# 1. Dénombrement

**Analyse combinatoire** est un synonyme de dénombrement.

Le **dénombrement** s'emploie à étudier et à dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis.

Il est né de l'étude des jeux de hasard et s'est fortement développé sous l'influence du calcul des probabilités. Il est par ailleurs lié à la théorie des nombres et à la théorie des graphes.

## 1.1. Deux principes fondamentaux du dénombrement

### Principe des tiroirs

« Si vous disposez d'une commode avec 5 tiroirs et que vous devez ranger 6 pantalons, alors au moins un des tiroirs contiendra au moins 2 pantalons. »

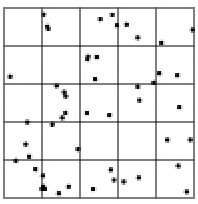
Plus généralement, si vous avez $n$ « tiroirs » à disposition pour y ranger $n+k$ « objets », alors certains « tiroirs » contiendront plus d'un « objet ».

**Un exemple simple**

Dans un village de 400 habitants, peut-on trouver deux personnes qui sont nées le même jour (pas forcément de la même année) ?

Ici, les tiroirs représentent les jours de l'année et les objets les habitants. Seuls 366 habitants peuvent avoir des dates de naissance différentes.

**Un exemple plus subtil**



On jette 51 miettes sur une table carrée de 1 m de côté. Montrez qu'il y a toujours au moins un triangle formé de 3 miettes dont l'aire vaut au plus 200 cm$^2$.

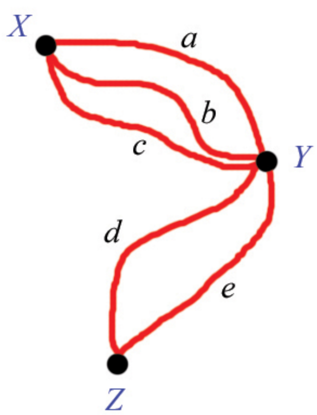
On partage la table en 5 x 5 = 25 carrés de 20 cm de côté; comme il y a 51 miettes, il existe au moins 1 carré qui contient 3 miettes. Le triangle formé par ces 3 miettes a une aire au plus égale à la moitié de l'aire du carré dans lequel il est inscrit, soit 200 cm$^2$.

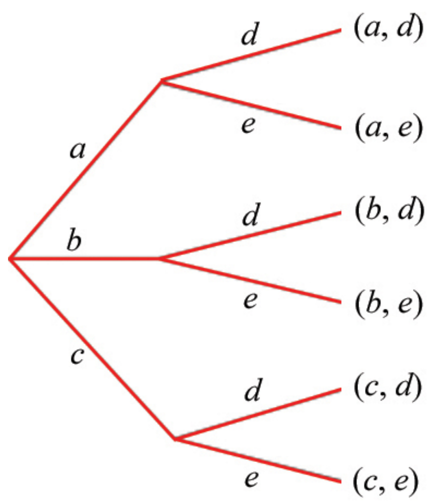
### Principe de décomposition

Si une opération globale peut se décomposer en $k$ opérations élémentaires successives, ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de $n_1$, $n_2$, ..., $n_k$ manières, alors l'opération globale peut se faire de $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ manières différentes.

**Exemple**

Les localités $X$ et $Y$ sont reliées par trois routes ($a$, $b$ et $c$) et les localités $Y$ et $Z$ par deux routes ($d$ et $e$). Combien y a-t-il de trajets de $X$ à $Z$ en passant par $Y$ ?




Il y a 6 (= 3·2) trajets possibles : ($a$, $d$), ($a$, $e$), ($b$, $d$), ($b$, $e$), ($c$, $d$), ($c$, $e$).

## 1.2. Exercices d'échauffement

### Exercice 1.1

À la fin d'une réunion d'anciens élèves, tout le monde se serre la main. S'il y a $n$ personnes à la fête, combien de poignées de mains sont échangées ?

