

LAPORAN TUGAS INTEGER
KOMPUTASI NUMERIK
KELAS A



Dosen Pengampu :

Mula'ab, S.Si., M.Kom.

Disusun Oleh:

Zainur Ramadhani (170411100094)

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA
FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS TRUNOJOYOMADUR

INTEGRAL

1. Pengertian Integral

Integral adalah kebalikan dari turunan (diferensial), secara matematis dapat dirumuskan :

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

dengan : $f'(x)$ = turunan $f(x)$

C = konstanta

1.1 Integral Tak Tentu

Integral tak tentu adalah integral yang tidak ada batasnya .

- Contoh : $\int 9x^2 dx$

→ Rumus – rumus integral tak tentu dari fungsi aljabar

1. $\int dx = x + C$
2. $\int a dx = ax + C$
3. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
4. $\int ax^n dx = \frac{1}{n+1} ax^{n+1} + C$
5. $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
6. $\int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
7. $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$

→ Rumus – rumus integral tak tentu fungsi trigonometri :

1. $\int \cos x dx = \sin x + C$
2. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
3. $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$
4. $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
5. $\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
6. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
7. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + C$

$$8. \quad \tan x \cdot \sec x \, dx = \sec x + C$$

$$9. \quad \cot x \cdot \operatorname{cosec} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

$$10. \quad \sin^n x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x + C$$

- Contoh Soal :

$$1. \quad \int (6x + 6) \, dx =$$

$$\text{Jawab :} \quad \int (6x + 6) \, dx = \int 6x \, dx + \int 6 \, dx$$

$$= \frac{6}{1+1} x^{1+1} + 6x + C$$

$$= 3x^2 + 6x + C$$

$$2. \quad f(x) = \sin 2x - 3, \quad \int f(x) \, dx = ..$$

$$\text{Jawab :} \quad \int f(x) \, dx = \int (\sin 2x - 3) \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x - 3x + C$$

1.2 Integral Tertentu

Integral tertentu adalah integral yang ada batasnya

$$\text{- Contoh :} \quad \int_1^4 2x^2 \, dx$$

Nilai 1 sebagai batas bawah

Nilai 4 sebagai batas atas

→ Rumus integral tertentu :

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

→ Sifat – sifat integral tertentu

$$1. \quad \int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

$$2. \quad \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx$$

- Contoh Soal :

$$1. \quad \int_{-1}^1 x^2 - 6 \, dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - 6x^2 \right]_{-1}^1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 \Big|_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{4} 1^4 - \frac{1}{4} (-1)^4 - 2 1^3 - 2 (-1)^3 \\
&= 0 - 4 \\
&= -4
\end{aligned}$$

1.3 Integral Parsial

Integral parsial adalah cara menyelesaikan integral yang memuat perkalian fungsi, tetapi tidak dapat diselesaikan secara substitusi biasa.

→ Rumus Integral Parsial :

$$u \, dv = uv - \int v \, du$$

- Contoh Soal :

$$\int (x + 3) \cos(2x - \pi) \, dx = \dots\dots$$

$$u = (x + 3)$$

$$du = dx$$

$$dv = \cos(2x - \pi) \, dx$$

$$v = \int \cos(2x - \pi) \, dx$$

$$v = \frac{1}{2} \sin(2x - \pi)$$

$$u \, dv$$

$$= uv - \int v \, du$$

$$= (x + 3) \cdot \frac{1}{2} \sin(2x - \pi) - \int \frac{1}{2} \sin(2x - \pi) \, dx$$

$$= (x + 3) \cdot \frac{1}{2} \sin(2x - \pi) - \frac{1}{2} \int \sin(2x - \pi) \, dx + C$$

$$= (x + 3) \cdot \frac{1}{2} \sin(2x - \pi) + 4 \cos(2x - \pi) + C$$

Sumber : Fahamsyah, Sandy. 2009. *Rumus Pintar Matematika SMA*. Jakarta : Wahyumedia

