Понимаш З.А.

Анализ формулы средней частоты

Средняя частота, формула из статьи [1]:

$$m_{\omega}(s) = \frac{\sigma(s`)}{\sigma(s)}$$ [1]

Также можно выразить след. образом:

$$m_{\omega}(s) = \sqrt{\frac{D\left(\frac{ds}{dt}\right)}{D(s)}}$$

Произведём замену в силу того, что s – цифровой сигнал с частотой дискретизации fd

$$dt = \frac{1}{fd}, \qquad ds_k = s_k - s_{k-1}$$

$$m_{\omega}(s) = \sqrt{\frac{D(fd \cdot ds)}{D(s)}} = fd\sqrt{\frac{D(ds)}{D(s)}}$$

Чтобы перейти от 2-го центрального момента(дисперсии), ко 2му начальному (v_2), допустим M(s)=0, и перейдём к оценкам этих моментов

$$m_{\omega}(s) = fd\sqrt{\frac{v_2^*(ds)}{v_2^*(s)}} = fd\sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{N}(s_k - s_{k-1})^2}{\sum_{k=1}^{N} s_k^2}}$$

Рассмотрим подкоренное выражение

$$\frac{\sum_{k=2}^{N}(s_k - s_{k-1})^2}{\sum_{k=1}^{N} s_k^2} = \frac{\sum_{k=2}^{N} s_k^2 - 2s_k s_{k-1} + s_{k-1}^2}{\sum_{k=1}^{N} s_k^2},$$

Заметим, что когда N велико $\sum_{k=2}^{N} s_{k-1}^2 \approx \sum_{k=2}^{N} s_k^2 \approx \sum_{k=1}^{N} s_k^2$

[1] *В таком виде эта формула реализована в нашем проекте, AI Framework 2.1*

$$\frac{2\sum_{k=1}^{N} s_k^2 - 2\sum_{k=1}^{N} s_k s_{k-1}}{\sum_{k=1}^{N} s_k^2} = 2\left(1 - \frac{\sum_{k=1}^{N} s_k s_{k-1}}{\sum_{k=1}^{N} s_k^2}\right)$$

Пусть $R_s(n)$ – автокорреляционная функция точке n

$$2\left(1 - \frac{R_s(1)}{R_s(0)}\right)$$

$$m_w \approx \sqrt{2} fd \sqrt{1 - \frac{R_s(1)}{R_s(0)}}$$

Зависимость функции $R_s(\omega) = \frac{R_s(1)}{R_s(0)}$ от частоты

$$\frac{R_s(\tau,\omega)}{R_s(0,\omega)} = \frac{\int_0^T a \cdot \sin(t\omega)\, a \cdot \sin(t\omega + \tau\omega)\, dt}{\int_0^T (a \cdot \sin(t\omega))^2\, dt} = \frac{a^2 \int_0^T \sin(t\omega) \sin(t\omega + \tau\omega)\, dt}{a^2 \int_0^T \sin^2(t\omega) dt} =$$

$$= \frac{\int_0^T \sin(t\omega) \sin(t\omega + \tau\omega)\, dt}{\int_0^T \sin^2(t\omega) dt}$$

Зависимость числителя от частоты

$$\begin{aligned}\int_0^T \sin(t\omega) \sin(t\omega + \tau\omega)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \cos(t\omega - t\omega - \tau\omega) - \cos(t\omega + t\omega + \tau\omega)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \cos(-\tau\omega) - \cos(2 \cdot t\omega + \tau\omega)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos(\tau\omega)\int_0^T dt - \int_0^T \cos(2 \cdot t\omega + \tau\omega)\, dt\right)\end{aligned}$$

$$\int_0^T \cos(2 \cdot t\omega + \tau\omega)\, dt = \frac{\cos(2 \cdot T\omega + \tau\omega) - \cos(\tau\omega)}{2\omega}$$

$$\cos(\tau\omega)\int_0^T dt = \cos(\tau\omega)\, T$$

$$\int_0^T \sin(t\omega)\sin(t\omega+\tau\omega)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2\omega\cos(\tau\omega)\,T - \cos(2\cdot T\omega+\tau\omega)+\cos(\tau\omega)}{2\omega}\right)$$
$$= \frac{2\omega\cos(\tau\omega)\,T - \cos(2\cdot T\omega+\tau\omega)+\cos(\tau\omega)}{4\omega}$$

