COMBINATOIRE & DÉNOMBREMENT

Pour mieux appréhender ce chapitre, il est recommandé de lire celui sur la théorie de ensembles.

Dans tout ce qui suit, nous noterons $n!$ le produit $1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$, ce produit s'appelle "factorielle n". On convient que $0! = 1$.

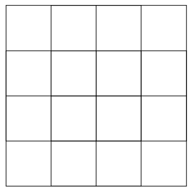
Exercice : démontrer que $6! \times 7! = 10!$ (sans calculer 10!)

I) Principes de base du dénombrement

1) Principe de la somme

Si des ensembles $A_1, A_2, ..., A_p$ constituent une partition d'un ensemble fini E, alors :

$$\text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + ... + \text{Card}(A_p) = \text{Card}(E)$$



Exemple : Combien y a-t-il de carrés dont les côtés sont matérialisés sur la figure ci-contre ?

Soit E l'ensemble de tous les carrés. Notons A_1, A_2, A_3 et A_4 l'ensemble de ces carrés ayant pour côtés respectifs 1, 2, 3 et 4 carreaux. Les sous ensembles A_1, A_2, A_3 et A_4 constituent une partition de E (puisqu'ils n'ont aucun élément en commun et que leur réunion est E).

D'après le principe de la somme, $\text{Card}(E) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \text{Card}(A_3) + \text{Card}(A_4) = 16 + 9 + 4 + 1 = 30$.

Il y a donc, au total 30 carrés dont les côtés sont matérialisés sur la figure ci-contre.

Conséquences

Si A et B sont deux parties d'un ensemble fini E, alors :

1) $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

2) Si A et B sont disjoints alors : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$

3) $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$

Démonstrations :

Démontrons tout d'abord les points 2) et 3).

2) Les ensembles A et B constituent une partition de l'ensemble $A \cup B$.

3) Les ensembles A et $\overline{A}$ constituent une partition de l'ensemble E, donc $\text{Card}(A) + \text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E)$.

1) Notons $B \setminus A$ l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A et $A \setminus B$, l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B. Remarquons que $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ (c'est-à-dire $B \setminus A$ est le complémentaire de $A \cap B$ dans B), donc d'après 3) $\text{Card}(B \setminus A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$. De même, $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$. Enfin, remarquons que $B \setminus A$, $A \setminus B$ et $A \cap B$ constituent une partition de $A \cup B$, donc $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A \cap B)$ d'où 1).

Exercice : Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis et 16 ne pratiquent aucun de ces deux sports. Combien de personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation ?

Notons E l'ensemble des vacanciers de ce camp, T l'ensemble des personnes pratiquant le tennis et N l'ensemble des personnes pratiquant la natation. D'après les données, $\text{Card}(E) = 80$, $\text{Card}(N) = 33$, $\text{Card}(T) = 55$ et $\text{Card}(E \setminus (T \cup N)) = 16$. Nous recherchons $\text{Card}(T \cap N)$.

Or $\text{Card}(E \setminus (T \cup N)) = \text{Card}(E) - \text{Card}(T \cup N) = \text{Card}(E) - \text{Card}(T) - \text{Card}(N) + \text{Card}(T \cap N) = 16$ d'où :

$$\text{Card}(T \cap N) = 16 - \text{Card}(E) + \text{Card}(T) + \text{Card}(N) = 16 - 80 + 33 + 55 = 24.$$

En conclusion, 24 personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation.

2) Principe du produit (ou principe multiplicatif)

Si une situation comporte p étapes offrant respectivement n_1, n_2, ... , n_p possibilités alors le nombre total d'issues est :
$$n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$$

C'est la règle utilisée lorsque nous dressons un arbre.

Il en découle le cardinal du produit cartésien :

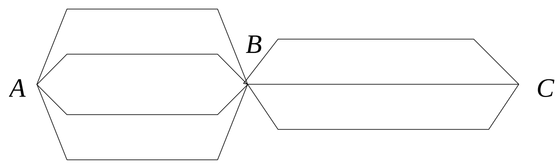
Rappel : Si E_1, E_2, ..., E_p sont p ensembles, $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ représente le produit cartésien de E_1, E_2, ..., E_p, c'est-à-dire l'ensemble des p-uplets $(e_1, e_2, ... , e_p)$ où $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$, ... , $e_p \in E_p$.

