Frequency Domain

زهرا نیازی

اطلاعات گزارش	**چکیده**
تاریخ: 13/09/1401	فیلترها فوق العاده مفید هستند. تقریباً تمام آنالیزهای مفید روی تصاویر شامل فیلتر کردن تصویر در برخی مراحل است. در واقع، تجزیه و تحلیل یک تصویر دشوار گاهی اوقات می تواند ساده باشد، زمانی که یک فیلتر مناسب روی آن اعمال شود.
واژگان کلیدی:	

1-مقدمه

ایده اصلی فیلتر این است که به هر پیکسل در یک تصویر، بسته به مقادیر پیکسل هایی که در یک منطقه تعریف شده (همسایگی پیکسل) قرار دارند، مقدار جدیدی اختصاص داده می شود. نحوه عملکرد فیلترهای مختلف بر اساس اعمال محاسبات مختلف در همسایگی برای دریافت خروجی می باشد.

2-شرح تکنیکال

Fourier Transform 1-2

تبدیل فوریه گسسته 2 بعدی (DFT) به شکل زیر است:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \qquad (1)$$

که در آن $\boldsymbol{f(x,y)}$ یک تصویر دیجیتال به اندازه MxN است، معادله فوق باید برای مقادیر متغیرهای گسسته u و v در محدوده $u = 0, 1, \ldots, M\text{-}1$ و $v = 0, 1, \ldots, N\text{-}1$ ارزیابی شود.

با توجه به تبدیل F(u,v)، با استفاده از تبدیل فوریه گسسته معکوس (IDFT) می توانیم f(x,y) را بدست آوریم:

$$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \qquad (2)$$

معادله فوق باید برای $x = 0, 1, \ldots, M\text{-}1$ و $y = 0, 1, \ldots, N\text{-}1$ محاسبه شود.

از آنجایی که DFT دو بعدی به طور کلی موهومی است، می توان آن را به شکل قطبی بیان کرد:

$$F(u,v) = |F(u,v)|\, e^{j\Phi(u,v)} \qquad (3)$$

که magnitude یا طیف تبدیل فوریه برابر است با:

$$|F(u,v)| = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

و زاویه تبدیل یا فاز تبدیل برابر است با:

$$\Phi(u,v) = arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right] \qquad (5)$$

zahra.niazi2001@gmail.com ⁕

و توان تبدیل برابر است با:

$$\mathrm{P}(u,v) = R^2(u,v) + I^2(u,v) \tag{6}$$

می دانیم، R و I بخش های واقعی و موهومی F(u,v) هستند و تمام محاسبات برای متغیرهای گسسته $u = 0,$ $1, \dots, M\text{-}1$ و $v = 0, 1, \dots, N\text{-}1$ انجام می شود. بنابراین، $|F(u,v)|$، $\Phi(u,v)$ و $\mathrm{P}(u,v)$ هر سه آرایه هایی با اندازه MxN. هستند.

تبدیل فوریه یک تابع حقیقی، متقارن مزدوج است، که نشان می دهد که طیف دارای تقارن حتی نسبت به مبدا است:

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)| \tag{7}$$

زاویه فاز تقارن فرد نسبت به مبدا دارد:

$$\Phi(u,v) = -\Phi(-u,-v) \tag{8}$$

طبق رابطه (1) داریم:

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \tag{9}$$

که نشان می دهد ترم فرکانس صفر DFT با میانگین $f(x,y)$ متناسب است. به این معناست که:

$$F(0,0) = MN\bar{f}(x,y) \tag{10}$$

که $\bar{f}$ بیانگر میانگین f است پس داریم:

$$|F(0,0)| = MN|\bar{f}(x,y)| \tag{11}$$

از آنجایی که ثابت تناسب MN معمولاً بزرگ است، معمولاً $|F(0,0)|$ بزرگترین مؤلفه طیف است با نسبتی که می تواند چندین مرتبه بزرگتر از سایر عبارات باشد. از آنجا که مولفه های فرکانس u و v در مبدا صفر هستند، $F(0,0)$ گاهی اوقات جزء dc تبدیل نامیده می شود. این اصطلاح از برق می آید که در آن "dc" به معنای جریان مستقیم (یعنی جریان با فرکانس صفر) است.

اجزای طیف DFT، دامنه سینوسی هایی را تعیین می کنند که برای تشکیل یک تصویر با هم ترکیب می شوند. در هر فرکانس معینی در DFT یک تصویر، یک دامنه بزرگ به معنای برجستگی بیشتر سینوسی با آن فرکانس در تصویر است. برعکس، یک دامنه کوچک نشان می دهد که کمتر از آن سینوسی در تصویر وجود دارد. اگرچه، سهم اجزای فاز از نظر بصری کمتر است، اما به همان اندازه مهم است. فاز معیاری برای جابجایی سینوسی های مختلف با توجه به مبداهای آنهاست. بنابراین، در حالی که اندازه DFT دوبعدی، آرایه‌ای است که اجزای آن شدت‌های تصویر را تعیین می‌کنند، فاز مربوطه، آرایه‌ای از زوایایی است که بسیاری از اطلاعات مربوط به محل قرارگیری اشیاء قابل تشخیص در تصویر را نگهداری می‌کند.

1-1-2

در این بخش از ما خواسته برای سه فیلتر زیر، تبدیل فوریه را محاسبه کرده و اندازه طیف پاسخ را نمایش دهیم. سپس عملکرد هر فیلتر را مشخص کرده و در نهایت، با توجه به جداپذیر بودن یا نبودن فیلترها، FT آنها را محاسبه کنیم.

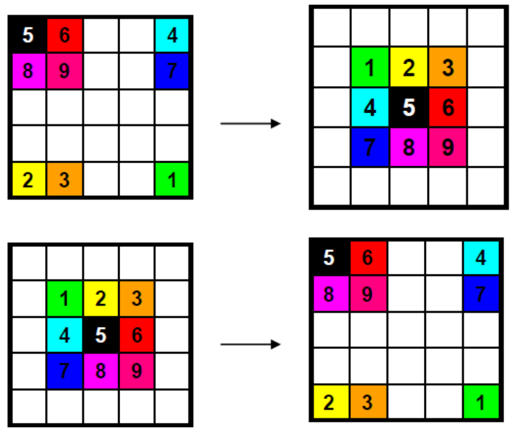
$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b)\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c)\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2-1-2

در این بخش از ما خواسته شده اثر لگاریتم و شیفت هنگام بررسی تصویر در حوزه فرکانس را بررسی کنیم.



به طور کلی، هنگامی که تصویر به حوزه فرکانس برده میشود، مرکز فرکانس تبدیل به مبدا مختصات میشود. یعنی 0و0 فرکانس که معمولا پر از اطلاعات است در 0و0 تصویر مینشیند و به خوبی دیده نمیشود. پس باید مرکز فرکانس به مرکز تصویر شیفت پیدا کند وگرنه اجزا در چهار گوشه تصویر نمایان میشوند.
هنگام نمایش طیف تصویر در حوزه فرکانس، لگاریتم آن را در نظر میگیریم. زیرا در مرکز فرکانس عدد بزرگی داریم که مجموع تمام پیکسل هاست، نمایش این عدد شبیه یک نقطه سفید در وسط و بقیه سیاه می شود. پس لگاریتم آن را نمایش میدهیم تا اختلاف این بخش با اطراف را کم کند.

Filtering 2-2

تکنیک های فیلتر در حوزه فرکانس بر اساس اصلاح تبدیل فوریه تصویر برای دستیابی به یک هدف خاص، و سپس محاسبه DFT معکوس برای بازگرداندن ما به حوزه spatial است و از معادله زیر به دست می آید:

$$F(u,v) = |F(u,v)|\, e^{j\Phi(u,v)} \qquad (12)$$

که دو جزء تبدیل که به آنها دسترسی داریم، بزرگی تبدیل (طیف) و زاویه فاز هستند.

می دانیم که تحلیل بصری مولفه فاز به طور کلی خیلی مفید نیست. با این حال، طیف، دستورالعمل‌های مفیدی را در مورد ویژگی‌های شدت ناخالص تصویری که طیف از آن تولید شده است، ارائه می‌کند.

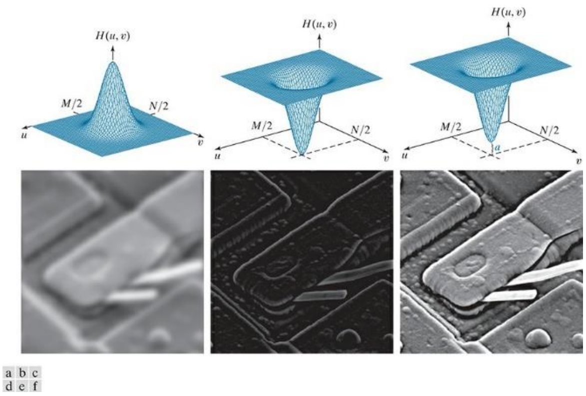
فیلتر کردن در حوزه فرکانس شامل اصلاح تبدیل فوریه یک تصویر، سپس محاسبه تبدیل معکوس فوریه برای به دست آوردن نمایش نتیجه پردازش شده درحوزه spatial است. بنابراین، با توجه به یک تصویر دیجیتالی (padded) $f(x,y)$، با اندازه M×N پیکسل، معادله اصلی فیلتری که ما به آن علاقه داریم به شکل زیر است:

$$g(x,y) = \mathfrak{F}^{-1}[H(u,v)F(u,v)] \qquad (13)$$

که $\mathfrak{F}^{-1}$ IDFT است، $F(u,v)$ ، DFT تصویر ورودی است. $H(u,v)$ یک تابع انتقال فیلتر است (که ما اغلب آن را فقط یک فیلتر یا تابع فیلتر می نامیم) و $g(x,y)$ تصویر فیلتر شده (خروجی) است.

توابع F، H ، و g آرایه هایی با اندازه M×N، مشابه تصویر ورودی هستند. حاصل ضرب $H(u,v)F(u,v)$ با استفاده از ضرب آرایه ای محاسبه می شود. تابع انتقال فیلتر، تبدیل تصویر ورودی را تغییر می دهد تا خروجی پردازش شده، g(x,y) را به دست آورد. کار مشخص کردن H(u,v) با استفاده از توابع متقارن در مرکز آنها به طور قابل توجهی ساده می شود که مستلزم آن است که F(u,v) نیز در مرکز قرار گیرد. همانطور که توضیح داده شد، این کار با ضرب تصویر ورودی در $-1^{(x+y)}$ قبل از محاسبه تبدیل آن انجام می شود. در پایتون این کار توسط دستور np.fft.fftshift() انجام میشود.

همانطور که قبلاً ذکر شد، فرکانس‌های پایین در تبدیل به اجزایی با شدتی به آرامی متغیر در یک تصویر مرتبط است، مانند دیوارهای یک اتاق یا آسمان بدون ابر در یک صحنه در فضای باز. از سوی دیگر، فرکانس‌های بالا در اثر انتقال شدید شدت، مانند لبه‌ها و نویز ایجاد می‌شوند. بنابراین، انتظار داریم که تابع H(u,v) که فرکانس‌های بالا را در حین اجازه عبور دادن به فرکانس‌های پایین، کاهش می‌دهد (که فیلتر پایین‌گذر نامیده می‌شود) تصویر را محو می‌کند، در حالی که فیلتری با ویژگی مخالف (به نام فیلتر بالا گذر) جزئیات واضح را افزایش می دهد، اما باعث کاهش کنتراست در تصویر می شود.



شکل 2-1-1 ردیف بالا: توابع انتقال فیلتر دامنه فرکانس (a) یک فیلتر پایین گذر، (b) یک فیلتر بالاگذر و (c) یک فیلتر بالاگذر با آفست. ردیف پایین: تصاویر فیلتر شده مربوطه به دست آمده است.

مراحل فیلتر کردن در حوزه فرکانس به شکل زیر است:

1. با توجه به تصویر ورودی $f(x,y)$ به اندازه MxN، مقادیر Pو Q را از معادله های زیر بدست آورید.

$$P \ \geq 2M - 1$$

$$Q \ \geq 2N - 1$$

2. تصویر پد شده $f_p(x,y)$ به اندازه PxQ را با اضافه کردن تعداد کافی 0 به f بسازید.
3. برای مرکزیت تبدیل فوریه روی مستطیل فرکانس PxQ، f_p را در $-1^{(x+y)}$ ضرب کنید.
4. DFT را محاسبه کرده و $F(u,v)$ را به دست آورید.
5. یک تابع انتقال فیلتر حقیقی و متقارن $H(u,v)$ به اندازه PxQ و با مرکز (P/2, Q/2) را بسازید.
6. عبارت $G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$ را با با استفاده از ضرب آرایه ای محاسبه کنید.
7. تصویر پردازش شده به اندازه PxQ را از فرمول زیر به دست آورید:

$$g_p(x,y) = \{real\ [\mathfrak{F}^{-1}[G(u,v)]\ ]\ \}\ (-1)^{(x+y)}$$

8. با استخراج ناحیه ¼ بالا سمت چپ g_p، تصویر نهایی را به اندازه تصویر اولیه MxN به دست آورید.

