

گزارش کار تمرین سری اول شبیه سازی های فیزیکی

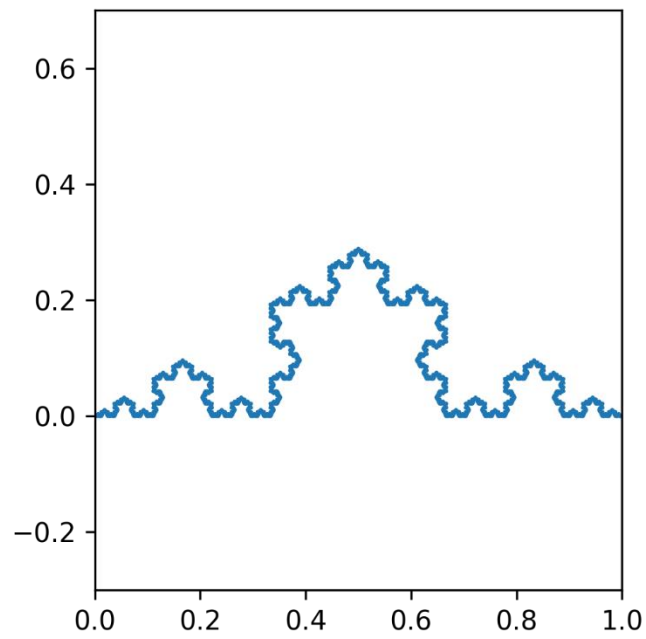
زهرا اکبری – 98100612

تمرین اول

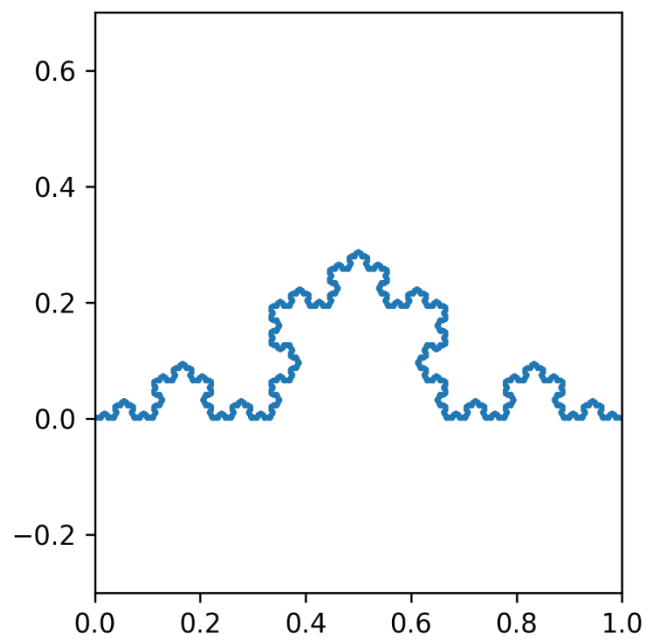
برای رسم فرکتال کوخ از اعمال متعدد توابعی استفاده میکنیم که شکل خودشبه فرکتال را میسازند. ابتدا از خطی افقی با مختصات (0 و 0) و (1 و 0) آغاز میکنیم. چهار نیم خط گام بعدی فرکتال را میسازند. برای اینکار به دوران، انتقال و انقباض نیاز داریم که با توابع translation, rotation, contract, در کد تعریف شده اند. این توابع میتوانند به ترتیب مقدار جابجایی در راستای محور افقی و عمودی، مقدار زاویه دوران و نسبت تجانس را همراه با مختصات اولیه میگیرند و مختصات جدید را میدهند. با ترکیب این توابع 4 بخش اصلی فرکتال کوخ را رسم کرد. که در متن با نام های line1 تا line4 مشخص شده اند. تابع اولیه فقط تجانسی با نسبت یک سوم و تابع آخر تجانس و انتقال به اندازه دو سوم در راستای افقی را انجام میدهند.

