

Chapitre 18 : Arithmétique

I. Multiples et diviseurs

a) Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} \text{dividende} & \text{diviseur} \\ & \text{quotient} \\ \hline & \\ & \\ \text{reste} & \end{array}$$

Propriétés :

- On a toujours : **dividende** = **diviseur** x **quotient** + **reste**
- Le reste d'une division euclidienne est toujours inférieur au diviseur.

Exemple : Effectuer la division euclidienne de 318 par 4 :

$$\begin{array}{r|l} \widehat{318} & \textcolor{red}{4} \\ - 28 & \textcolor{green}{79} \\ \hline 38 & \\ - 36 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

On a $318 = 79 \times 4 + 2$

b) Multiples et diviseurs

Définition : Un nombre entier a est un multiple d'un nombre entier b non nul si le reste de la division euclidienne de a par b est 0. On dit aussi que b est un diviseur de a ou que a est divisible par b .

Exemple :

$$\begin{array}{r|l} \widehat{246} & \textcolor{red}{6} \\ - 24 & \textcolor{green}{41} \\ \hline 06 & \\ - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On a $246 = 41 \times 6 + 0$

Le reste de la division euclidienne de 246 par 6 est égal à 0 :

- 246 est un **multiple** de 6
- 246 est **divisible** par 6
- 6 est un **diviseur** de 246.

II. Nombres premiers

ACTIVITÉ : POLY

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Rappels :

Critère de divisibilité par 2 : Un nombre entier est divisible par **2** lorsque son chiffre des unités est **0, 2, 4, 6 ou 8**.

Critère de divisibilité par 5 : Un nombre entier est divisible par **5** lorsque son chiffre des unités est **0 ou 5**.

Critère de divisibilité par 10 : Un nombre entier est divisible par **10** lorsque son chiffre des unités est **0**.

Critère de divisibilité par 4 : Un nombre entier est divisible par **4** lorsque son chiffre des dizaines et son chiffre des unités forment un nombre **multiple de 4**.

Critère de divisibilité par 3 : Un nombre est divisible par **3** lorsque la **somme** de ses chiffres est un **multiple de 3**.

Critère de divisibilité par 9 : Un nombre est divisible par **9** lorsque la **somme** de ses chiffres son chiffre est un **multiple de 9**.

Les nombres non rayés sont des nombres qui n'admettent que 2 diviseurs : 1 et eux-mêmes.

Définition : Un nombre premier est un nombre qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples :

- 17 est un nombre premier. Il n'est divisible que par 1 et 17.
- 15 n'est pas premier. Il est divisible par 1, 3, 5, 15.

Remarque : 1 n'est pas premier. Il n'admet qu'un seul diviseur : lui-même.

Il y a 25 nombres premiers inférieurs à 100 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

III. Décomposition en facteurs premiers

Théorème : Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout nombre entier supérieur à 1 peut se décomposer en un produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique (à l'ordre des facteurs près).

Exemple : Décomposition de 1 170 en facteurs premiers :

1 170 est pair donc $1\ 170 = 2 \times 585$

585 est divisible par 3 donc $1\ 170 = 2 \times 3 \times 195$

195 est encore divisible par 3 donc $1\ 170 = 2 \times 3 \times 3 \times 65$

65 est divisible par 5 donc $1\ 170 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 13$

13 est premier donc la décomposition est finie : $1\ 170 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 13$

On peut écrire :

$$\begin{array}{r|l} 1\ 170 & 2 \\ 585 & 3 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Définition : Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur ont 1 pour seul diviseur commun.

Exemples : $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{19}{20}$ sont irréductibles.

$\frac{9}{24}$ n'est pas irréductible car 9 et 24 sont divisibles par 3.

➤ Rendre une fraction irréductible :

$$\frac{280}{448} = \frac{2^3 \times 5 \times 7}{2^6 \times 7} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$$

$\frac{5}{8}$ est irréductible.