NOI2025 联合省选模拟赛

GDFZ

2025 年 2 月 11 日

目录

A 乌龟（turtle）

Subtask 1

将两个乌龟分开考虑。

对于当前乌龟，设 $dp_{i,t,S}$ 表示时刻 t，该乌龟在节点 i，它消灭了 S 中的小猪，转移时可以在当前节点等待，也可以沿一条边移动，注意不要在 DAG 上跑 dijkstra 即可，最后将两名乌龟合并，复杂度为 $\mathcal{O}(t_{\max}2^k m)$，想到这个应该会正解了吧？不知道有没有别的做法。

Subtask 2

考虑设 $dp_{i,j,S}$ 表示一名乌龟在节点 i，一个乌龟在节点 j，消灭了 S 中的小猪，最少花费的时间，转移时可以让一个乌龟消灭一只小猪，也可以让一个乌龟沿一条边移动，复杂度为 $\mathcal{O}(2^k nm\ log\ nm)$。

Subtask 3

对正解的引导，不知道有没有人想出了这个 subtask 但没 AC 的。

考虑分类讨论每个乌龟分别消灭了哪些小猪，然后大概就能会正解了？

Subtask 4

仍然考虑将两个乌龟分开考虑。

设 $dp_{i,S}$ 表示当前乌龟在节点 i，它消灭了 S 中的小猪，最少花费多少时间，转移可以沿一条边移动，也可以等待直到下一只小猪到这个节点的时刻并消灭这只小猪，按照 S 分层跑即可。

最后合并两个乌龟，复杂度为 $\mathcal{O}(2^k m\ log\ m)$。

B 路灯（light）

考察所有正整数对 (m, n)，其中 $m \ge n$; $\gcd(m, n) = 1$; $m \bmod 2 \ne n \bmod 2$; $m^2 + n^2 \le L$

则三元组 $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ 与 $f(L)$ 对应的所有三角形一一对应

考虑单点求值 $f(L)$

若没有 $\gcd(m, n) = 1$ 的限制，直接 $O(\sqrt{L})$ 枚举 m 即可

否则可以莫反，复杂度 $O(\sqrt{L}\log L)$

对于询问 $[l, r]$，先求出 $f(l-1)$，问题转化为对 $i \in \{l, l+1, \cdots, r\}$ 求出 $m^2+n^2 = i$ 的上述正整数对 (m, n) 的数量

枚举 m，暴力遍历可能的值域内的 n，判断 $\gcd$ 可以预处理 m 的质因子，在数据范围内 $(f(r) - f(l-1))\log r$ 的复杂度是可以接受的

C 野火（fire）

将每个数的质因子拎出来视为一个个元素，就是有若干个集合，每次操作将所有集合中最小的元素拎出来组成一个新集合。首先注意到两个元素最终在同一个集合内当且仅当它们最后一次被操作的时间相等，因此只需求出每个集合最后一次被操作的时间 t_i。

Lemma 1. **对于 $\frac{k(k+1)}{2}$ 个元素组成的任意若干个堆，进行至多 k^2-k 次操作后一定会形成大小为 $1,2,\ldots,k$ 的稳定状态。**

证明可以考虑将坐标系斜过来，参考这里：参考链接

其实不一定要知道这一点，知道它是 $O(k^2)$ 的即可。弄大点没关系。

于是计算 t_i 时，考虑最小的 k 使得 $\frac{k(k+1)}{2}\geq i$。

Lemma 2. **经过 $O(k^2)$ 次操作进入稳定状态后，i 号元素恰好每 k 步被操作一次，其中 $\frac{(k-1)k}{2}<i\leq\frac{k(k+1)}{2}$，且稳定后每次操作对每种对应 k 不同的 i 各操作一个。**

考虑对 k 归纳证明，$k=1$ 奠基显然。

设命题对 $k-1$ 成立，首先考虑元素 $\frac{k(k+1)}{2}$，易证每次操作完它在最顶上，于是它显然每 k 轮操作一次。再考虑 $\frac{k(k+1)}{2}-1$，由于引理对 $k-1$ 成立，所以每个位置已经钦定 $k-1$ 个被操作的数了，$\frac{k(k+1)}{2}-1$ 必须挑一个没被占用的位置放，即不与 $\frac{k(k+1)}{2}$ 重合，这样才能保证每次操作了 k 个数。既然不与 $\frac{k(k+1)}{2}$ 重合，那么它头顶就没有比它更大的，于是它在最顶上，自然 k 轮后才能再次操作。其余数同理。

于是对于每个 i 暴力模拟前 $O(k^2)=O(i)$ 次操作，后面的操作可以直接算出。注意到（感性理解）相邻两次操作间隔为 $O(\sqrt{i})$，因此总复杂度为 $\sum_{i=1}^{K}\sqrt{i}=O(K\sqrt{K})$，其中 $K=O(n\log V)$ 为元素总个数。

怎么暴力模拟？用扫描线扫 lim，维护 $\leq lim$ 的数在 T 时刻出现了几个，注意到由 **Lemma 2** 可知对于区间 $(\frac{(k-1)k}{2},\frac{k(k+1)}{2}]$ 中的数只需处理其在 $\leq O(k^2)$ 时的贡献，后面的贡献恰好为 1。模拟操作的同时顺便维护即可。