تابع line2 و line3 علاوه بر منقبض کردن به اندازه یک سوم و انتقال به ترتیب به اندازه یک سوم و دو سوم در راستای افقی شکل را دوران هم میدهند. در تابع line2 شکل به اندازه 60 درجه و تابع line3 به اندازه 60- درجه دوران میابد. اما در تابع line3 به علت دوران در جهت عکس خط مورد نظر به اندازه ارتفاع مثلث کوچک ایجاد شده پایین تر میرود که با انتقال عمودی به میزان این مشکل رفع میشود. علت اینکه به جای 120 درجه، 60 درجه شکل را چرخانیم و مجبور به انتقال اضافه شدیم این است که با دوران 120 درجه گوشه های جدید ایجاد شده در مرحله بعد اشتباها به سمت داخل خواهند بود.

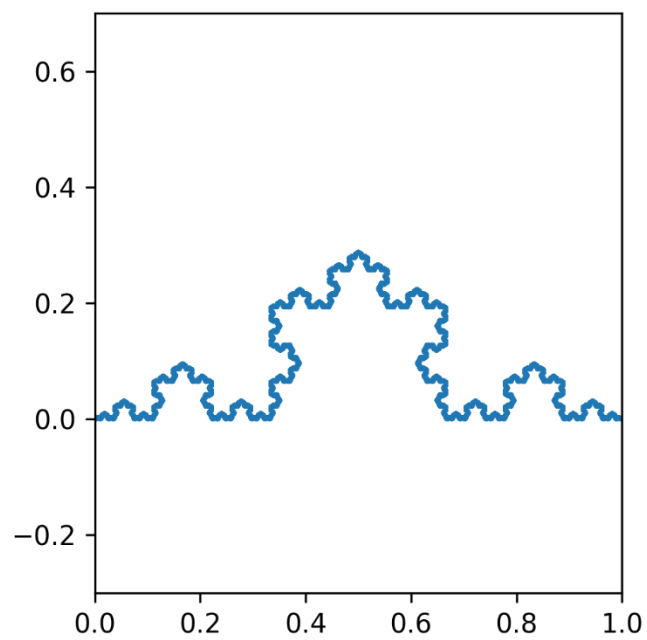
در نهایت تابع total_line این بخش های را به هم میچسباند و در ادامه با ایجاد لویی این تابع را متعدها روی خط اولیه اعمال میکنیم. از جایی به بعد علاوه بر طولانی شدن زمان محاسبه، جزئیات فرکتال از یک پیکسل کوچکتر میشوند و ادامه دادن لوپ پس از آن کارآمد نیست. با این حال برای افزایش توان مشاهده جزئیات تصاویر به دست آمده با کیفیت بالاتری ذخیره شده اند و خطوط با ضخامت کوچکتر رسم شده اند. در ادامه تصاویر برخی از نتایج آورده شده اند.



شکل 1 فرکتال کوخ پس از 5 گام



شکل 2 فرکتال کوخ پس از 7 گام



شکل 3 فرکتال کوخ پس از 9 گام

تصاویر با کیفیت تر در فایل تمرین موجودند.