Si E_1, E_2, ..., E_p sont p ensembles de cardinal fini, alors :
$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times ... \times \text{Card}(E_p)$$

Exemples :

- Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?

  Les trois étapes : choix de la première lettre, de la deuxième, puis du chiffre offrent respectivement 26, 25 et 9 possibilités. Le nombre cherché est donc $26 \times 25 \times 9 = 5850$ codes distincts.
- Nombre d'itinéraires distincts menant de A à C ? Nombre d'itinéraires "aller retour" A-C-A n'empruntant que des chemins distincts ?



  Aller simple A-C : $4 \times 3 = 12$

  Aller retour A-C-A : $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$

Tous les principes exposés ci-dessus étant intuitivement évident, nous ne préciserons pas nécessairement, par la suite, quand nous les utiliserons.

II) Dénombrement des *p*-listes

Définition 1

Une p-liste (ou liste de longueur p) d'un ensemble E est un p-uplet d'éléments de E. C'est un élément du produit cartésien $E^P = E \times ... \times E$ (p facteurs).

Exemples :

- $E = \{0 ; 1 ; 2 ; ... ; 99\}$. Une 5-liste de E est par exemple (21, 12, 12, 15, 98).
- $E = \{a ; b ; c ; ... ; z\}$. Le 6-uplet (a, n, a, n, a, s) est une 6-liste de E. En pratique, et lorsque la situation le permet, une p-liste est tout simplement notée ainsi : $a\ n\ a\ n\ a\ s$.

Remarques :

- On précise parfois p-liste "avec répétition" pour les distinguer des arrangements qui seront évoqués au paragraphe suivant.
- On suppose que la 0-liste existe, c'est la liste qui ne comporte aucun élément.

Théorème 1

Soit E un ensemble de cardinal fini n. Le cardinal de l'ensemble E^p des p-listes de E est n^p.

La démonstration de ce théorème découle simplement du principe multiplicatif.

Applications :

1) Au loto sportif, on coche l'une des trois cases $\boxed{1}$ $\boxed{N}$ $\boxed{2}$ pour chacun des 13 matches sélectionnés.

   Dénombrer le nombre de grilles distinctes.

   Il y en a autant que de 13-listes de l'ensemble $\{1 ; N ; 2\}$ soit $3^{13} = 1594323$.

2) Combien y a-t-il de numéro de téléphone commençant par 0384... ?

   Les 6 numéros qui suivent sont des 6-listes de l'ensemble $\{0 ; 1 ; ... ; 9\}$. Il y en a $10^6 = 1000000$.

3) Nombre de codes possibles pour une carte bleue ?

   Il y en a autant que des 4-listes de $\{0 ; 1 ; ... ; 9\}$. Il y en a $10^4 = 10000$.

4) n^p est le nombre d'applications d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. (Pour chacun des p éléments de l'ensemble de départ, il y a n choix d'image dans l'ensemble d'arrivée)

III) Dénombrement des Arrangements et des Permutations

Définition 2

Soit E un ensemble de cardinal fini n et p un entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.

Un arrangement de p éléments de E est une p-liste d'éléments **distincts** de E.

Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E.

Un arrangement est donc une p-liste dans laquelle il n'y a pas de répétitions.

Exemples :

- $E = \{a ; b ; c ; ... ; z\}$. Les listes suivantes : $b\ e\ a\ u$, $m\ a\ t\ i\ n$, $h\ i\ v\ e\ r$ sont des arrangements de 4 et 5 éléments de E. Par contre, $a\ r\ r\ a\ n\ g\ e\ m\ e\ n\ t$ n'est pas un arrangement de 11 éléments de E car ses éléments ne sont pas distincts.
- Soit $E = \{s ; u ; c ; r ; e\}$. Les anagrammes du mot $s\ u\ c\ r\ e$ sont des permutations de E.

