Exercice 1 - Avion - *L2/Prépa Hec* - $\star$

On note X la variable aléatoire du nombre de moteurs de A qui tombent en panne, et Y la variable aléatoire du nombre de moteurs de B qui tombent en panne. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(4,p)$. En particulier, on a :

$$P(X=0)+P(X=1)=\binom{4}{0}p^0(1-p)^{4-0}+\binom{4}{1}p^1(1-p)^{4-1}=(1-p)^4+4p(1-p)^3.$$

D'autre part, Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2,p)$. En particulier,

$$P(Y=0)=(1-p)^2.$$

On a intérêt à prendre l'avion A si $P(X=0)+P(X=1)\geq P(Y=0)$. Ceci donne :

$$p(1-p)^2(2-3p)\geq 0.$$

Donc, si $0\leq p<2/3$ (cas que l'on espère être celui du monde réel), il est préférable de choisir A. Si $p=2/3$, le choix est indifférent, et si $p>2/3$, il vaut mieux choisir B.

Exercice 2 - Pièce de monnaie - *L2/Prépa Hec* - $\star$

1. Soit X le nombre de piles obtenus au cours de 10 lancers. X est le nombre de réalisations de l'événement "le lancer donne pile" de probabilité constante 0,3 au cours de 10 lancers indépendants. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,3$. On en déduit : $P(X=3)=\binom{10}{3}(0,3)^3(1-0,3)^{10-3}\simeq 0,27$.
2. Soit Y le nombre de lancers effectués jusqu'à l'obtention de pile pour la première fois. Y est le temps d'attente de la première réalisation de l'événement "obtenir pile" de probabilité constante 0,3 lors d'une suite de lancers indépendants, donc Y suit une loi géométrique de paramètre 0,3. On en déduit, en appliquant la formule du cours du calcul de l'espérance d'une loi géométrique
$$E(Y)=\frac{1}{0,3}=\frac{3}{10}.$$

Exercice 3 - Service de dépannage - *L2/Prépa Hec* - $\star$

1. (a) Soit R l'événement "le client a subi un retard". X est le nombre de réalisations de l'événement R de probabilité constante $1/4$ au cours de 4 appels indépendants. Donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(4,1/4)$. En particulier, on a :
$$E(X)=1 \text{ et } V(X)=\frac{3}{4}.$$
   (b) On cherche $P(X\geq 1)$:
$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^4.$$
2. (a) On note $p=0,25$ et $q=1-0,25$. On reconnait le schéma théorique d'une variable aléatoire de loi binomiale. On a donc :
$$P(Z=k|Y=n)=\begin{cases}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} & \text{si } 0\leq k\leq n\\ 0 & \text{si } k>n\end{cases}$$

(b) On a :

$$\begin{array}{rcl} P(Z=k,Y=n) & = & P(Y=n)P(Z=k|Y=n) \\ & = & \begin{cases} e^{-m}\frac{m^n}{n!}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} & \text{si } k\leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

(c) Il faut réaliser la sommation ! On a, tenant compte du fait que les premiers termes sont nuls :

$$\begin{array}{rcl} P(Z=k) & = & \sum_{n=k}^{+\infty} P(Z=k,Y=n) \\ & = & e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(mq)^n}{(n-k)!} \\ & = & e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}(mq)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(mq)^{n-k}}{(n-k)!} \\ & = & e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}(mq)^k\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(mq)^{n}}{(n)!} \\ & = & e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}(mq)^k e^{mq} \\ & = & e^{-mp}\frac{(mp)^k}{k!}. \end{array}$$

Z suit donc une loi de Poisson de paramètre $m\times 0,25$.

3. U est le rang de la première réalisation de l'événement R de probabilité $1/4$ au cours d'une succession d'appels indépendants. Y suit donc la loi géométrique $\mathcal{G}(1/4)$, c'est-à-dire que, pour $k\geq 1$,
$$P(U=k)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$
On applique la formule du cours pour obtenir l'espérance (on on calcule simplement la somme d'une série géométrique), et on trouve que
$$E(U)=4.$$

Exercice 4 - Le concierge - *L2/Prépa Hec* - ⋆⋆

Notons p_k la probabilité que la porte soit ouverte au k-ième essai et V_k l'événement "la porte n'est pas ouverte après le k-ième essai". On a

$$p_k=P(V_k^c\cap V_{k-1})=P(V_{k-1})-P(V_k),$$

la dernière formule venant du fait que (V_k) est une suite décroissante d'événements. Dans chaque cas, on va calculer $P(V_k)$ en utilisant la formule

$$P(V_k)=P(V_k|V_{k-1})P(V_{k-1}).$$

1. Si V_{k-1} est vraie, au k-ième essai, le concierge choisit au hasard une clef parmi les $n-(k-1)$ qui restent. On a donc

$$P(V_k)=\left(1-\frac{1}{n-k-1}\right)P(V_{k-1})=\frac{n-k}{n-k-1}P(V_{k-1}).$$

Par une récurrence aisée, on trouve donc que, pour $k\leq n$,

$$P(V_k)=\frac{n-k}{n}$$

et $P(V_k)=0$ si $k\neq n$. On a donc, pour $1\leq k\leq n$,

$$p_k=\frac{n-k-1}{n}-\frac{n-k}{n}=\frac{1}{n}.$$

Le nombre moyen d'essais vaut donc

$$\sum_{k=1}^n kp_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k=\frac{n-1}{2}.$$