Зависимость знаменателя от частоты

$$\int_0^T \sin^2(t\omega)dt$$
$$= \int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^T 1-\cos(2\omega t)\,dt$$
$$= \frac{T}{2} - \frac{\cos(2\omega T)}{4\omega} + \frac{1}{4\omega} = \frac{1+2\omega T-\cos(2\omega T)}{4\omega}$$

Подставляем в итоговую формулу

$$\frac{\int_0^T \sin(t\omega)\sin(t\omega+\tau\omega)\,dt}{\int_0^T \sin^2(t\omega)dt} = \frac{\frac{2\omega\cos(\tau\omega)\,T - \cos(2\cdot T\omega+\tau\omega)+\cos(\tau\omega)}{4\omega}}{\frac{1+2\omega T-\cos(2\omega T)}{4\omega}} =$$

$$R(\omega) = \frac{2\omega\cos(\tau\omega)\,T - \cos(2\cdot T\omega+\tau\omega)+\cos(\tau\omega)}{1+2\omega T-\cos(2\omega T)}$$
$$\tau = \frac{1}{fd}, \omega_{max} = \frac{fd}{4\pi}$$
$$\tau\omega_{max} = \frac{1}{4\pi}$$

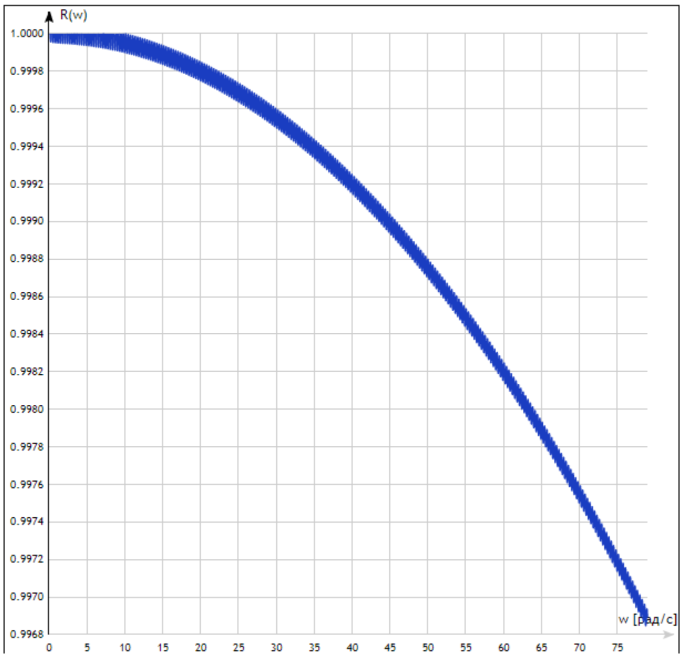
Аналитическое выражение зависимости средней, рассчитанной, частоты от реальной

$$m_w(\omega) \approx \sqrt{2}fd\sqrt{1-\frac{R_s(1,\omega)}{R_s(0,\omega)}} = \sqrt{2}fd\sqrt{1-R_s(\omega)}$$