ارتقای تصویر در حوزه فرکانس در اصل ساده است. کافی است تبدیل فوریه تصویری که باید ارتقا یابد را محاسبه کرده حاصل را در تابع انتقال فیلتر ضرب نموده و از نتیجه تبدیل معکوس بگیریم تا تصویر ارتقا یافته بدست آید. ایده های مات کردن با تضعیف محتوای فرکانس بالا و تیز کردن با تقویت مؤلفه های فرکانس بالا نسبت به مؤلفه های فرکانس پایین از مفاهیمی استخراج میگردند که مستقیماً با تبدیل فوریه مرتبط هستند. در واقع، ایده فیلتر کردن خطی در میدان فرکانس به طور قابل توجهی جذابتر و شهودی تر است. البته در عمل ماسک های مکانی کوچک به علت پیاده سازی آسان و سرعت عملشان به طور قابل ملاحظه ای بیشتر از تبدیل فوریه استفاده میشوند با این حال فهم مفاهیم میدان فرکانس در حل بسیاری از مسائل که بسادگی با فنون مکانی قابل حل نیستند ضروری است.

فیلتر کردن پایین گذر

همان طور که قبلاً بیان شد لبه ها و سایر تغییرات سریع در سطح خاکستری تصویر (نظیر نویز) به میزان زیادی در محتوای فرکانس بالای تبدیل فوریه تصویر سهیم هستند بنابراین مات کردن آرام کردن در میدان فرکانس با تضعیف محدوده مشخصی از مؤلفههای فرکانس بالای تبدیل فوریه تصویر حاصل می گردد.

فیلتر کردن بالا گذر

در فیلترکردن پاییک گذر دیدیم که میتوان با تضعیف مولفه های فرکانس بالا در تبدیل فوریه تصویر، آن را مات کرد. چون لبه ها و سایر تغییرات سریع در سطوح خاکستری با مولفه های فرکانس بالا مرتبط هستند، می توان با یک فرایند قیلترکردن بالاگذر که بدون تغییر اطلاعات فرکانس بالای تبدیل فوریه، مولفه های فرکانس پایین را تضعیف کند، تصویر را تیز(شارپ) کرد.

مشاهده هسته کانولوشن h برخی از ویژگی های مهم در مورد نوع و اثرات فیلتر مورد استفاده را نشان می دهد:

- اگر همه عناصر مثبت باشند h فیلتر پایین گذر است. محاسبه میانگین وزن دار را انجام می دهد. برای کدگذاری پیکسل 8 بیتی، زمانی که نتیجه بیش از 255 باشد، با آستانه گذاری روی 255 تنظیم می شود. این نوع فیلتر کردن تصویر را صاف می کند، برای کاهش نویز در تصاویر مفید است.
- اگر برخی از عناصر کرنل مثبت و برخی دیگر منفی باشند مشتق جزئی یا کامل محاسبه می شود. هسته کانولوشن تا حدی یا به طور کامل با رفتار یک فیلتر بالاگذر مطابقت دارد. یک فیلتر بالاگذر می‌تواند برای شفاف‌تر کردن تصویر اعمال شود، بنابراین جزئیات مرزی حفظ می‌شود.

چند نمونه از هسته های فیلتر پرکاربرد در اینجا ارائه شده است:

- فیلترهای پایین گذر: یک فیلتر میانگین گیر که تصویر را صاف می کند.
- فیلترهای بالا گذر: یک فیلتر افزایش کنتراست، فیلترهای مشتق جهت دار (سوبل افقی، شیب مایل) و یک فیلتر مشتق غیر جهت دار (لاپلاسی).

به طور کلی فیلترهای پایین گذر تغییرات luminance را کاهش می دهد. بنابراین محتوای تصویر را صاف می کند و تغییرات ناگهانی در شدت روشنایی را کاهش می دهد. فیلتر پایین‌گذر معمولاً برای کاهش اثرات نویز و حذف محتوای فرکانس بالای فضایی تصویر (جزئیات تصویر) قبل از نمونه‌برداری فرعی) برای حذف افکت‌هایaliasing استفاده می‌شود.

اما فیلتر بالا گذر، تغییرات ناگهانی luminance را افزایش می دهد که معمولاً لبه های شی و جزئیات یک تصویر را مشخص می کند. به عنوان مثال، یک فیلتر بالاگذر با بهره DC واحد می تواند کنتراست تصویر اصلی را افزایش دهد.

یک DFT دوبعدی جداپذیر است اگر بتوان رابطه (1) را به فرم زیر نوشت:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} e^{-\frac{j2\pi ux}{M}} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-\frac{j2\pi vy}{N}}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1} F(x,v)\, e^{-\frac{j2\pi ux}{M}}$$

به طوری که داریم:

$$F(x,v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-\frac{j2\pi vy}{N}}$$

برای یک مقدار x و برای $v=0, 1, \ldots, N-1$ می بینیم که $F(x,v)$، DFT یک بعدی یک ردیف از $f(x,y)$ است. با تغییر x از 0 تا $M-1$، مجموعه ای از DFT های یک بعدی را برای تمام ردیف های $f(x, y)$ محاسبه می کنیم. محاسبات در این معادله به طور مشابه تبدیل های یک بعدی ستون های $F(x,v)$ هستند. بنابراین، نتیجه می گیریم که DFT دوبعدی $f(x, y)$ را می توان با محاسبه تبدیل یک بعدی هر ردیف از $f(x, y)$ بدست آورد و سپس تبدیل یک بعدی را در امتداد هر ستون از نتیجه محاسبه می کنیم.
این یک ساده سازی مهم است زیرا ما باید در هر زمان فقط با یک متغیر سر و کار داشته باشیم. توسعه مشابهی برای محاسبه $IDFT$ دو بعدی با استفاده از $IDFT$ یک بعدی اعمال می شود.

1-2-2

مراحل فیلترکردن در حوزه فرکانس در بالا آمده است. تنها تفاوتی که کد پیاده سازی شده در پایتون با این الگوریتم دارد این است که مراحل 3و4 جا به جا میشوند.

2-2-2

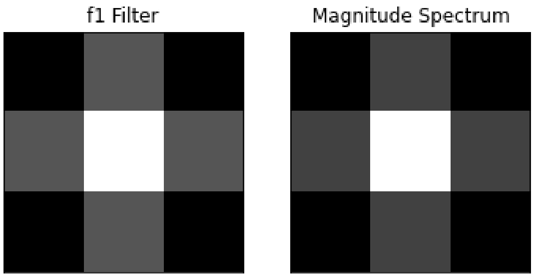
در این بخش دو نوع فیلتر معرقی شده است که در آن شرط های خاصی برای مقادیر مختلف پیکسل ها با توجه به مختصات آنها در حوزه فرکانس وجود دارد.

3-نتایج

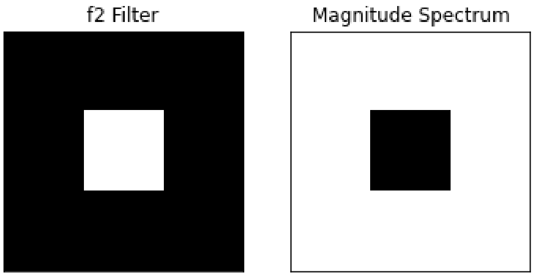
Fourier Transform 1-3

1-1-3

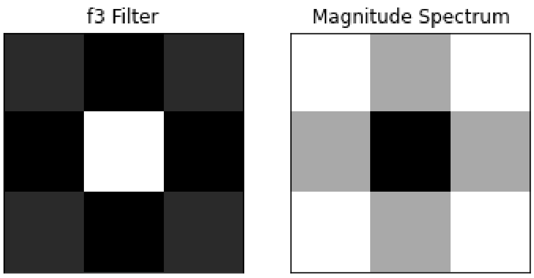
تبدیل فوریه سه فیلتر و نمایش طیف آنها به شکل زیر است:



شکل 3-1-1 1 فیلتر f1 و طیف آن



شکل 3-1-1 2 فیلتر f2 و طیف آن



شکل 3-1-1 3 فیلتر f3 و طیف آن

با مشاهده طیف فیلترها و همچنین بررسی ماتریس ضرایب، واضح است که فیلتر اول یک فیلتر پایین گذر است که عمل smoothing را انجام می دهد.

همچنین این فیلتر یک فیلتر seperable می باشد زیرا میتوان آن را به فرم زیر نوشت:

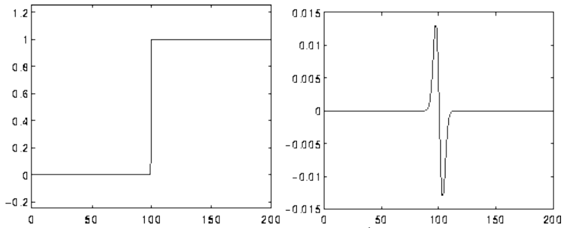
$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix} \otimes \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 4 & 2\\1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

عملکرد فیلتر دوم درواقع محاسبه دومین مشتق مکانی یک تصویر (لاپلاسین) می باشد.

فیلتر لاپلاسین، آشکارساز لبه ها (edge detector) است که برای محاسبه مشتقات دوم یک تصویر استفاده می شود و سرعت تغییر مشتقات اول را اندازه گیری می کند. این تعیین می کند که آیا تغییر در مقادیر پیکسل مجاور از برخورد با یک لبه است یا به دلیل پیشرفت مداوم است.

این به این معناست که در مناطقی که تصویر دارای شدت ثابت است (یعنی جایی که گرادیان شدت صفر است)، پاسخ این فیلتر صفر خواهد بود. با این حال، در مجاورت تغییر شدت، پاسخ این فیلتر در سمت تاریک تر مثبت و در سمت روشن تر منفی خواهد بود. این بدان معنی است که در یک لبه نسبتاً تیز بین دو ناحیه با شدت یکنواخت اما متفاوت، پاسخ این فیلتر به صورت زیر خواهد بود:

- صفر در فاصله طولانی از لبه،
- مثبت فقط به یک طرف لبه،
- منفی فقط به سمت دیگر لبه،
- صفر در نقطه ای در بین، در خود لبه.



شکل 3-1-1 4 پاسخ فیلترلاپلاسین به لبه پله. نمودار سمت چپ تصویری 1 بعدی را به طول 200 پیکسل نشان می دهد که حاوی یک لبه پله است. نمودار سمت راست پاسخ یک فیلتر لاپلاسین با سیگمای گوسی = 3 را نشان می دهد.

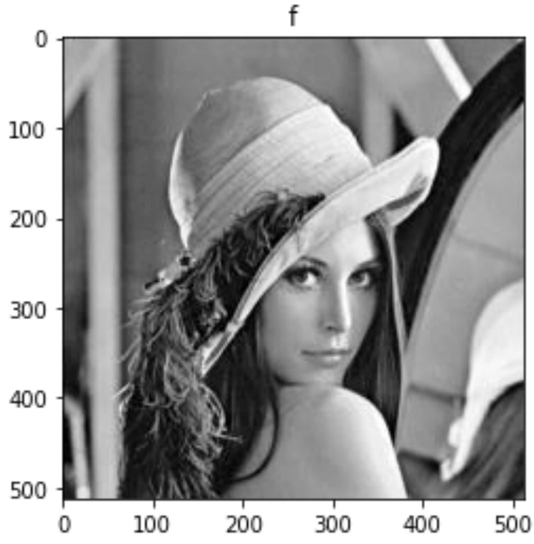
هسته‌های فیلتر لاپلاسی معمولاً حاوی مقادیر منفی در یک الگوی متقاطع هستند که در مرکز آرایه قرار دارند. گوشه ها یا مقادیر صفر هستند. مقدار مرکزی می تواند منفی یا مثبت باشد.

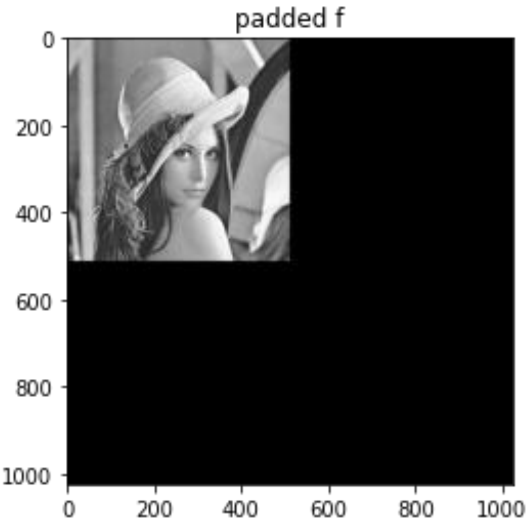
فیلتر سوم از حاصلجمع یک فیلتر identity و یک فیلتر لاپلاسی به دست می آید.

