Dénombrements pratiques

Exercice 1 - Groupe d'étudiants - *L1/Math Sup/Prépa HEC* - ⋆

Ce genre d'exercices se traite très facilement en utilisant un tableau à double entrée dans lequel on inscrit les informations à notre disposition :

	Astronomie	Informatique	Chimie	Total
Anglais	8	3		
Allemand			6	16
Total	12		15	

On complète alors le tableau de proche en proche de sorte d'obtenir les bons totaux sur chaque ligne et chaque colonne. On obtient donc

	Astronomie	Informatique	Chimie	Total
Anglais	8	3	9	20
Allemand	4	6	6	16
Total	12	9	15	36

Exercice 2 - Dans une entreprise... - *Prépa HEC* - ⋆

Notons E, H, M et S les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés mariés, des employés syndiqués. L'énoncé donne :

$$\mathrm{card}(E)=800,\ \mathrm{card}(H)=300,\ \mathrm{card}(S)=352,\ \mathrm{card}(M)=424,$$

$$\mathrm{card}(H\cap S)=188,\ \mathrm{card}(H\cap M)=166,\ \mathrm{card}(S\cap M)=208,\mathrm{card}(H\cap M\cap S)=144.$$

On cherche $\mathrm{card}(\bar H\cap\bar M\cap\bar S)$, où $\bar A$ désigne le complémentaire de A dans E. D'après les lois de Morgan :

$$\mathrm{card}(\bar H\cap\bar M\cap\bar S)=\mathrm{card}(\overline{H\cup M\cup S}).$$

On applique la formule du crible de Poincaré :

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(H\cup M\cup S) &= \mathrm{card}(H)+\mathrm{card}(M)+\mathrm{card}(S)-\mathrm{card}(H\cap M)-\mathrm{card}(H\cap S)-\mathrm{card}(M\cap S)\\ &\quad +\mathrm{card}(H\cap M\cap S).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathrm{card}(H\cup M\cup S)=658,$$

et

$$\mathrm{card}(\bar H\cap\bar M\cap\bar S)=800-658=142.$$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées.

Exercice 3 - Nombres et chiffres - *Prépa HEC* - ⋆

1. Pour écrire un élément de A, on a
   - 8 choix pour le premier chiffre (tous sauf 0 et 1).
   - 9 choix pour les 6 autres chiffres (tous sauf 1).

On a donc $\text{card}(A) = 8 \times 9^6$.

2. Pour écrire un élément de A_1, on a
   - 8 choix pour le premier chiffre (tous sauf 0 et 1)
   - Notant E l'ensemble des chiffres différents de 0 et du premier chiffre choisi, le reste de l'écriture de cet élément est un arrangement de 6 éléments de E.

   Puisque E comporte 8 élément, on a donc :
$$\text{card}(A_1) = 8 \times A_8^6 = 8\frac{8!}{2!}.$$
3. Un élément de A est pair si son chiffre des unités est 0,2,4,6 ou 8. Il y a 5 façons de choisir ce chiffre des unités, 8 façons de choisir le premier chiffre, et 9^5 autres de choisir les autres chiffres. On a donc :
$$\text{card}(A_2) = 5 \times 8 \times 9^5.$$
4. Remarquons qu'un élément de A_3 ne comporte pas le chiffre zéro. Il y a $\binom{8}{7}$ façons de choisir 7 chiffres tous distincts parmi $\{2, 3, \dots, 9\}$, et une seule façon, ces 7 chiffres choisis, de les écrire en ordre croissant. On a donc
$$\text{card}(A_3) = \binom{8}{7}.$$

Exercice 4 - Podium ! - *L1/Math Sup* **-** $\star$

La première question correspond à la recherche du nombre d'arrangements de 3 éléments dans un ensemble à 20 éléments (l'ordre compte). Le nombre de podiums possibles est donc égal à $A_{20}^3 = 6840$. Pour la seconde question, l'ordre n'est plus important, et on cherche le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 20, c'est-à-dire $\binom{20}{3} = 1140$.