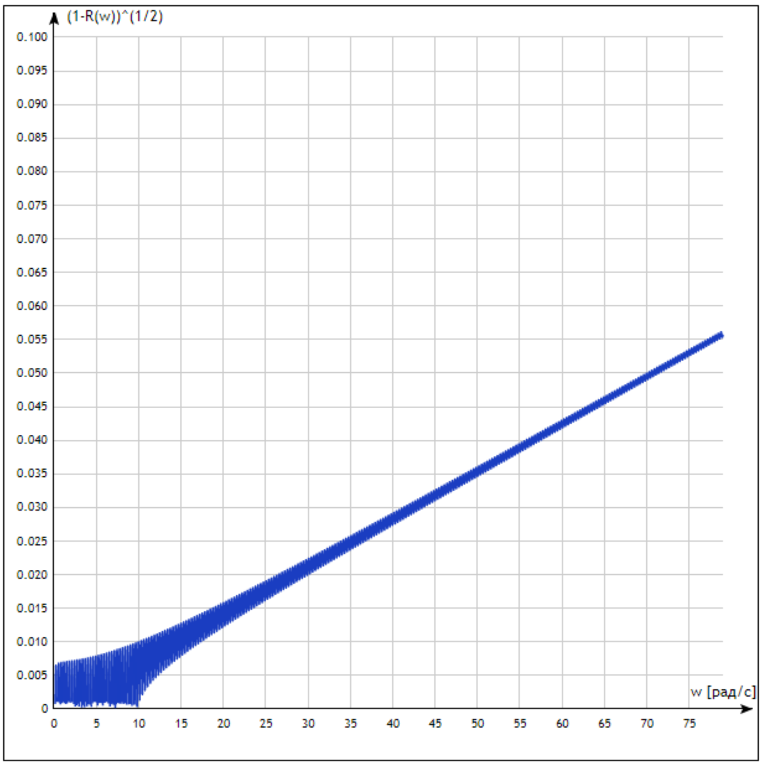
$$m_w(\omega) \approx \sqrt{2}fd\sqrt{1 - \frac{2\omega\cos\left(\frac{1}{fd}\omega\right)T - \cos\left(2 \cdot T\omega + \frac{1}{fd}\omega\right) + \cos\left(\frac{1}{fd}\omega\right)}{1 + 2\omega T - \cos(2\omega T)}}$$

