[p]$ 的边，就变成了一棵以 $p$ 为根的树，每个 $A[i]$ 就是 $i$ 的父节点。
对于树上的这个问题，我们可以设 $f[x][0/1]$ 表示在以 $x$ 为根的子树中，没投放/投放 $x$ 的情况下，最多能够投放多少个节点，可以直接通过树形 DP 解决这个问题。但这样会导致 $p$ 和 $A[p]$ 之间的限制没有用到，那我们就强行令它满足这个限制。强制不投放 $p$ 做一遍 DP，在更新 $f[A[p]]$ 时特殊考虑。两次树形 DP 得到的答案取最大值就是最终答案。

# 差分约束系统

差分约束系统是一种特殊的 $N$ 元一次不等式组。它包含 $N$ 个变量 $X_1 \sim X_N$ 以及 $M$ 个约束条件，每个约束条件都是以两个变量作差构成的，形如 $X_i - X_j \leq c_k$，其中 $c_k$ 是个常数。我们的目标是求一组解 $X_1 = a_1, \cdots, X_N = a_N$，使所有约束条件都满足。
差分约束系统中的每个条件 $X_i - X_j \leq c_k$ 可以变形为 $X_i \leq X_j + c_k$。这与单源最短路问题中的三角形不等式 $dist[y] \leq dist[x] + z$ 非常类似。因此，可以把每个变量 $X_i$ 看作有向图中的一个节点 $i$，对于每个约束条件 $X_i - X_j \leq c_k$，从节点 $j$ 向节点 $i$ 连一条长度为 $c_k$ 的有向边。
若 $\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$ 是一组解，那么 $\{a_1 + K, a_2 + K, \cdots, a_N + K\}$ 也是一组解。因此我们可以增加 $N$ 个形如 $X_i - X_0 \leq 0$ 的约束条件，从节点 0 出发向每个节点连一条长度为 0 的有向边，然后令 $dist[0] = 0$，从 0 出发跑单源最短路。若图中存在负环，则给定的差分约束系统无解。否则，$X_i = dist[i]$ 就是一组解。
在某些题目中，约束条件形如 $X_i - X_j \geq c_k$。我们仍然可以从 $j$ 到 $i$ 连长度为 $c_k$ 的有向边，只是改为计算单源最长路，若图中有正环则无解。当然，我们也可以把约束条件转化为 $X_j - X_i \leq -c_k$，再按照单源最短路进行计算。

## Intervals

有 $n$ 个区间，在区间 $[a_i, b_i]$ 中至少取任意互不相同的 $c_i$ 个整数。求在满足 $n$ 个区间的限制的情况下，至少要取多少个整数。
$1 \leq n \leq 50000, 0 \leq a_i \leq b_i \leq 50000, c_i \leq b_i - a_i + 1$。

## Intervals

有 $n$ 个区间，在区间 $[a_i, b_i]$ 中至少取任意互不相同的 $c_i$ 个整数。求在满足 $n$ 个区间的限制的情况下，至少要取多少个整数。
$1 \le n \le 50000, 0 \le a_i \le b_i \le 50000, c_i \le b_i - a_i + 1$。

我们可以用差分约束系统来做这道题。设 $s[0]$ 表示 $0 \sim k$ 之间最少选出多少个整数。根据题意，有 $s[b_i] - s[a_i - 1] \ge c_i$。这很明显是一个差分约束系统的模型。不过，题目中还有一些隐含的条件：

- $s[k] - s[k-1] \ge 0$，$0 \sim k$ 选出的数不会比 $0 \sim k-1$ 选出的数少。
- $s[k] - s[k-1] \le 1$，每个数只能被选一次。

因此，我们可以把 $-1 \sim 50000$ 这 50002 个整数分别作为图中的节点，从每个 $k-1$ 往 $k$ 连长度为 0 的有向边，$k$ 到 $k-1$ 连长度为 $-1$ 的有向边，从每个 $a_i - 1$ 到 $b_i$ 连长度为 $c_i$ 的有向边。
最后，令 $s[-1] = 0$，以 $-1$ 为起点求单源最长路。因为本题保证了 $c_i \le b_i - a_i + 1$，所以图中没有正环，差分约束系统一定有解。求完最长路后，$s[50000] = dist[50000]$ 即为本题的答案。

## Intervals

有 $n$ 个区间，在区间 $[a_i, b_i]$ 中至少取任意互不相同的 $c_i$ 个整数。求在满足 $n$ 个区间的限制的情况下，至少要取多少个整数。
$1 \le n \le 50000, 0 \le a_i \le b_i \le 50000, c_i \le b_i - a_i + 1$。

我们可以用差分约束系统来做这道题。设 $s[0]$ 表示 $0 \sim k$ 之间最少选出多少个整数。根据题意，有 $s[b_i] - s[a_i - 1] \ge c_i$。这很明显是一个差分约束系统的模型。不过，题目中还有一些隐含的条件：

- $s[k] - s[k-1] \ge 0$，$0 \sim k$ 选出的数不会比 $0 \sim k-1$ 选出的数少。
- $s[k] - s[k-1] \le 1$，每个数只能被选一次。

因此，我们可以把 $-1 \sim 50000$ 这 $50002$ 个整数分别作为图中的节点，从每个 $k-1$ 往 $k$ 连长度为 $0$ 的有向边，$k$ 到 $k-1$ 连长度为 $-1$ 的有向边，从每个 $a_i - 1$ 到 $b_i$ 连长度为 $c_i$ 的有向边。
最后，令 $s[-1] = 0$，以 $-1$ 为起点求单源最长路。因为本题保证了 $c_i \le b_i - a_i + 1$，所以图中没有正环，差分约束系统一定有解。求完最长路后，$s[50000] = dist[50000]$ 即为本题的答案。
当然，本题也可以用贪心求解。把所有区间按照右端点排序后从小到大枚举，在一个区间内选数的时候，选的数肯定越靠右越好。用并查集维护不超过 $x$ 的最大的还没有填过的数是多少即可。