تمرین دوم – فرکتال هی وی

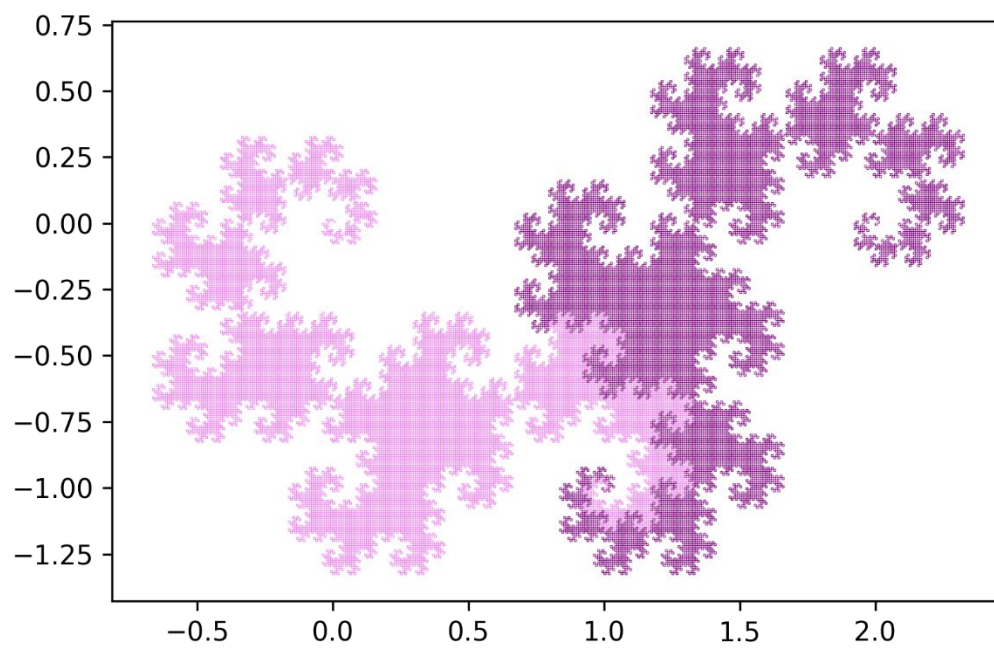
مشابه تمرین قبل به سه تابع دوران و انتقال و تجانس نیاز داریم که مشابه قبل تعریف شده اند. این بار تنها ترکیب دو تابع شکل کلی فرکتال را میسازد. از یک گوشه 90 درجه شروع میکنیم و مبدا مختصات را روی نقطه وسط فرض میکنیم.

تابع Line1: این تابع فرکتال را به اندازه $\frac{\sqrt{2}}{2}$ منقبض کرده و 45- درجه حول مبدا مختصات میچرخاند.

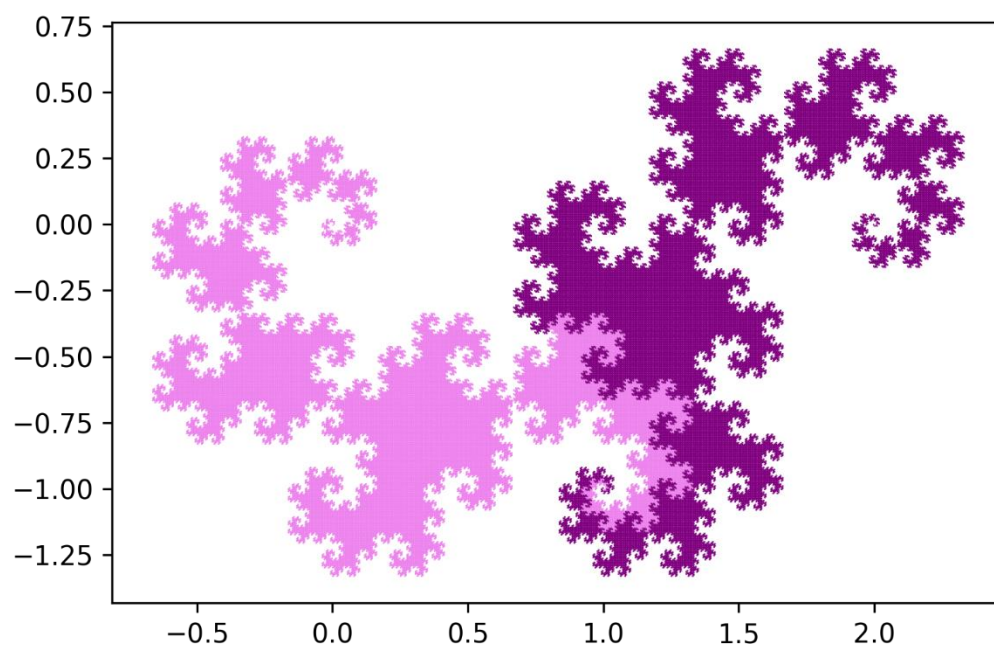
تابع Line2: این تابع فرکتال را به اندازه $\frac{\sqrt{2}}{2}$ منقبض کرده و 135- درجه حول مبدا مختصات میچرخاند. سپس به اندازه 2 در محور افقی جابجا میکند. این تابع در نهایت ترتیب نقاط را هم برعکس میکند چون به علت دوران ترتیب نقاط طوری که ما میخواهیم هنگام رسم خطوط بینشان کشیده شود نیست.

