Lab 6: Najkrótsze ścieżki w grafach

Kajetan Rachwał

Zadanie: Żabka w tarapatach

Żabka Marlenka ucieka przed bocianem w celu uniknięcia zjedzenia. W trakcie ucieczki natrafia na rzekę z liliami, po których może skakać. Rzeka z obu stron jest ograniczona wodospadami - po lewej wodospad jest wyższy i spływają z niego lilie, a po prawej wodospad spada i kończy się ostrymi kamieniami. Żabka chwilowo ukryła się przed bocianem w krzaku przy rzece, ale musi dostać się na drugi brzeg. Naszym celem jest zaplanowanie kolejnych skoków żabki w taki sposób, żeby nie wpadła do wody i dotarła na brzeg jak najmniej się męcząc.

Energia potrzebna do wykonania pojedynczego skoku jest równa kwadratowi jego długości; to znaczy, że skok o początku w punkcie (x_1, y_1) i końcu w (x_2, y_2) kosztuje $E = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ energii. Zmęczenie żabki na danej trasie jest proporcjonalne do sumarycznej energii potrzebnej do wykonania wszystkich skoków.

Opis parametrów problemu

Dostępny żabce fragment rzeki ma szerokość *int w* - odległość między brzegami w metrach i długość *int l* - odległość między wodospadami w metrach.

Pozycje lilii są opisane w tablicy *int[w,l] lilie* w której 1 reprezentuje lilie, a 0 wodę; *lilie[i,j]* oznacza stan rzeki w odległości $i + 1$ metrów od brzegu, na którym znajduje się żabka i w odległości $j + 1$ metrów od lewego wodospadu.

Parametr *int sila* oznacza maksymalną możliwą ilośc energii, jaką żabka może przeznaczyć na jeden skok.

Dany jest także parametr *int start*, który opisuje początkową pozycję żabki na brzegu (t.j. pozycję krzaka, w którym żabka się ukryła) liczoną w metrach od lewego wodospadu.

Cel zadania

Wyznaczyć minimalną energię (sumę energii wszystkich skoków) jaką żabka musi zużyć w celu dotarcia na drugi brzeg z punktu *start*. Jeśli ścieżka istnieje zwrócić listę skoków w postaci *(int x, int y)[] route*, gdzie x oznacza dystans skoku w stronę drugiego brzegu (t.j. skoki 'w górę' mają ujemne x), a y to dystans skoku w lewo lub w prawo (przyjmij, że skoki w lewo mają ujemne y). Należy zwrócić parę (*int total*, *(int x, int y)[] route* zawierającą rozwiązanie, gdzie *total* to energia trasy, a *route* lista skoków. W etapach 1 i 3 można zwrócić $route = null$.

Jeśli trasa nie istnieje należy zwrócić parę $(0, null)$ jako rozwiązanie.

Przykład

Dla parametrów:

$w = 4$, $l = 3$, $lilie = [[1, 0, 1][0, 1, 0][1, 0, 1], [1, 0, 0]]$, $start = 1$, $sila = 2$

Rzeka może być przedstawiona jako:

101

010

101

100

Żaba może wykonać pierwszy skok $(1, -1)$ z brzegu na pierwszą lilię w lewym górnym rogu (lilia $(0, 0)$) z pozycji startowej metr od początku rzeki na brzegu. Skoczy więc od jeden metr 'w dół' i jeden metr w lewo. Energia konieczna do wykonania tego skoku to $E = (1)^2 + (1)^2 = 2$. Skoro $E \leq sila$ to skok jest wykonywalny. Kolejny skok $(2, 0)$ do pierwszej lilii w trzecim rzędzie (lilia $(2, 0)$ wymagałby $E = (0)^2+(2)^2 = 4$ energii, w związku z czym jest niewykonalny.

W tym przykładzie optymalne rozwiązanie składa się z pięciu skoków $(1, -1), (1, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 0)$ i wymaga 8 energii (należy zwrócić $total = 8$, $route = [(1, -1), (1, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 0)]$).

Drugi wariant problemu

W etapach 3 i 4 dany jest parametr *max_ skok*, który opisuje maksymalną liczb skoków, które żabka może wykonać w trakcie ucieczki przed bocianem.

Ponadto, **tylko w części domowej**, rozważamy fakt, że rzeka płyniez prędkością zadaną jako *int v*, gdzie $v \geq 0$. Przyjmujemy, że przesuwanie się rzeki odbywa się w trakcie, kiedy żabka jest w powietrzu; Oznacza to, że żaba skacze z pozycji na której była przed przesunięciem i wskakuje na pozycję, jaką docelowa lilia ma po przesunięciu. Rzeka 'zawija', co znaczy, że lilie, które wypłynęły za prawy wodospad pojawiają się po lewej stronie.

UWAGA: Dopiero testy domowe zawierają przypadki $v > 0$. Można uzyskać maksimum punktów z części laboratoryjnej za rozwiązania zakładające zawsze $v = 0$.

Przykład płynącej rzeki po pierwszym skoku

Dla parametrów z powyższego przykładu i parametru $v = 1$ rzeka po pierwszym skoku żabki może być przedstawiona jako:

110

001

110

010

Analiza przykładu Dla rzeki zdefiniowanej jak powyżej i parametru $start = 1$, $sila = 2$, $v = 1$, $max\_skok : 6$:

Żabka znajduje się na pozycji jeden metr od lewego brzegu, a po przesunięciu się rzeki na pozycji $(0, 1)$ znajduje się lilia. W związku z czym pierwszym skokiem żabki może być skok o jeden 'w dół' i o zero w bok. Zauważ, że w przykładzie z nieruchomą rzeką ten skok nie był możliwy.

Dla powyższyego przykładu należy zwrócić $total = 6$, $route = [(1, 0), (1, 1), (1, 0), (1, 0), (1, 0)]$.

Etapy

Etap 1 - pierwszy wariant, zwrócić tylko konieczną siłę (0.5 pkt)
Etap 2 - dla etapu pierwszego zwrócić listę skoków żabki (0.5 pkt)
Etap 3 - drugi wariant (z $v = 0$), zwrócić konieczną siłę (1 pkt)
Etap 4 - dla etapu trzeciego zwrócić listę skoków żabki (0.5 pkt)

Uwagi

1. Kluczem do zadania jest dobra konstrukcja grafu
2. Gdy istnieje kilka możliwych tras można zwrócić dowolną z nich.
3. Jedyną pozycją na pierwszym brzegu na której żabka może się znaleźć jest pozycja krzaka *int start*.
4. Przyjmij, że można skoczyć na dowolną pozycję na drugim brzegu. W związku z czym każdy skok na brzeg ma postać $(dx, 0)$, i kosztuje dx^2, gdzie dx to dystans od brzegu.
5. W wariancie z płynącą rzeką dopuszczalne są skoki $(0, 0)$, które dalej wliczają się do limitu skoków, ale kosztują 0 energii. Taki skok oznacza, że żaba skacza ze swojej aktualnej pozycji na lilię w tym samym rzędzie odległą o $-v$. Żabka może również skakać w miejscu na brzegu za pomocą skoków $(0, 0)$. Te skoki nie zmieniają pozycji startowej.