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\-1 & 4 & -1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\-1 & 5 & -1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

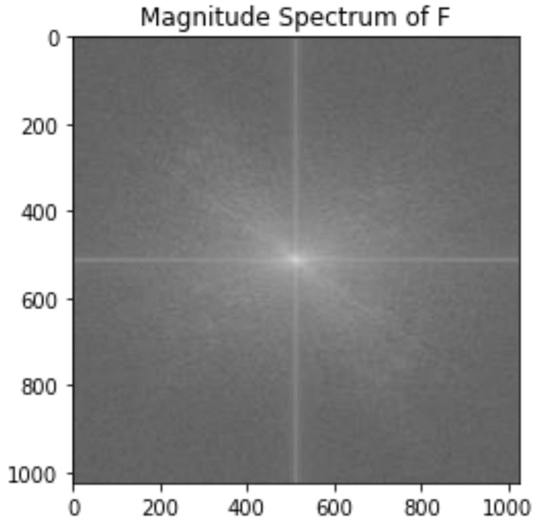
هنگامی که یک فیلتر لاپلاسین با خود تصویر جمع شود، در نواحی که لبه وجود دارد باعث تقویت لبه ها (edge enhancement) می شود و در واقع این فیلتر کنتراست اجسام را افزایش می دهد.
حال نتیجه اعمال این فیلترها به تصویر Lena را بررسی میکنیم؛

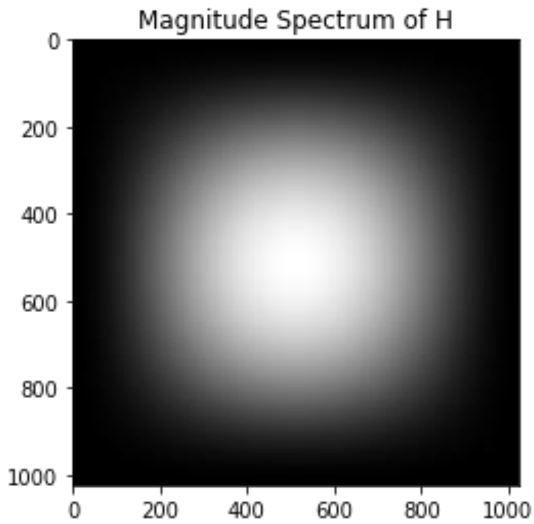
فیلتر اول:
دو تصویر زیر تصویر اصلی لنا و تصویر padشده می باشد.





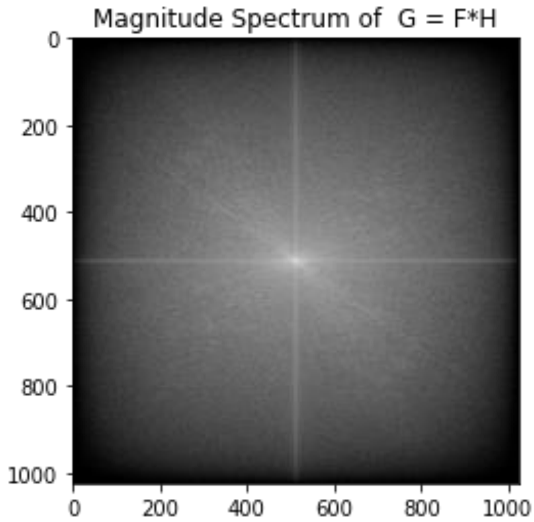
دو تصویر زیر، نمایش اندازه طیف تصویر لنا و طیف فیلتر اول می باشد.



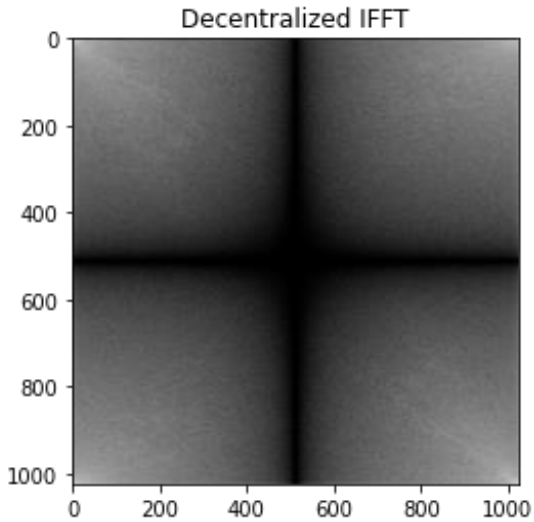


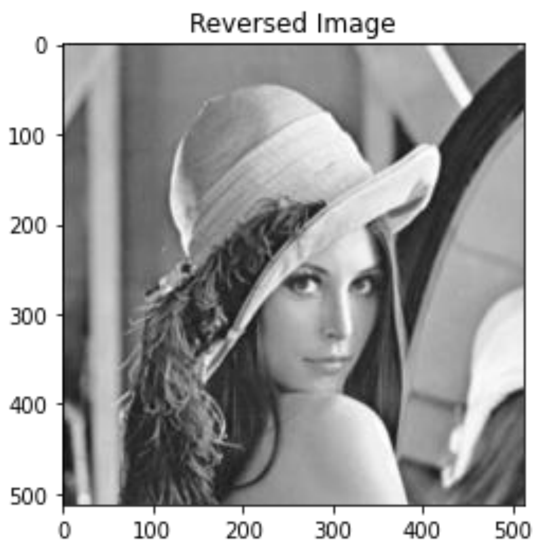
همانطور که گفته شد، این یک فیلتر پایین گذر میباشد به طوری که فرکانس های پایین که حول مرکز قرار دارند، عبور داده می شوند و فرکانس های بالا که در حاشیه ها قرار دارند، صفر می شوند.
اعمال این فیلتر باعث شده تا اطلاعات کلی تصویر حفظ شود و اطلاعات جزئی تر کمرنگ شوند.

برای اعمال این فیلتر در حوزه فرکانس، آن را در تصویر ضرب آرایه ای میکنیم.



سپس دوباره مرکز فرکانس را به مبدا تصویر شیفت داده و سپس عکس تبدیل فوریه را اعمال میکنیم.

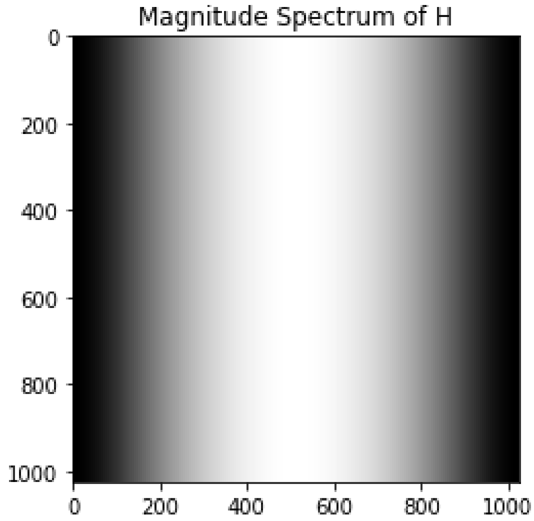


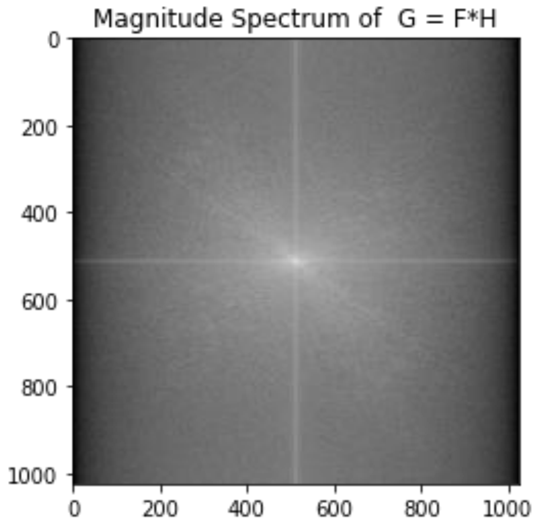


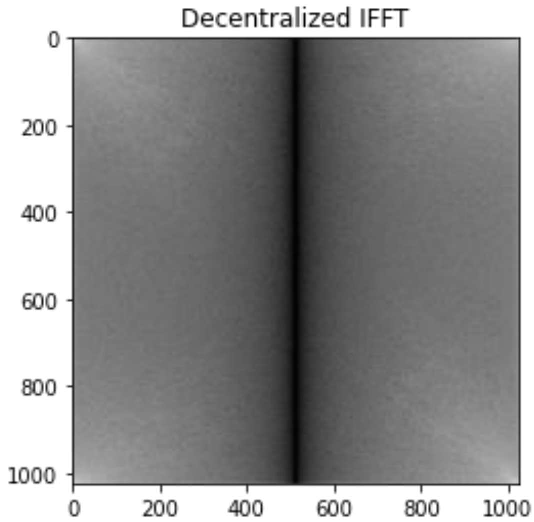
این فیلتر جدایی پذیر است و از حاصل ضرب دو فیلتر ذکر شده به وجود آمده است که عملکرد آنها به شکل زیر می باشد:

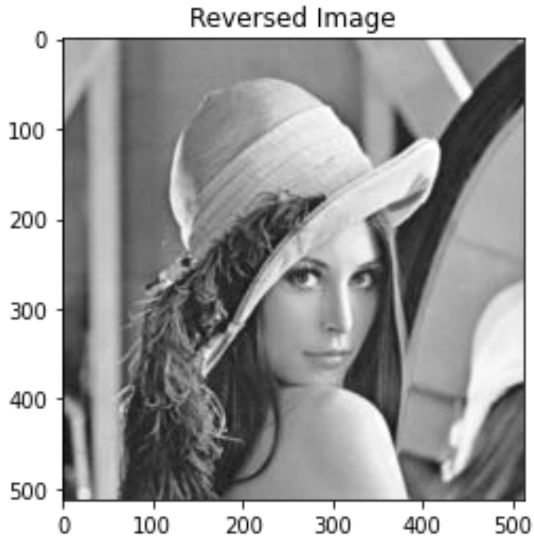
$$[1 \quad 2 \quad 1]$$

این تصویر نمایش طیف فیلتر ذکر شده است:





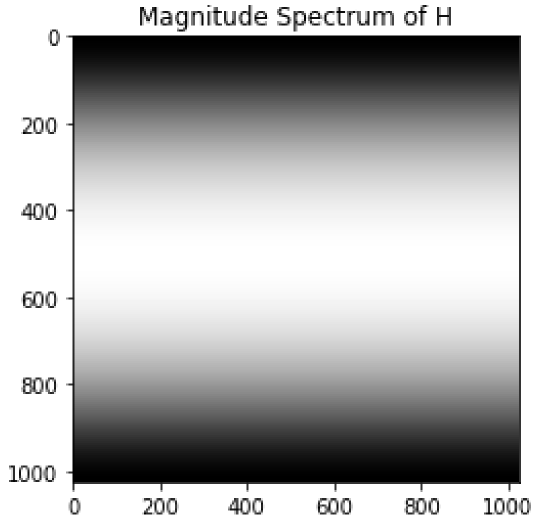


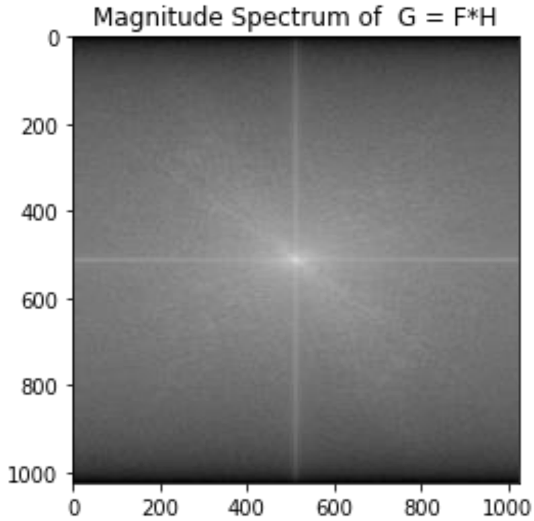


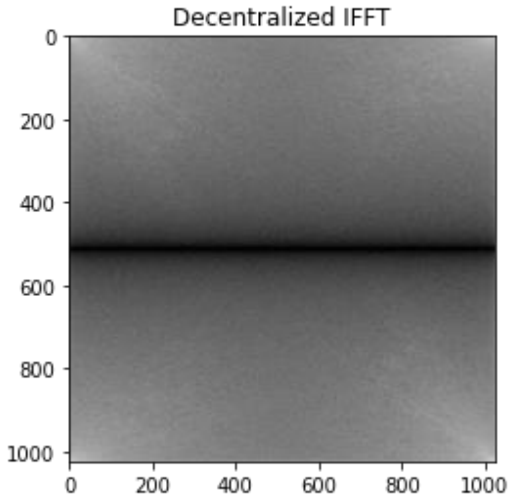
و بخش دوم که به شکل زیر است:

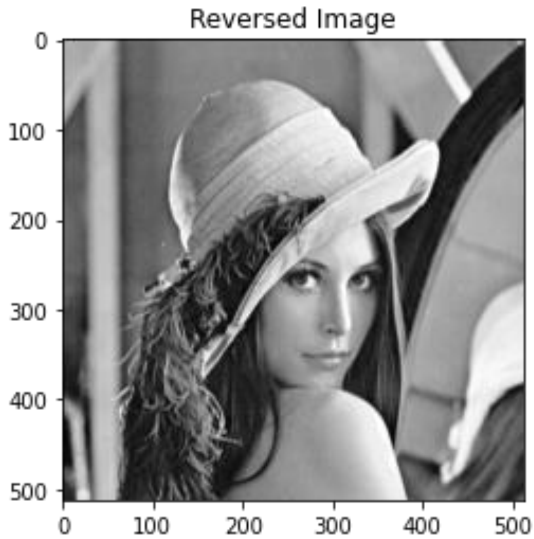
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

این تصویر نمایش طیف فیلتر ذکر شده است:

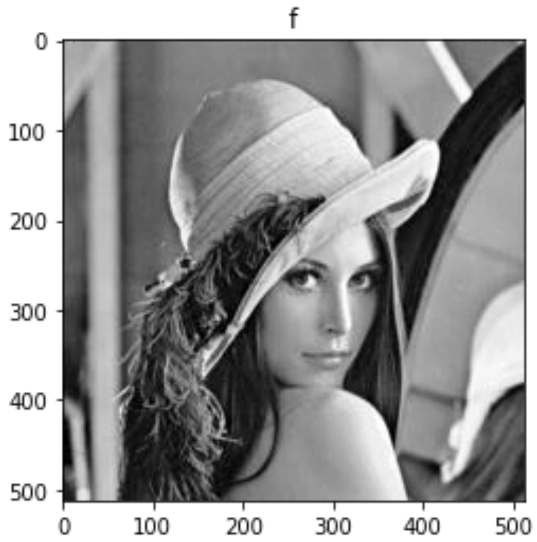


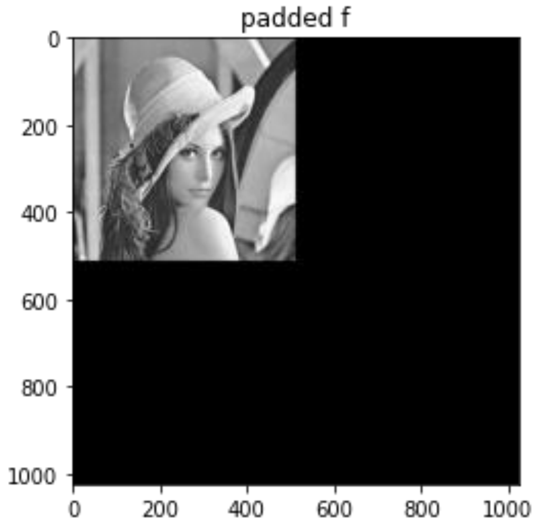


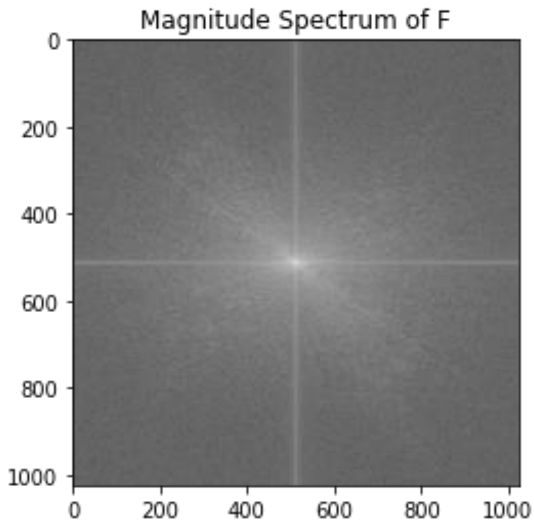




فیلتر دوم:

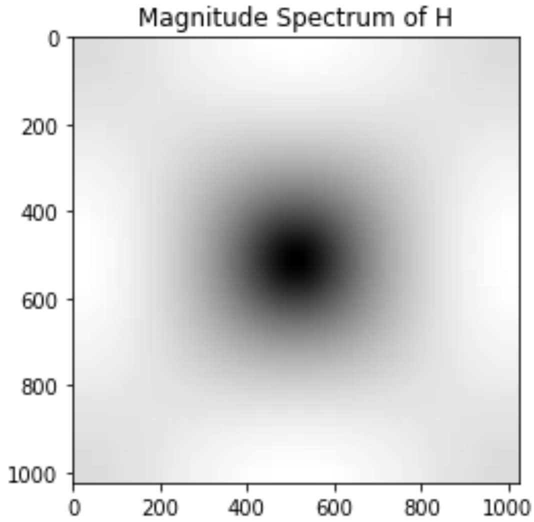


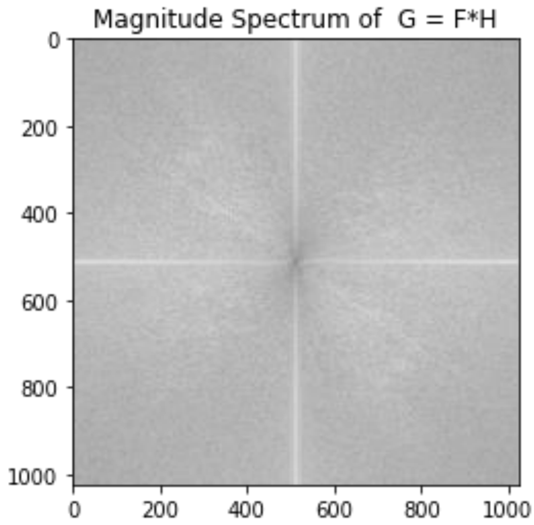


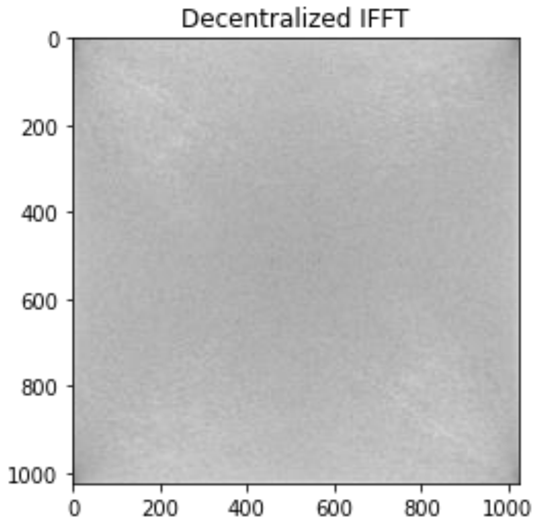


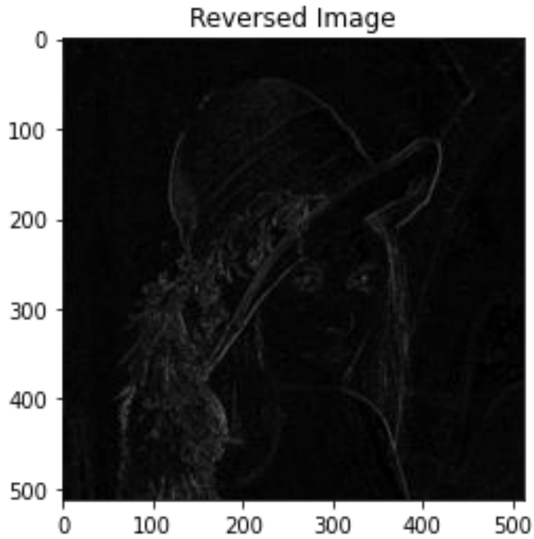
همانطور که با بررسی طیف این فیلتر متوجه میشویم، این فیلتر یک فیلتر بالاگذر است. یعنی فرکانس های پایین که حول مرکز قرار دارند صفر شده و فرکانش های بالا که در حاشیه ها قرار دارند عبور داده می شوند. فرکانس های

بالا اطلاعاتی مانند جزئیات تصویر و لبه ها را شامل میشوند. بنابراین این فیلتر با کم کردن اطلاعات کلی و نگه داشتن اطلاعات جزئی، عمل تشخیص لبه را انجام میدهد.

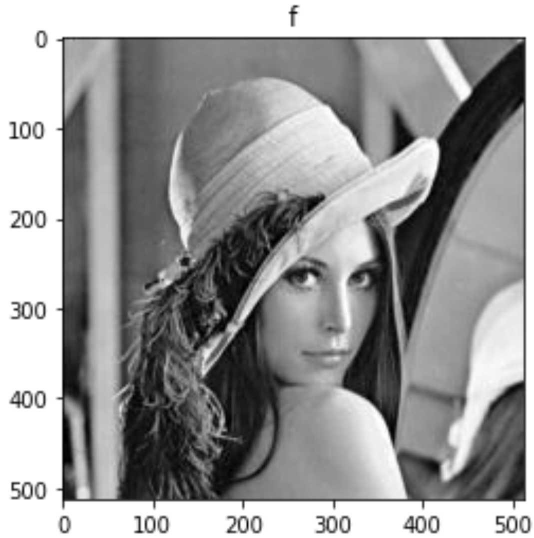


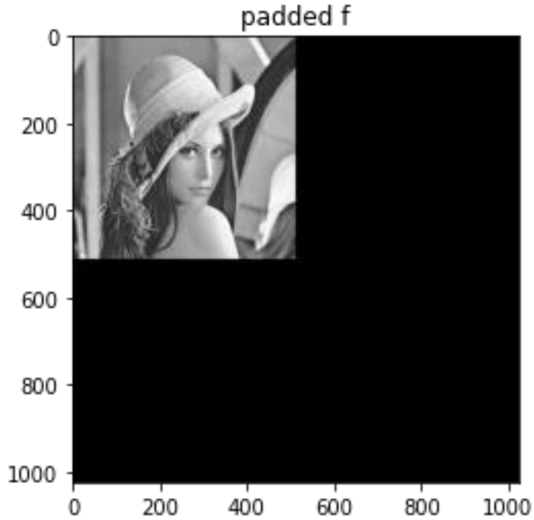


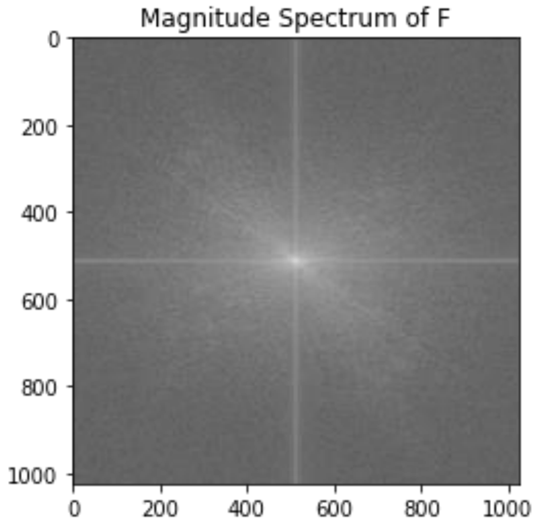


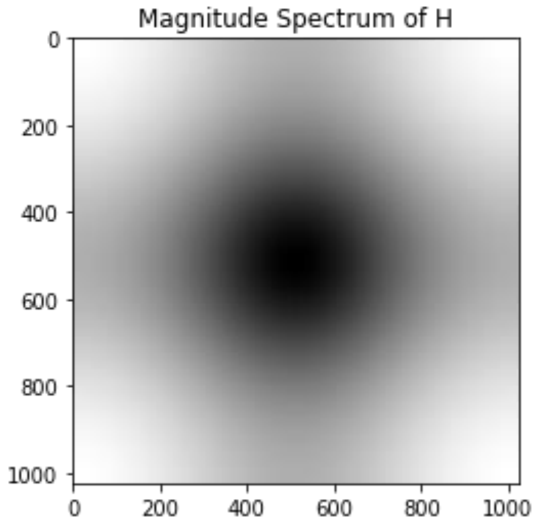


فیلتر سوم:

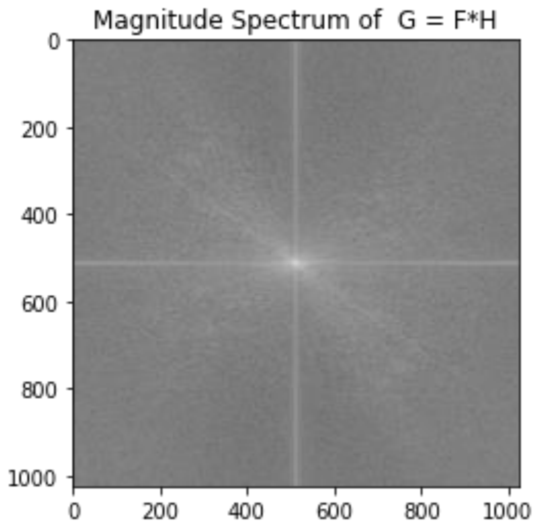


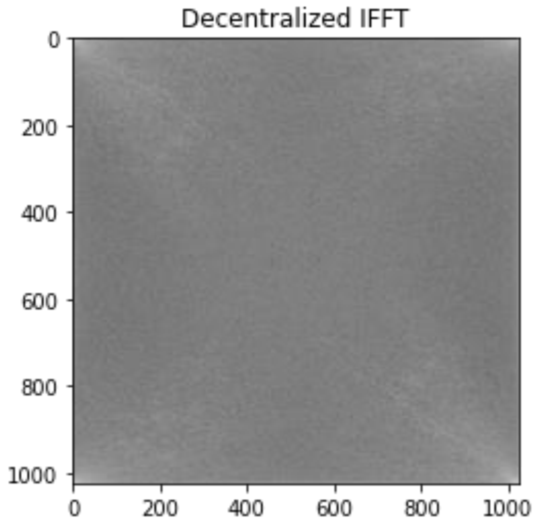


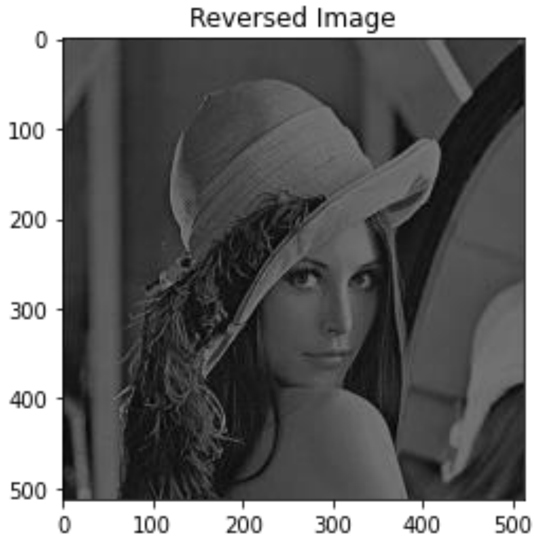




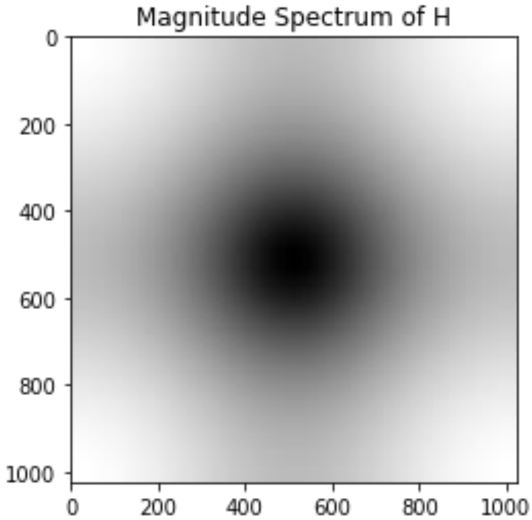
همانطور که با بررسی طیف فیلتر سوم میبینیم، این فیلتر به فرکانس های بسیار بالا وزن بیشتری داده و آنها را تقویت میکند و به فرکانس های پایین وزن کمتری داده اما همه را حذف نمیکند. این عمل باعث تقویت لبه های تصویر میشود.

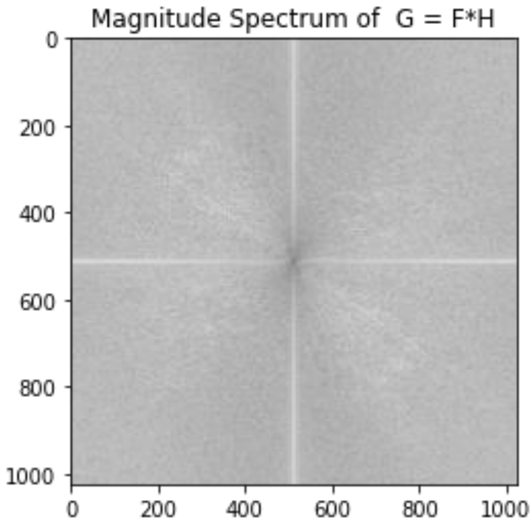


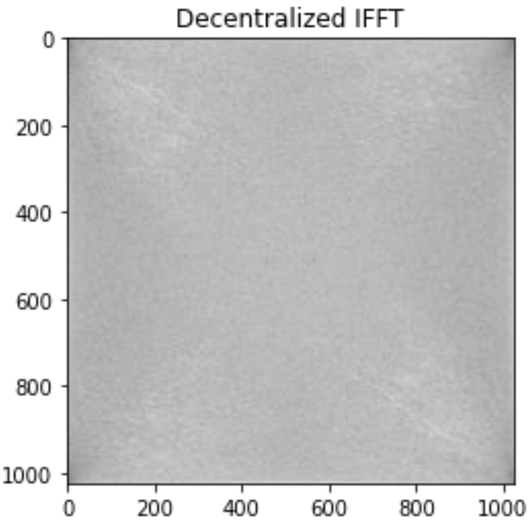


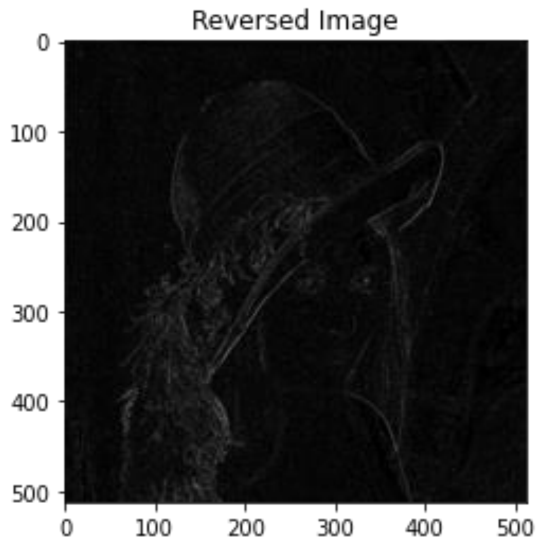


این فیلتر شامل فیلتر لاپلاسین است که طیف آن به شکل زیر است:

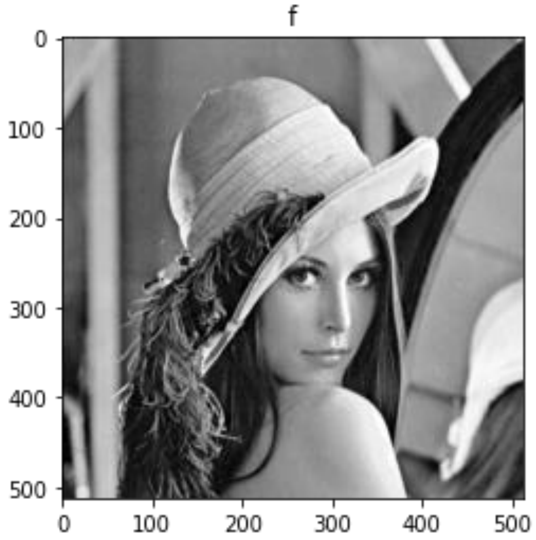


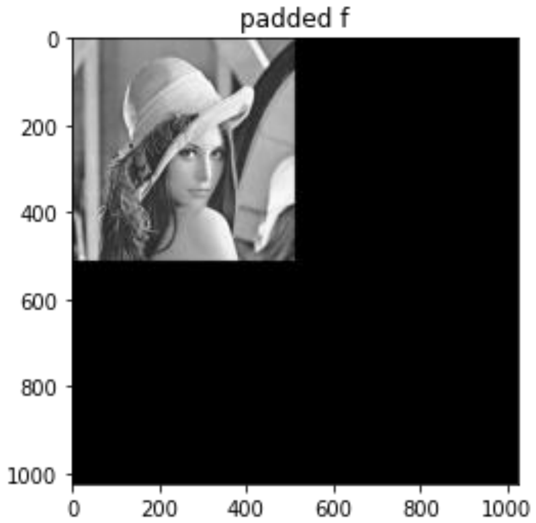






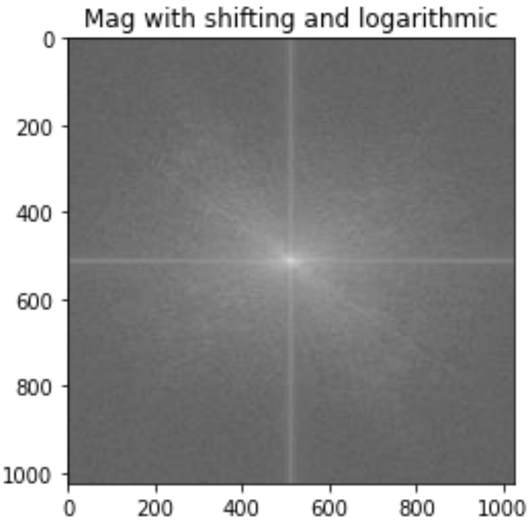
2-1-3

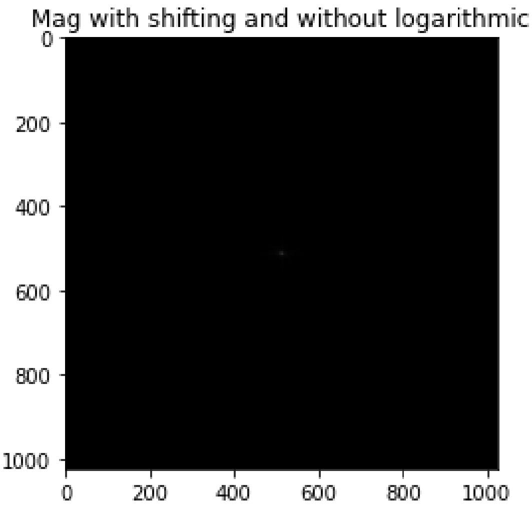




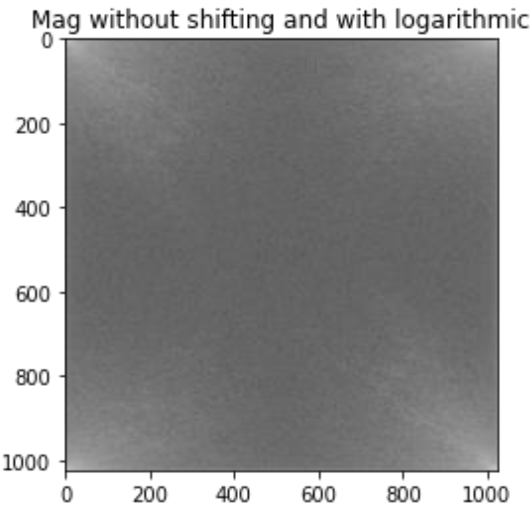
در تصاویر زیر به ترتیب، طیف تصویر لنا با شیفت و بدون شیف و با لگاریتم و بدون لگاریتم نمایش داده شده است.

در حالتی که لگاریتم و شیف داریم، خطوط عمودی در طیف به دلیل وجود لبه های افقی در تصویر در حوزه مکان، و خطوط افقی در طیف به دلیل وجود لبه های عمودی در تصویر در حوزه مکان میباشد. در طیف تصویر لنا خطوط قطری در جهت قطر فرعی تعداد بیشتری دارند که به دلیل وجود لبه های قطری بیشتر در جهت قطر اصلی در تصویر در حوزه مکان می باشد.



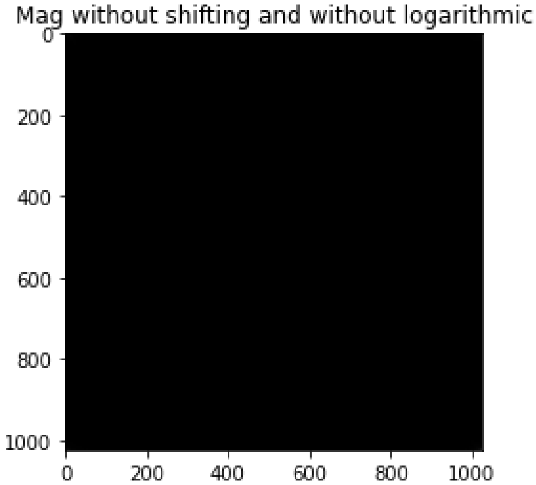


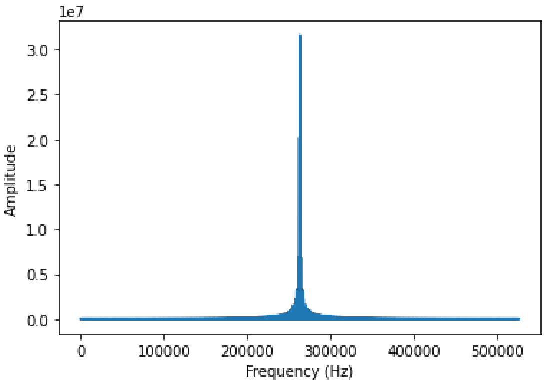
در این حالت که شیف داریم اما لگاریتم نداریم مرکز فرکانس به صورت یک نقطه سفید کوچک در وسط مشاهده میشود.



