Transformadas de Fourier

Sara Martins Bonito

Dezembro de 2019

1 Introdução

No seminário do Professor Jorge Drumond Silva[**drumond**] foram expostas diferentes tipos de equações de onda e dispersão, usadas para modelar os mais diversos fenómenos físicos. Em particular, foi discutida a equação do calor, a qual motiva as séries de Fourier.
Neste trabalho irei fazer a passagem das séries de Fourier estudadas em Análise Complexa e Equações Diferenciais para a transformada de Fourier.
Nas secções seguintes, sempre que for admitida uma função f, esta será integrável em módulo, isto é, $f \in L^1$.

2 Série de Fourier

Começamos por definir a série de Fourier. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, integrável em valor absoluto. A série de Fourier de f é dada por:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos{(\frac{nx\pi}{L})} + b_n \sin{(\frac{nx\pi}{L})})$$

Onde a_n e b_n para $\forall n \in \mathbb{N}$ são dados por:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos{(\frac{nx\pi}{L})} \quad dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin{(\frac{nx\pi}{L})} \quad dx$$

Calcula-se a_0 fazendo:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \quad dx$$

3 Forma Complexa da Série de Fourier

Sabemos da fórmula de Euler que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Como consequência, temos

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Utilizando estas identidades, podemos reescrever a série de Fourier e os integrais que definem os termos da série[**djairo**]. Os novos termos serão os c_n obtidos abaixo. Para $n \geq 0$:

$$c_n = \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2} \quad = \quad \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)[\cos(-\frac{nx\pi}{L}) + i\sin(-\frac{nx\pi}{L})] \quad dx$$

Para $n < 0$:

$$c_n = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2} \quad = \quad \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)[\cos(-\frac{nx\pi}{L}) + i\sin(-\frac{nx\pi}{L})] \quad dx$$

Como

$$\cos(-\frac{nx\pi}{L}) + i\sin(-\frac{nx\pi}{L}) \quad = \quad e^{-i\frac{nx\pi}{L}}$$

Definimos uma única fórmula para os c_n com $n \in \mathbb{Z}$, isto é:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{nx\pi}{L}} \quad dx$$

A série de Fourier é agora

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{nx\pi}{L}}$$

Repare-se que, apesar da série ter termos complexos, uma função real de variável real apresenta apenas termos reais (graças às propriedades da exponencial complexa). No entanto, torna-se possível admitir funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ com $f(x) = u(x) + iv(x)$.

Em análise de Fourier é frequente utilizar-se o símbolo $\hat{f}(n) \in \mathbb{C}$ para representar os c_n definidos acima.

Olhemos agora para uma restrição de f em $[-L, L]$. Podemos fazer uma identificação entre os valores de $x \in [-L, L]$ e cada $x' = x + 2L$, uma vez que $f(x) = f(x + 2L)$, por definição da função. Obtém-se, assim, uma relação de equivalência $f(x) \equiv f(x + 2L)$ e f passa a ser $f : \frac{\mathbb{R}}{2L\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}$. De uma função definida em $\mathbb{R}$ passamos para uma função definida numa circunferência de perímetro $2L$.

Geralmente é utilizado o período 2π, isto é, $L = \pi$, de onde segue que uma função é tal que $f : \mathbb{R} \mod 2\pi \rightarrow \mathbb{C}$. A $\mathbb{R} \mod 2\pi$ também é chamado toro uni-dimensional, $\mathbb{T}$, cuja notação irei preferir. Assim, para uma função definida em $[-\pi, \pi]$

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$$

Onde

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \quad dx \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx} \quad dx$$

Nas próximas secções, as funções utilizadas serão definidas para o intervalo $[-\pi, \pi]$, uma vez que esse intervalo facilitará os cálculos.

4 Série de Fourier na circunferência unitária

Define-se agora um isomorfismo ϕ entre $\mathbb{T}$ e a circunferência unitária em $\mathbb{C}$.

Seja S^1=$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ a circunferência unitária. $\{\mathbb{T}, +\}$ e $\{S^1, \times\}$ são grupos abelianos, e $\phi : \mathbb{T} \rightarrow S^1$, onde $\phi(x) = e^{ix}$.

Usando $L = \pi$ para cada $x, y \in [-2\pi, 2\pi]$, a sua soma corresponde a adicionar ângulos em S^1.

Note-se que definiu-se $\phi(x)$=e^{inx} para n=1. Se $n \neq 1$, temos apenas um homomorfismo, uma vez que a aplicação deixará de ser bijectiva.

Estes homomorfismos são também chamados caracteres, uma vez que são a representação do grupo {$\mathbb{T}$,+} usando funções complexas.

Definimos ainda um produto interno em $\mathbb{T}$ para duas funções f e g, de forma a satisfazer $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$ e ter a propriedades de produto interno[**maggie**]. Então:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)} \quad dx$$

É fácil ver ainda que para $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\langle e^{inx}, e^{imx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{inx}e^{-imx} \quad dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{i(n-m)x} \quad dx$$

Calculando o integral, vemos que as funções $e_n(x) = e^{inx}$ formam uma base ortonormada, uma vez que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{i(n-m)x} \quad dx = \begin{cases} 1 \quad se \quad m = n \\ \\ 0 \quad se \quad m \neq n \end{cases}$$

Assim, os termos da série de Fourier são

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-inx} \quad dx = \langle f, e^{inx}\rangle$$

Ao considerarmos os coeficientes da série de Fourier como o produto interno entre f e uma base ortonormada motiva-se o facto da transformada de Fourier funcionar em $\mathbb{T} \to \mathbb{Z}$. O mesmo já não acontece quando estendemos a transformada para $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$, uma vez que uma qualquer variante de $e_n(x) = e^{inx}$ não funciona como base nesses dois casos.