Exercice 5 - Tirage dans un jeu de cartes - *Prépa HEC* **-** $\star$

1. Il n'y a pas d'ordre et pas de répétition sur les cartes : un tirage est donc une combinaison de 5 cartes parmi 32. Il y a : $\binom{32}{5} = 201376$ tirages différents.
2. Pour obtenir 5 carreaux, il faut choisir 5 cartes parmi 8 : il y a $\binom{8}{5}$ tels tirages. De même pour obtenir 5 piques. Comme les deux cas sont disjoints, il y a $2 \times \binom{8}{5} = 112$ tels tirages différents.
3. Il y a $\binom{8}{2}$ façons de choisir 2 carreaux parmi 8 puis, pour chacune de ces façons, il y a $\binom{3}{8}$ façons de choisir 3 piques. Le nombre de tirages recherché est donc : $\binom{8}{2} \times \binom{8}{3} = 1568$.
4. On compte le complémentaire, c'est-à-dire les tirages sans rois : il faut alors choisir 5 cartes parmi 28, il y a $\binom{28}{4}$ tels tirages. Le nombre de tirages recherché est donc : $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103096$.
5. On a déjà compté les tirages sans roi. Pour les tirages comprenant un roi, il y a 4 façons de choisir le roi, puis, pour chacune de ces façons, $\binom{28}{4}$ façons de choisir les autres cartes. On en déduit qu'il y a $\binom{28}{5} + 4\binom{28}{4} = 180180$ tels tirages.
6. On sépare les tirages contenant le roi de pique et ceux ne contenant pas le roi de pique.
   - si le tirage ne contient pas le roi de pique, il y a $\binom{3}{2}$ choix différents de 2 rois parmi 3, puis $\binom{7}{3}$ choix de 3 piques parmi 7 (tous sauf le roi de pique).

– si le tirage contient le roi de pique, il reste 3 choix pour le roi différent du roi de pique, puis $\binom{7}{2}$ choix pour les trois autres piques. Cela faisant, on n'a tiré que 4 cartes. Il reste une carte à choisir qui n'est ni un roi, ni un pique, et donc $32-(4+7)=21$ choix.

Finalement, le nombre de tirages possibles est :

$$3\times\binom{7}{2}\times 21+\binom{3}{2}\times\binom{7}{3}=1428.$$

Exercice 6 - Ranger des livres - *Prépa HEC* - $\star$

1. Il y a 3 ! façons de choisir l'ordre des matières. Une telle façon choisie, il y a 4 ! façons de ranger les livres de mathématiques, 6 ! façons de ranger les livres de physique, et 3 ! façons de ranger les livres de chimie. Le nombre de rangements possible est donc : 3!4!6!3!.
2. Il peut y avoir 0,1,...,9 livres placés avant les livres de mathématiques. Il y a donc 10 choix du nombre de livres placés avant le livre de mathématiques. Ce choix fait, il y a 4 ! façons d'ordonner les livres de mathématiques, et 9 ! façons d'ordonner les autres : il y a donc en tout $10\times 4!9!$ rangements différents.

Exercice 7 - Anagrammes - *L1/Math Sup/Prépa Hec* - $\star$

Un anagramme correspond à une permutation des lettres d'un poids. Mais si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot ! On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombres de permutations entre lettres identiques. On trouve donc :

– MATHS : 5 !
– RIRE : 4 !/2 !
– ANANAS : 6 !/(2 !3 !)