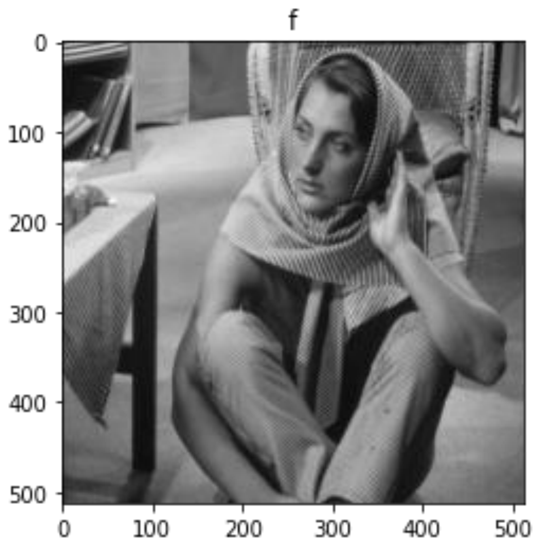
در این حالت که شیفت نداریم اما لگاریتم داریم،

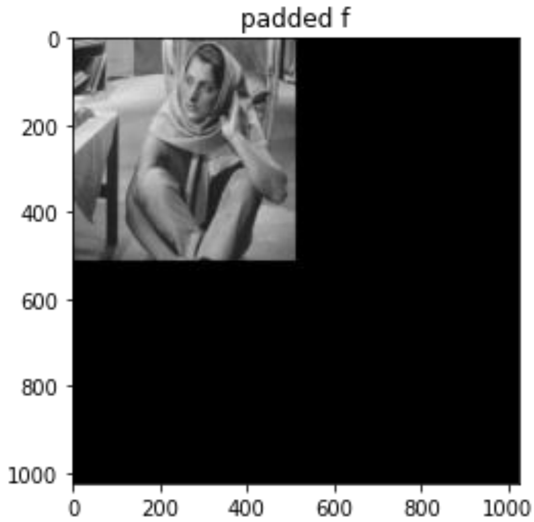
میبینیم که مرکز فرکانس در 4گوشه تصویر قرار دارد.



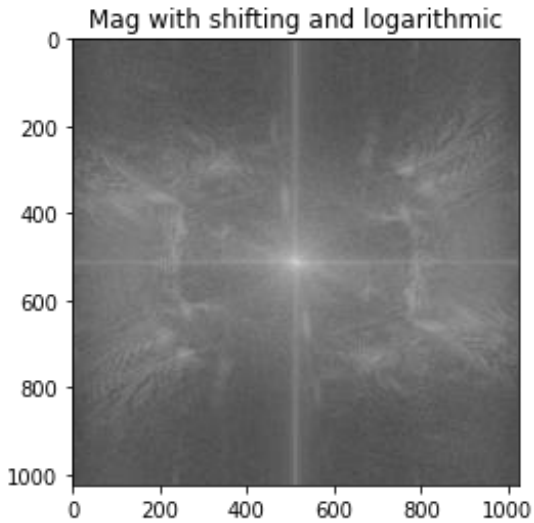


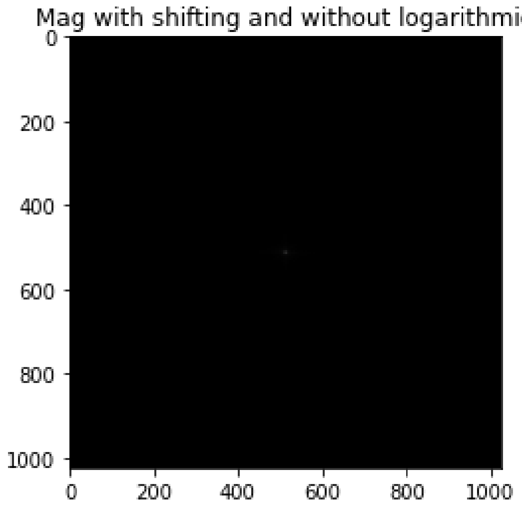
در تصاویر زیر به ترتیب، طیف تصویر باربارا با شیفت و بدون شیف و با لگاریتم و بدون لگاریتم نمایش داده شده است. د

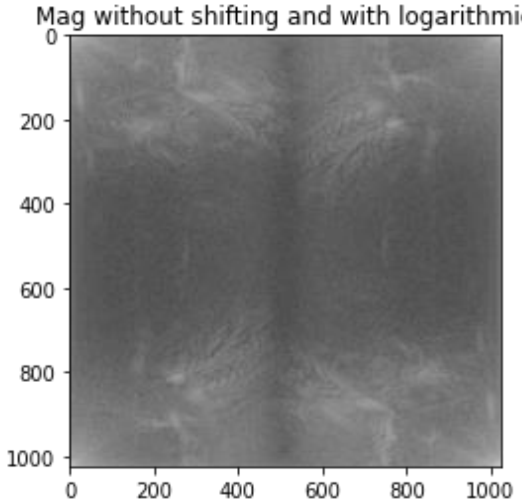


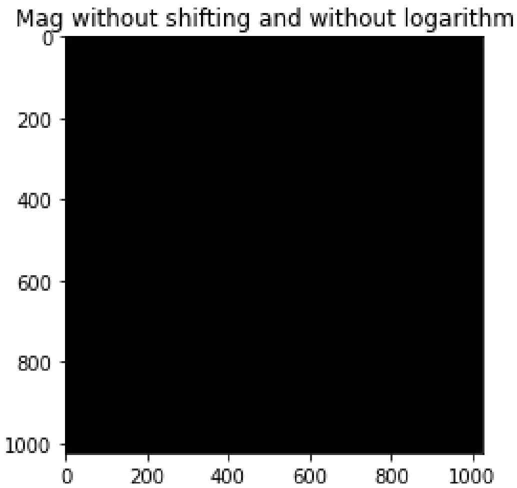


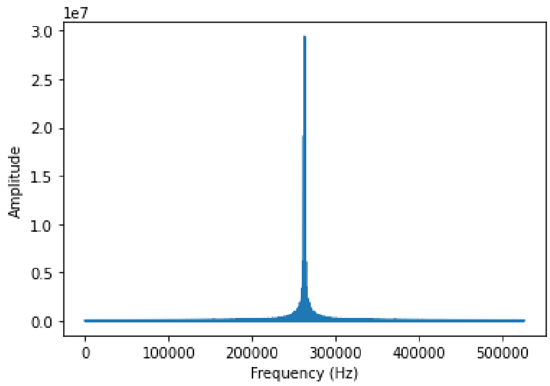
در حالتی که لگاریتم و شیف داریم، خطوط عمودی در طیف به دلیل وجود لبه های افقی در تصویر در حوزه مکان، و خطوط افقی در طیف به دلیل وجود لبه های عمودی در تصویر در حوزه مکان میباشد. به نظر میرسد که این تصویر علاوه بر داشتن لبه های زیاد، حاوی مقداری نویز متناوب هم میباشد که میتوان با استفاده از فیلترهای میان گذر آن را حذف کرد.





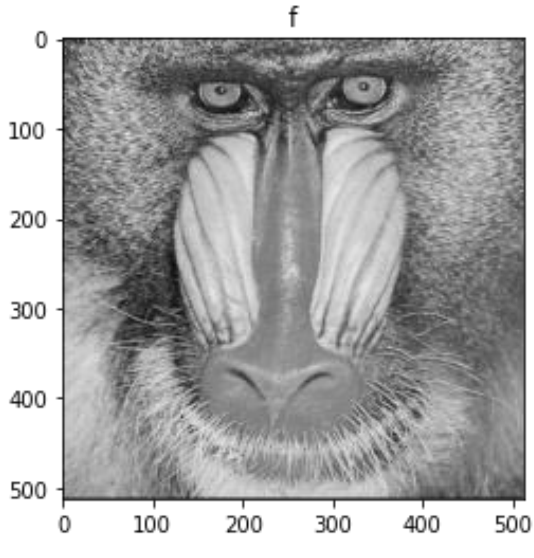


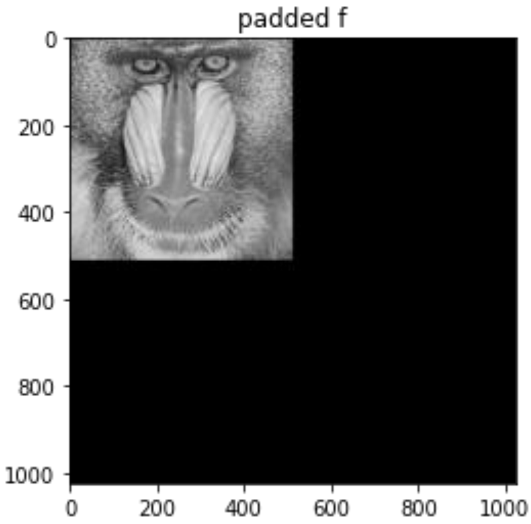


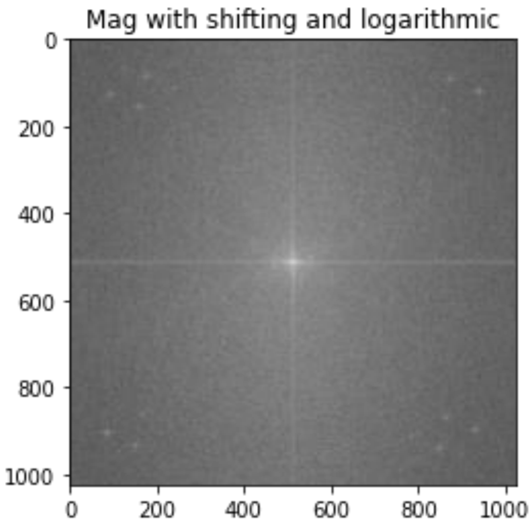


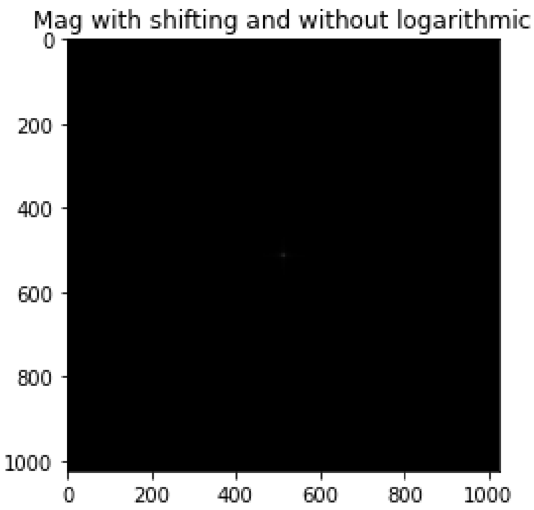
در تصاویر زیر به ترتیب، طیف تصویر بابون با شیفت و بدون شیف و با لگاریتم و بدون لگاریتم نمایش داده شده است.

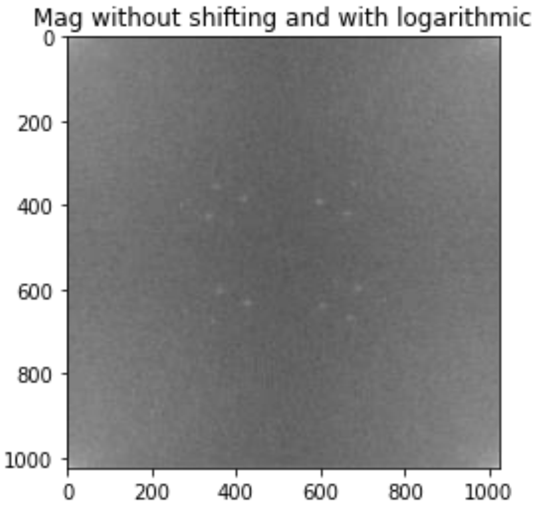
در حالتی که لگاریتم و شیف داریم، خطوط عمودی در طیف به دلیل وجود لبه های افقی در تصویر در حوزه مکان میباشد.