5 A Transformada de Fourier

Na passagem do toro uni-dimensional $\mathbb{T}$,+ para $\mathbb{Z}$,+, os termos $\hat{f}(n)$ constituem efectivamente uma transformada de Fourier. Olhando para $\hat{f}(n)$ não como coeficientes, mas como uma transformação de funções periódicas para sucessões, podemos definir a transformada de Fourier para este caso específico.

Definição: Dada uma função f em $\{\mathbb{T},+\}$, $f \in L^1(\mathbb{T})$, definimos a sua transformada de Fourier, $\mathcal{F}$, como

$$\mathcal{F}(f)(n) = \hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-inx} \quad dx, \quad \hat{f}(n) \in \{\mathbb{Z}, +\}$$

A inversa da transformada de Fourier, $\mathcal{F}^{-1}$ é dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(n)e^{inx}$$

6 Generalização da transformada de Fourier

6.1 Para $\mathbb{R}$

A passagem da transformada de Fourier para $\mathbb{R}$ pode ser feita "passando-a ao limite", uma vez que, de forma não rigorosa, um somatório infinito poderá ser interpretado como um integral impróprio, fazendo $L \to \infty$. Enquanto $f \in L^1$, podemos fazer a transformada de Fourier na mesma. Os caracteres são agora contínuos da forma $e^{i\xi x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{T}$. Seja $\xi = \frac{n\pi}{L}$. A transformada de Fourier usando ξ é:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(\xi) = \int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\xi x} \quad dx$$

Com $L \to \infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} \quad dx = \hat{f}(\xi)$$

Prossegue-se da mesma forma para a inversa:

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2L}\sum_{-\infty}^{+\infty} 2L\hat{g}(n)e^{i\frac{n\pi}{L}x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi)e^{i\xi x} \quad d\xi$$

Que são as expressões obtidas nas notas do seminário[**drumond**], a menos de $\frac{1}{2\pi}$. Podemos escrever a inversa da transformada como se encontra nas notas fazendo $L = \frac{1}{2}$, o que faria desaparecer a fracção no início e multiplicando o expoente da exponencial por 2π.

Repare-se que apenas se g for somável é que podemos fazer a sua inversa. No entanto, note-se que a inversa poderá não ser L^1, aliás, essa é a regra geral. Dá-se agora um exemplo de uma transformada de Fourier.

Exemplo:

Seja $f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in L^1$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad se \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \quad caso \quad contrário \end{cases}$$

Então:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi} \quad dx = \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi} \quad dx = -\frac{1}{i\xi}e^{-ix\xi}\bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{e^{-i\xi} - e^{-i\xi}}{i\xi} = \frac{2\sin\xi}{\xi}.$$

6.2 Para $\mathbb{R}^n$

Por extensão, é possível definir a transformada de Fourier para $\mathbb{R}^n$, desde com as alterações adequadas.

Definição: Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tal que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, define-se a sua transformada de Fourier como

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}} \quad dx$$

A sua inversa é definida por

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{x})e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}} \quad d\vec{\xi}$$

Mais uma vez, apenas se g for somável é que podemos fazer a sua inversa. No entanto, note-se que a inversa poderá não ser L^1.

7 Propriedades da Transformada de Fourier

Para finalizar, listo aqui algumas propriedades da transformada de Fourier, dada por $\mathcal{F}$, válidas $\mathbb{T}$ e $\mathbb{R}^n$, e a respectiva demonstração:

- para $\mathbb{T}$ e $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ é um operador linear, isto é

  $$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\xi) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

  Demonstração:

  Prova-se que $\mathcal{F}$ é linear em $\mathbb{R}^n$, uma vez que a demonstração para f em $\mathbb{T}$ é idêntica. Temos:

$$\mathcal{F}(\alpha f+\beta g)(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha f(\vec{x})+\beta g(\vec{x}))e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}} \quad dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha f(\vec{x})e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}} + \beta g(\vec{x})e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}} \quad dx =$$

$$= \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}} \quad dx + \beta \int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{x}))e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}} \quad dx =$$

$$\alpha\mathcal{F}(f)(\vec{\xi}) + \beta\mathcal{F}(g)(\vec{\xi})$$

O que verifica a linearidade da transformada.

- para $\mathbb{T}$ e $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}((f)$ é limitada se $f \in L^1$.

  Demonstração: Majoramos[**maggie2**] $\mathcal{F}(f) = \hat{f}(\xi)$.

$$sup(|\hat{f}(\xi)|) \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}} \quad dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(\vec{x})|dx = ||f||_{L^1}$$

- para $\mathbb{T}$ e $\mathbb{R}^n$, existem funções L^1 cuja Transformada de Fourier não está em L^1

  Demonstração: Podemos olhar para o exemplo dado na secção **6.1**.

  A função dada no exemplo é L^1, no entanto

$$\mathcal{F}(f) = \frac{2\sin(\xi)}{\xi}$$

não é integrável à Lebesgue em $\mathbb{R}$. É fácil ver isso, uma vez que o integral da função em $[0, +\infty[$ diverge.

Sabemos que $|\sin x| < 1$, como tal, o integral do módulo é tal que:

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \quad dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \quad dx \quad >$$

$$> \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k\pi}.$$

É sabido que esta série diverge, logo o integral também diverge e, portanto, $\frac{\sin x}{x} \notin L^1(\mathbb{R})$.