به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پروژه درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مخابرات نوری باینری

استاد درس: دکتر حمید بهروزی

دانشجویان:

زهرا مجتهدین. شماره دانشجویی: ۹۹۱۰۲۱۶۷

پوریا کاظم. شماره دانشجویی: ۹۹۱۰۲۰۴۸

۱۰ تیر ۱۴۰۱

فهرست مطالب

۱ محاسبه ی احتمال خطا برای کلیدزن روشن و خاموش

با توجه به هم‌احتمال بودن الفبای منبع داریم:

$$p[0] = p[1] = 0.5 \tag{1}$$

اگر برای هر پیام ارسالی X، تعدادی از فوتون‌ها جذب آشکارساز شوند که خروجی Y را به دست می‌دهند. آنگاه تابع توزیع احتمال شرطی خروجی به ازای ورودی به صورت زیر خواهد بود:

$$p_{Y|X}(k|0) = \frac{K_0^k e^{-K_0}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2 \dots \tag{2}$$

$$p_{Y|X}(k|1) = \frac{K_1^k e^{-K_1}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2 \dots \tag{3}$$

که K_0 و K_1 متوسط فوتون‌های آشکار شده است وقتی $X = 0$ و $X = 1$ باشد.

توجه کنید که تعداد فوتون‌های جذب‌شده یک متغیر تصادفی با توزیع پواسون با متوسط K است که

۱. $K = K_0 = K_b$ برای بیت صفر

۲. $K = K_1 = K_b + K_s$ برای بیت یک

می‌دانیم بنا بر قضیه احتمال کل

$$p(y = k) = p_{Y|X}(k|0)p(X = 0) + p_{Y|X}(k|1)p(X = 1) = \frac{K_0^k e^{-K_0}}{2(k!)} + \frac{K_1^k e^{-K_1}}{2(k!)} \tag{4}$$

اگر فرض کنیم که K_t به عنوان آستانه تعداد الکترون‌ها د نظر گرفته شود، احتمال خطا برابر است با

$$P_e = p(X = 0)p(Y \geq K_t|X = 0) + p(X = 1)p(Y \leq K_t - 1|X = 1) \tag{5}$$

$$= \sum_{k=K_t}^{\infty} \frac{K_0^k e^{-K_0}}{2(k!)} + \sum_{k=0}^{K_t-1} \frac{K_1^k e^{-K_1}}{2(k!)} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-K_0}}{2} \sum_{k=0}^{K_t-1} \frac{K_0^k}{k!} + \frac{e^{-K_1}}{2} \sum_{k=0}^{K_t-1} \frac{K_1^k}{k!} \tag{7}$$

به منظور یافتن سطح آستانه به طوری که احتمال خطا حداقل شود از مشتق‌گیری می‌توان کمک گرفت، یعنی

$$\frac{\partial P_e}{\partial K_t} = 0 \rightarrow K_t \text{ is derived} \tag{8}$$

با روش ساده‌تر میتوان اینطور استدلال کرد که K_t سطح آستانه‌ای است که دو توزیع پواسون تعداد الکترونهای برابر با هم دارند، یعنی

$$Poisson(K_t, K_b) = Poisson(K_t, K_s + K_b) \tag{9}$$

$$\rightarrow \frac{K_b^{K_t} e^{-K_b}}{K_t!} = \frac{(K_b + K_s)^{K_t} e^{-K_b - K_s}}{K_t!} \rightarrow \boxed{K_t = \frac{K_s}{\ln(1 + \frac{K_s}{K_b})}} \tag{10}$$

به منظور بدست آوردن تعداد الکترونهای K_s داریم:

$$P_e = ۱۰^{-۴} = \left(\sum_{k=K_t}^{\infty} \frac{K_b^k e^{-K_b}}{۲(k!)} + \sum_{k=۰}^{K_t-۱} \frac{(K_b+K_s)^k e^{-K_b-K_s}}{۲(k!)} \right) \Big|_{K_t=\frac{K_s}{\ln(۱+\frac{K_s}{K_b})}} \tag{۱۱}$$

$$= \frac{K_s \left(\Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{K_b+K_s}{K_b}\right)}, K_b+K_s \right) - \Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{K_b+K_s}{K_b}\right)}, K_b \right) \right)}{۲\ln\left(\frac{K_b+K_s}{K_b}\right) \Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{K_b+K_s}{K_b}\right)} + ۱ \right)} + ۰٫۵ \tag{۱۲}$$