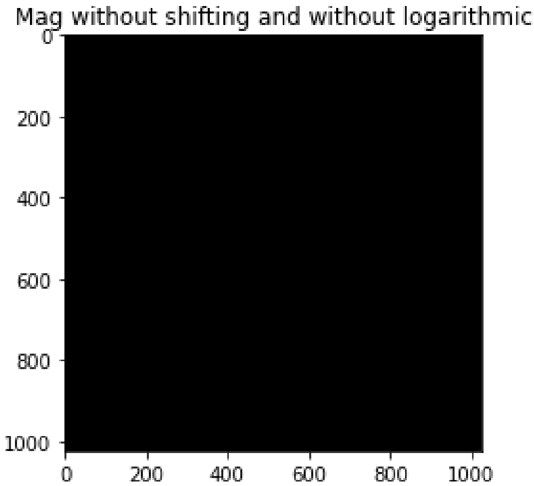


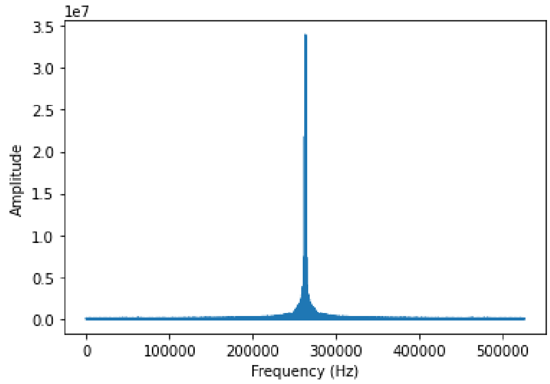






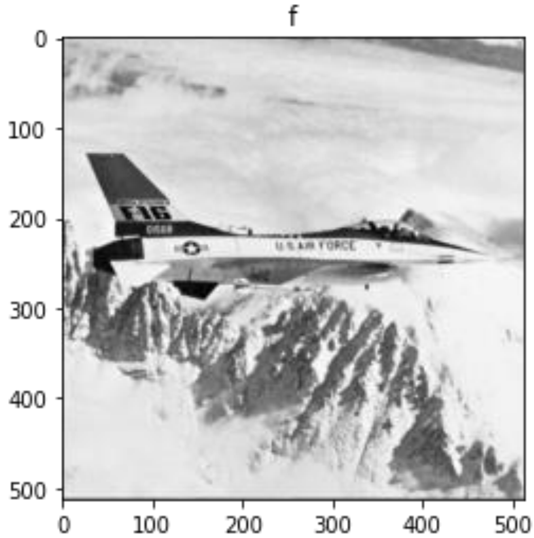


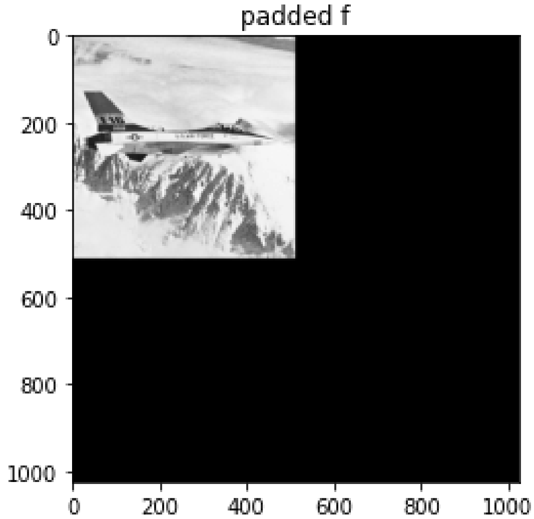


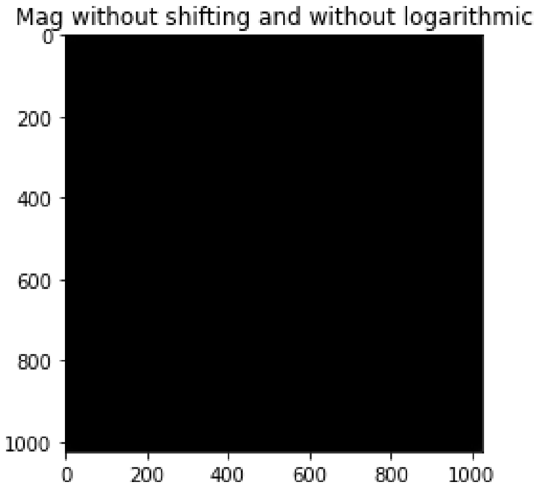


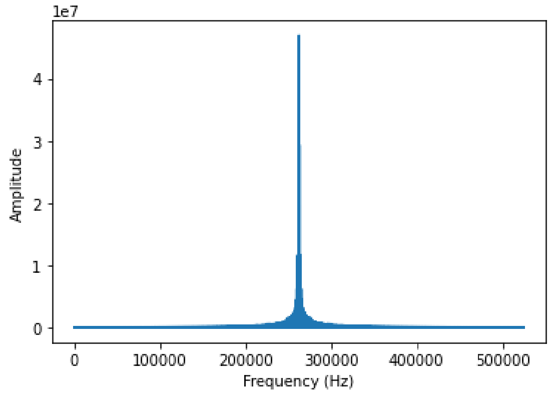
در تصاویر زیر به ترتیب، طیف تصویر F16 با شیفت و بدون شیف و با لگاریتم و بدون لگاریتم نمایش داده شده است.

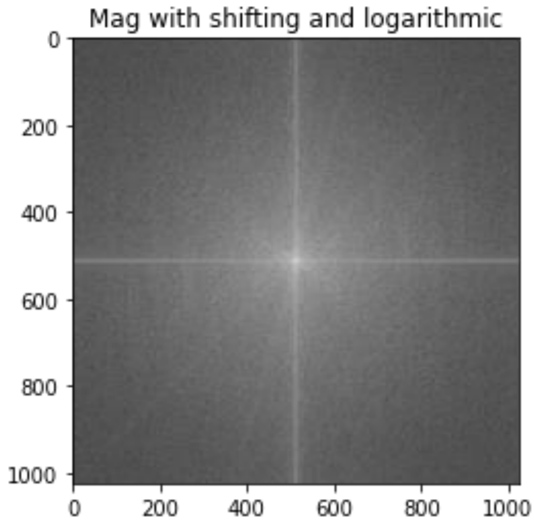
در حالتی که لگاریتم و شیف داریم، خطوط عمودی در طیف به دلیل وجود لبه های افقی در تصویر در حوزه مکان، و خطوط افقی در طیف به دلیل وجود لبه های عمودی در تصویر در حوزه مکان میباشد. در طیف این تصویر خطوط قطری در جهت قطر اصلی تعداد بیشتری دارند که به دلیل وجود لبه های قطری بیشتر در جهت قطر فرعی در تصویر در حوزه مکان می باشد.

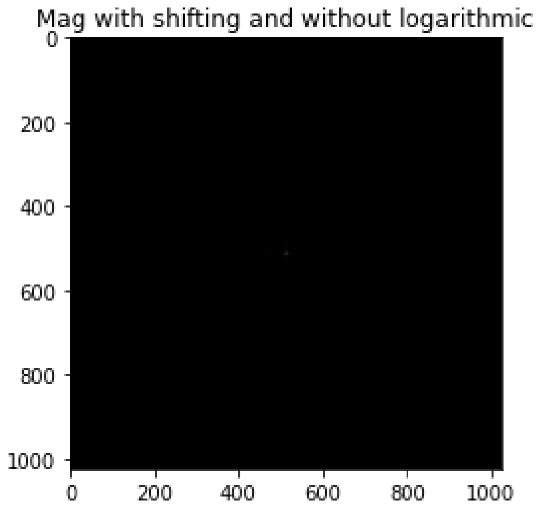


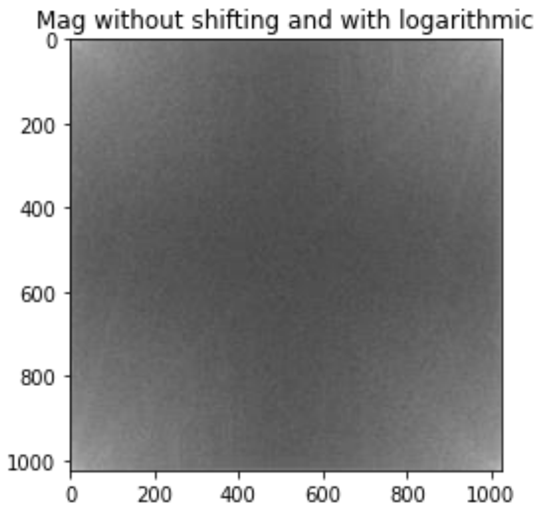












2-3

1-2-3

اگر در الگوریتم ذکر شده برای فیلترکردن در حوزه فرکانس، مرحله 2 را انجام نداده و از f به اندازه M,N تبدیل فوریه بگیریم، آنگاه ابعاد F نیز M,N خواهد بود. اما اگر تبدیل فوریه fp پدشده را محاسبه کنیم، ابعاد آن 2M,2N میباشد.

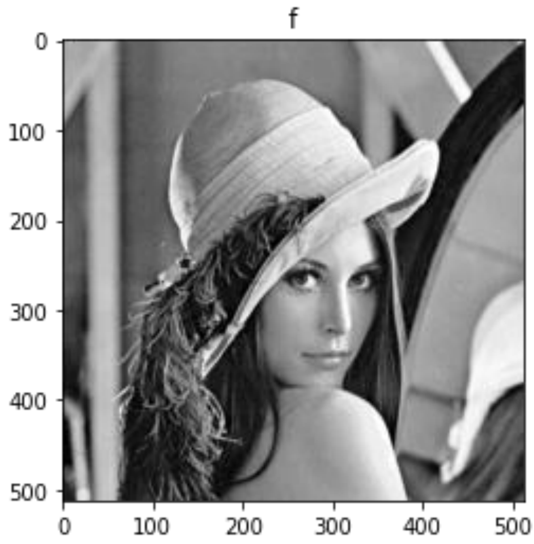
از آنجایی که طبق دستور np.fft.fftshift تصویر پدشده به مرکز منتقل میشود، ناحیه زیر پیکسل هایی می باشند که در شرط Y(m,n) = Z(m,n) صدق میکنند:

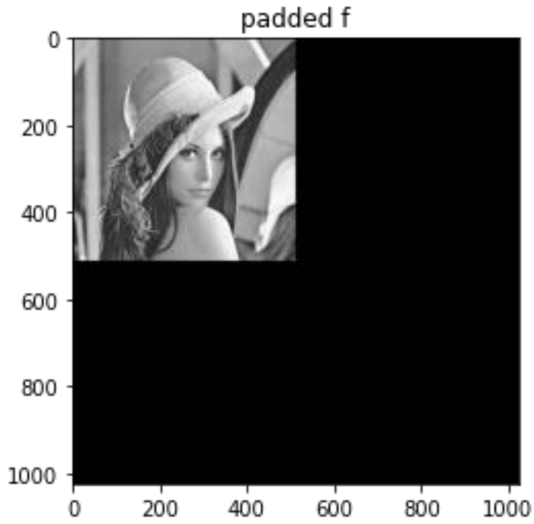
$$\frac{N}{2} < m, n < M - \frac{N}{2}$$

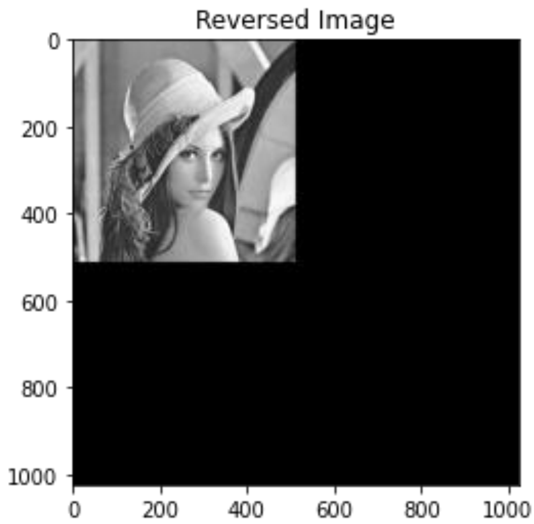
برای به دست آوردن تصویر تبدیل یافته g از gp پدشده، باید تکه ای با ابعاد M,N از گوشه بالا سمت چپ تصویر برداریم.

2-2-3

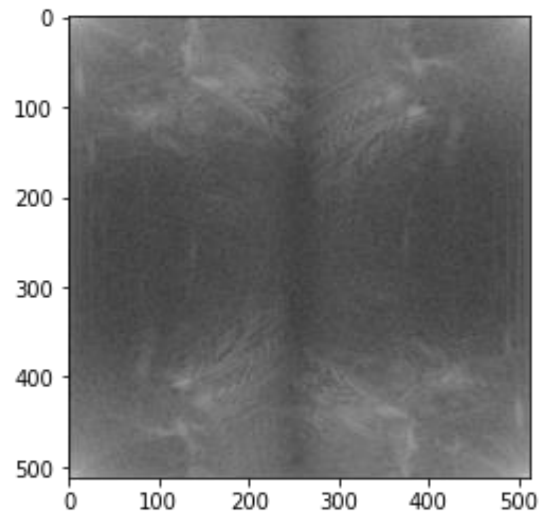
مراحل کلی اعمال فیلترهای ذکر شده انتقال تصویر به حوزه فرکانس، اعمال تغییرات لازم و بازگشت آن از حوزه فرکانس میباشد.