2. Aplikasi Integral

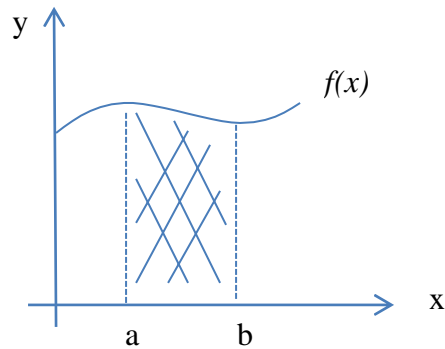
2.1 Aplikasi Integral Untuk Menghitung Luas Daerah

2.1.1 Luas Daerah yang Dibatasi oleh Kurva $y = f(x)$ dengan Sumbu $-x$

Langkah –langkah untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dengan sumbu x , adalah sebagai berikut :

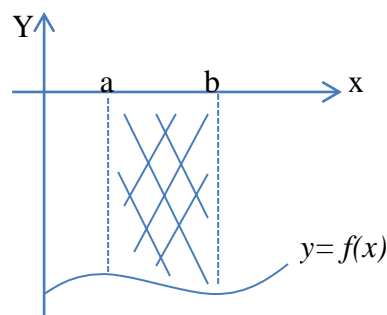
- Buatlah sketsa daerah yang akan dihitung luasnya
- Jika $f(x) \geq 0$ untuk $x \in [a, b]$, gunakan rumus luas $L =$

$$\int_a^b f(x) dx$$



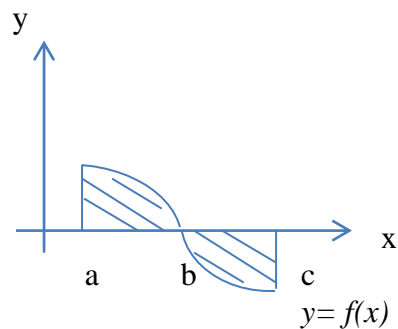
- Jika $f(x) \leq 0$ untuk $x \in [a, b]$, gunakan rumus luas $L =$

$$-\int_a^b f(x) dx$$



- Jika $f(x) > 0$ untuk $f(x) < 0$, gunakan rumus luas

$$L = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$$

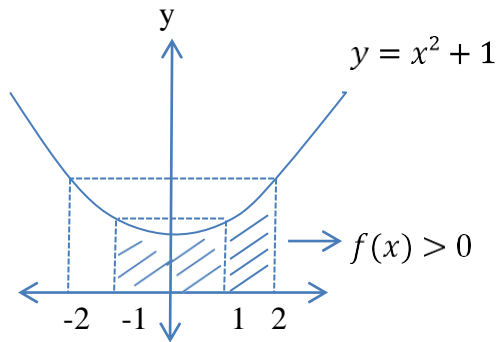


- Contoh Soal :

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 1$, garis $x = -1, x = 2$ dan sumbu x .

Jawab :

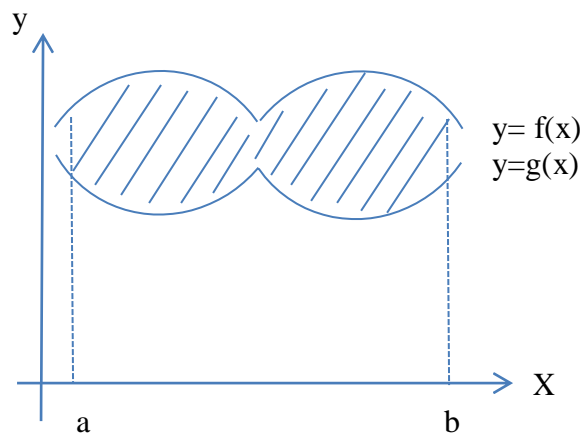
Gambar yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 1$, garis $x = -1$, $x = 2$ dan sumbu x dinyatakan oleh daerah yang diarsir berikut .



