

Hệ mã hóa công khai RSA

Bước 1: Tạo khóa

1. Chọn 2 số nguyên tố lớn ngẫu nhiên p và q và tính $n = pq$. Cần chọn p và q sao cho $M < 2^{i-1} < n < 2^i$. Với $i = 1024$ thì n là một số nguyên khoảng 309 chữ số.
2. Tính số làm modulo hệ thống: $n = pq$ và $\phi(n) = (p - 1)(q - 1) = \phi(pq)$
3. Chọn ngẫu nhiên khóa mã hóa b : $\{1 < b < \phi(n) \text{ GCD}(b, \phi(n)) = 1$
4. Giải phương trình để tìm khóa giải mã a : $a = b^{-1} \text{ mod } \phi(n)$ – Euclide mở rộng. Tức $b * a = 1 \text{ mod } \phi(n)$ với $0 \leq a \leq \phi(n)$
5. Khóa công khai (mã hóa): $K_{\text{public}} = \{b, n\}$
6. Khóa bí mật (giải mã): $K_{\text{private}} = \{a, p, q\}$

Bước 2: Mã hóa với $K_{\text{public}} = \{b, n\}$

$$y = e_{K_{\text{pub}}}(x) = x^b \text{ mod } n$$

$$x \in Z_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$$

Bước 3: Giải mã với $K_{\text{private}} = \{a, p, q\}$

$$x = d_{K_{\text{pri}}}(y) = y^a \text{ mod } n$$

Alice gửi dữ liệu cho	Bob
$x=4$ / $K_{\text{pu}}=\{b,n\}=\{3,33\} \leftarrow \text{Bob}$ $y = x^b \text{ mod } n = 4^3 \text{ mod } 33 = 31$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Choose $p=3, q=11$ 2. $n=pq=33, N=20$ 3. Choose $b=3, \text{GCD}(20,3)=1$ 4. $a = b^{-1} \text{ mod } N = 3^{-1} \text{ mod } 20 = 7 \Rightarrow K_{\text{pri}}$ $A \Rightarrow y = 31$ / $K_{\text{pri}}=\{a,p,q\}=\{7,3,11\}$ $x=y^a \text{ mod } n = 31^7 \text{ mod } 33 = 4$

Câu 1: Cho hệ mã hóa RSA với $p=5, q=7, b=5$

- Hãy tìm khóa công khai K_{pub} và khóa bí mật K_{pri}
- Hãy thực hiện mã hóa chuỗi “secure” và giải mã ngược lại bản mã có được.

a. Tạo mã

- $p = 5, q = 7, b = 5$
- Modulo hệ thống $n = pq = 5 \cdot 7 = 35$. $\phi(n) = \phi(pq) = (p - 1)(q - 1) = 24$
- Tìm $a = b^{-1} \bmod \phi(n) = 5^{-1} \bmod 24 = 5$
- $K_{pub} = \{b, n\} = \{5, 35\}$
- $K_{pri} = \{a, p, q\} = \{5, 5, 7\}$

b. Mã hóa $X = \text{“Secure”}$ với $K_{pub} = \{b, n\} = \{5, 35\}$

$$x_1 = S = 18 \Rightarrow y_1 = e_{K_{pub}}(x_1) = x_1^b \bmod n = 18^5 \bmod 35 = 23 \text{ (Bình phương \& nhân)}$$

$$x_2 = E = 4 \Rightarrow y_2 = x_2^b \bmod n = 4^5 \bmod 35 = 9$$

$$x_3 = C = 2 \Rightarrow y_3 = 2^5 \bmod 35 = 32$$

$$x_4 = U = 20 \Rightarrow y_4 = 20^5 \bmod 35 = 20$$

$$x_5 = R = 17 \Rightarrow y_5 = 17^5 \bmod 35 = 12$$

$$x_6 = E = 4 \Rightarrow y_6 = 4^5 \bmod 35 = 9$$

$$Y = \text{“XJGUMJ”}$$

c. Giải mã $Y = \text{“XJGUMJ”} = \{23, 9, 32, 20, 12, 9\}$ với $K_{pri} = \{a, p, q\} = \{5, 5, 7\}$

$$n = pq = 35$$

$$x_1 = d_{K_{pri}}(y_1) = y_1^a \bmod n = 23^5 \bmod 35 = 18 \quad x_4 = 20^5 \bmod 35 = 20$$

$$x_2 = 9^5 \bmod 35 = 4 \quad x_5 = 12^5 \bmod 35 = 17$$

$$x_3 = 32^5 \bmod 35 = 2 \quad x_6 = 9^5 \bmod 35 = 4$$

$$\Rightarrow \text{Bản rõ } X = \text{“SECURE”}$$

Câu 2: Cho hệ mã hóa RSA có $p = 103$, $q = 113$, $b = 71$. Hãy tìm khóa công khai K_{pub} và khóa bí mật K_{pri} của hệ mã trên. Sau đó mã hóa thông điệp $X = 1102$ và giải mã ngược lại kết quả nhận được.