Exercice 8 - Des tours sur un échiquier - *L1/Math Sup/Prépa Hec* - $\star$

Les p tours doivent être sur des lignes différentes. On commence par choisir les p lignes où sont les tours. Il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles. Une fois ces lignes choisies, on choisit les colonnes où sont les tours. Pour la tour située sur la première ligne, on a n choix, pour la tour située sur la deuxième ligne, on a $n-1$ choix, et ainsi de suite jusqu'à la p-ième ligne où on a $n-p+1$ choix. On obtient $n(n-1)\dots(n-p+1)=A_n^p$ choix. Finalement, le nombre total de façons différentes dont l'on peut placer les tours sans qu'elles puissent se prendre est égal à $\binom{n}{p}\times A_n^p$.

Exercice 9 - Le problème des anniversaires - *L1/Math Sup* - $\star\star$

On va chercher plutôt la probabilité que deux personnes n'ont pas la même date d'anniversaire et, pour simplifier, on va oublier que certaines années comportent un 29 février. Formalisons un peu le problème. Pour que deux personnes n'aient pas la même date d'anniversaire, on doit fabriquer une injection de $\{1,\dots,30\}$ dans $\{1,\dots,365\}$. Il y a A_{365}^{30} injections sur un total de 365^{30} applications. La probabilité recherchée est donc égale à

$$1-\frac{A_{365}^{30}}{365^{30}}\simeq 0,293.$$

Refusez le pari !

Exercice 10 - Grilles de Fleissner - *L1/Math Sup* - $\star\star$

1. On a 36=4*9 choix pour placer le premier trou. On ne peut ensuite plus choisir ni ce carré, ni les 3 carrés obtenus à partir de celui-ci par rotation. Il reste donc 32=4*8 choix pour placer le second trou. On a ensuite 4*7 choix pour placer le troisième trou, et ainsi de suite... jusque 4 choix pour placer le 9ème trou. Mais attention ! Ce faisant, on compte certaines grilles deux fois. En effet, on obtient la même grille si on échange le premier trou et le deuxième trou.... Il faut diviser donc le total obtenu par le nombre de permutations possibles entre les 9 trous, soit 9 ! Finalement, le nombre de grilles possibles est
$$\frac{4\times 9\times 4\times 8\times 4\times 7\times\cdots\times 4\times 1}{9!}=4^9.$$
2. Si on veut construire une grille de Fleissner, il faut pouvoir réaliser $n^2/4$ trous (pour qu'avec les 4 positions, on puisse obtenir n^2 trous). Ainsi, n doit être pair (et dans ce cas, n^2 est bien un multiple de 4). Ensuite, on procède comme dans le cas précédent : on a $n^2=4\times\frac{n^2}{4}$ choix pour le premier carré, $n^2-4=4\times\left(\frac{n^2}{4}-1\right)$ choix pour le deuxième carré,... En n'oubliant pas de diviser par la factorielle de $\frac{n^2}{4}$, on obtient que le nombre de grilles est $4^{n^2/4}$.

Dénombrements plus théoriques

Exercice 11 - Parties de cardinal pair - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On commence par remarquer que, si on a prouvé que le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble à n élément est 2^{n-1}, alors le nombre de parties du même ensemble qui sont de cardinal impair vaut également 2^{n-1}. En effet, le nombre total de parties, qui vaut 2^n, est la somme du nombre de parties de cardinal pair et du nombre de parties de cardinal impair.
Démontrons maintenant le résultat. On procède par récurrence sur n. Si $n=1$, la seule partie de E de cardinal pair est $\varnothing$. On a bien $1=2^0$. Supposons maintenant le résultat démontré au rang n, et prouvons-le au rang $n+1$. Soit donc E de cardinal $n+1$, et écrivons $E=\{a\}\cup F$ où F est de cardinal n. Alors une partie de E de cardinal pair

- ou bien contient a, et on doit alors la compléter avec une partie de cardinal impair de F. Il y a 2^{n-1} telles parties.
- ou bien ne contient pas a, et c'est également une partie de cardinal pair de F. Il y a là aussi exactement 2^{n-1} telles parties.

Finalement, on trouve que le nombre de parties de E de cardinal pair vaut $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n=2^{(n+1)-1}$. L'hypothèse de récurrence est donc prouvée au rang $n+1$.