$$\omega \in \left(0; \frac{fd}{4\pi}\right)$$

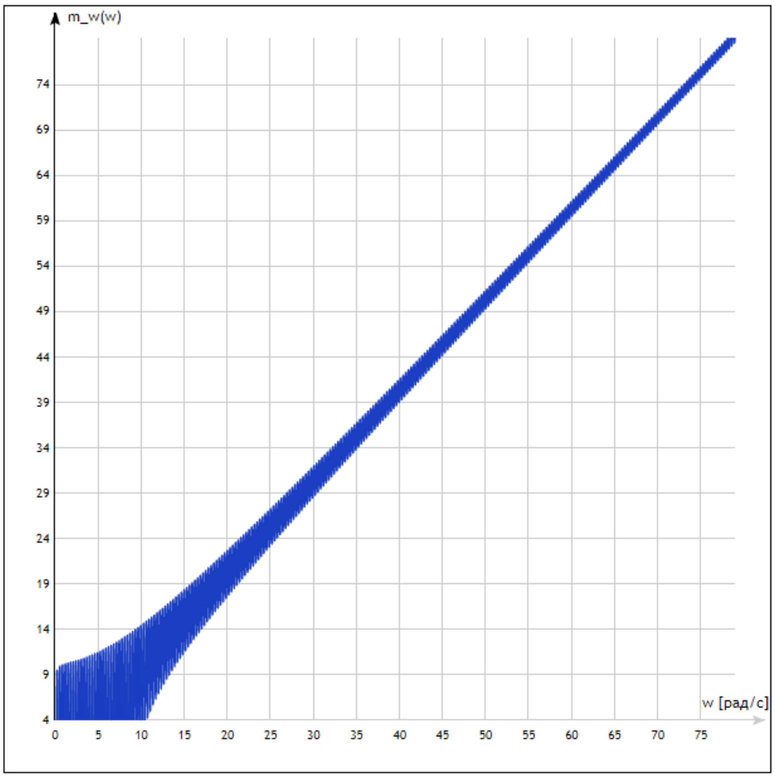
Значения R(w), при fd = 1000 Гц



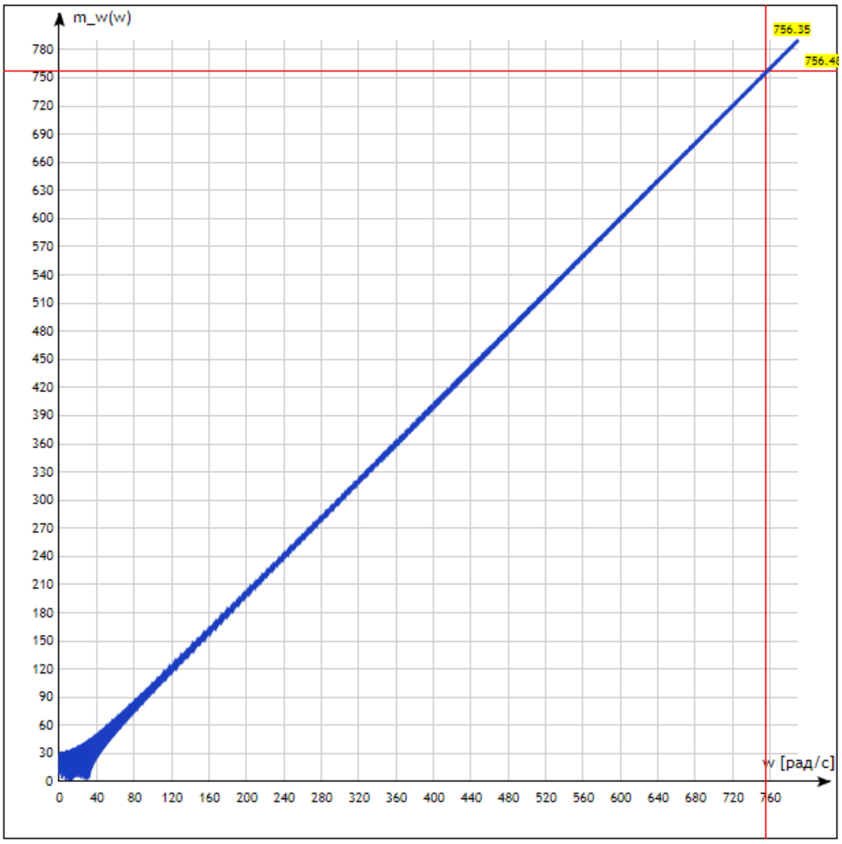
Значения $\sqrt{1 - \frac{R_s(1)}{R_s(0)}}$ при fd = 1000 Гц



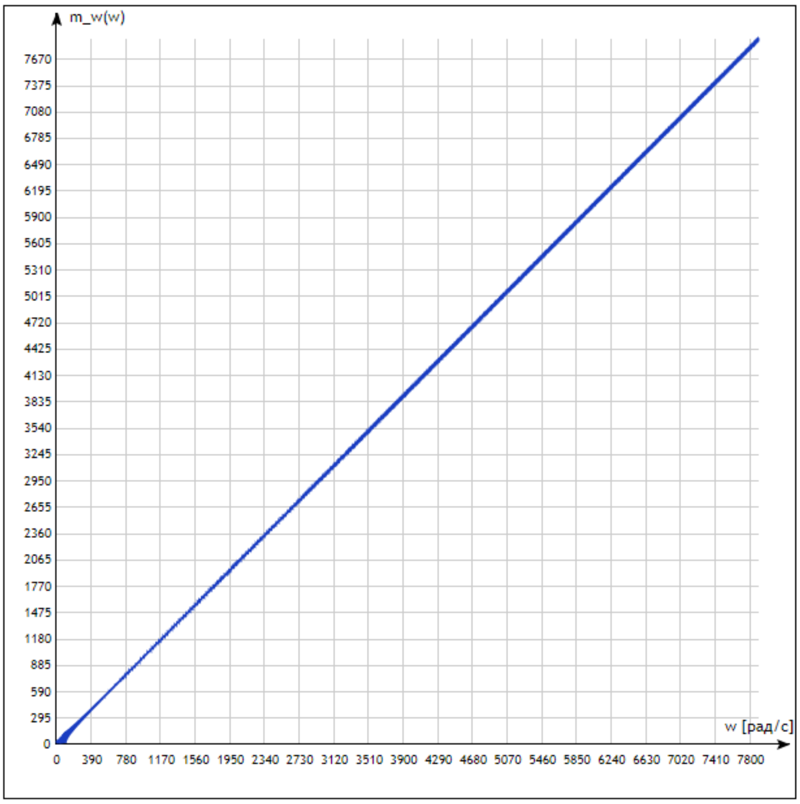
Значения функции $m_w(w)$, выраженной через R(w) при fd = 1000 Гц



Значения функции $m_w(w)$, выраженной через R(w) при fd = 10 кГц



Значения функции $m_w(w)$, выраженной через R(w) при fd = 100 кГц



Данный метод позволяет получить качественную аппроксимацию средней частоты, только на высоких частотах, на низких частотах даёт ощутимую погрешность, из-за которой применение метода не целесообразно.