- Tạo khóa:

1. Hai số nguyên tố: $p = 103$, $q = 113$ (TM)
2. Modulo hệ thống: $n = pq = 103 \cdot 113 = 11639$,

$$\phi(n) = \phi(pq) = (p - 1)(q - 1) = (103 - 1)(113 - 1) = 11424$$
3. Khóa mã hóa $b = 71$ thỏa mãn: $\{1 < b < \phi(n) \text{ (TM)} \mid \text{GCD}(b, \phi(n)) = 1 \text{ (TM)}\}$
4. Tìm khóa giải mã: $a = b^{-1} \bmod \phi(n) = 71^{-1} \bmod 11424 = 9815$

Theo thuật toán Euclide mở rộng tính $71^{-1} \bmod 11424$ với $r_0 = 11424$, $r_1 = 71$, $r_i = r_{i+1} \cdot q_{i+1} + r_{i+2}$, $s_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_i = s_{i-2} - q_{i-1} \cdot s_{i-1}$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_i = t_{i-2} - q_{i-1} \cdot t_{i-1}$. Thuật toán được biểu diễn qua bảng sau:

Bước	r_i	q_{i+1}	r_{i+1}	r_{i+2}	s_i	t_i
0	11424	160	71	64	1	0
1	71	1	64	7	0	1
2	64	9	7	1	1	-160
3	7	7	1	0	-1	161
4	1				10	-1609

Vậy $71^{-1} \bmod 11424 \equiv (-1609) \bmod 11424 = -1609 + 11424 = 9815$

5. Khóa công khai $K_{\text{pub}} = \{b, n\} = \{71, 11639\}$
6. Khóa bí mật $K_{\text{pri}} = \{a, p, q\} = \{9815, 103, 113\}$

- Mã hóa $X = 1102$ với $K_{\text{pub}} = \{b, n\} = \{71, 11639\}$

$$x = 1102 \Rightarrow y = e_{K_{\text{pub}}}(x) = x^b \bmod n = 1102^{71} \bmod 11639 = 2345$$

\Rightarrow Bản mã $Y = 2345$

Theo thuật toán Bình phương và nhân tính $1102^{71} \bmod 11639 = 2345$ với $x = 1102$, $k = 71 = 1000111$, $n = 11639$. Khởi tạo $p = 1$ thuật toán được biểu diễn qua bảng:

b[i]	$p=p*p$	$p(\bmod n)$	$p=p*x$	$p(\bmod n)$
1	1	1	1102	1102
0	1214404	3948	-	3948
0	15586704	2083	-	2083
0	4338889	9181	-	9181
1	84290761	1123	1237546	3812
1	14531344	5872	6470944	11299
1	127667401	10849	11955598	2345

- Giải mã $Y = 2345$ với $K_{\text{pri}} = \{a, p, q\} = \{9815, 103, 113\}$. Tính $n = pq = 11639$

$$x = d_{K_{\text{pri}}}(y) = y^a \bmod n = 2345^{9815} \bmod 11639 = 1102$$

\Rightarrow Bản rõ $X = 1102$

Theo thuật toán Bình phương và nhân tính $2345^{9815} \bmod 11639 = 1102$ với $x = 2345$, $k = 11639 = 10011001010111$, $n = 11639$. Khởi tạo $p = 1$ thuật toán được biểu diễn qua bảng sau:

b[i]	$p=p*p$	$p(\bmod n)$	$p=p*x$	$p(\bmod n)$
1	1	1	2345	2345
0	5499025	5417	-	5417
0	29343889	1970	-	1970
1	3880900	5113	11989985	1815
1	3294225	388	909860	2018
0	4072324	10313	-	10313
0	106357969	787	-	787
1	619369	2502	5867190	1134
0	1285956	5666	-	5666
1	32103556	3194	7489930	6053
0	36638809	10876	-	10876
1	118287376	219	513555	1439
1	2070721	10618	24899210	3389
1	11485321	9267	21731115	1102

Hệ mật mã ElGamal

Bước 1: Tạo khóa

- Cho p là một số nguyên tố sao cho bài toán logarit rời rạc trong Z_p là khó giải.
- Chọn phần tử nguyên thủy $\alpha \in Z_p^*$
- Chọn $a \in \{2, 3, \dots, p-2\}$ là khóa bí mật thứ nhất (Khóa người nhận, giải mã)
- Tính $\beta = \alpha^a \bmod p$.
- Khi đó: $K_{pub} = (p, \alpha, \beta)$ gọi là khóa công khai, và $K_{pri} = (a)$ là khóa bí mật.