Exercice 12 - Partition d'un ensemble - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Pour fabriquer une telle partition, on peut partir d'une liste ordonnée des np éléments, et les grouper ensuite p par p. Il y a $(np)!$ façons d'écrire ces listes ordonnées, mais plusieurs listes peuvent donner la même partition. D'abord, sur chaque groupe de p éléments qu'on a choisi, on peut opérer une permutation qui ne changera par la partition obtenue. Pour chaque groupe, il y a $p!$ telles permutations, et comme il y a n groupe de p éléments, on obtient finalement $(p!)^n$ telles permutations. Ensuite, on peut également permuter tous ces groupes les uns avec les autres. Il y a $n!$ telles permutations de ces groupes. Finalement, on trouve que le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties de cardinal p est $\dfrac{(np)!}{(p!)^n n!}$.

Exercice 13 - Dérangement et problème des rencontres - *Math Sup/L1* - ⋆⋆

1. Il n'y a qu'une seule permutation de E qui est l'identité. Ce n'est pas un dérangement, $D_1 = 0$.
2. Des deux permutations de E, seule celle qui inverse les deux éléments est un dérangement : $D_2 = 1$.
3. Il y a $\binom{n}{k}$ choix de k éléments invariants parmi n. Une fois ces choix fixés, la permutation est un dérangement sur les $n-k$ autres éléments. Il y a donc $\binom{n}{k}D_{n-k}$ telles permutations. On adopte pour que cette formule soit aussi vraie si $k=n$ la convention $D_0 = 1$. On sépare ensuite les permutations de E en fonction de leur nombre de points invariants. Comme les ensembles que l'on obtient sont disjoints, et qu'il y a en tout $n!$ permutations de E, on obtient :
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}.$$
Pour obtenir la formule demandée, il faut ensuite faire le changement d'indices $l = n-k$, et utiliser la propriété des coefficients binômiaux : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
4. On applique la relation pour $n = 3$. On obtient :
$$3! = D_0 + 3D_1 + 3D_2 + D_3 \implies D_3 = 2.$$
De même, en appliquant la relation pour $n = 4$, on trouve $D_4 = 9$, et pour $n = 5$, $D_5 = 44$.
5. (a) Une telle association correspond à une permutation de $\{1,\dots,5\}$. Il y a $5! = 120$ telles permutations.
   (b) Si aucun couple légitime n'est reconstitué, c'est que la permutation précédente est un dérangement. Il y a $D_5 = 44$ telles associations, et la probabilité recherchée est $44/120 = 11/30$.
   (c) Si un seul couple légitime est reconstitué, il y a 5 choix pour le couple. Pour le reste, il faut un dérangement : il y a donc $5 \times D_4 = 45$ telles possibilités.
   (d) On compte aussi le cas où deux couples légitimes sont reconstitués : il y a $\binom{5}{3} = 10$ choix de 2 couples parmi 5. Pour les autres, il faut une association qui soit un dérangement : $10 \times D_3 = 20$. Le nombre d'associations où il y a plus de couples illégitimes que de couples légitimes est donc : $20 + 45 + 44 = 109$, ce qui donne une probabilité de $109/120 > 1/2$. Le bal masqué favorise les rencontres !

Exercice 14 - Partie sans entiers consécutifs - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. Soit $A = \{a_1,\dots,a_p\}$ une partie de $\{1,\dots,n\}$ ne contenant pas deux entiers consécutifs, avec $a_1 < a_2 < \dots < a_p$. Alors on a $a_{i+1} - a_i \geq 2$, et donc, par récurrence, $a_p \geq a_1 + 2p - 2 \geq 2p - 1$. Mais on a aussi $a_p \leq n$. Ainsi, il est impossible de trouver une telle partie dès que $2p - 1 > n$, c'est-à-dire dès que $2p > n+1$. Ainsi, dans ce cas, $K_n^p = 0$.
2. Puisque $a_{i+1} - a_i \geq 2$, on a $b_{i+1} - b_i = a_{i+1} - a_i - 1 \geq 1$ et donc $b_{i+1} > b_i$. On a clairement $b_1 \geq 1$ et $b_p = a_p - p + 1 \leq n + 1 - p$.