تابع total_line: تنها ترکیب توابع قبلی ست.

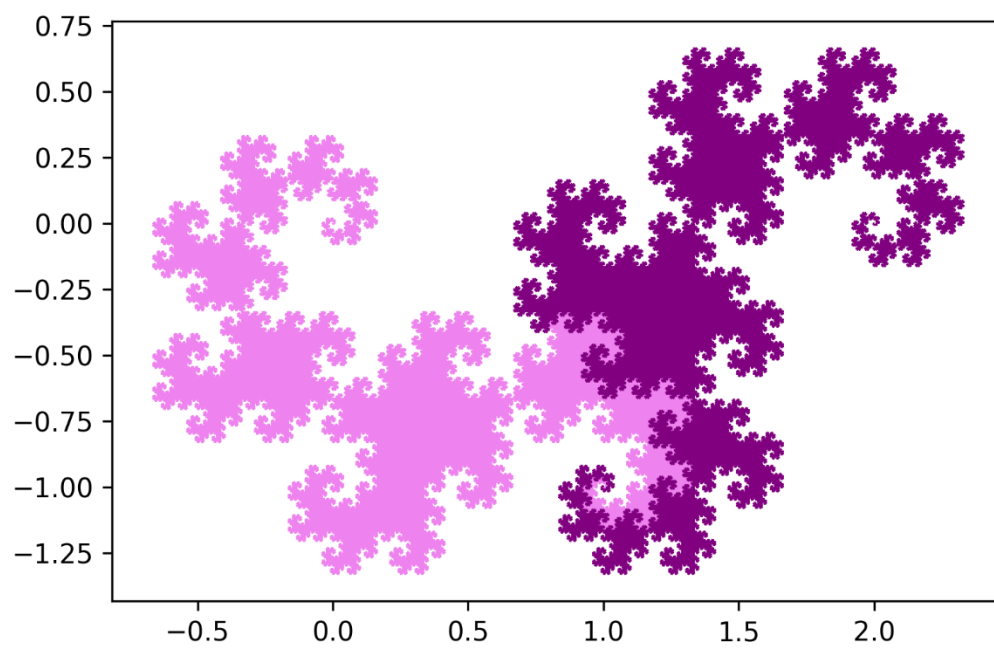
مشابه سوال قبل مکرراً تابع نهایی را روی نقاط اولیه اعمال میکنیم تا جایی که شکل های مناسبی به دست آوریم. برای اینکه خواص این فرکتال بهتر دیده شود نصف نقاط را با رنگ متفاوتی از بقیه نقاط رسم میکنیم. در ادامه نتایج آورده شده اند. همانطور که مشخص است برای گام 20 خطوط در هم فرو رفته اند و نتیجه بیشتر شبیه رنگ آمیزی ست.



شکل 4 فرکتال هی وی با گام 15



شکل 5 فرکتال هی وی با گام 17



شکل 6 فرکتال هی وی با گام 20

تمرین سوم: مثلث سرپینسکی

در رسم این فرکتال به دوران نیاز نداریم. راس چپ مثل متساوی الاضلاعی را به عنوان مرکز مختصات در نظر میگیریم. توابع سازنده فرکتال به شکل زیرند:

تابع $function1$: تجانس با نسبت یک دوم.

تابع $function2$: تجانس با نسبت یک دوم و انتقال به راست به اندازه یک دوم واحد.