Bước 2: Xây dựng hàm mã hóa dữ liệu

- Chọn 1 số ngẫu nhiên bí mật $k \in Z_{p-1}$, Ta xác định: $k \in Z_{p-1} = \{0, 1, \dots, p-2\}$
- Định nghĩa: $e_{K_{pub}}(x, k) = (y_1, y_2)$ với $y_1 = \alpha^k \bmod p$ và $y_2 = x\beta^k \bmod p$

Bước 3: Giải mã

Với $y_1, y_2 \in Z_p^*$ ta xác định: $d_{K_{pri}}(y_1, y_2) = y_2(y_1^a)^{-1} \bmod p$

A (gửi)	B (nhận)
Choose private key $K_{priA} = \alpha_A$	Choose private key $K_{priB} = \alpha_B$
Compute $K_{pubA} = \alpha^{aA} \bmod p = bA$	$K_{pubB} = \alpha^{aB} \bmod p = bB$
$bB \leq B$	$A \Rightarrow bA$
$k_{AB} = bB^{aA} = \alpha^{aA * aB} \bmod p$	$k_{AB} = bA^{aB} = \alpha^{aB * aA} \bmod p$
$y = x * k_{AB} \bmod p$	$A \Rightarrow y$
	$x = y * k_{AB}^{-1} \bmod p$

Bài tập 1: Trong hệ mật mã Elgamal, lấy $p = 5987$, $\alpha = 2$, $a = 913$, $k = 1647$.

Hãy mã hóa bản rõ $x = 122$ và giải mã ngược lại kết quả đó.

- Bước 1: Tạo khóa

$p = 5987$, $Z_p = \{0, \dots, 5988\}$; $\alpha = 2 \in Z_p^*$ (TM), $a = 913 \in \{2, 3, \dots, p-2\}$ (TM)

Tính $\beta = \alpha^a \bmod p = 2^{913} \bmod 5987 = 4087$. Theo thuật toán bình phương và nhân có $x = 2, k = 913 = 1110010001, n = 5987$ ta có bảng sau.

b[i]	p=p*p	p=p (mod n)	p=p * x	p=p (modn)
1	1	1	2	2
1	4	4	8	8
1	64	64	128	128
0	16384	4410	-	4410
0	19448100	2324	-	2324
1	5400976	702	1404	1404
0	1971216	1493	-	1493
0	2229049	1885	-	1885
0	3553225	2934	-	2934
1	8608356	5037	10074	4087

$\Rightarrow K_{pub} = (p, \alpha, \beta) = (5987, 2, 4087)$

$K_{pri} = (a) = (913)$

- Bước 2: Mã hóa bản rõ $x = 122$ với $K_{pub} = (p, \alpha, \beta) = (5987, 2, 4087)$

$k = 1647 \in \mathbb{Z}_{p-1}$ (TM)

Ta có: $e_{K_{pub}}(x, k) = (y_1, y_2)$ với y_1, y_2 thỏa mãn:

$y_1 = \alpha^k \bmod p = 2^{1647} \bmod 5987 = 955$ Theo thuật toán Bình phương và nhân với $x=2, k=1647=11001101111, n=5987$ ta có bảng sau:

b[i]	p=p*p	p=p(mod n)	p = p * x	p = p(mod n)
1	1	1	2	2
1	4	4	8	8
0	64	64	-	64
0	4096	4096	-	4096
1	16777216	1642	3284	3284
1	10784656	2069	4138	4138
0	17123044	224	-	224
1	50176	2280	4560	4560
1	20793600	749	1498	1498
1	2244004	4866	9732	3745
1	14025025	3471	6942	955

$$y_2 = x\beta^k \bmod p = 122 * 4087^{1647} \bmod 5987 = ((122 \bmod 5987) * (4087^{1647} \bmod 5987)) \bmod 5987 = (122 * 129) \bmod 5987 = 3764$$