Remarques : une permutation de E correspond à une bijection de E.

Théorème 2

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.

- Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :

$$A_n^p = n(n-1)\ ...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- Le nombre de permutations de E est : $A_n^n = n!$

Et par convention, le nombre d'arrangement de 0 éléments d'un ensemble E est $A_n^0 = 1$.

La démonstration de ce théorème découle simplement du principe multiplicatif.

Remarque : il y a donc $n!$ bijections d'un ensemble E de cardinal n dans lui même.

Exercice : démontrer que $A_n^{n-1} = n!$.

Applications :

1) Le tiercé : une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?

   Soit E l'ensemble des numéros des chevaux. On a Card(E) = 20. Un tiercé correspond à un arrangement de 3 éléments de E, il y en a $A_{20}^3 = 6840$.

2) De combien de façons peut-on repartir 7 personnes sur 7 chaises ?

   Désignons par p_1, p_2, ..., p_7 les 7 personnes et posons $E = \{p_1 ; p_2 ; ... ; p_7\}$. Une répartition peut se voir comme un arrangement des 7 éléments de E c'est-à-dire une permutation de E, il y en a $7! = 5040$.

3) Un porte manteau comporte 5 patères. De combien de façons peut-on y accrocher 3 manteaux différents ? (Au plus un manteau par patère)

   Notons P_1, ... , P_5 les 5 patères. Chaque rangement peut se voir comme un 3-arrangement de l'ensemble $\{P_1, ... , P_5\}$. Par exemple, $P_2P_1P_4$ signifie "manteau n°1 sur P_2, manteau n°2 sur P_1 et manteau n°3 sur P_4". Il y a donc $A_5^3 = 60$ rangements possibles.

4) Nombre de mots de 5 lettres distinctes : A_{26}^5

5) Tirages ordonnés : Une urne contient 10 boules numérotées 0, 1, ... , 10. On en tire successivement trois sans remise. Combien de tirages différents ? A_{10}^3.

6) A_n^p est le nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. (n choix d'image pour le premier élément, $n - 1$ choix pour le second, etc..., $n - p + 1$ choix pour le dernier).

   $A_n^n = n\,!$ est le nombre le nombre de bijections d'un ensemble de cardinal n sur lui même.

IV) Dénombrement des Combinaisons

Définition 3

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.

Une combinaison de p éléments de E est une partie de E ayant p éléments.

Exemple :

$E = \{a ; b ; c\}$ et $p = 2$. Les combinaisons de deux éléments de E sont les parties : $\{a ; b\}$, $\{a ; c\}$ et $\{b ; c\}$.

Il est essentiel de noter que :

- Dans une partie, les éléments sont deux à deux distincts.
- Deux parties qui contiennent les mêmes éléments sont égales . Ainsi $\{a ; b\} = \{b ; a\}$. (L'ordre dans lequel on écrit les éléments n'a pas d'importance)

Théorème 3

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Les coefficients C_n^p sont encore appelés coefficient binomiaux. (On verra pourquoi au paragraphe suivant)

Remarque : bien que les coefficients C_n^p soient donnés sous forme de fraction, ils sont bien des entiers : en effet l'entier $A_n^p = n(n-1)\ ...(n-p+1)$ est le produit de p entiers consécutifs. Or, dans p entiers consécutifs, on en trouve toujours un qui est divisible par p, un autre divisible par $p-1$ etc ... donc A_n^p est divisible par $p!$.

Exercice : montrer que $\sum_{p=0}^{n-2} \frac{n!}{p!}$ est un entier pair.

Démonstration du théorème : dénombrons les arrangements de p éléments d'un ensemble fini E de cardinal n. Un arrangement est caractérisé par :

- Le choix d'une partie de E à p éléments (C_n^p choix)
- La façon d'ordonner les p éléments de la partie choisie ($p!$ façons)

Le principe multiplicatif donne alors $A_n^p = C_n^p\, p!$ d'où le théorème.