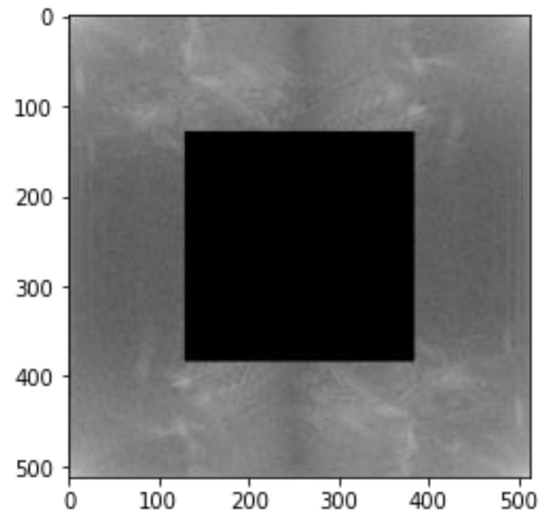


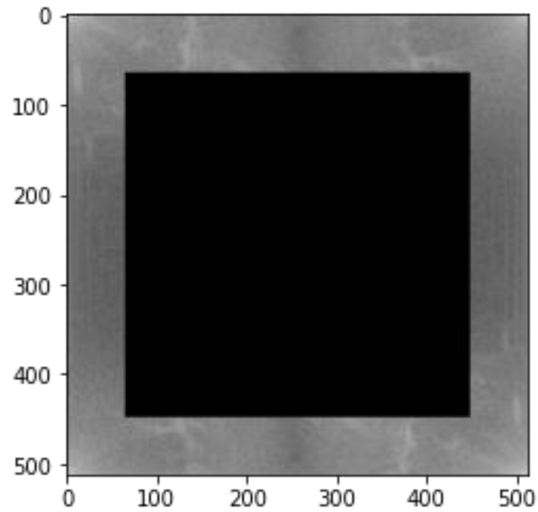


تصویر زیر، طیف تصویر باربارا در حوزه فرکانس میباشد:

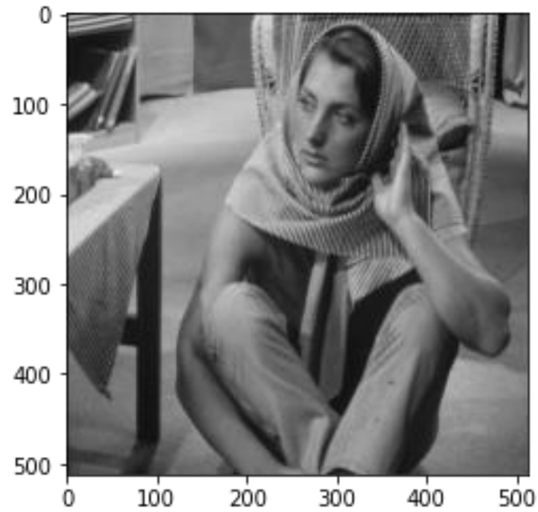


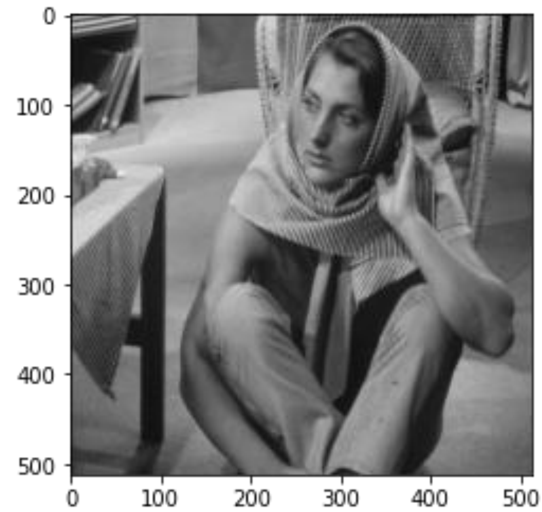
دو تصویر زیر، طیف حاصل از اعمال فیلتر a با مقادیر t=1/4 و t=1/8 میباشد.



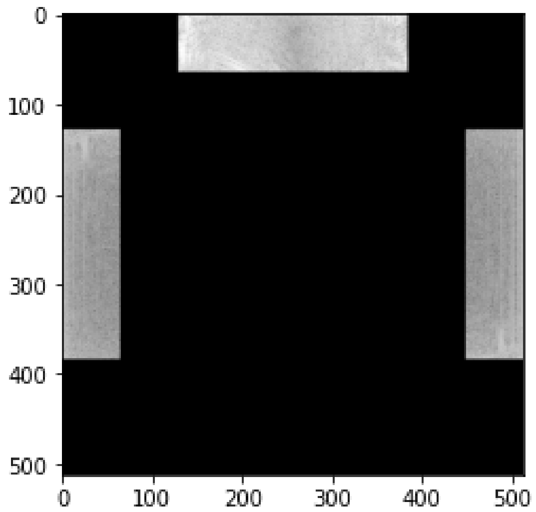


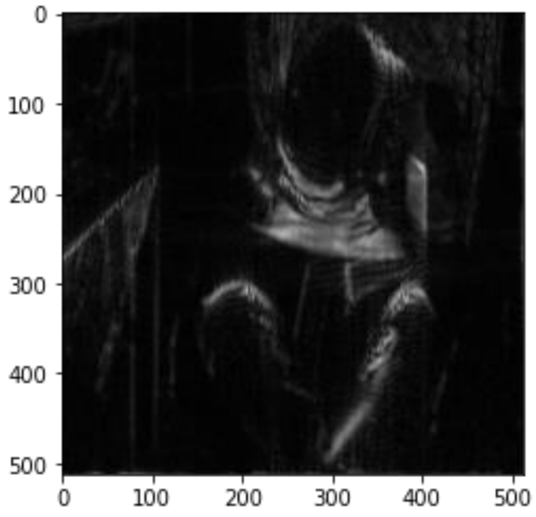
دو تصویر زیرحاصل اعمال دو فیلتر مختلف A برروی تصویر باربارا است. همانطور که مشاهده میشود با کاهش متغیرt، ابعادی از تصویر که توسط فیلتر 0 میشوند افزایش می یابد که باعث شده فرکانس های پایین بیشتری را 0 کنیم و در نتیجه، تصویر حاصل از t کمتر، جزئیات بیشتری را از دست داده و محو تر است.





دو تصویر زیر، طیف حاصل از اعمال فیلتر b با مقادیر $t=1/4$ و $t=1/8$ و تصویر حاصل از اعمال دو فیلتر مختلف b برروی تصویر باربارا است..





Code 4

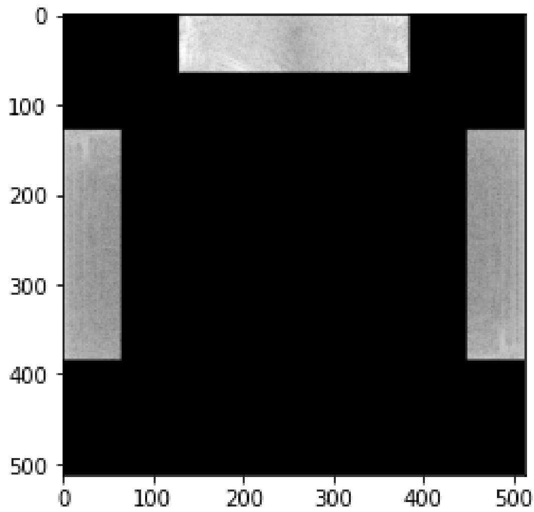
https://colab.research.google.com/drive/1sohJ1DdqXlp7ZxbsG38_FMnDMgkx24T_?usp=sharing

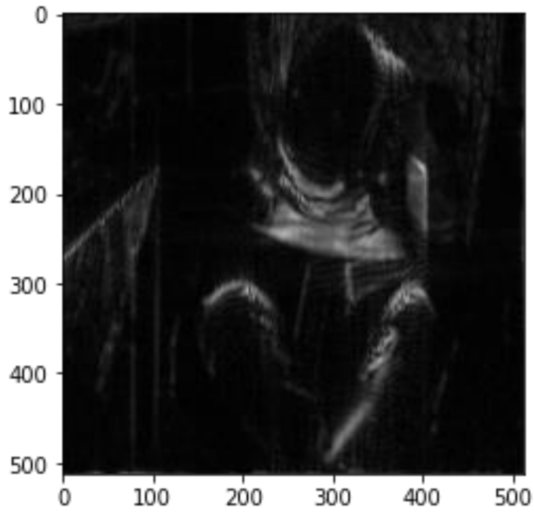
```
def pad(f,p,q):
  m,n = f.shape
  fp = np.zeros((p,q))
  fp[0:m,0:n]=f
  return fp
```

```
def DFT(f, h):
  m,n = f.shape
  p=2*m
  q=2*n

  plt.imshow(f, "gray"), plt.title("f")
  plt.show()
  fp = pad(f,p,q)
  plt.imshow(fp, "gray"), plt.title("padded f")
  plt.show()
  F = np.fft.fftshift(np.fft.fft2(fp))
  plt.imshow(np.log(1+np.abs(F)), "gray"), plt.title("Magnitude Spectrum of F")
  plt.show()
  hp= pad(h,p,q)
  H = np.fft.fftshift(np.fft.fft2(hp))
  plt.imshow(np.log(1+np.abs(H)), "gray"), plt.title("Magnitude Spectrum of H")
  plt.show()

  return F, H
```





در این فیلتر با کاهش مقدار t، بخشی از تصویر که مقدار آن را 0 میکنیم کمتر میشود و در نتیجه جزئیات کمتری از بین میرود. در نتیجه هرچه t بزرگتر باشد لبه ها بیشتر و بهتر نمایش داده میشوند.

```python
def DFT_result(f):
  m,n = f.shape
  p=2*m
  q=2*n

  plt.imshow(f, "gray"), plt.title("f")
  plt.show()
  fp = pad(f,p,q)
  plt.imshow(fp, "gray"), plt.title("padded f")
  plt.show()

  F_unshifted = np.fft.fft2(fp)
  F_shifted = np.fft.fftshift(np.fft.fft2(fp))

  plt.imshow(np.log(1+np.abs(F_shifted)), "gray"), plt.title("Mag with shifting and logarithmic")
  plt.show()
  plt.imshow(1+np.abs(F_shifted), "gray"), plt.title("Mag with shifting and without logarithmic")
  plt.show()
  plt.imshow(np.log(1+np.abs(F_unshifted)), "gray"), plt.title("Mag without shifting and with logarithmic")
  plt.show()
  plt.imshow(1+np.abs(F_unshifted), "gray"), plt.title("Mag without shifting and without logarithmic")
  plt.show()

  return F_shifted
```

```python
def apply_filter(F,H):
  G = F*H
  plt.imshow(np.log(1+np.abs(G)), "gray"), plt.title("Magnitude Spectrum of  G = F*H")
  plt.show()
  Gp = np.fft.ifftshift(G)
  plt.imshow(np.log(1+np.abs(Gp)), "gray"), plt.title("Decentralized IFFT")
  plt.show()
  g = np.fft.ifft2(Gp)
  plt.imshow(np.abs(g[0:512, 0:512]), "gray"), plt.title("Reversed Image")
  plt.show()

  return g
```

```python
F1, H1 = DFT(lena, f1)
g1 = apply_filter(F1,H1)
F11, H11 = DFT(lena, f11)
g11 = apply_filter(F11,H11)
F12, H12 = DFT(lena, f12)
g12 = apply_filter(F12,H12)
```

```python
F2, H2 = DFT(lena, f2)
g2 = apply_filter(F2,H2)
```

```python
F3, H3 = DFT(lena, f3)
g3 = apply_filter(F3,H3)
F31, H31 = DFT(lena, f31)
g31 = apply_filter(F31,H31)
```

```
      elif (0 <= k and k <=
(t*m) and ((1 -
t)*n) <= l and l <= (n-1)):
        fftb1[k, l] = 0
      elif (((1 -
t)*m) <= k and k <= (m-
1) and 0 <= l and l <= (t*n)
):
        fftb1[k, l] = 0
      elif (((1 -
t)*m) <= k and l <= (n-1)):
        fftb1[k, l] = 0

plt.imshow(np.log(1+np.abs(f
ftb1)),'gray')
plt.show()
```

```
s_magnitude = np.abs(F_lena)
.flatten()
frequency = np.linspace(0, n
p.argmax(F_lena), len(s_magn
itude))
frequency_bins = int(len(s_m
agnitude))
plt.plot(frequency[:frequenc
y_bins], s_magnitude[:freque
ncy_bins] )
plt.xlabel('Frequency (Hz)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.show()
```

```
t=1/4

ffta1 = fft
for k in range(m):
    for l in range(n):
      if ((t*n) < k and (t*n
) < l and k < ((1-
t)*n) and l < ((1-t)*n)):
        ffta1[k, l] = 0

plt.imshow(np.log(1+np.abs(f
fta1)),'gray')
plt.show()
```

```
t=1/4

fftb1 = fft
for k in range(m):
    for l in range(n):
      if (0 <= k and 0 <= l
and k <= (t*m) and l <= (t*n
)):
        fftb1[k, l] = 0
```