# La logique des Proposition & Prédicats

Pr. Boutaina Hdioud

# Objectifs

- Apprendre les principales définitions et les résultats importants en logique classique.
- Acquérir une meilleure rigueur dans le raisonnement;
- Maîtriser l'utilisation du formalisme logique comme formalisme de représentation des connaissances très utilisé dans plusieurs domaines liés à l'informatique (Intelligence artificielle, programmation, …).

# Plan

- Historique & Introduction
- Logique des propositions
- Logique des prédicats

## *Histoire*

La logique est à l'origine la recherche de règles générales et formelles permettant de distinguer un raisonnement concluant de celui qui ne l'est pas.

ENSIAS

## Quelques dates de l'histoire de La logique

☞ En -300 : Aristote (considéré souvent comme le père de la 'Logique' comme discipline) définit les concepts de la logique, il divise la ***logique*** en 3 parties : l'étude de la *conception*, du *jugement* et du *raisonnement*;

☞ **Leibniz** (1646-1713) envisage qu'une machine puisse *raisonner :* enchaîner des propositions élémentaires pour faire des déductions;

☞ En 1854 : **Boole** reprend l'étude de Leibniz, il démontre, dans son ouvrage *The Laws of Thought* (*Les lois de la pensée*) que tous les processus logiques peuvent être modélisés par des opérations logiques utilisant les opérateurs de base (ET, OU, NON) appliqués à des variables à deux états. Depuis cette date, on peut dire que la logique a migré de la philosophie vers les mathématiques.

## Quelques dates de l'histoire de La logique

- Vers la fin du XIX siècle, **Frege** fonde la science des systèmes formels et invente le calcul des prédicats.

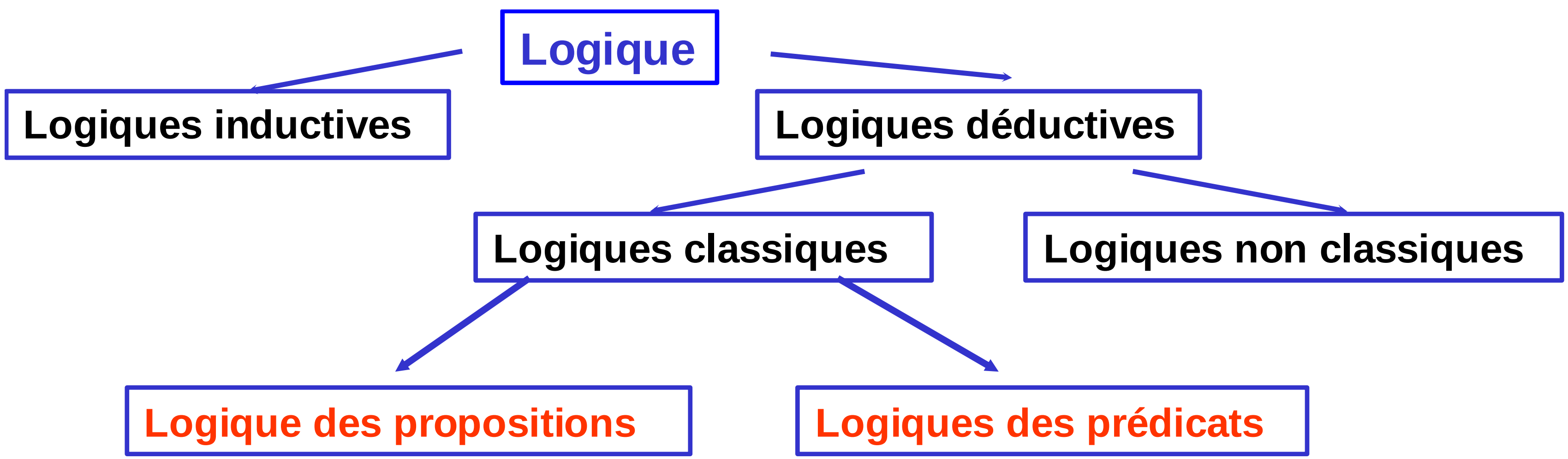
- Au début du XX siècle, **Tarski** propose une théorie de la référence expliquant comment relier les objets d'un système formel logique et les objets du monde réel, autrement dit, la formalisation d'un domaine de connaissances par un système formel devient possible. C'est la naissance de la notion de démonstration automatique

- En 1931, **Gödel** montre que la logique des prédicats est seulement semi-décidable : il existe une procédure effective pour prouver (en un temps fini) tout énoncé vrai, mais ce n'est pas le cas pour les énoncés faux.