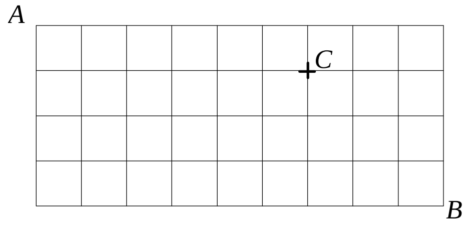
Interprétation importante

C_n^p représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (l'ordre n'important pas).

Applications

1) Le loto : On tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles (on ne tient pas compte du numéro complémentaire) ? C'est le nombre de façons de choisir 6 objets parmi 49, soit $C_{49}^6 = 13983816$.
2) Le Poker : Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (ces 5 cartes s'appellent une "main").
   a) Nombre de mains total : $C_{32}^5 = 201376$
   b) Nombre de mains qui contiennent exactement 3 as : le nombre de façons de choisir 3 as parmi 4 est C_4^3, le nombre de façons de choisir 2 cartes parmi 28 "non as" est : C_{28}^2. On applique le principe multiplicatif, ce qui donne : $C_4^3 \times C_{28}^2 = 1512$.
   c) Nombre de mains qui contiennent au moins 3 as : $C_4^3 \times C_{28}^2 + C_4^4 \times C_{28}^1 = 1540$.
3) Nombre de dominos (7 numéros) : $C_7^2 + 7$ (doubles) $= 21 + 7 = 28$.
4) Nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes : $C_{20}^3 = 1140$.
5) Tirages simultanés ou non ordonnés : une urne contient 10 boules numérotées 0, 1, ... , 10. On en tire simultanément trois. Combien de tirages différents ? $C_{10}^3 = 120$.

6) Le quadrillage ci-contre (9×4), combien y a-t-il de chemins allant de A à B (on se déplace uniquement vers la **D**roite ou vers le **B**as) ?



Indication : on pourra dénombrer le nombre de mots de 13 lettres qui contiennent 9 fois la lettre **D** et 4 fois la lettre **B**. ($C_{13}^{9} = 715$)

Combien de ces chemins passent par le point C ? ($C_7^1 \times C_6^3 = 140$)

7) Nombre de diagonales d'un polygone à n côtés ?

Nombre de façons de relier 2 sommets : C_n^2 .

Nombre de côtés : n

Nombre de diagonales : $C_n^2 - n = \dfrac{n!}{(n-2)!2!} - n = \dfrac{n(n-1)-2n}{2} = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Quel polygone a autant de diagonales que de côtés ?

On résout l'équation $\dfrac{n(n-3)}{2} = n$ et on trouve $n = 0$ (impossible) ou $n = 5$. Le pentagone a autant de diagonales que de côtés et c'est le seul polygone jouissant de cette propriété.

Quel polygone a 1325 diagonales ?

On résout l'équation $\dfrac{n(n-3)}{2} = 1325$. On trouve $n = 53$ ou $n = -50$ (impossible). Un 53-gone possède donc 1325 diagonales.

8) C_n^p représente le nombre d'applications strictement croissantes d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. En effet, soient X (resp. Y) un ensemble de cardinal p (resp. n) et f une application strictement croissante de X dans Y. Alors f est nécessairement injective (si deux éléments avaient même image, f ne pourrait être strictement croissante). Pour construire f, il faut donc se donner déjà une telle injection (A_n^p choix). Parmi toutes ces injections, un certain nombre ont la même image $f(X)$: il y en p ! (c'est le nombre de façons de permuter les p éléments de $f(X)$. Or parmi ces p ! injections de même image $f(X)$, une seule est strictement croissante. Le nombre d'applications strictement croissantes de X dans Y est donc $\dfrac{A_n^p}{p!} = C_n^p$.

<u>Propriétés des coefficients binomiaux</u>

<u>Propriété 1</u> *Symétrie*

Pour tout entier n et tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a : $C_n^p = C_n^{n-p}$

<u>Démonstration</u> : C_n^p représente le nombre parties de p éléments d'un ensemble E. Or, à chaque partie on peut associer de façon unique une autre partie : son complémentaire. Et le complémentaire d'une partie à p élément comporte $n - p$ éléments. Donc dénombrer les parties à p éléments revient à dénombrer les parties complémentaires à $n - p$ éléments et il y en a C_n^{n-p} .

