Fonction Limite sur les Suites de Fonctions

Convergence simple, uniforme et dans L^p

1. Contexte :
Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. Une suite de fonctions (f_n) définies sur E a pour fonction limite f si

2. Types de convergence et topologies associées :

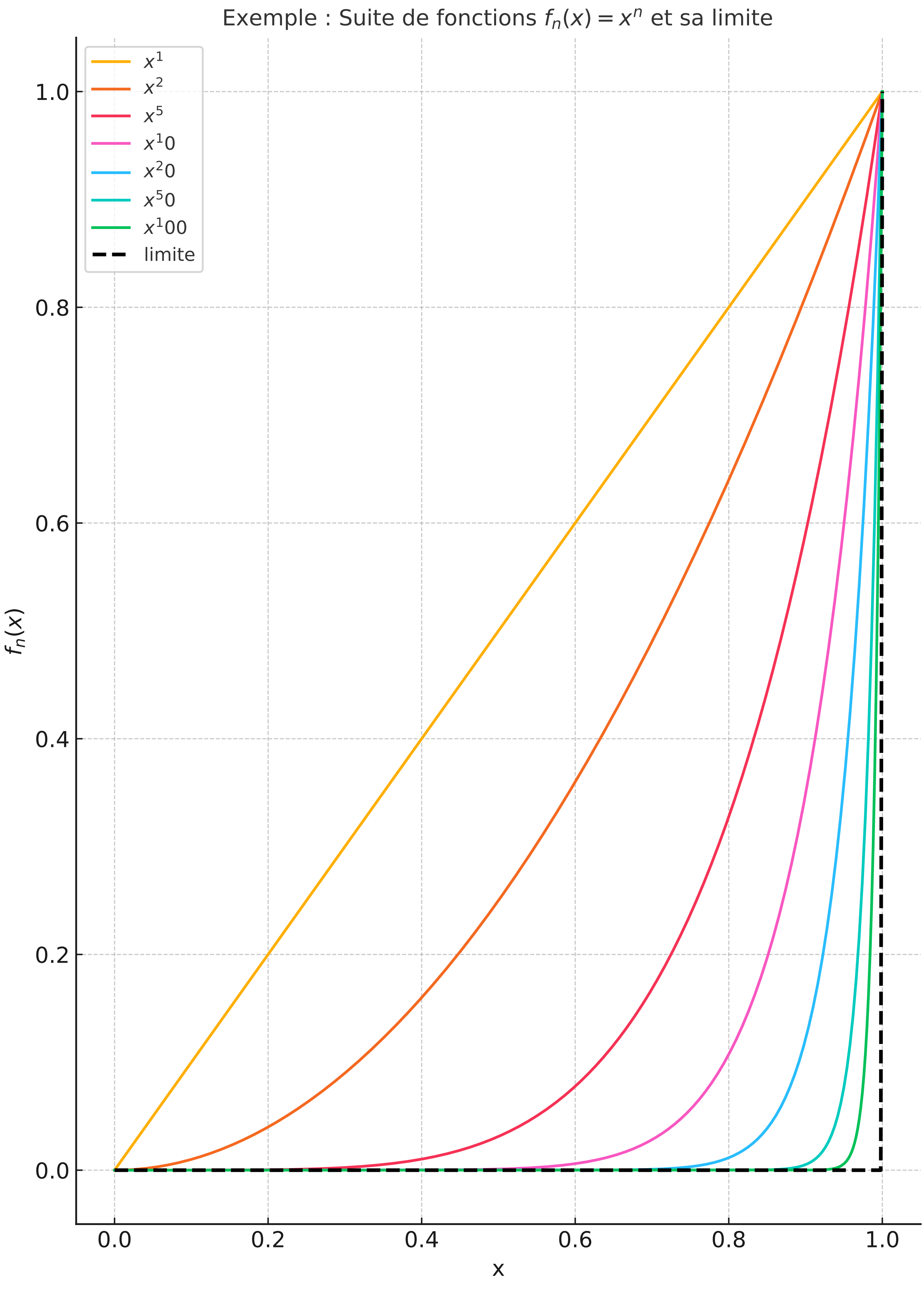
- Convergence simple :
  - Définition : $\forall x \in E,\ f_n(x) \to f(x)$
  - Topologie : topologie produit sur $\mathbb{R}^E$
  - Propriétés :
    - Ne préserve pas la continuité
    - La fonction limite n’est pas continue

- Convergence uniforme :
  - Définition : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ \forall x \in E,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
  - Topologie : norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $C(E)$
  - Espace : $(C(E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach
  - Propriétés :
    - La fonction limite est continue
    - La continuité des f_n est transmise à la limite

- Convergence dans L^p :
  - Définition : $\|f_n - f\|_p \to 0$ avec $\|f\|_p = (\int|f|^p)^{1/p}$
  - Espace : $L^p([a,b])$, espace de Banach
  - Propriétés :
    - Pas nécessairement convergence simple
    - La continuité n’est pas préservée

Résumé des propriétés topologiques

Type de convergenc	Topologie	Espace	Fonction limite co[illegible]	Préserve la continuité ?
Simple	Produit	$\mathbb{R}^E$	[illegible]	[illegible]
Uniforme	Norme $\|\cdot\|_\infty$	$\mathcal{C}(E)$	[illegible]	[illegible]
L^p	Norme L^p	$L^p([a,b])$	[illegible]	[illegible]


Exemple : Suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ et sa limite
x^1
x^2
x^5
x^10
x^20
x^50
x^100
limite
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
$f_n(x)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x