Для полигармонических колебаний

Упростим выражение

$$R(\omega) = \frac{2\omega\cos(\tau\omega)\,T - \cos(2\cdot T\omega + \tau\omega) + \cos(\tau\omega)}{1 + 2\omega T - \cos(2\omega T)}$$

Заметим, что функция

$$\frac{1 + 2\omega T - \cos(2\omega T)}{4\omega} = \frac{1}{4\omega} + \frac{2\omega T}{4\omega} - \frac{\cos(2\omega T)}{4\omega} = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\omega} - \frac{\cos(2\omega T)}{4\omega}$$

является затухающей гармонической функцией, на высоких частотах можно ограничиться только членом $\frac{T}{2}$, т.к. $\frac{1}{4\omega}$ и $\frac{\cos(2\omega T)}{4\omega}$ устремляются к нулю.

Рассмотрим функцию

$$\frac{2\omega\cos(\tau\omega)\,T-\cos(2\cdot T\omega+\tau\omega)+\cos(\tau\omega)}{4\omega}$$
$$=\frac{\cos(\tau\omega)\,T}{2}-\frac{\cos(2\cdot T\omega+\tau\omega)}{4\omega}+\frac{\cos(\tau\omega)}{4\omega}$$

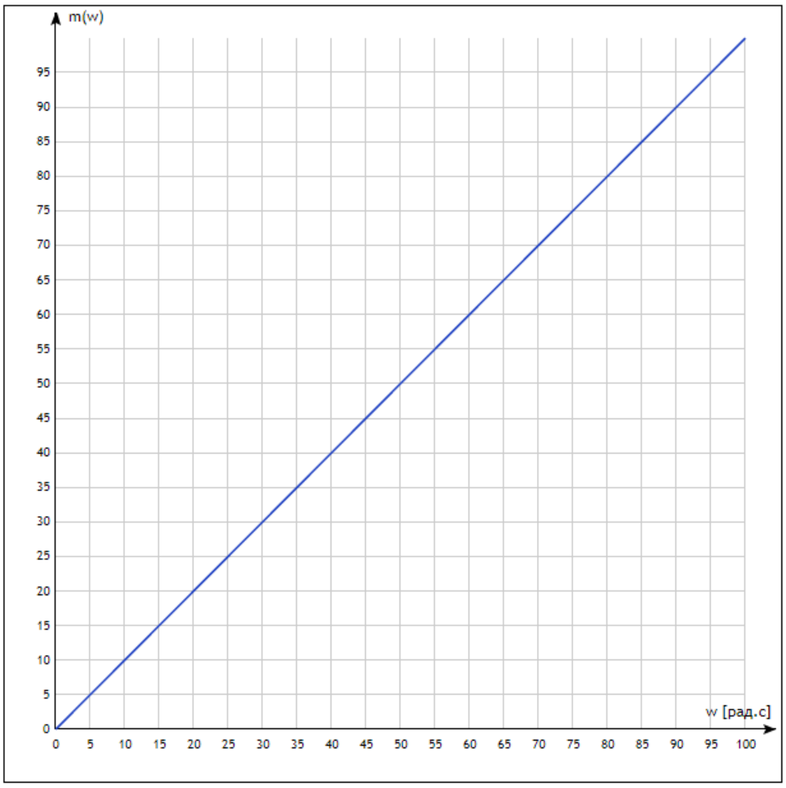
Из этого выражения можно оставить только $\frac{\cos(\tau\omega)T}{2}$