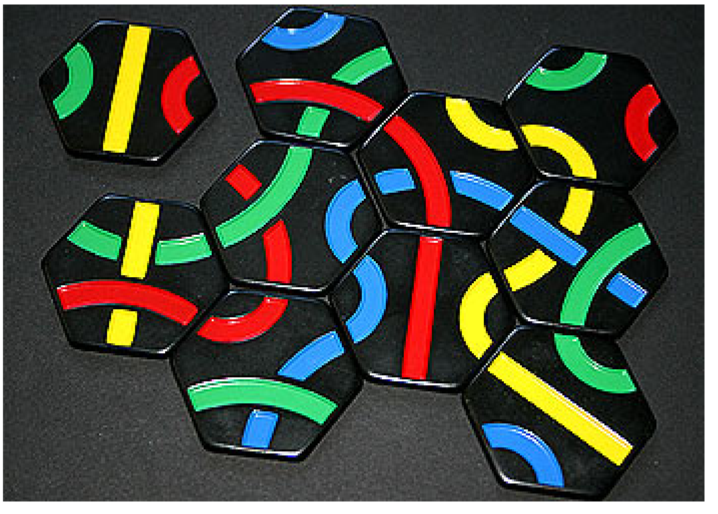
### Exercice 1.2

Combien de diagonales contient un polygone convexe à $n$ côtés (une diagonale relie deux sommets non adjacents) ?

### Exercice 1.3

Le jeu « Tantrix » est composé de tuiles hexagonales sur lesquelles sont dessinés des rubans comme le montre le dessin ci-dessous. Un ruban part du milieu d'un côté pour aller vers le milieu d'un autre côté. Il y a quatre couleurs en tout, mais sur chaque tuile ne figurent que trois rubans de couleurs différentes.

*Indication*
Résolvez d'abord le problème avec trois couleurs puis réfléchissez comment passer à quatre couleurs.
Attention aux doublons obtenus par rotation !



De combien de tuiles différentes est composé un jeu complet ?

### Exercice 1.4

Vous voulez construire un château de cartes avec…

**a.** un jeu de 52 cartes.
**b.** dix jeux de 52 cartes.

Combien d'étages aura votre château ? Le château doit être complet et on n'est pas obligé d'utiliser toutes les cartes.

*Château de cartes et jeux amoureux*, par Patrick Martin
www.patrick-martin.com

### Exercice 1.5

Combien de mots différents de 7 lettres alternant consonne et voyelle peut-on former…

**a.** si la première lettre est une consonne ?

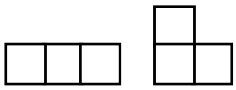
**b.** si la première lettre est une voyelle ?

### Exercice 1.6

Un de vos amis hongrois vous a dit un jour ceci : « En Hongrie, il y a 10 millions d'habitants. 78% des Hongrois ont un téléphone portable. Je suis sûr de trouver en Hongrie au moins deux personnes qui sont nées le même jour et qui ont le même code PIN (code de 4 chiffres protégeant la carte SIM). » Votre ami a-t-il raison ?

### Exercice 1.7

Les deux triminos :



Les polyminos ont été étudiés par les Anglais **Dudeney** et **Dawson** au début du XX[e] siècle. Ils doivent leur popularisation, à partir des années cinquante, à Solomon W. **Golomb**, et sont devenus aujourd'hui un thème classique des récréations mathématiques. Les polyminos sont des assemblages de carrés de même taille par un de leurs côtés. Deux carrés s'assemblent en un domino, trois carré en un trimino (il n'y a que deux configurations possibles : le « bâton » et le « trimino en L »), quatre carrés en un tétramino (vous connaissez le jeu « Tétris » ?), cinq carrés en un pentamino, etc.

Combien y a-t-il de pentaminos différents (attention aux rotations et aux symétries axiales) ?