<u>Conséquences</u> : $C_n^0 = C_n^n = 1$ $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

<u>Exemple</u> : le nombre de façons de choisir 2 délégués parmi 30 élèves est égal au nombre de façons de choisir 28 élèves non délégués parmi 30 : $C_{30}^2 = C_{30}^{28}$.

Propriété 2 *Relation de Pascal*

Pour tout entier n et tout entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant n-1$, on a :

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

Démonstration ensembliste : Soit E un ensemble de cardinal fini n avec $n \geqslant 2$. Soit a un élément fixé de E. Remarquons que les parties à p éléments de E se partagent en deux catégories :

- celles ne contenant pas a (il y en a C_{n-1}^p : choix de p éléments parmi $n-1$)
- celles contenant a (au nombre de C_{n-1}^{p-1} : choix de $p-1$ éléments parmi $n-1$)

Étant en présence d'une partition, le principe de la somme nous livre alors le résultat.

Démonstration algébrique :

$$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} + \frac{(n-1)!\,p}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$$

Triangle de Pascal[1]

La relation de Pascal permet de calculer les coefficient binomiaux de la façon suivante : pour trouver un certain coefficient, on additionne dans le tableau suivant les coefficients situés "juste au dessus" et "juste au dessus à gauche" entre eux :

n p	0	1	2	3	4	...	$p-1$	p	...	$n-1$	n
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
...											
$n-1$	1	$n-1$					C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p		1	
n	1	n						C_n^p		n	1

V) Binôme de Newton

Ce paragraphe utilise le symbole "somme" : $\displaystyle\sum_{\substack{\text{valeur initiale}\\ \text{de l'indice}}}^{\text{valeur finale}} \text{quantité sommée}$.

Par exemple, $1 + x + x^2 + ... + x^p + ... + x^n$ pourra être noté de façon plus condensée : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} x^p$

1) Formule du binôme de Newton

Théorème 4

Pour tous nombres complexes a et b et tout entier naturel n non nul :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

[1] Le tableau est appelé triangle de Pascal en hommage à ce dernier qui écrivit en 1654 son "traité du triangle arithmétique" dans lequel il expose d'innombrables applications du triangle déjà connu de Tartaglia (1556), Stiefel (1543) et des Chinois (1303).

Exemples : À l'aide de cette formule et du triangle de Pascal, on retrouve des relations très utiles :

- Avec $n = 2$ la formule donne : $(a + b)^2 = C_2^0\, a^2b^0 + C_1^1\, a^1b^1 + C_0^2\, a^0b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- Avec $n = 3$ la formule donne : $(a + b)^3 = ... = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- Avec $n = 4$ la formule donne : $(a + b)^4 = ... = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Notons qu'il n'est pas inutile de savoir substituer $(-b)$ à b dans la formule pour obtenir :

$$(a-b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p}(-b)^p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p a^{n-p} b^p$$

En pratique, les signes obtenus en développant cette dernière formule alternent ; par exemple :

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Il est aussi utile de savoir utiliser la formule avec des valeurs particulières de a et b :

- Lorsque $a = b = 1$: $$2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^p + ... + C_n^n$$
- Lorsque $a = 1$ et $b = x$:

$$(1+x)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^p x^p + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

- Lorsque $a = 1$ et $b = -1$: $$0 = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^p$$

Démonstration 1 de la formule du binôme :

En développant le produit $(a + b)^n = (a + b)(a + b) ... (a + b)$, on obtient 2^n termes : en effet, dans chacun des n facteurs, on a deux choix possibles pour constituer chaque terme qui est une n-liste d'éléments de l'ensemble $\{a ; b\}$ (nous n'utilisons pas ici la notation puissance). On peut répartir tous ces termes en fonction du nombre p de lettres b qu'ils contiennent ($0 \leqslant p \leqslant n$). Les termes contenant p lettres b sont de la forme "$a^{n-p}b^p$" et il y en a C_n^p . Étant en présence d'une partition, le principe de la somme nous livre alors le résultat.