Theo thuật toán Bình phương và nhân tính $4087^{1647} \bmod 5987$ với $x=4087$, $k=1647=11001101111$, $n=5987$ ta có bảng sau:

b[i]	p=p*p	p=p(mod n)	p = p * x	p = p(mod n)
1	1	1	4087	4087
1	16703569	5826	23810862	563
0	316969	5645	-	5645
0	31866025	3211	-	3211
1	10310521	907	3706909	956
1	913936	3912	15988344	3054
0	9326916	5157	-	5157
1	26594649	395	1614365	3862
1	14915044	1427	5832149	811
1	657721	5138	20999006	2597
1	6744409	3047	12453089	129

Vậy bản mã $Y = (y_1, y_2) = (955, 3764)$

- Bước 3: Giải mã $Y = (y_1, y_2) = (955, 3764)$ với $K_{pri} = (a) = (913)$

$$\begin{aligned}
 d_{K_{pri}}(y_1, y_2) &= y_2(y_1^a)^{-1} \bmod p = 3764 * (955^{913})^{-1} \bmod 5987 \\
 &= (3764 \bmod 5987 * (955^{913})^{-1} \bmod 5987) \bmod 5987 \\
 &= (3764 \bmod 5987 * (955^{913} \bmod 5987)^{-1} \bmod 5987) \bmod 5987 \\
 &= (3764 * 129^{-1} \bmod 5987) \bmod 5987 = (3764 * 3388) \bmod 5987 = 122 \\
 &\Rightarrow \text{Bản rõ } X = 122
 \end{aligned}$$

Theo thuật toán Bình phương và nhân tính $955^{913} \bmod 5987 = 129$ với $x=955$, $k=913$, $n=5987$

b[i]	p=p*p	p=p(mod n)	p = p * x	p = p(mod n)
1	1	1	955	955
1	912025	2001	1910955	1102
1	1214404	5030	4803650	2076
0	4309776	5123	-	5123

0	26245129	4108	-	4108
1	16875664	4298	4104590	3495
0	12215025	1545	-	1545
0	2387025	4199	-	4199
0	17631601	5873	-	5873
1	34492129	1022	976010	129

Theo thuật toán Euclide mở rộng tính $129^{-1} \bmod 5987$ với $r_0 = 5987$, $r_1 = 129$, $r_i = r_{i+1} * q_{i+1} + r_{i+2}$, $s_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_i = s_{i-2} - q_{i-1} * s_{i-1}$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_i = t_{i-2} - q_{i-1} * t_{i-1}$. Thuật toán được biểu diễn qua bảng sau:

Bước	r_i	q_{i+1}	r_{i+1}	r_{i+2}	s_i	t_i
0	5987	46	129	53	1	0
1	129	2	53	23	0	1
2	53	2	23	7	1	-46
3	23	3	7	2	-2	93
4	7	3	2	1	5	-232
5	2	2	1	0	-17	789
6	1				56	-2599

$$\Rightarrow 129^{-1} \bmod 5987 = (-2599) \bmod 5987 = -2599 + 5987 = 3388$$

Bài tập 2: Cho hệ mật mã ElGamal có $p = 83$, $\alpha = 5$ là một phần tử nguyên thủy của Z_p^* , $a = 71$ (phần tử bí mật mà người nhận chọn). Hãy tìm khóa công khai K_{pub} và khóa bí mật K_{pri} của hệ mã trên.

Cho $k = 47$. Hãy mã hóa bản rõ $x = 23$ và giải mã ngược lại kết quả đó.

- Tạo khóa:

$p = 83$ là một số nguyên tố (TM), phần tử nguyên thủy $\alpha = 5 \in Z_p^*$ (TM)

$a=71 \in \{2, 3, \dots, p-2\}$ (TM) là phần tử bí mật thứ nhất mà người nhận chọn

Tính $\beta = \alpha^a \bmod p = 5^{71} \bmod 83 = 80$. Theo thuật toán bình phương và nhân có $x = 5$, $k = 71 = 1000111$, $n = 83$, khởi tạo $p=1$ ta có bảng sau:

$b[i]$	$p=p*p$	$p=p \bmod n$	$p=p * x$	$p=p \bmod n$
--------	---------	---------------	-----------	---------------

1	1	1	5	5
0	25	25	-	25
0	625	44	-	44
0	1936	27	-	27
1	729	65	325	76
1	5776	49	245	79
1	6241	16	80	80

=> Khóa công khai $K_{pub} = (p, \alpha, \beta) = (83, 5, 80)$. Khóa bí mật $K_{pri} = (a) = (71)$