3. L'application est donnée par la question précédente. A tout élément $\{a_1,\dots,a_p\}$ de F_n^p, où les a_i sont en ordre croissant, on associe la partie $\{b_1,\dots,b_p\}$ où $b_k=a_k+1-k$. D'après la question précédente, ceci définit bien une partie à p éléments de $\{1,\dots,n+1-p\}$, donc un élément de G_n^p. Reste à prouver qu'il s'agit d'une bijection. C'est clairement une injection, car si deux éléments $\{a_1,\dots,a_p\}$ et $\{a'_1,\dots,a'_p\}$ ont la même image $\{b_1,\dots,b_p\}$, alors pour chaque $k\in\{1,\dots,p\}$, on a $a_k+1-k=a'_k+1-k$ et donc $a_k=a'_k$. De plus, c'est une bijection. Si $\{b_1,\dots,b_p\}$ est un élément de G_n^p, on définit $a_1,\dots,a_p$ en posant $a_k=b_k+k-1$. Alors on vérifie facilement, comme à la question précédente (mais en échangeant les rôles de a_k et b_k), que $\{a_1,\dots,a_p\}$ est élément de F_n^p.
4. Puisque F_n^p et G_n^p sont en bijection, ils ont le même cardinal. Mais le cardinal de G_n^p est connu, et c'est $\binom{n+1-p}{p}$. C'est aussi la valeur de K_n^p.
5. Le nombre de tirages recherché est K_{49}^6, qui vaut $\binom{44}{6}$.

Exercice 15 - Nombre de surjections - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

1. (a) Si $p>n$, il n'y a pas de surjection de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,p\}$. On a donc $S(n,p)=0$.
   (b) Lorsque $p=n$, les surjections de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,n\}$ sont les bijections de $\{1,\dots,n\}$ sur lui-même. Il y en a donc $n!=S(n,n)$.
   (c) Lorsque $p=1$, toute application de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1\}$ est une surjection. Mais il y a une seule application de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1\}$. On a donc $S(n,1)=1$.
   (d) Lorsque $p=2$, il y a deux applications qui ne sont pas surjectives : celle qui envoie tous les éléments sur 1 et celle qui envoie tous les éléments sur 2. De plus, il y a 2^n applications de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,2\}$. On en déduit que $S(n,2)=2^n-2$.
2. Lorsque l'on étudie les surjections de $\{1,\dots,n+1\}$ dans $\{1,\dots,n\}$, un unique élément de l'ensemble d'arrivée a deux antécédents, et tous les autres en ont un seul. On peut donc caractériser une surjection par le choix de cet élément et de ses deux antécédents, puis par une bijection entre les $n-1$ autres éléments. On a donc
$$S(n+1,n)=n\times\binom{n+1}{2}\times(n-1)!=\frac{n(n+1)!}{2}.$$
3. Soit s une surjection de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,p\}$. L'élément $i=s(n)$ peut être atteint de n façons. Une fois cet élément choisi, notons s' la restriction de s à $\{1,\dots,n-1\}$. Remarquons que tous les éléments de $\{1,\dots,p\}\backslash\{i\}$ sont atteints par s'. On distingue alors deux cas :
   – Soit i est atteint par s', et alors s' est une surjection de $\{1,\dots,n-1\}$ sur $\{1,\dots,p\}$. Il y a $S(n-1,p)$ possibilités ;
   – Soit i n'est pas atteint par s', et s' est une surjection de $\{1,\dots,n-1\}$ sur $\{1,\dots,p\}\backslash\{i\}$. Il y a $S(n-1,p-1)$ possibilités.
   Finalement, on obtient que
$$S(n,p)=p\big(S(n-1,p)+S(n-1,p-1)\big).$$
4. On programme la fonction suivante S, d'arguments n et p deux entiers naturels non nuls.