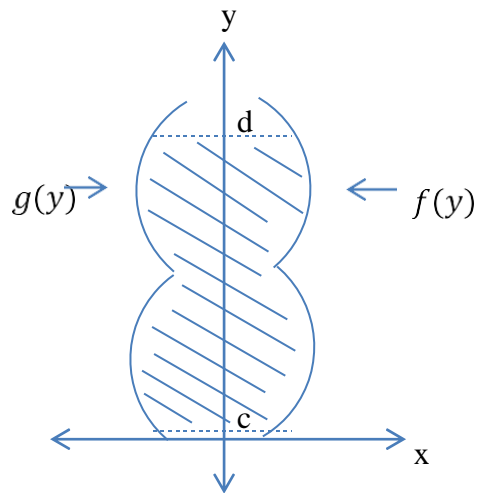
$$\begin{aligned}
 L &= \int_{-1}^2 x^2 + 1 \, dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^2 \\
 &= \frac{1}{3} 2^3 + 2 - \left(\frac{1}{3} (-1)^3 + (-1) \right) \\
 &= \frac{8}{3} + 2 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) \\
 &= \frac{18}{3} \\
 &= 6 \text{ satuan luas}
 \end{aligned}$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah 6 satuan luas .

2.1.2 Luas Daerah Yang Dibatasi Oleh Dua Kurva



$$L A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx ; a \leq x \leq b$$



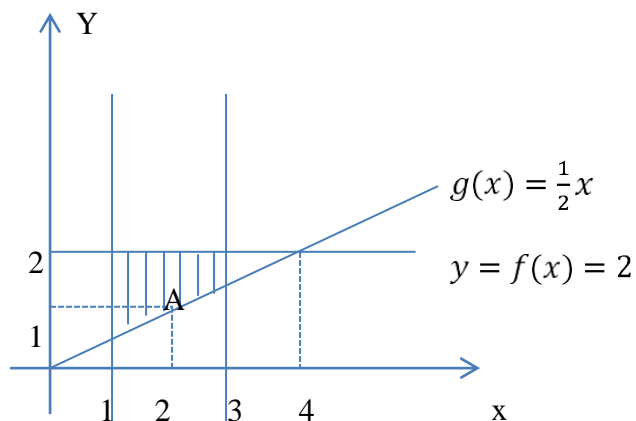
$$L = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy ; c \leq y \leq d \text{ dan } f(y) > g(y)$$

- Contoh Soal :

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2$, garis $x = 1$, dan $x = 3$.

Jawab :

Gambar kurva $y = \frac{1}{2}x$ yang dibatasi garis $y = 2$, $x = 1$, dan $x = 3$ disajikan seperti berikut .



$$\begin{aligned} L(A) &= \int_1^3 [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_1^3 [2 - \frac{1}{2}x] dx \\ &= [2x - \frac{1}{4}x^2]_1^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(3) - \frac{1}{4}(3)^2 - 2(1) - \frac{1}{4}(1)^2 \\
&= 6 - \frac{9}{4} - 2 - \frac{1}{4} \\
&= 6 - 2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \\
&= 6 - 2 - 2 \\
&= 2 \text{ satuan luas}
\end{aligned}$$

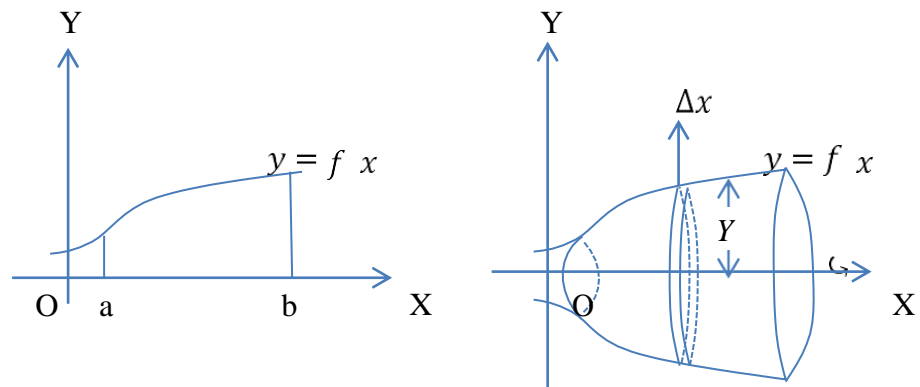
Jadi, luas daerah yang diarsir adalah 2 satuan luas .