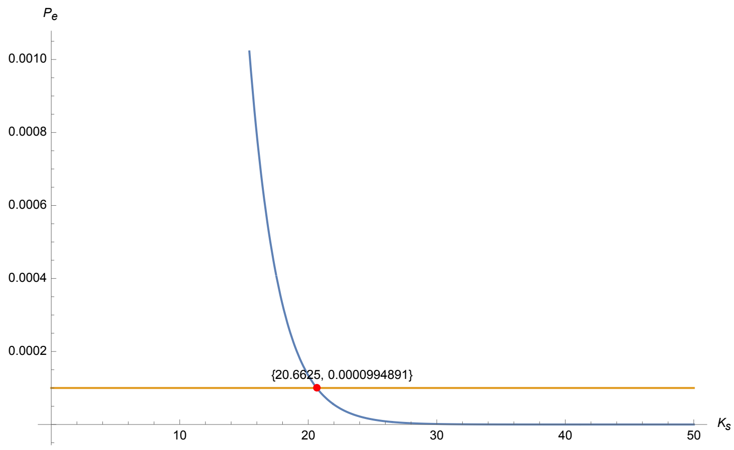
که $\Gamma(.,.)$ تابع گامای ناکامل (اطلاعات بیشتر) است.

به منظور یافتن تعداد الکترونهای K_s به ازای تعداد الکترونهای $K_b = ۱, ۵, ۱۰, ۲۰$ از ترسیم تابع فوق و احتمای خطای متناظر استفاده خواهیم کرد:

۱. $\boldsymbol{K_b = ۱}$: در این حالت داریم:

$$P_e = ۱۰^{-۴} = \frac{K_s \left(\Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{۱+K_s}{۱}\right)}, ۱+K_s \right) - \Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{۱+K_s}{۱}\right)}, ۱ \right) \right)}{۲\ln\left(\frac{۱+K_s}{۱}\right) \Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{۱+K_s}{۱}\right)} + ۱ \right)} + ۰٫۵ \tag{۱۳}$$

با رسم دو تابع خواهیم داشت:



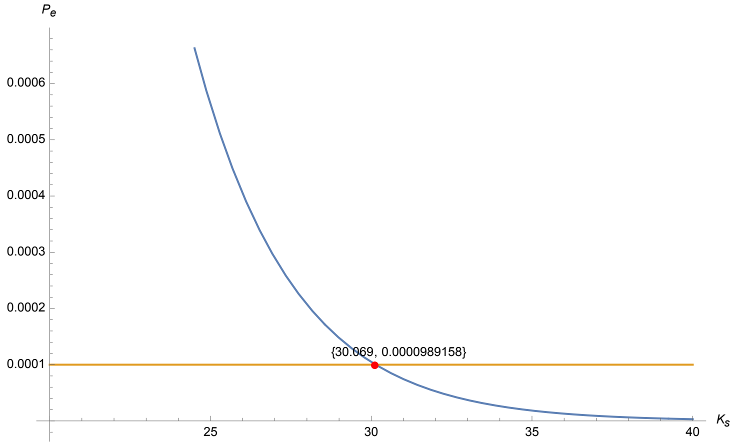
شکل ۱: احتمال خطا بر اساس K_s

با توجه به شکل فوق، انتخاب $K_s = ۲۱$ احتمال خطایی کمتر از $P_e = ۱۰^{-۴}$ را نتیجه خواهد داد.

۲. $\boldsymbol{K_b = ۵}$: در این حالت داریم:

$$P_e = ۱۰^{-۴} = \frac{K_s \left(\Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{۵+K_s}{۵}\right)}, ۵+K_s \right) - \Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{۵+K_s}{۵}\right)}, ۵ \right) \right)}{۲\ln\left(\frac{۵+K_s}{۵}\right) \Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{۵+K_s}{۵}\right)} + ۵ \right)} + ۰٫۵ \tag{۱۴}$$

با رسم دو تابع خواهیم داشت:



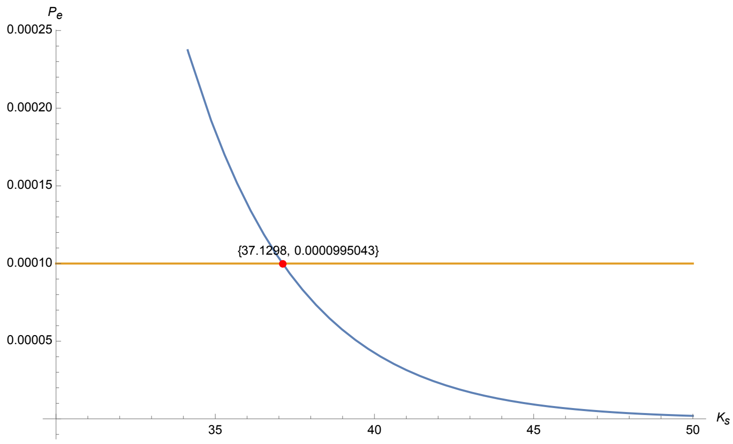
شکل ۲: احتمال خطا بر اساس K_s

با توجه به شکل فوق، انتخاب $K_s = ۳۱$ احتمال خطایی کمتر از $P_e = ۱۰^{-۴}$ را نتیجه خواهد داد.

۳. $\boldsymbol{K_b = ۱۰}$: در این حالت داریم:

$$P_e = ۱۰^{-۴} = \frac{K_s \left(\Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{۱۰+K_s}{۱۰}\right)}, ۱۰ + K_s \right) - \Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{۱۰+K_s}{۱۰}\right)}, ۱۰ \right) \right)}{۲ \ln\left(\frac{۱۰+K_s}{۱۰}\right) \Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{۱۰+K_s}{۱۰}\right)} + ۱۰ \right)} + ۰٫۵ \tag{۱۵}$$

با رسم دو تابع خواهیم داشت:



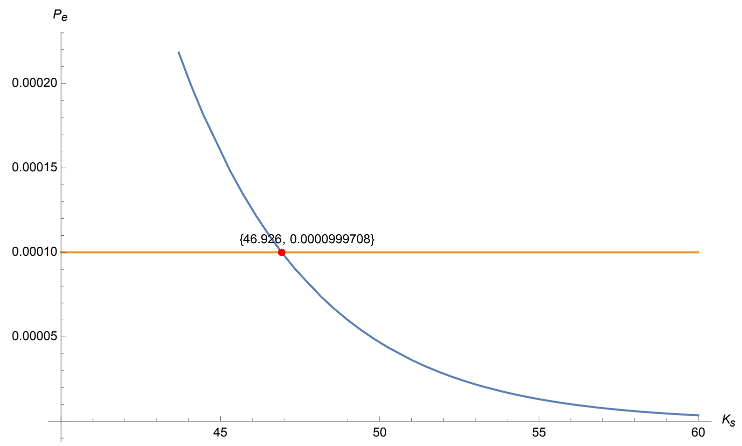
شکل ۳: احتمال خطا بر اساس K_s

با توجه به شکل فوق، انتخاب $K_s = ۳۸$ احتمال خطایی کمتر از $P_e = ۱۰^{-۴}$ را نتیجه خواهد داد.

۴. $\boldsymbol{K_b = ۲۰}$: در این حالت داریم:

$$P_e = ۱۰^{-۴} = \frac{K_s \left(\Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{۲۰+K_s}{۲۰}\right)}, ۲۰ + K_s\right) - \Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{۲۰+K_s}{۲۰}\right)}, ۲۰\right)\right)}{۲\ln\left(\frac{۲۰+K_s}{۲۰}\right)\Gamma\left(\frac{K_s}{\ln\left(\frac{۲۰+K_s}{۲۰}\right)} + ۲۰\right)} + ۰.۵ \tag{۱۶}$$

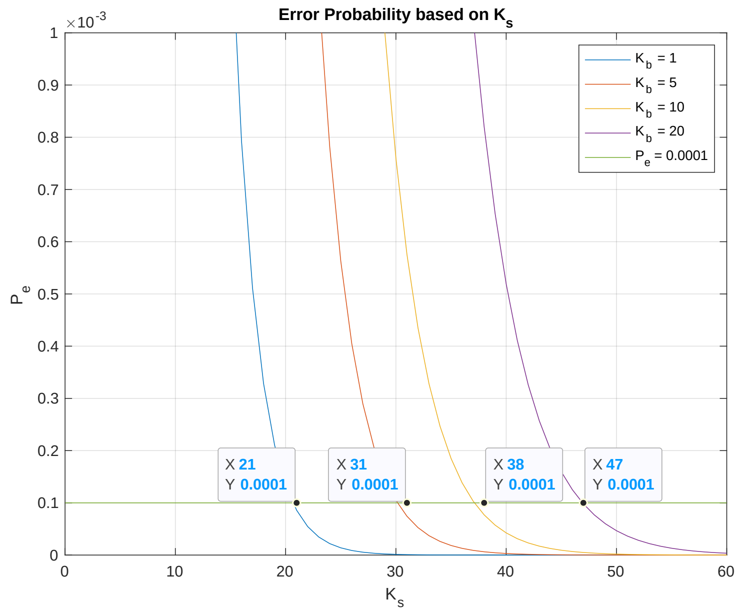
با رسم دو تابع خواهیم داشت:



شکل ۴: احتمال خطا بر اساس K_s

با توجه به شکل فوق، انتخاب $K_s = ۴۷$ احتمال خطایی کمتر از $P_e = ۱۰^{-۴}$ را نتیجه خواهد داد.