## *Introduction*

☞ La Logique est la discipline qui s'attaque à la notion de **validité** des **raisonnements**, toutefois, la manière de traiter cette notion, les fondements, le formalisme utilisé, etc., changent d’une *logique* à une autre.

☞ Nous avons une sorte d’arbre d’héritage entre ces différentes logiques :



## *Introduction*

- En logique: un raisonnement valide utilise des **règles d'inférence** valides.
- Une règle d'inférence permet le passage d'un certain nombre de prémisses à une conclusion.
- Une règle d'inférence est valide à cause de sa forme et non pas à cause du sens des prémisses.

ENSIAS

## Introduction (fin)

- Règles d'inférence pour la logique propositionnelle

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\neg a$ | $\vdash$ | $a \Longrightarrow b$ | condition suffisante |
| $a, a \Longrightarrow b$ | $\vdash$ | $b$ | modus ponens |
| $a \Longrightarrow b\ ,\ \neg b$ | $\vdash$ | $\neg a$ | Modus tollens |
| $a \Longrightarrow b, b \Longrightarrow c$ | $\vdash$ | $a \Longrightarrow c$ | Syllogisme |
| $a \vee b, \neg a \vee c$ | $\vdash$ | $b \vee c$ | résolution de Robinson |
| $a \wedge b$ | $\vdash$ | $a$ | élimination selon $\wedge$ |
| $a, b$ | $\vdash$ | $a \wedge b$ | introduction selon $\wedge$ |
| $a$ | $\vdash$ | $a \vee b$ | Introduction selon $\vee$ |
| $a \Leftrightarrow b$ | $\vdash$ | $a \Longrightarrow b$ | élimination selon $\Leftrightarrow$ |
| $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a$ | $\vdash$ | $a \Leftrightarrow b$ | Introduction selon $\Leftrightarrow$ |
| $a, \neg a$ | $\vdash$ | $faux$ | contradiction |
| $a \vee b,\ a \Longrightarrow c\ ,\ b \Longrightarrow c$ | $\vdash$ | $c$ | preuve par cas |
| $\neg a \vdash \text{faux}$ | $\vdash$ | $a$ | preuve par l 'absurde |
| $si\ a, \Gamma \vdash b$ alors $\Gamma$ | $\vdash$ | $a \Longrightarrow b$ | théorème d'Herbrand |

## Sommaire

- *Introduction*
- *Langage propositionnel*
- *Théorie des modèles*
- *Théorie de la preuve*
  - *Introduction*
  - *Méthodes axiomatiques*
  - *Méthode des tables de vérité*
  - *Méthode de Résolution*

### *Introduction*

- La logique des **propositions** est une branche de la **logique** et plus précisément de la logique classique**.**
- Dans la logique des propositions, les opérations qui lient les propositions pour en former d'autres plus complexes sont appelées des connecteurs,
- Un connecteur binaire permet de composer deux propositions pour en obtenir une troisième,
- Un connecteur unaire permet d'obtenir une proposition à partir d'une autre.

## Introduction

- Dans la logique de propositions, nous pouvons considérer trois niveaux d'analyse:
  - Langage propositionnel (syntaxique) : définition des formules bien formées (fbf ou wff), i.e. les propositions correctes syntaxiquement;
  - Théorie des modèles (sémantique) : définition des notions de validité des propositions et de relation de conséquence logique entre propositions;
  - Théorie de la preuve (axiomatique) : définition des notions de prouvabilité des propositions et de déduction;

But : valide = prouvable

## Langage propositionnel : LP

### Syntaxe

Pour étudier la syntaxe d'un langage il faut donner un alphabet (un ensemble de symboles) et des règles de constructions syntaxiques d'expressions à partir de ces symboles.