Sumber : Indriani, Gina. 2006. *Think Smart Matematika*. Jakarta : Grafindo Media Pratama

2.2 Aplikasi Integral Untuk Menghitung Volume Benda Putar

2.2.1 Volume Benda Putar Mengelilingi Sumbu X

Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu x dan garis-garis $x = a$ dan $x = b$ diputar 360° mengelilingi sumbu x adalah sebagai berikut :

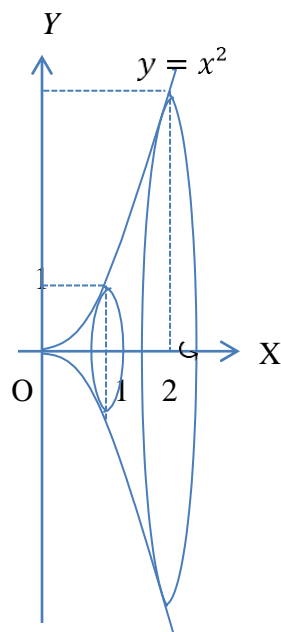


$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx$$

- Contoh Soal :

Daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu X, dan garis $x = 1$ dan $x = 2$ diputar sejauh 360° terhadap sumbu X .
Tentukan volume benda putar yang terbentuk .

Jawab :

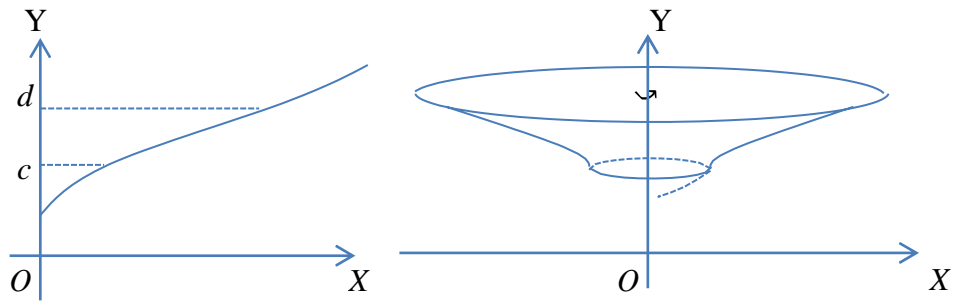


$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b y^2 dx \\
 &= \pi \int_1^2 (x^2)^2 dx \\
 &= \pi \int_1^2 x^4 dx \\
 &= \pi \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_1^2 \\
 &= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5} \right) \\
 &= \frac{31\pi}{5} \text{ satuan volume}
 \end{aligned}$$

Jadi, volume benda putarnya adalah $\frac{31\pi}{5}$ satuan volume.

2.2.2 Volume Benda Putar Mengelilingi Sumbu Y

Daerah yang dibatasi oleh kurva $x = f(y)$, sumbu x dan garis-garis $y = c$ dan $y = d$ diputar 360° mengelilingi sumbu y adalah sebagai berikut :

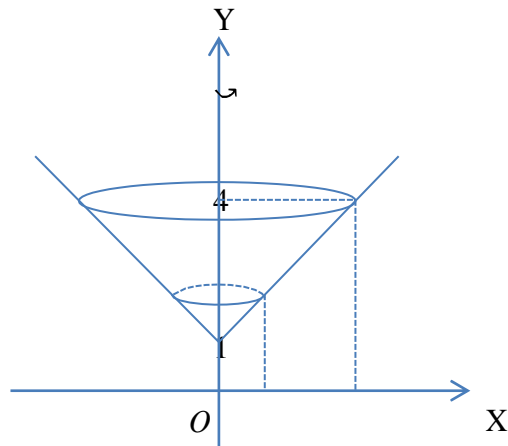


$$V = \pi \int_c^d f(y)^2 dy = \pi \int_a^b x^2 dy$$

- Contoh Soal :

Daerah yang dibatasi kurva $y = x + 1$, sumbu Y, dan garis $y = 2$ dan $y = 4$ diputar sejauh 360° terhadap sumbu Y. Tentukan volume benda putar yang terbentuk.