Démonstration 2 de la formule du binôme (par récurrence) :

la formule est évidemment vraie pour $n = 0$.

Hypothèse de récurrence : on suppose la formule vraie à un certain rang n.

Démontrons la formule au rang $n + 1$ en utilisant le fait qu'elle soit vraie au rang n :

$$(a+b)^{n+1} = \left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i\right)(a+b) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{(n+1)-i} b^i + \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^{i+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = C_n^0 a^{n+1} b^0 + \sum_{i=1}^{n} C_n^i a^{(n+1)-i} b^i + \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i a^{n-i} b^{i+1} + C_n^n a^0 b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} C_n^i a^{(n+1)-i} b^i + \sum_{i=1}^{n} C_n^{i-1} a^{(n+1)-i} b^i + b^{n+1} =$$

$$(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} b^0 + \sum_{i=1}^{n} \left[C_n^i + C_n^{i-1}\right] a^{(n+1)-i} b^i + C_{n+1}^{n+1} a^0 b^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i a^{(n+1)-i} b^i$$

ce qui est la formule du binôme au rang $n + 1$.

2) Applications

1) Nombre de parties d'un ensemble fini E de cardinal n :

   Notons E_p l'ensemble des parties de E de cardinal p. Par définition, on a $\text{Card}(E_p) = C_n^p$. En outre les ensembles $E_0, E_1, ..., E_p, ..., E_n$ constituent une partition de l'ensemble $\wp(E)$. Donc, d'après le principe de la somme :

   $$\text{Card}(\wp(E)) = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^p + ... + C_n^n = 2^n \text{ (formule du binôme avec } a = b = 1)$$

   En conclusion, le nombre de parties d'un ensemble de cardinal n est 2^n.

2) Linéarisation de lignes trigonométriques (ceci facilitera leur intégration). Exemple :

   $$\sin^3 x = \left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}\right)^3 = \frac{\mathbf{e}^{3\mathbf{i}x} - 3\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} + 3\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-3\mathbf{i}x}}{-8\mathbf{i}} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\mathbf{e}^{3\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-3\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}\right) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x$$

3) Calcul de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. (Formules de Moivre)

4) Une relation bien utile : $C_n^p = \dfrac{n}{p}\, C_{n-1}^{p-1}$ (la démonstration est laissée au soin du lecteur)

5) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} C_{n_1}^i C_{n_2}^{k-i} = C_{n_1+n_2}^k$.

   (Dans un ensemble X de cardinal $n_1 + n_2$, considérer deux sous-ensembles E et F **disjoints** de cardinal respectifs n_1 et n_2 et dénombrer de deux façons différentes le nombre de parties à k éléments de $E \cup F$)

6) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C_{2n+2}^{n+1}(n+1) - 4\,C_{2n}^n\, n = 2\,C_{2n}^n$.

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0 ; n]\!]$. On considère la fonction $f_{n,\,p}$ définie sur $[0 ; 1]$ par :

   $$f_{n,\,p}(x) = C_n^p\, x^p(1-x)^{n-p}$$

   Démontrer que : $0 \leqslant f_{n,\,p} \leqslant 1$ sur $[0 ; 1]$.

   (Indication : considérer la somme : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} f_{n,\,p}(x)$)

8) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

   Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = nx^{n-1}$.

9) Existe-t-il trois coefficients binomiaux successifs sur une même ligne qui soient en progression arithmétique ?

   Oui, par exemple : $C_{14}^4 = 1001$; $C_{14}^5 = 2002$; $C_{14}^6 = 3003$.

   Pour les déterminer tous, étudier la condition : $2\,C_n^p = C_n^{p-1} + C_n^{p+1}$.

   Montrer qu'elle s'écrit encore : $4p^2 - 4np + n^2 - n - 2 = 0$.

   En déduire alors $p = \dfrac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}$ et que les couples du type $(n ; p)$ avec $n = \lambda^2 - 2$ ($\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0 ; 1 ; 2\}$) sont solutions.