## 1.3. Permutations simples

**Définition**

Tout classement **ordonné** de $n$ éléments distincts est une **permutation** de ces $n$ éléments. Par exemple *aebcd* est une permutation des éléments *a, b, c, d, e*.

**Nombre de permutations simples**

Le nombre de permutations de $n$ éléments peut être calculé de la façon suivante : il y a $n$ places possibles pour un premier élément, $n-1$ pour un deuxième élément, ..., et il ne restera qu'une place pour le dernier élément restant. On peut représenter toutes les permutations possibles sur un arbre.

On remarque facilement alors qu'il y a $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$ permutations possibles.

$n!$ se lit « $n$ factorielle ».

On note $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n = n!$ Par convention, $0! = 1$.

Il y a donc $n!$ permutations de $n$ éléments distincts.

$$P_n = n!$$

Les 4! = 24 permutations de 4 éléments distincts a, b, c, d :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| abcd | bacd | cabd | dabc | abdc | badc | cadb | dacb |
| acbd | bcad | cbad | dbac | acdb | bcda | cbda | dbca |
| adbc | bdac | cdab | dcab | adcb | bdca | cdba | dcba |

**Exemple type**

Nombre de dispositions de cinq personnes sur un banc de cinq places.

**Remarques sur la fonction factorielle**

La fonction factorielle croît extrêmement vite. Elle est tellement rapide que la plupart des calculatrices courantes ne peuvent pas calculer au-delà de 69!

Pourquoi 69 ?

Pour calculer au-delà de 69!, vous pouvez utiliser un logiciel puissant comme *Mathematica.*

### Notation cyclique

Une permutation de nombres peut être écrite en notation cyclique :

$$(2\ 4\ 5)\ (1\ 3)\ (6)$$

Cela signifie que 2 est remplacé par 4, 4 par 5, 5 par 2. 1 est remplacé par 3 et 3 par 1. 6 est remplacé par 6.

Si l'on part de 1 2 3 4 5 6, on aura après permutation 3 4 1 5 2 6.

**Exercice 1.8**

Soient les nombres entiers de 1 à 9 classés par ordre croissant.

**a.** À quelle permutation de ces nombres correspond la notation cyclique (1 4 6 3)(2 9 7)(5 8) ?
**b.** Écrivez en notation cyclique la permutation 1 5 8 2 6 4 9 3 7.
**c.** Combien de fois faut-il appliquer la permutation du point **a.** pour retrouver la séquence 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ?
**d.** Combien de fois faut-il appliquer la permutation du point **b.** pour retrouver la séquence 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ?

**Nombre d'inversions**

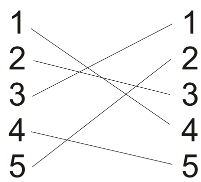
Le **nombre d'inversions** dénombre combien de fois un nombre plus grand se rencontre avant un plus petit dans la suite $i_1$, $i_2$, …, $i_n$. Si le nombre d'inversions est pair, la permutation est dite paire; dans le cas contraire, elle est impaire.

**Exemple**

La permutation 4 3 1 5 2 comporte six inversions : 4 est avant 1, 2 et 3, 3 est avant 1 et 2, et enfin 5 est avant 2. Cette permutation est donc paire.

**Méthode graphique**

On peut aussi trouver le nombre d'inversions à l'aide d'un dessin. On met sur deux colonnes les $n$ nombres de la permutation, puis on relie le chiffre de gauche qui a été remplacé par l'élément de droite. Le nombre d'inversions correspond au nombre d'intersections de segments.
Voici un exemple avec la permutation 4 3 1 5 2 :




Il y bien 6 intersections qui correspondent aux 6 inversions que l'on avait déjà calculées.

**Exercice 1.9***

**a.** Soit une suite de $n$ nombres entiers définissant une permutation. Montrez que si on permute deux nombres de cette suite, la parité de la permutation change toujours.