Jawab :

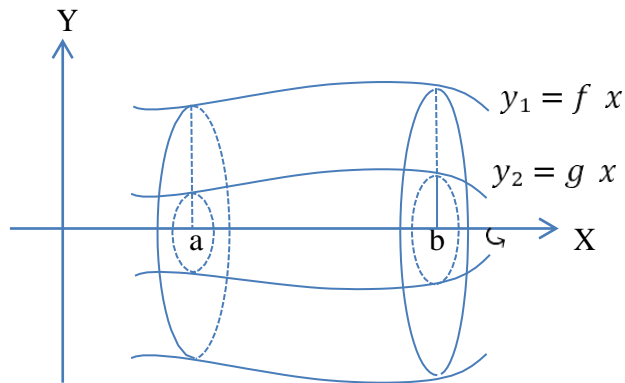


$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^4 x^2 dy \\ &= \pi \int_2^4 (y - 1)^2 dy \\ &= \pi \int_2^4 (y^2 - 2y + 1) dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}y^3 - y^2 + y \right]_2^4 \\ &= \pi \left(\frac{64}{3} - 16 + 4 - \left(\frac{8}{3} - 4 + 2 \right) \right) \\ &= \frac{26\pi}{3} \text{ satuan volume} \end{aligned}$$

Jadi, volume benda putarnya adalah $\frac{26\pi}{3}$ satuan volume.

2.2.3 Volume Benda Putar Antara Dua Kurva Mengelilingi Sumbu X

Daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = g(x)$, garis $x = a$ dan $x = b$ diputar 360° mengelilingi sumbu x dengan $y_1 = f(x) \geq y_2 = g(x)$ pada interval $[a, b]$ adalah sebagai berikut :



- Jika daerah tertutup yang dibatasi oleh $x = a$, kurva $y_1 = f(x)$, dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu X , maka volumenya adalah

$$V_1 = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

- Jika daerah tertutup yang dibatasi oleh $x = a$, kurva $y = g(x)$, dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu X , maka volumenya adalah

$$V_2 = \pi \int_a^b g(x)^2 dx$$

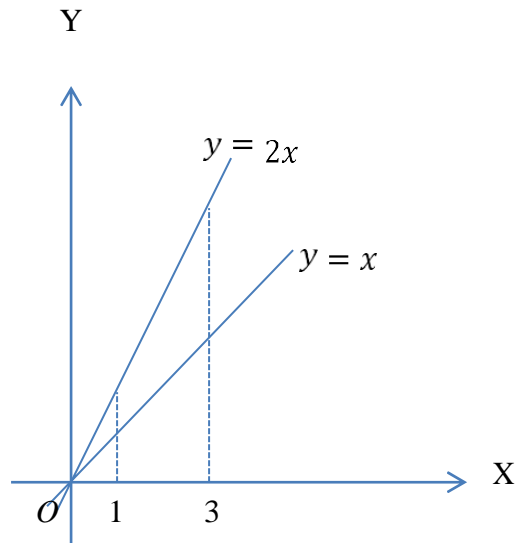
- Jika daerah tertutup yang dibatasi oleh $x = a$, kurva $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu X , maka volumenya adalah

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 - g(x)^2 dx$$

- Contoh Soal :

Hitunglah volume benda putar yang terjadi, jika daerah yang dibatasi oleh garis $y = 2x$, $y = x$, $x = 1$ dan $x = 3$ diputar mengelilingi sumbu X .