- Mã hóa dữ liệu $X = 23$ với $K_{pub} = (p, \alpha, \beta) = (83, 5, 80)$

Chọn $k = 47 \in \mathbb{Z}_{p-1} = \{0, 1, \dots, p-1\}$ (TM)

Ta có: $e_{K_{pub}}(x, k) = (y_1, y_2)$ với y_1, y_2 thỏa mãn:

$y_1 = \alpha^k \bmod p = 5^{47} \bmod 83 = 62$ Theo thuật toán Bình phương và nhân với $x=5, k=47=101111, n=83$ ta có bảng sau:

b[i]	$p=p*p$	$p=p(\bmod n)$	$p = p * x$	$p = p(\bmod n)$
1	1	1	5	5
0	25	25	-	25
1	625	44	220	54
1	2916	11	55	55
1	3025	37	185	19
1	361	29	145	62

$y_2 = x\beta^k \bmod p = 23 * 80^{47} \bmod 83 = ((23 \bmod 83) * (80^{47} \bmod 83)) \bmod 83 = (23 * 18) \bmod 83 = 82$

Theo thuật toán Bình phương và nhân tính $80^{47} \bmod 83 = 18$ với $x=80, k=47=101111, n=83$, khởi tạo $p = 1$ ta có bảng sau:

b[i]	$p=p*p$	$p=p(\bmod n)$	$p = p * x$	$p = p(\bmod n)$
1	1	1	80	80
0	6400	9	-	9
1	81	81	6480	6
1	36	36	2880	58
1	3364	44	3520	34
1	1156	77	6160	18

Vậy bản mã $Y = (y_1, y_2) = (62, 82)$

- Giải mã Giải mã $Y = (y_1, y_2) = (62, 82)$ với $K_{pri} = (a) = (71)$

$$\begin{aligned}
 d_{K_{pri}}(y_1, y_2) &= y_2(y_1^a)^{-1} \bmod p = 82 * (62^{71})^{-1} \bmod 83 \\
 &= (82 \bmod 83 * (62^{71})^{-1} \bmod 83) \bmod 83 \\
 &= (82 \bmod 83 * (62^{71} \bmod 83)^{-1} \bmod 83) \bmod 83 \\
 &= (82 * 18^{-1} \bmod 83) \bmod 83 = (82 * 60) \bmod 83 = 23 \\
 &\Rightarrow \text{Bản rõ } X = 23
 \end{aligned}$$

Theo thuật toán Bình phương và nhân tính $62^{71} \bmod 83 = 18$ với $x=62$, $k=71=1000111$, $n=83$, khởi tạo $p=1$ ta có bảng sau:

b[i]	$p=p*x$	$p=p(\bmod n)$	$p = p * x$	$p = p(\bmod n)$
1	1	1	62	62
0	3844	26	-	26
0	676	12	-	12
0	144	61	-	61
1	3721	69	4278	45
1	2025	33	2046	54
1	2916	11	682	18

Theo thuật toán Euclide mở rộng tính $18^{-1} \bmod 83 \equiv (-23) \bmod 83 = -23+83 = 60$ với $r_0 = 83$, $r_1 = 18$, $r_i = r_{i+1} * q_{i+1} + r_{i+2}$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_i = t_{i-2} - q_{i-1} * t_{i-1}$. Thuật toán được biểu diễn qua bảng sau:

Bước	r_i	q_{i+1}	r_{i+1}	r_{i+2}	t_i
0	83	4	18	11	0
1	18	1	11	7	1
2	11	1	7	4	-4
3	7	1	4	3	5
4	4	1	3	1	-9
5	3	3	1	0	14
6	1				-23

Vậy bản mã là $X = 23$

Bài kiểm tra

Đề 1: (Nguyên bản) Cho hệ RSA lấy $p = 31$, $q = 41$, $b = 71$.

- Hãy tìm khóa công khai K_{pub} và khóa bí mật K_{pri} của hệ mã trên.
- Thông điệp được viết bằng tiếng anh, người ta dùng một hàm chuyển đổi các ký tự thành các số thập phân có hai chữ số như sau:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Ví dụ xâu ABC được chuyển thành 00 01 02 và sau đó cắt thành các số có 3 chữ số 000 (=0) và 102 để mã hóa. Bản mã thu được là 1 tập các số $\in \mathbb{Z}_n$. Hãy thực hiện mã hóa xâu $P = \text{"ACTION"}$.