**b.** Samuel **Loyd** (1841-1911), l'inventeur du taquin, avait inversé l'ordre des pièces 14 et 15, et lancé le défi de reconstituer l'ordre naturel des petits carrés en les faisant coulisser.

Utilisez la propriété vue au point **a.** pour démontrer que c'est impossible.


## 1.4. Permutations avec répétitions

**Nombre de permutations avec répétitions**

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont identiques est plus petit que si tous les éléments sont distincts. Lorsque seuls $k$ éléments sont distincts ($k \leq n$), chacun d'eux apparaissant $n_1$, $n_2$, ..., $n_k$ fois, avec $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ et $n_i \geq 1$, on a :

La barre sur le $P$ signifie « avec répétitions ».

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

En effet, si chacune des $n_i$ places occupées par des éléments identiques ($i \in \{1, 2, ..., k\}$) était occupée par des éléments différents, le nombre de permutation serait alors à multiplier par $n_i\,!$, d'où :

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) \cdot n_1! \, n_2! \cdot \ldots \cdot n_k! = n!$$

Les $\frac{5!}{2!2!1!}$ permutations des 5 éléments a, a, b, c, c :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| aabcc | aacbc | aaccb | abacc | abcac | abcca | acabc | acacb | acbac | acbca |
| accab | accba | baacc | bacac | bacca | bcaac | bcaca | bccaa | caabc | caacb |
| cabac | cabca | cacab | cacba | cbaac | cbaca | cbcaa | ccaab | ccaba | ccbaa |

**Exemple type** Nombre d'anagrammes différentes que l'on peut former avec les lettres du mot « excellence ».

## 1.5. Arrangements simples

**Définition** Un **arrangement** est une collection de $p$ objets pris successivement parmi $n$ **en tenant compte de l'ordre d'apparition**. Il est dit **simple** si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.

**Nombre d'arrangements simples** Le nombre d'arrangements de $p$ éléments distincts choisis parmi $n$ est noté $A_p^n$ (dans certains livres, $p$ et $n$ sont inversés).
Le premier élément peut être choisi de $n$ façons différents, le deuxième peut alors prendre ($n$–1) valeurs, le troisième ($n$–2) valeurs et le $p$-ième élément ($n$–$p$+1) valeurs. D'où :

$$A_p^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Les 4·3·2 = 24 arrangements de 3 éléments choisis parmi a, b, c, d :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| abc | abd | acb | acd | adb | adc | bac | bad | bca | bcd | bda | bdc |
| cab | cad | cba | cbd | cda | cdb | dab | dac | dba | dbc | dca | dcb |

**Exemple type** Après les prolongations d'un match de football, le nombre de façons de choisir les 5 tireurs de penalties parmi les onze joueurs et l'ordre de passage.

## 1.6. Arrangements avec répétitions

**Nombre d'arrangements avec répétitions** Le nombre d'arrangements de $p$ éléments choisis parmi $n$ avec répétitions possibles est noté $\overline{A}_p^n$. Si les répétitions sont permises, alors tous les éléments peuvent prendre $n$ valeurs. On a donc, d'après le principe de décomposition :

$$\overline{A}_p^n = n^p$$

Les $3^2 = 9$ arrangements avec répétitions de 2 éléments choisis parmi a, b, c :

aa ab ac ba bb bc ca cb cc

**Exemple type** Nombre de numéros de téléphone composés de 7 chiffres.

## 1.7. Combinaisons simples

**Définition** Une **combinaison** est une collection de $p$ objets pris simultanément parmi $n$, donc **sans tenir compte de l'ordre d'apparition**. Elle est dite **simple** si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.