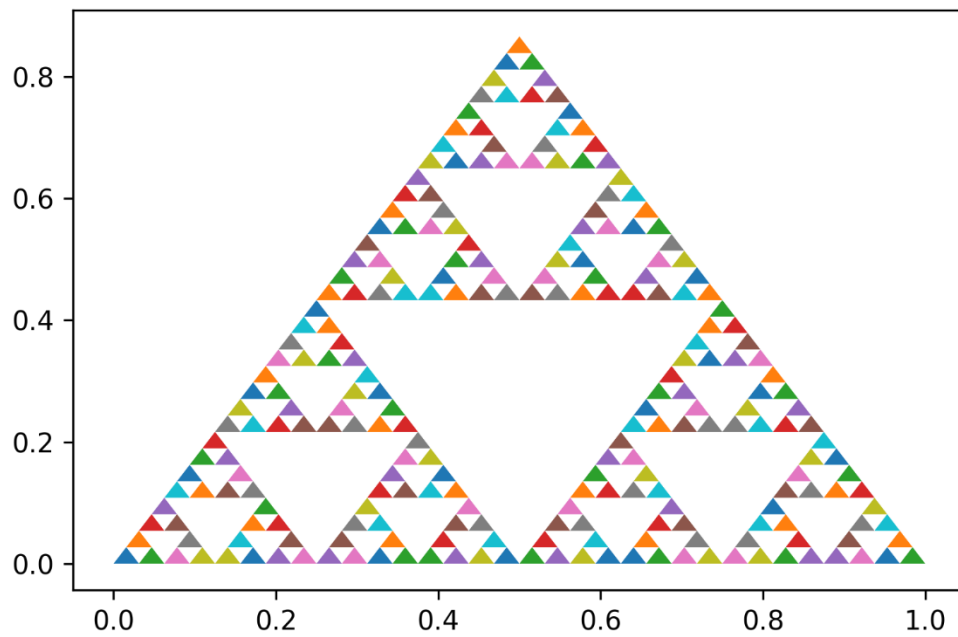
تابع $function3$: تجانس با نسبت یک دوم و انتقال به راست به اندازه یک چهارم و انتقال به بالا به اندازه $\frac{\sqrt{3}}{4}$

تابع $Function$: ترکیب توابع بالا.

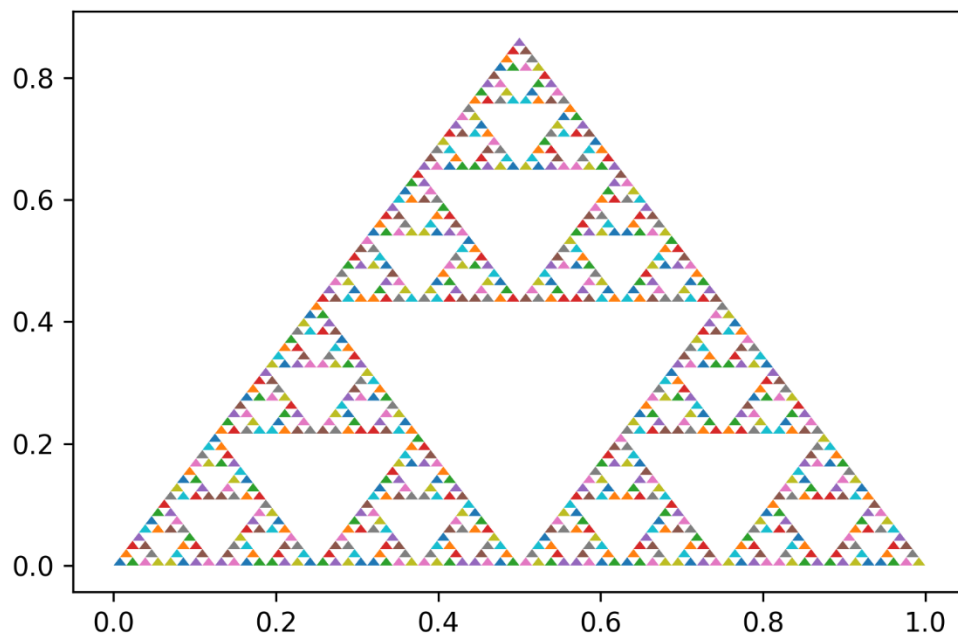
اگر مشابه تمرین های قبلی برای رسم فرکتال صرفا سعی کنیم نقاط را مشخص و آن ها را به هم وصل کنیم. خطوط اضافه ای پدید می آید و یال نهایی هر مثلث هم کشیده نمیشود. برای حل مشکل دوم میتوان نقطه اولیه را به آخر مختصات مشخص کننده هر مثلث اضافه کرد تا یال ها کامل رسم شوند. (اعمال این قضیه روی مثلث اولیه کافی ست).