در نهایت تابع احتمال خطا به ازای K_s برای هر چهار حالت فوق را رسم کردیم:



شکل ۵: احتمال خطا بر اساس K_s

همانطور که ملاحظه می‌کنید با بیشتر شدن تعداد الکترون‌های پس‌زمینه در هنگام ارسال بیت ۱ بایستی تعداد الکترون‌های سیگنال نیز باید افزایش یابد.

۲ محاسبه‌ی احتمال خطا برای سیگنال‌دهی منچستر

به توجه به راهنمایی صورت مساله، اگر فرض کنیم در نیمه اول Y_1 و در نیمه دوم Y_2 الکترون آزاد شده باشند، می‌توانیم احتمال خطا را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$P_e = p(X=0)p(E|X=0) + p(X=1)p(E|X=1) \tag{۱۷}$$

$$= 0.5 \times \sum_{m=0}^{\infty} p(E|X=0, Y_1=m)P(Y_1=m) + 0.5 \times \sum_{m=0}^{\infty} p(E|X=1, Y_1=m)P(Y_1=m) \tag{۱۸}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} p(Y_2 \leq m|X=0, Y_1=m)\frac{K_0^m e^{-K_0}}{m!} + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} p(Y_2 > m|X=1, Y_1=m)\frac{K_1^m e^{-K_1}}{m!} \tag{۱۹}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{K_1^n e^{-K_1}}{n!}\frac{K_0^m e^{-K_0}}{m!} + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{K_0^n e^{-K_0}}{n!}\frac{K_1^m e^{-K_1}}{m!} \tag{۲۰}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-K_0}K_0{}^m\Gamma(m+1,K_1) + e^{-K_1}K_1{}^m(\Gamma(m+1)-\Gamma(m+1,K_0))}{2(\Gamma(m+1))^2} \tag{۲۱}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-K_b}K_b{}^m\Gamma(m+1,K_b+K_s) + e^{-K_b-K_s}K_b+K_s{}^m(\Gamma(m+1)-\Gamma(m+1,K_b))}{2(\Gamma(m+1))^2} \tag{۲۲}$$

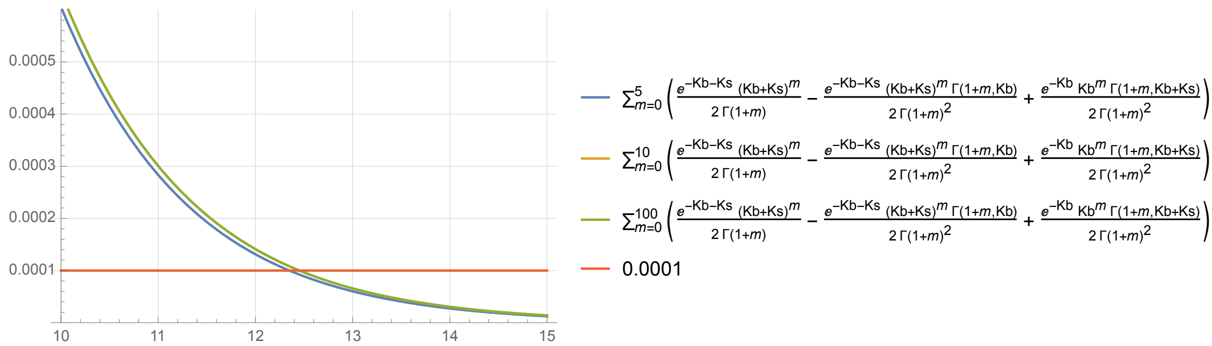
$$= \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-K_b}K_b{}^m\Gamma(m+1,K_b+K_s)}{2(\Gamma(m+1))^2} - \frac{e^{-K_b-K_s}(K_b+K_s)^m\Gamma(m+1,K_b)}{2(\Gamma(m+1))^2}\right) \tag{۲۳}$$

به منظور یافتن تعداد الکترونهای K_s به ازای تعداد الکترونهای $K_b = 1, 5, 10, 20$ از ترسیم تابع فوق و احتمای خطای متناظر استفاده خواهیم کرد:

۱. $\boldsymbol{K_b = 1}$: در این حالت داریم:

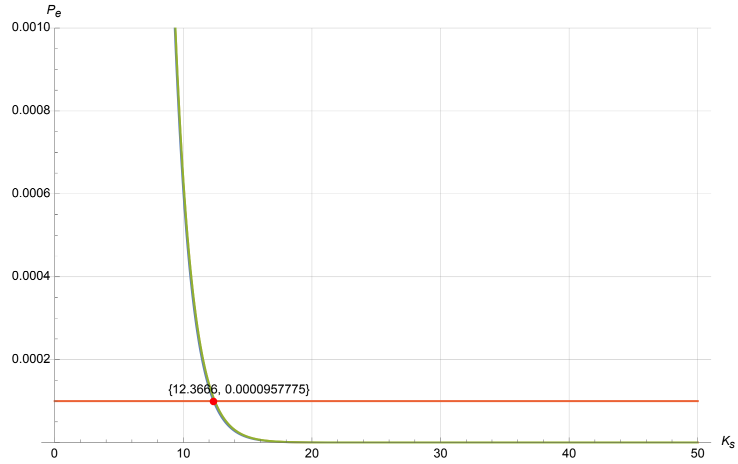
$$P_e = 10^{-4} = \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-1}1^m\Gamma(m+1,1+K_s)}{2(\Gamma(m+1))^2} - \frac{e^{-1-K_s}(1+K_s)^m\Gamma(m+1,1)}{2(\Gamma(m+1))^2}\right) \tag{۲۴}$$

با توجه به اینکه محاسبه‌ی سیگمای فوق در حالت کلی ممکن نیست. بنابراین به ازای مقادیر کران بالایی m یعنی ۵ و ۱۰ و ۱۰۰ شکل تابع را بر حسب K_s رسم می‌کنیم



شکل ۶: احتمال خطا بر اساس K_s

همانطور که ملاحظه می‌کنید شکل تابع به ازای کران بالای ۱۰ و ۱۰۰ روی هم منطبق شده است یعنی در این مثال استفاده از کران بالاتر از ۱۰ عملا تغییر محسوسی در شکل ایجاد نخواهد کرد. پس برای یافتن K_s شکل را دوباره رسم می‌کنیم:



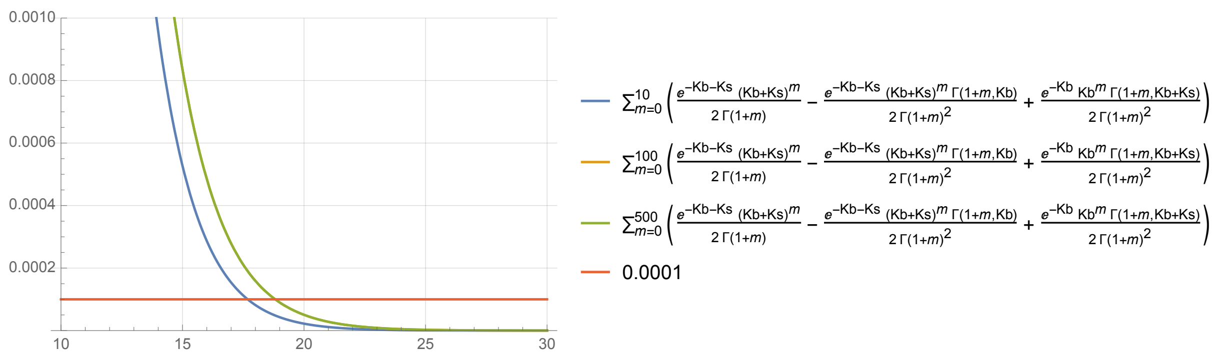
شکل ۷: احتمال خطا بر اساس K_s

با توجه به شکل فوق، انتخاب $K_s = ۱۳$ احتمال خطایی کمتر از $P_e = ۱۰^{-۴}$ را نتیجه خواهد داد.