**Nombre de combinaisons simples** Le nombre de combinaisons de $p$ éléments choisis parmi $n$ est noté $C_p^n$.
Si l'on permute les éléments de chaque combinaison simple, on obtient tous les arrangements simples. Il y a donc $p!$ fois plus d'arrangements que de combinaisons, ce qui s'écrit :

$$A_p^n = p!\, C_p^n$$

Le nombre de combinaisons de $p$ éléments choisis parmi $n$ est donc :

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Les $\frac{3!}{2!1!} = 3$ combinaisons de 2 éléments choisis parmi a, b, c : ab ac bc

**Notation** Les $\binom{n}{p}$ sont les **coefficients binomiaux** (voir § 1.10).

**Exemple type** Nombre de mains possibles au bridge.

## 1.8. Combinaisons avec répétitions

**Nombre de combinaisons avec répétitions** Si les répétitions sont permises, le nombre de combinaisons de $p$ éléments choisis parmi $n$ est noté $\overline{C}_p^n$.
La démonstration de la formule est un peu compliquée. Comme les combinaisons avec répétitions sont assez rares, nous donnerons la formule sans commentaires :

$$\overline{C}_p^n = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,p!}$$

Les $\frac{4!}{2!2!} = 6$ combinaisons avec répétitions de 2 éléments choisis parmi a, b, c :

aa ab ac bb bc cc

**Exemple type** Nombre de dominos possibles avec 7 symboles différents possibles.

## 1.9. Exercices

Pour tous ces exercices, il s'agira tout d'abord de déterminer s'il s'agit d'une permutation, d'un arrangement ou d'une combinaison. **Demandez-vous toujours si l'ordre intervient ou non**. Si c'est le cas, c'est un arrangement ou une permutation ; sinon, c'est une combinaison. **Demandez-vous ensuite s'il y a des répétitions ou non**.

### Exercice 1.10

Combien un village doit-il avoir d'habitants au minimum pour que l'on soit sûr que deux personnes au moins ont les mêmes initiales (composées de 2 lettres) ?

### Exercice 1.11

Calculez $A_3^{100}$ sans calculatrice.

### Exercice 1.12

6 piles de marques différentes sont dans un tiroirs dont 3 sont neuves et 3 déchargées.

**a.** Combien peut-on réaliser d'échantillons différents de 3 piles ?
**b.** Combien, parmi ces échantillons, contiennent 3 piles neuves ?
**c.** Combien contiennent au moins une pile neuve ?

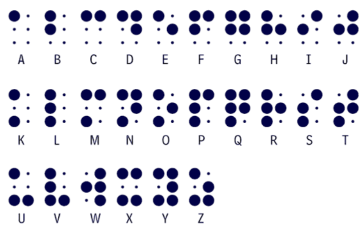
### Exercice 1.13

Les douze tomes d'une encyclopédie sont rangés au hasard.

**a.** Combien y a-t-il de manières de les classer ?
**b.** Parmi ces classements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte (dans cet ordre) ?

### Exercice 1.14

Les symboles de l'écriture braille sont formés d'un assemblage de six points en relief, comme le montre l'image ci-dessous. Combien de symboles différents peut-on fabriquer selon ce principe ?




### Exercice 1.15

Combien d'anagrammes distinctes peut-on former avec les lettres des mots :

**a.** deux **b.** abracadabra **c.** sociologique

### Exercice 1.16

Dans un passé relativement proche, chaque classe du lycée cantonal devait avoir une délégation de trois élèves : un délégué, un suppléant du délégué et un laveur de tableau. Une classe est composée de 11 filles et 3 garçons.

**a.** Combien y a-t-il de délégations possibles ?

Combien y a-t-il de délégations possibles…

**b.** si le délégué et le suppléant doivent être de sexe différent ?
**c.** si le laveur de tableau doit être un garçon ?
**d.** si les deux sexes doivent être présents dans la délégation ?

### Exercice 1.17

Un représentant s'apprête à visiter cinq clients. De combien de façons peut-il faire cette série de visites...

**a.** s'il les fait toutes le même jour ?
**b.** s'il en fait trois un jour et deux le lendemain ?

### Exercice 1.18

**a.** Combien de plaques d'immatriculation de véhicules peut-on former si chaque plaque contient deux lettres différentes suivies de trois chiffres différents ?
**b.** Même problème mais en interdisant que le premier chiffre soit un 0.