برای حل مشکل ممکن است اولین ایده تغییر ترتیب اعمال توابع بالا باشد تا خطوط اضافی از روی خطوط قبلی رد شوند و مشخص نشوند. اما این کار در گام های بعدی مشکل ساز خواهد بود و عملا تاثیری ندارد.

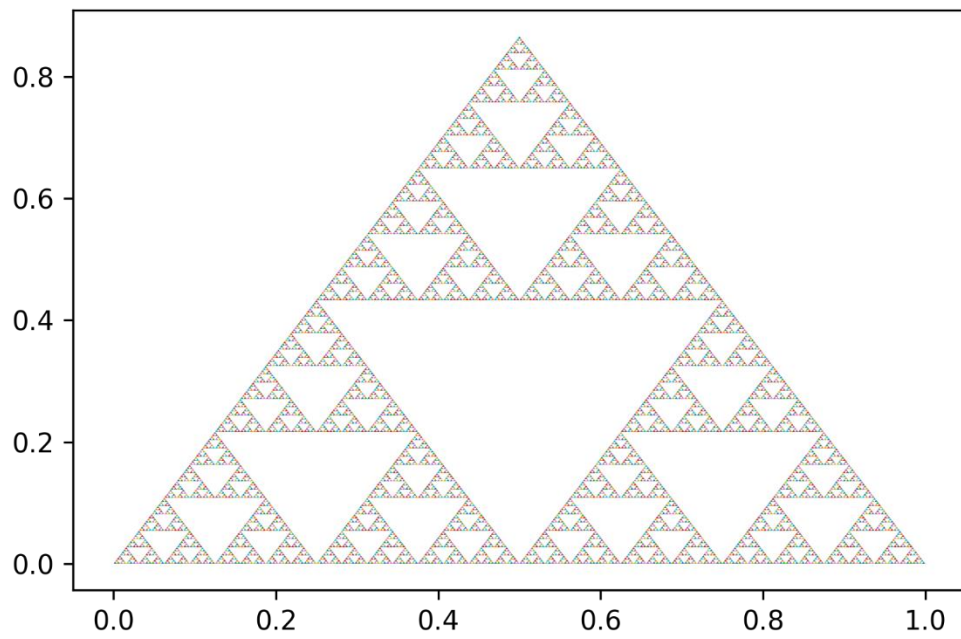
برای از بین رفتن خطوط اضافی و مشخص شدن محدوده هر مثلث، هر مثلث را جداگانه در یک زمان رسم و مشخص میکنیم برای اینکار نقاط 4 تا 4 جدا شده اند و سپس با تابع $fill$ مختصاتشان رنگ آمیزی شده است. رنگ متفاوت هر مثلث در نتایج به علت استفاده از این شیوه است.