Fonction S(n,p)

Si p>n, retourner 0.
Si p=1, retourner 1.
Sinon, retourner p(S(n-1,p-1)+S(n-1,p))

Seriez-vous capables de prouver que cet algorithme se termine quelles que soient les entrées n et p ?

Coefficients binômiaux

Exercice 16 - Autour de la formule du binôme - *L1/Math Sup* - ⋆

1. On commence par développer en écrivant $(a+b+c)^7 = ((a+b)+c)^7$. Il vient :

$$(a+b+c)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (a+b)^{7-k} c^k.$$

Le terme devant a^2b^4c ne peut être issu que du produit $(a+b)^6c$. Or,

$$(a+b)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} a^k b^{6-k}.$$

On en déduit que le coefficient devant a^2b^4c est

$$\binom{7}{1} \times \binom{6}{2} = 7 \times \frac{6\times 5}{2} = 105.$$

2. On développe $(1+t)^n$ avec la formule du binome :

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k.$$

On intègre ensuite cette formule entre 0 et x, et on trouve

$$\int_0^x (1+t)^n dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k dt$$

soit

$$\frac{(1+t)^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} x^{k+1}.$$

Il suffit ensuite de faire $x=1$ pour trouver le résultat :

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

3. On va chercher le coefficient devant x^p de $(1+x)^m$. D'une part, par la formule du binome de Newton, il est égal à $\binom{m}{p}$. D'autre part, on écrit

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= (1+x)^q(1+x)^{m-q}\\ &= \left(\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}x^j\right)\left(\sum_{l=0}^{m-q}\binom{m-q}{l}x^l\right).\end{aligned}$$

Le coefficient devant x^p est alors obtenu en prenant les produits des termes en x^j et x^l avec $l=p-j$. j parcourt donc l'intervalle $\{0,\dots,q\}$ et on a :

$$\binom{m}{p}=\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}\times\binom{m-q}{p-j},$$

ce qui est bien le résultat demandé.

Exercice 17 - Une extension de la formule du triangle de Pascal - *L1/Math Sup* - $\star$

On va s'inspirer de la démonstration de la formule du triangle de Pascal. Soit E un ensemble ayant m éléments, et F une partie de E ayant q éléments. On cherche le nombre de parties de E ayant exactement p éléments.

- Une telle partie peut ne contenir aucun élément de F. Il y a exactement $\binom{m-q}{p}$ telles parties.
- Une telle partie peut contenir exactement un élément de F. On a $\binom{q}{1}$ choix pour cet élément, et $\binom{m-q}{p-1}$ choix pour les autres.
- Plus généralement on compte le nombre de parties à p éléments de E contenant exactement k éléments de F. Il y a $\binom{q}{k}$ possibilités pour choisir ces éléments de F, et $\binom{m-q}{p-k}$ possibilités pour choisir les autres éléments (ils sont $p-k$, à choisir parmi $m-q$). Le nombre de parties recherché dans ce cas est donc $\binom{q}{k}\times\binom{m-q}{p-q}$.

Faisant la somme pour k de 0 à q, on trouve la formule souhaitée.

Exercice 18 - Une somme - *L1/Math Sup* - $\star$

Une méthode naturelle pour démontrer cette propriété est de procéder par récurrence sur n. La formule est clairement vraie pour $n=0$ (ce qui implique $p=0$). Supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire que pour tout $p\leq n$, la formule donnée est vérifiée. Prouvons-la au rang $n+1$. Pour cela, prenons $p\leq n+1$. Si $p\leq n$, alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}+\binom{n+1}{p}\\ &= \binom{n+1}{p+1}+\binom{n+1}{p}\ \text{(hypothèse de récurrence)}\\ &= \binom{n+2}{p+1}\ \text{(formule du triangle de Pascal).}\end{aligned}$$

Si $p=n+1$, la formule est aussi vérifiée. La propriété est donc aussi vraie au rang $n+1$.