## Langage propositionnel : LP

### L'alphabet

L'alphabet est constitué :

- de **connecteurs** : **¬ , ∨ , ∧ , ⇒** , **⇔** qui se lisent respectivement non, ou, et, ou, implique et équivalent.
- de **délimiteurs** : les parenthèses ( )
- d'un ensemble infini dénombrable d'**atomes** appelés aussi propositions ou variables propositionnelles (ou *formules atomiques*) par exemple, p, q, r, …., il_pleut, la_route_est_mouillée, … ).
- des deux **constantes** propositionelles **V** (vrai) et **F** (faux).

## Langage propositionnel : LP (suite)

### Formules bien formées (fbf ou wff)

Le langage est constitué de l' ensemble des Formules Bien Formées (appelées aussi : FBFs ou Well Formed-Formula WFF) ou expressions bien formées défini comme suit:

- Base : tout atome est une fbf, de même les constantes propositionnelles sont des fbf
- Induction : si F et G sont des fbfs alors $(\neg G)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ et $(F \leftrightarrow G)$ sont des fbfs
- Clôture : toutes les fbfs sont obtenues par application des 2 règles ci dessus.

- Ordre de priorité des connecteurs : (Le plus prioritaire) $\neg$, $\wedge$ , $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

  $A \wedge \neg B \vee C \rightarrow D \wedge E$ doit se lire $(((A \wedge (\neg B)) \vee C) \rightarrow (D \wedge E))$

- On omet par abus les parenthèses les plus externes

  $(A \vee B)$ devient $A \vee B$

- Quand il y a un seul connecteur, l'association se fait de gauche à droite.

  $A \rightarrow B \rightarrow C$ correspond à $((A \rightarrow B) \rightarrow C)$

## Langage propositionnel : LP (suite)

### Sous-formules

- L'ensemble des sous-formules d'une formule A est le plus petit ensemble tel que :
  - A est une sous-formule de A.
  - Si (¬ B) est une sous-formule de A alors B est une sous-formule de A.
  - Si (B ∧ C) (respectivement (B v C) ou (B ⇒ C) ou(B ⇔C)est une sous-formule de A alors B et C sont des sous-formules de A.

- L'endroit où une sous-formule apparaît est son **occurrence**.
- Une ss-formule peut avoir plusieurs occurrences dans une formule.

## Langage propositionnel : LP (suite)

### Substitution uniforme

☞ Une substitution (ou substitution uniforme) associe à une variable propositionnelle p une formule A . Elle est notée [p\A].

☞ L'application de [p\A] à une formule B , notée $B_{[p\backslash A],}$ est le résultat du remplacement simultané de toutes les occurrences de p dans B par A.

☞ B $_{[p\backslash A],}$ est appelé une instance de B.

ENSIAS

## Théorie des modèles :

### Sémantique

La sémantique attribue une signification aux expressions. elle est compositionnelle : la signification d'une formule est fonction de celle de ses constituants.

# Théorie des modèles :

## Interprétation

☞ Une *interprétation* I (ou valuation) est une application de l'ensemble des variables propositionnelles dans l'ensemble des valeurs de vérité {V,F} (ou {0,1}).

## Interprétation des formules

☞ Une interprétation donnée **I** peut être *étendue* à l'ensemble des formules comme suit (A et B étant des formules) :

- I(*F*) = F (ou 0 ) et I(*V*) = V (ou 1)
- I(¬A) = **V** si I(A)= F et I(¬A) = F sinon (ou 1 - I(A))
- I(A $\wedge$ B) = **V** si I(A)= V et I(B) =V et I(A $\wedge$ B) = **F** sinon (ou min(I(A),I(B)))
- I(A v B) = **V** si I(A)= V ou I(B) =V et I(A $\wedge$ B) = **F** sinon (ou max(I(A),I(B)) )
- I(A $\Rightarrow$ B) = **V** si I(A) = F (ou 0) ou I(B) =V (ou 1) et I(A $\Rightarrow$ B) = **F** sinon.
- I(A $\Leftrightarrow$ B) = **V** si I(A $\Rightarrow$ B) =V (ou 1) et I(B $\Rightarrow$A) =V (ou 1) et I(A $\Leftrightarrow$ B) = **F** sinon.

## Théorie des modèles (suite):

### Modèle

☞ I est un modèle pour une formule A (ou I satisfait A) ssi I(A) = V , noté $|=_I$ A.

☞ I est un modèle pour un ensemble de formules S ssi I est un modèle pour toute formule A de S.