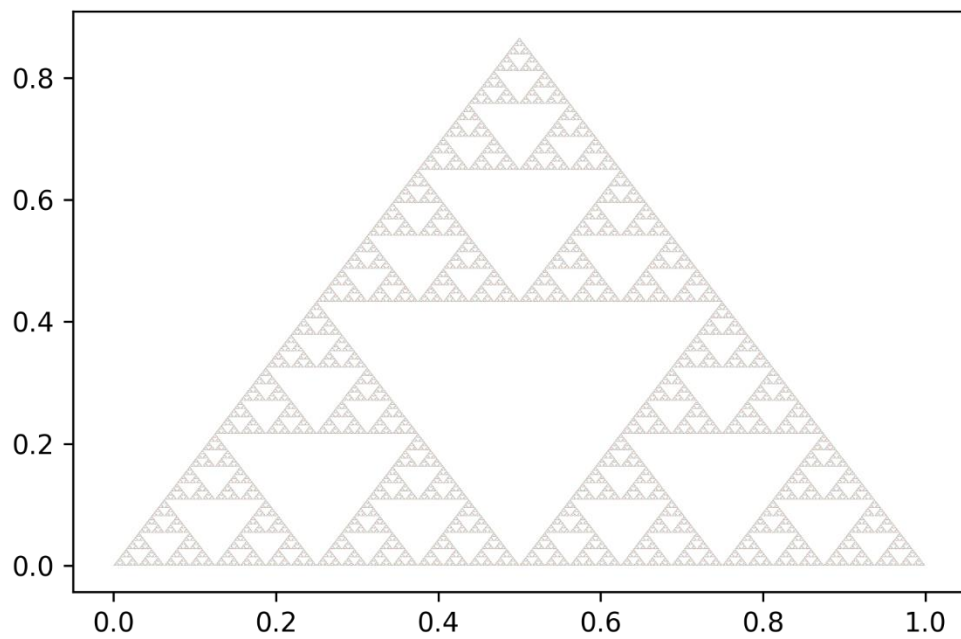
شکل 7 مثلث سرپینسکی پس از 5 گام



شکل 8 مثلث سرپینسکی پس از 6 گام



شکل 9 مثلث سرپینسکی پس از 8 گام



شکل 10 مثلث سرپینسکی پس از 10 گام

تمرین چهارم: رسم مثلث سرپینسکی با استفاده از مثلث خیام

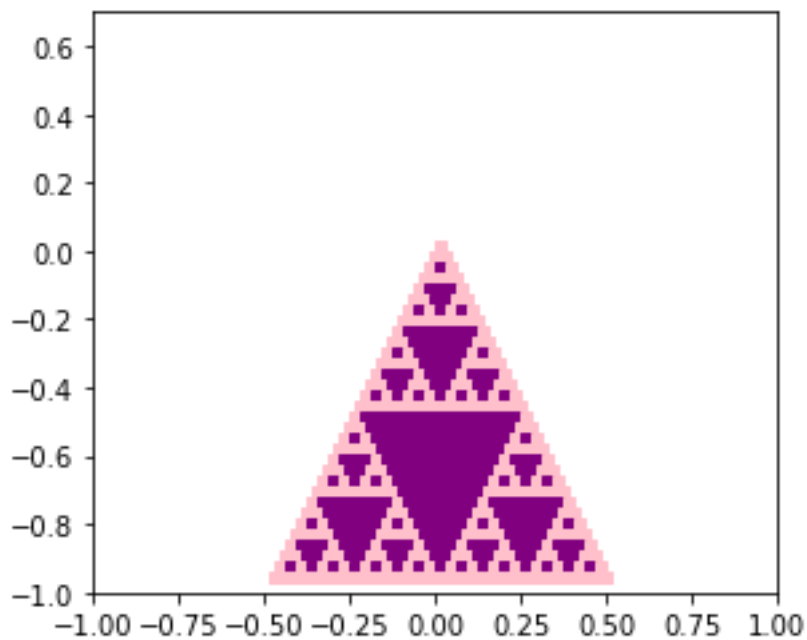
برای رسم مثلث خیام ابتدا بدون توجه به مقدار هر خانه، باید خانه ها را با نظم مشخصی رسم کنیم. برای اینکار هر خانه را مربعی به طول $2l$ فرض میکنیم. با اینکار میتوان طول و عرض خانه ها را بر حسب سطر ستون خانه به دست آورد. با کمی تامل بر هندسه مثلث خیام این مقدار ها به شکل زیر به دست می آیند. که در آن N تعداد سطر های تولید شده و L ارتفاع و قاعده مثلث اولیه یا همان طول واحد است. i سطر و j ستون مورد نظر است.

```
y = -i * L/N
x = j * ( L / N) - ((i/2) * (L/(N)))
```