On peut aussi démontrer cette égalité par un dénombrement. Le coefficient binomial $\binom{n+1}{p+1}$ désigne le nombre de parties à $p+1$ éléments dans l'ensemble $\{0,\dots,n\}$ qui a $n+1$ éléments.

Soit E une telle partie, et k le plus grand entier qu'elle contient. Puisque la partie contient $p+1$ éléments, on a $k \geq p$. De plus, cet élément choisi, il reste p éléments à choisir dans l'ensemble $\{0, \dots, k-1\}$ qui contient k éléments, c'est-à-dire qu'il reste $\binom{k}{p}$ choix.

Exercice 19 - Bizarre, bizarre,... - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

$\binom{2n}{n}$ est le nombre de parties à n éléments dans un ensemble à $2n$ éléments. Pour compter ce nombre de parties, on peut aussi diviser l'ensemble en deux sous-ensembles contenant chacun n éléments. Pour obtenir $2n$ éléments, on peut en prendre k dans le premier, ie $\binom{n}{k}$ choix, et $n-k$ dans le deuxième, soit $\binom{n}{n-k}$ choix. On a donc :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

puisque $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Une autre façon de procéder est de remarquer que $\binom{2n}{n}$ est le coefficient devant X^n du polynôme $(X+1)^{2n}$. On retrouve l'autre valeur en écrivant $(X+1)^{2n} = (X+1)^n (X+1)^n$ et en identifiant.

Exercice 20 - Avec des nombres complexes - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On commence par mettre $1+i$ sous forme trigonométrique, soit $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. On en déduit

$$(1+i)^{4n} = 2^{2n} e^{in\pi} = (-1)^n 4^n.$$

On calcule ceci d'une autre façon en utilisant la formule de Newton :

$$(1+i)^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} i^k.$$

On remarque alors que si $k = 2p$ est pair, i^k est réel et vaut $(-1)^p$. Si $k = 2p+1$ est impair, i^k est imaginaire pur et vaut $(-1)^p i$. En séparant les parties réelles et imaginaires, on trouve

$$(1+i)^{4n} = \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p} + i \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}.$$

En identifiant avec le résultat précédent, on trouve

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p} = (-1)^n 4^n \text{ et } \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1} = 0.$$

Exercice 21 - Avec des polynômes - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Introduisons les polynômes $P(x) = (x+1)^n$, $Q(x) = (x-1)^n$, et cherchons le coefficient devant x^n du produit PQ. On a d'une part,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \text{ et } Q(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

Le coefficient devant x^n du produit PQ est donc

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 = S_n.$$

D'autre part, on a

$$PQ(x) = (x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{2k}.$$

On distingue alors deux cas. Si n est impair, le coefficient devant x^n est nul, et on a donc $S_n = 0$. Si $n = 2p$ est pair, alors on a

$$S_{2p} = (-1)^p \binom{2p}{p}.$$

Pour calculer T_n, il faut penser à dériver. On a

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \text{ et } P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

Si on cherche le coefficient devant x^{n-1} du produit $P'P$, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k} \binom{n}{k} = T_n.$$

D'autre part, on a

$$P'P(x) = n(x+1)^{2n-1} = n \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} x^k.$$

On en déduit que

$$T_n = n \binom{2n-1}{n}.$$

Symbole somme

Exercice 22 - - *L1/Math Sup* - ⋆

Calculons $\sum_{k=1}^{n} (1-x_k)^2$:

$$\sum_{k=1}^{n} (1-x_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} 1 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n - 2n + n = 0.$$

Or, une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chacun des termes de la somme est nul. On en déduit le résultat demandé.