Đề 2: (Sưu tầm) Cho hệ RSA lấy $p = 31$, $q = 41$, $b = 271$.

- Hãy tìm khóa công khai K_{pub} và khóa bí mật K_{pri} của hệ mã trên.
- Thông điệp được viết bằng tiếng anh, người ta dùng một hàm chuyển đổi các ký tự thành các số thập phân có hai chữ số như sau:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Ví dụ xâu ABC được chuyển thành 00 01 02 và sau đó cắt thành các số có 3 chữ số 000 (=0) và 102 để mã hóa. Bản mã thu được là 1 tập các số $\in \mathbb{Z}_n$. Hãy thực hiện mã hóa xâu $P = \text{"SERIUS"}$.

- Giả sử bản mã thu được là $C = \langle 201, 793, 442, 18 \rangle$ hãy thực hiện giải mã để tìm ra thông điệp bản rõ ban đầu.

Đề 3: (Sưu tầm) Cho hệ RSA lấy $p = 29$, $q = 43$, $b = 11$.

- Hãy tìm khóa công khai K_{pub} và khóa bí mật K_{pri} của hệ mã trên.
- Để mã hóa các thông điệp được viết bằng tiếng Anh người ta dùng một hàm chuyển đổi các ký tự thành các số thập phân có hai chữ số như sau:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Ví dụ xâu ABC được chuyển thành 00 01 02 và sau đó cắt thành các số có 3 chữ số 000 (=0) và 102 để mã hóa. Bản mã thu được là 1 tập các số $\in \mathbb{Z}_n$. Hãy thực hiện mã hóa xâu $P = \text{"TAURUS"}$.

- Giả sử bản mã thu được là $C = \langle 1, 169, 1206, 433 \rangle$ hãy thực hiện giải mã để tìm ra thông điệp bản rõ ban đầu.

Đề 4: (Nguyên bản) Cho hệ mật mã ElGamal có $p = 1187$, $\alpha = 79$ là một phần tử nguyên thủy của \mathbb{Z}_p^* , $a = 113$ (phần tử bí mật mà người nhận chọn).

- Hãy tìm khóa công khai K_{pub} và khóa bí mật K_{pri} của hệ mã trên.
- Để mã hóa các thông điệp được viết bằng tiếng Anh người ta dùng một hàm chuyển đổi các ký tự thành các số thập phân có hai chữ số như sau:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Ví dụ xâu ABC được chuyển thành 00 01 02 và sau đó cắt thành các số có 3 chữ số 000 (=0) và 102 để mã hóa. Bản mã thu được là 1 tập các cặp số $(C_1, C_2) \in \mathbb{Z}_p$. Cho $k = 15$, Hãy mã hóa bản rõ $M = \text{"SERIUS"}$.

Đề 5: (Sưu tầm) Cho hệ mật mã ElGamal có $p = 1187$, $\alpha = 79$ là một phần tử nguyên thủy của \mathbb{Z}_p^* , $a = 113$ (phần tử bí mật mà người nhận chọn).

- c. Hãy tìm khóa công khai K_{pub} và khóa bí mật K_{pri} của hệ mã trên.
- d. Đề mã hóa các thông điệp được viết bằng tiếng Anh người ta dùng một hàm chuyển đổi các ký tự thành các số thập phân có hai chữ số như sau:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Ví dụ xâu ABC được chuyển thành 00 01 02 và sau đó cắt thành các số có 3 chữ số 000 (=0) và 102 để mã hóa. Bản mã thu được là 1 tập các cặp số $(C1, C2) \in \mathbb{Z}_p$. Cho $k = 14$, Hãy mã hóa bản rõ $M = \text{"TAURUS"}$.

- e. Giả sử thu được bản mã là một tập các cặp $(C1, C2)$ là $\langle (358, 305), (1079, 283), (608, 925), (786, 391) \rangle$. Hãy giải mã và đưa ra thông điệp ban đầu.

Đáp án:

Đề 2:

- a. $K_{pub} = (271, 1271)$ $K_{pri} = (31, 31, 41)$
- b. $C = (180, 634, 82, 18)$
- c. $P = (201, 700, 132, 18) = 201700132018$.

Tách thành $(20, 17, 00, 13, 20, 18) = \text{URANUS}$

Đề 5:

- a. $K_{pub} = (1187, 79, 76)$ $K_{pri} = (113)$
- b. $(C1, C2) = \{(981, 82), (981, 312), (981, 624), (981, 645)\}$
- c. "150 802 001 724" = PICARY