Jawab :



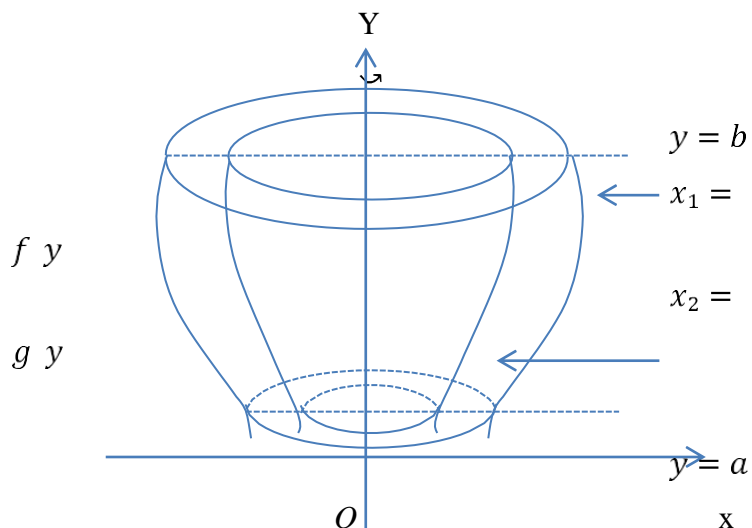
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b (f^2 x - g^2 x) dx \\
 &= \pi \int_1^3 (2x^2 - x^2) dx \\
 &= \pi \int_1^3 3x^2 dx \\
 &= \pi x^3 \Big|_1^3 \\
 &= 26\pi \text{ satuan volume}
 \end{aligned}$$

Jadi, volume benda putarnya adalah 26π satuan volume.

Sumber : Kuntarti,dkk.2006.*Matematika SMA dan MA*.Jakarta : ESIS

2.2.4 Volume Benda Putar Antara Dua Kurva Mengelilingi Sumbu Y

Daerah yang dibatasi oleh kurva $x_1 = f(y)$ dan $x_2 = g(y)$, garis $y = a$ dan $y = b$ diputar 360° mengelilingi sumbu y dengan $x_1 = f(y) \geq x_2 = g(y)$ pada interval $[a, b]$ adalah sebagai berikut :



$$V = \pi \int_a^b (f^2(y) - g^2(y)) dy$$

$$= \pi \int_a^b (x_1^2 - x_2^2) dy$$

- Contoh Soal :

Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $y = 3x$, diputar sejauh 360° mengelilingi sumbu Y . Tentukan volume yang terbentuk .

Jawab :

Ordinat titik potong kurva $y = x^2$ dan $y = 3x$

$$f(y) = \text{kurva } y = x^2 \rightarrow x_1 = \sqrt{y} = y^{1/2}$$

$$g(y) = \text{garis } y = 3x \rightarrow x_2 = \frac{1}{3}y^{1/2}$$

Substitusi $x = \frac{1}{3}y$ ke $y = x^2$

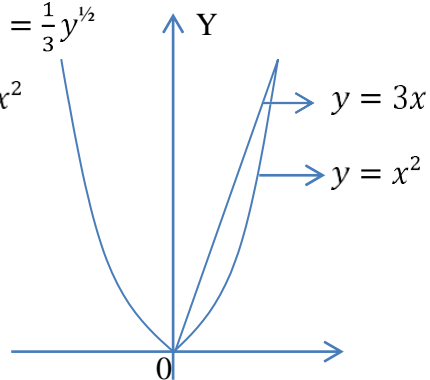
$$y = \left(\frac{1}{3}y\right)^2$$

$$= \frac{1}{9}y^2$$

$$y^2 - 9y = 0$$

$$y(y - 9) = 0$$

$$y = 0 \text{ atau } y = 9$$



Jika daerah yang diarsir pada gambar di atas diputar sejauh 360° mengelilingi sumbu Y

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b (x_1^2 - x_2^2) dy \\
 &= \pi \int_0^9 \left\{ \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \frac{1}{3}y^2 \right\} dy \\
 &= \pi \int_0^9 y - \frac{1}{9}y^2 dy \\
 &= \pi \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{27}y^3 \right]_0^9 \\
 &= \pi \left[\frac{1}{2}9^2 - \frac{1}{27}9^3 \right] \\
 &= \pi \left[\frac{81}{2} - 27 \right] \\
 &= 13\frac{1}{2}\pi \text{ satuan volume}
 \end{aligned}$$

Jadi, volume benda putarnya adalah $13\frac{1}{2}\pi$ satuan volume.