۲. $\boldsymbol{K_b = ۵}$: در این حالت داریم:

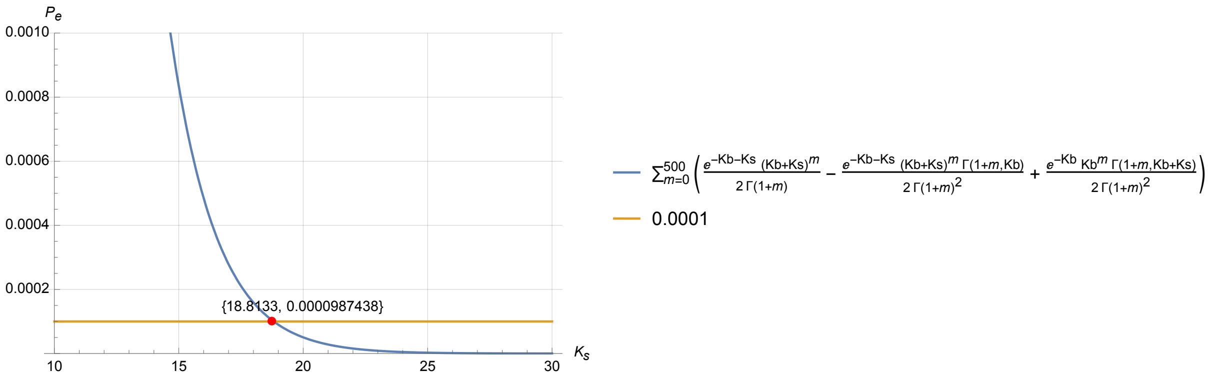
$$P_e = ۱۰^{-۴} = \frac{۱}{۲} + \sum_{m=۰}^{\infty}\left(\frac{e^{-۵}۵^m\Gamma(m+۱,۵+K_s)}{۲(\Gamma(m+۱))^۲} - \frac{e^{-۵-K_s}(۵+K_s)^m\Gamma(m+۱,۵)}{۲(\Gamma(m+۱))^۲}\right) \qquad (۲۵)$$

با توجه به اینکه محاسبه‌ی سیگمای فوق در حالت کلی ممکن نیست. بنابراین به ازای مقادیر کران بالایی m یعنی ۱۰ و ۱۰۰ و ۵۰۰ شکل تابع را بر حسب K_s رسم می‌کنیم



شکل ۸: احتمال خطا بر اساس K_s

همانطور که ملاحظه می‌کنید شکل تابع به ازای کران بالای ۱۰۰ و ۵۰۰ روی هم منطبق شده است یعنی در این مثال استفاده از کران بالاتر از ۱۰۰ عملا تغییر محسوسی در شکل ایجاد نخواهد کرد. پس برای یافتن K_s شکل را دوباره رسم می‌کنیم:



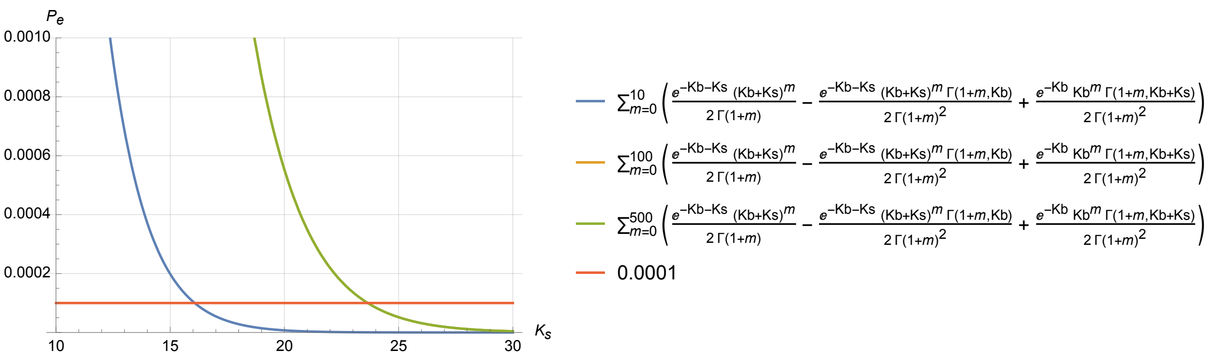
شکل ۹: احتمال خطا بر اساس K_s

با توجه به شکل فوق، انتخاب $K_s = ۱۹$ احتمال خطایی کمتر از $P_e = ۱۰^{-۴}$ را نتیجه خواهد داد.