2. Cette fois, si V_k est vraie, le concierge tire une clef parmi les n du trousseau, et donc

$$P(V_k)=\left(1-\frac{1}{n}\right)P(V_{k-1})=\frac{n-1}{n}P(V_{k-1}).$$

On obtient cette fois, pour $k\geq 0$,

$$P(V_k)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^k,$$

puis

$$p_k=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}.$$

En reconnaissant une loi géométrique de paramètre $1/n$, on trouve que le nombre moyen d'essais nécessaires est

$$\sum_{k=1}^{+\infty}kp_k=n.$$

Finalement, ce n'est pas si différent !

Exercice 5 - Chaîne de fabrication - *Ecricome* - ⋆⋆

1. Pour un objet pris à la sortie, $P(A)=0.6$ et $P(B)=0.4$ Soit $D=$"l'objet est défectueux". On a $P(D|A)=0.1$ et $P(D|B)=0.2$ et comme (A,B) est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}P(D)&=P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)\\&=0.1\cdot 0.6+0.2\cdot 0.4\\&=0.14.\end{aligned}$$

Si l'objet est défectueux, la probababilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A" est $P(A|D)$ que l'on calcule par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(A/D) &= \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/A)\,P(A)}{P(D)} \\ &= \frac{0.1\cdot 0.6}{0.14} = \frac{0.06}{0.14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.
   (a) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier n : $P(Y = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$. $E(Y) = \lambda = 20$ et $V(Y) = \lambda = 20$
   (b) Quand $Y = n$, X est le **nombre** d'objets défectueux parmi n, qui sont défectueux **indépendemment** les un des autres avec une même probabilité 0.1. Donc $X|Y = n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 0.1)$ et $P[X = k|Y = n] = 0$ si $k > n$ et $P[X = k|Y = n] = \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k}$ si $k \leq n$
   (c) Comme $(Y = n)_{n\in\mathbb{N}}$, est un système complet d'événements on a pour tout entier k :

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P[X = k|Y = n]\,P(Y = n)$$

   série convergente dont on calcule la somme partielle en distinguant suivant que $n \geq k$ ou $n < k$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{M} P[X = k|Y = n]\,P(Y = n) &= \sum_{n=0}^{k-1} P[X = k|Y = n]\,P(Y = n) \\ &\quad + \sum_{n=k}^{M} P[X = k|Y = n]\,P(Y = n) \\ &= 0 + \sum_{n=k}^{M} \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k} \frac{20^n e^{-20}}{n!} \\ &= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-20} \sum_{n=k}^{M} \frac{n!}{k!\,(n-k)!n!} (0.9\cdot 20)^n \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{M} \frac{1}{(n-k)!} 18^n \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{M-k} \frac{1}{m!} 18^{m+k} \\ &\to \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} 18^k e^{18} = \frac{2^k e^{-2}}{k!} \end{aligned}$$

   donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$

Exercice 6 - Pile ou face - *Oral ESCP* - $\star\star$

1. La variable aléatoire T_1 est le temps d'attente du premier pile ; elle suit la loi géométrique de paramètre p, donc d'espérance $1/p$.
2. Notons X_n la variable aléatoire égale à 1 si la partie numéro n amène pile. Les variables X_n sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Soit $(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n$. L'événement $(A_1=i_1,\dots,A_n=i_n)$ s'écrit aussi :

   $$X_1=\dots=X_{i_1-1}=0, X_{i_1}=1, X_{i_1+1}=\dots=X_{i_1+i_2-1}=0, X_{i_1+i_2}=1,\dots,X_{i_1+\dots+i_n}=1.$$

   Donc, en posant $q=1-p$, on a :

   $$P(A_1=i_1,\dots,A_n=i_n)=q^{i_1-1}pq^{i_2-1}p\dots q^{i_n-1}p.$$

   En sommant pour $(i_1,\dots,i_{n-1})$ parcourant $(\mathbb{N}^*)^{n-1}$, on a :

   $$P(A_n=i_n)=q^{i_n-1}p.$$

   (A_n) suit bien une loi géométrique de paramètre p. De plus l'expression ci-dessus prouve que :

   $$P(A_1=i_1,\dots,A_n=i_n)=P(A_1=i_1)\dots P(A_n=i_n),$$

   ce qui montre que les variables $A_1,\dots,A_n$ sont indépendantes.