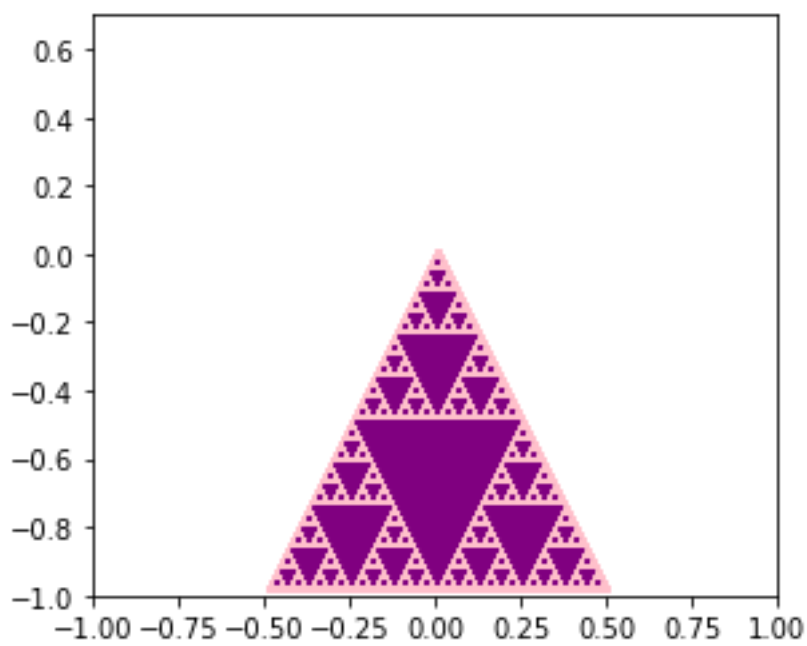
با الگویابی میدانیم، مقدار خانه ها از رابطه ترکیب یا همان انتخاب j از i به دست می آید. اگر این مقدار زوج باشد رنگ خانه را بنفش و در غیر این صورت صورتی میکنیم. برای ترسیم این مربع ها از تابع `rectangle` در کتابخانه `pyplotlib` استفاده شده است. این مقدار با متغیری به نام `combination` ذخیره شده است.

یکی از مشکلاتی که در ابتدا به آن برمیخوردم، خراب شدن رنگ خانه ها در سطر های بزرگ (نزدیک به 64) بود. ابتدا فکر کردم اعداد بزرگتر از اندازه قابل ذخیره در نوع `int` شده اند. اما نهایتاً مشخص شد این مشکل به علت محدود بودن توانایی ذخیره ارقام اعشاری نوع `float` پس از تقسیم (در محاسبه `combination` است. بنابراین به جای تقسیم معمولی از تقسیم صحیح (`//`) استفاده کردم.

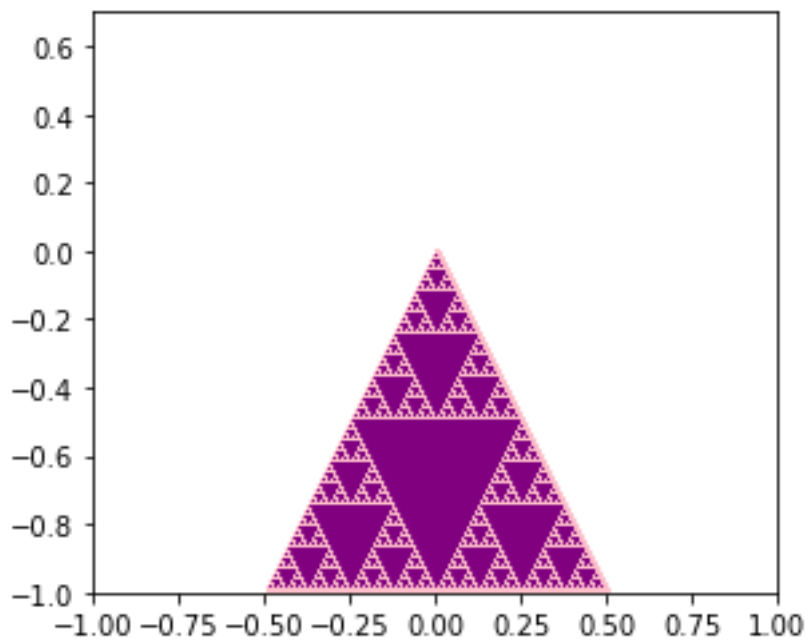
نتایج در صفحات آینده قابل مشاهده اند. اگر توان های 2 را رسم کنیم مثلث های کامل در شکل مشخص میشوند. متأسفانه به علت شیوه رسم، این بار قادر به بالا بردن کیفیت نبودم. اما تصاویر ران شده بدون زوم کردن، جزئیات قابل مشاهده ای دارند.



شکل 11 مثلث سرپینسکی به روش خیام-پاسکال گام 32



شکل 12 مثلث سرپینسکی به روش خیام-پاسکال گام 64



شکل 13 مثلث سرپینسکی به روش خیام-پاسکال گام 128