۳. $\boldsymbol{K_b = ۱۰}$: در این حالت داریم:

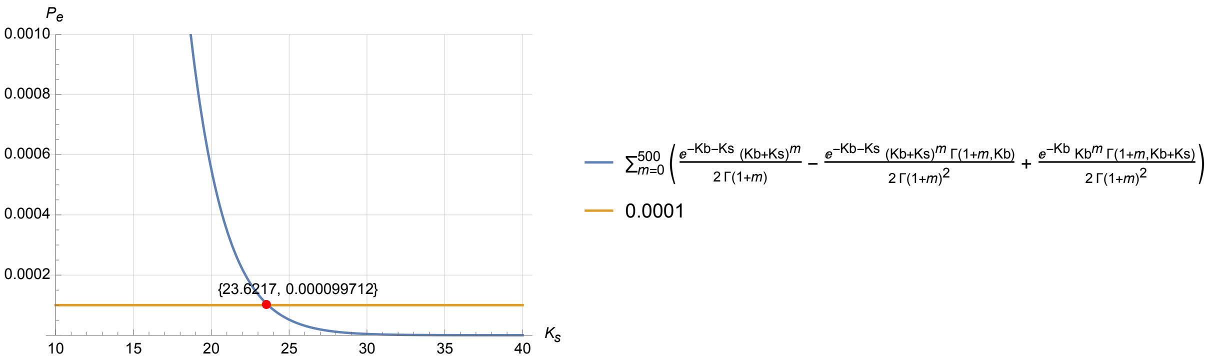
$$P_e = ۱۰^{-۴} = \frac{۱}{۲} + \sum_{m=۰}^{\infty}\left(\frac{e^{-۱۰}۱۰^m\Gamma(m+۱,۱۰+K_s)}{۲(\Gamma(m+۱))^۲} - \frac{e^{-۱۰-K_s}(۱۰+K_s)^m\Gamma(m+۱,۱۰)}{۲(\Gamma(m+۱))^۲}\right) \quad (۲۶)$$

با توجه به اینکه محاسبه‌ی سیگمای فوق در حالت کلی ممکن نیست. بنابراین به ازای مقادیر کران بالایی m یعنی ۱۰ و ۱۰۰ و ۵۰۰ شکل تابع را بر حسب K_s رسم می‌کنیم



شکل ۱۰: احتمال خطا بر اساس K_s

همانطور که ملاحظه می‌کنید شکل تابع به ازای کران بالای ۱۰۰ و ۵۰۰ روی هم منطبق شده است یعنی در این مثال استفاده از کران بالاتر از ۱۰۰ عملا تغییر محسوسی در شکل ایجاد نخواهد کرد. پس برای یافتن K_s شکل را دوباره رسم می‌کنیم:



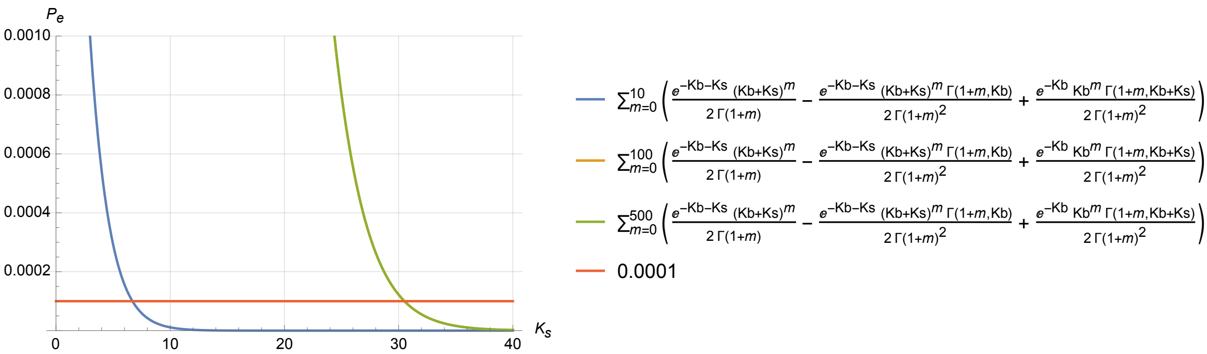
شکل ۱۱: احتمال خطا بر اساس K_s

با توجه به شکل فوق، انتخاب $K_s = ۲۴$ احتمال خطایی کمتر از $P_e = ۱۰^{-۴}$ را نتیجه خواهد داد.