Тогда, с учетом амплитуд, упрощённая формула выглядит след. образом

$$R_{\text{упр}}(\omega)=\frac{\frac{a^2\cos(\tau\omega)\,T}{2}}{\frac{a^2T}{2}}=\cos(\tau\omega)$$

Данное выражение не позволяет оценить погрешности в измерении и годится только для анализа в ВЧ диапазоне, где $\omega \gg 10$

$$m_w(\omega)\approx\sqrt{2}fd\sqrt{1-\cos(\tau\omega)}$$



Любое колебание можно разложить в сумму гармонических колебаний, в частности когда s(t) – нечётная функция.

$$s(t)=\sum_{m=1}^{M}A_m\sin(\omega t)$$

$$R_{упр}(\Omega, A) = \frac{\sum_{m=1}^{M} \frac{A_m^2 \cos(\tau\Omega_m)\, T}{2}}{\sum_{m=1}^{M} \frac{A_m^2 T}{2}} = \frac{\frac{T}{2}\sum_{m=1}^{M} A_m^2 \cos(\tau\Omega_m)}{\frac{T}{2}\sum_{m=1}^{M} A_m^2} = \frac{\sum_{m=1}^{M} A^2 \cos(\tau\Omega_m)}{\sum_{m=1}^{M} A_m^2}$$

$$m_w(\Omega, A) \approx \sqrt{2}fd \sqrt{1 - \frac{\sum_{m=1}^{M} A_m^2 \cos(\frac{1}{fd}\Omega_m)}{\sum_{m=1}^{M} A_m^2}}$$

$$A \in R^M, \Omega \in R^M$$

Далее можно заметить, что $\frac{1}{4\pi}$ (максимально возможный угол) — малый угол. Тогда справедлива замена $\cos\left(\frac{1}{fd}\omega\right) \approx 1 - \frac{1}{2fd^2}\omega^2$, определим максимальную относительную погрешность[2]

$$Err_{max} = \frac{|1 - \frac{1}{32 \cdot \pi^2} - \cos\left(\frac{1}{4\pi}\right)|}{\cos\left(\frac{1}{4\pi}\right)} \cdot 100\% \approx \frac{|0.99053 - 1|}{1} \cdot 100\% \approx 0.99\%$$

Тогда для гармонического сигнала:

$$m_w(\omega) \approx \sqrt{2}fd \sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{fd}\omega\right)} \approx \sqrt{2}fd \sqrt{1 - 1 + \frac{1}{2fd^2}\omega^2}$$
$$= \sqrt{2fd^2 - 2fd^2 + \frac{2fd^2}{2fd^2}\omega^2} = \sqrt{\omega^2} = \omega$$

$$m_w(\omega) \approx \omega$$

Для полигармонического сигнала

[2] $\cos\left(\frac{1}{4\pi}\right) \approx 0{,}99999903549398220584343193230444$; $\frac{1}{32 \cdot \pi^2} \approx 0{,}0099471839432434584855523521078$

$$m_w(\Omega, A) \approx \sqrt{2}fd\sqrt{1 - \frac{\sum_{m=1}^{M} A_m^2\left(1 - \frac{1}{2fd^2}\Omega_m^2\right)}{\sum_{m=1}^{M} A_m^2}}$$

$$= \sqrt{2}fd\sqrt{1 - \frac{\sum_{m=1}^{M} A_m^2}{\sum_{m=1}^{M} A_m^2} + \frac{\sum_{m=1}^{M} \frac{A_m^2\Omega_m^2}{2fd^2}}{\sum_{m=1}^{M} A_m^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{M} A_m^2\Omega_m^2}{\sum_{m=1}^{M} A_m^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{m=1}^{M} A_m^2\Omega_m^2}}{\sqrt{\sum_{m=1}^{M} A_m^2}}$$

$$m_w(\Omega, A) \approx \frac{\sqrt{\sum_{m=1}^{M} A_m^2\Omega_m^2}}{\sqrt{\sum_{m=1}^{M} A_m^2}}$$

Литература:

1. BO HJORTH // EEG ANALYSIS BASED ON TIME DOMAIN PROPERTIES // January 30, 1970