۴. $\boldsymbol{K_b = ۲۰}$: در این حالت داریم:

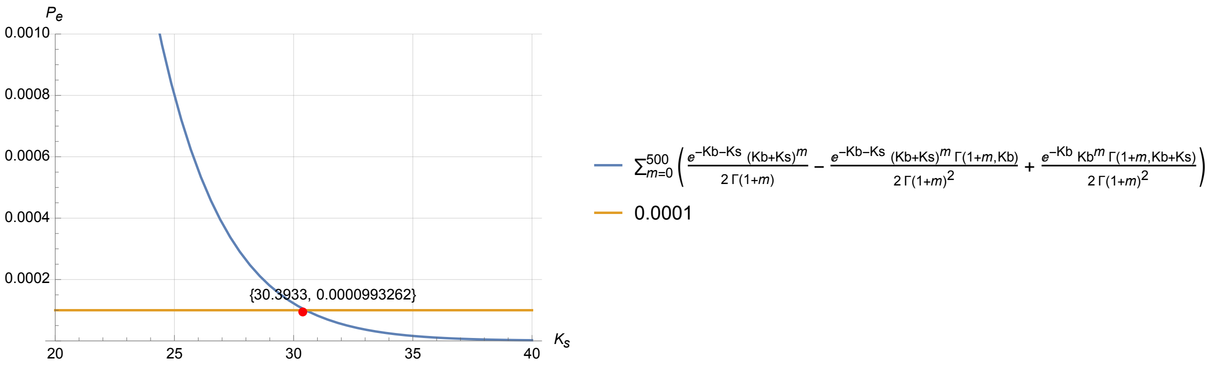
$$P_e = ۱۰^{-۴} = \frac{۱}{۲} + \sum_{m=۰}^{\infty}\left(\frac{e^{-۲۰}۲۰^m\Gamma(m+۱, ۲۰+K_s)}{۲(\Gamma(m+۱))^۲} - \frac{e^{-۲۰-K_s}(۲۰+K_s)^m\Gamma(m+۱, ۲۰)}{۲(\Gamma(m+۱))^۲}\right) \tag{۲۷}$$

با توجه به اینکه محاسبه‌ی سیگمای فوق در حالت کلی ممکن نیست. بنابراین به ازای مقادیر کران بالایی m یعنی ۱۰ و ۱۰۰ و ۵۰۰ شکل تابع را بر حسب K_s رسم می‌کنیم



شکل ۱۲: احتمال خطا بر اساس K_s

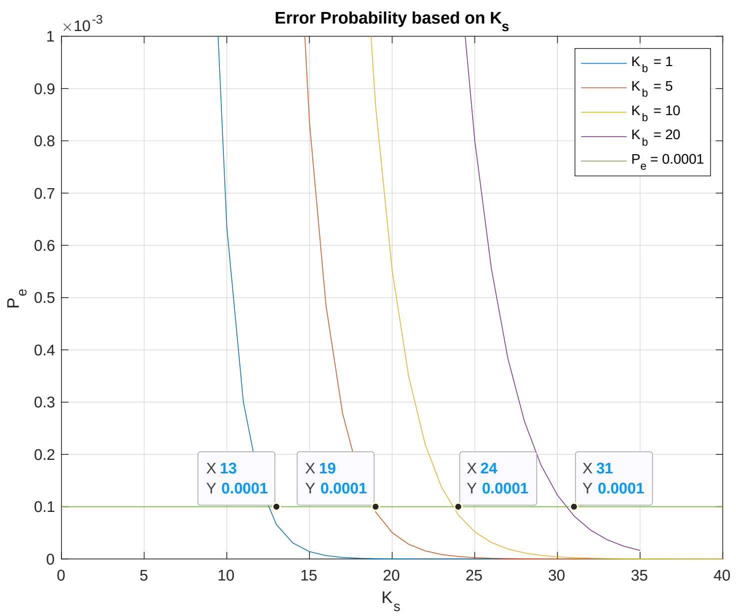
همانطور که ملاحظه می‌کنید شکل تابع به ازای کران بالای ۱۰۰ و ۵۰۰ روی هم منطبق شده است یعنی در این مثال استفاده از کران بالاتر از ۱۰۰ عملا تغییر محسوسی در شکل ایجاد نخواهد کرد. پس برای یافتن K_s شکل را دوباره رسم می‌کنیم:



شکل ۱۳: احتمال خطا بر اساس K_s

با توجه به شکل فوق، انتخاب $K_s = ۳۱$ احتمال خطایی کمتر از $P_e = ۱۰^{-۴}$ را نتیجه خواهد داد.

در نهایت تابع احتمال خطا به ازای K_s برای هر چهار حالت فوق را رسم کردیم:



شکل ۱۴: احتمال خطا بر اساس K_s

همانطور که مشاهده میکنیم تعداد K_s برای رسیدن به خطای $P_e = ۱۰^{-۴}$ تقریبا نصف حالت OOK هستند. یعنی این مدولاسیون از نظر صرف انرژی بسیار کارآمدتر از روش OOK است.