### Exercice 1.19

Une maîtresse de maison a onze amis très proches. Elle veut en inviter cinq à dîner.

**a.** Combien de groupes différents d'invités existe-t-il ?
**b.** Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux ne peuvent venir qu'ensemble ?
**c.** Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux sont en mauvais termes et ne veulent plus se voir ?

### Exercice 1.20

Un atelier comprend 15 ouvriers de même spécialité, 8 femmes et 7 hommes. On veut former une équipe de 5 ouvriers.

**a.** Combien d'équipes différentes peut-on former ?
**b.** Combien d'équipes comportant 3 hommes peut-on former ?

### Exercice 1.21

Combien y a-t-il de pièces différentes dans un jeu de dominos si sur chaque pièce figurent deux symboles choisis parmi {blanc, 1, 2, 3, 4, 5, 6} ?

**Exercice 1.22**

Un tiercé est l'ordre d'arrivée des trois premiers chevaux. 17 chevaux sont au départ d'une course hippique. Combien y a-t-il de tiercés possibles :

**a.** au total,
**b.** gagnants dans l'ordre,
**c.** gagnants mais dans le désordre ?

**Exercice 1.23**

Lors d'un examen, un élève doit répondre à 10 questions sur 13.

**a.** Combien de choix a-t-il ?
**b.** Combien de possibilités a-t-il s'il doit répondre aux deux premières questions ?
**c.** Combien s'il doit répondre à la première ou à la deuxième question, mais pas aux deux ?
**d.** Combien s'il doit répondre à exactement 3 des 5 premières questions ?
**e.** Combien s'il doit répondre à au moins 3 des 5 premières questions ?

**Exercice 1.24**

À partir d'un jeu de 36 cartes, de combien de façons peut-on choisir exactement :

**a.** deux cartes rouges et un pique ?
**b.** deux rois et un carreau ?

**Exercice 1.25**

Au « Swiss Lotto », il faut cocher 6 numéros sur 45.

**a.** Combien y a-t-il de grilles possibles ?
**b.** Combien y a-t-il de grilles avec exactement trois numéros gagnants (sans tenir compte du numéro complémentaire) ?

**Exercice 1.26**

Dans une classe de dix élèves, de combien de façons peut-on choisir trois élèves pour tenir les rôles de Cléante, Valère et Harpagon ?

**Exercice 1.27**

D'un jeu de 36 cartes, on veut choisir une main de 9 cartes. Combien y a-t-il de mains...

**a.** ne comportant que des cartes noires (trèfle ou pique) ?
**b.** ne comportant que des figures (valet, dame, roi ou as) ?
**c.** comportant 4 as ?
**d.** comportant 5 figures, dont 3 noires ?
**e.** comportant 3 as, 3 dames et 3 carreaux ?

**Exercice 1.28**

En 1961, Raymond **Queneau** a publié une œuvre majeure de la littérature combinatoire. Malheureusement, le début du titre vous a échappé, mais vous vous rappelez que cela se termine par « ... milliards de poèmes ».
Le livre contient 10 sonnets de 14 alexandrins chacun. Chaque page du livre contient un sonnet et est découpée en languettes contenant chacune un alexandrin. On peut ainsi composer un poème par exemple avec le premier alexandrin du cinquième sonnet, le deuxième alexandrin du neuvième sonnet, et ainsi de suite jusqu'au quatorzième alexandrin.

**a.** Quel est alors le titre du livre de *Queneau* ?
**b.** À raison d'un poème toutes les minutes, combien d'années faudrait-il pour lire tous les poèmes possibles ?

**Exercice 1.29**

Résolvez **a.** $A_2^n = 72$ **b.** $A_4^n = 42\,A_2^n$ **c.** $2\,A_2^n + 50 = A_2^{2n}$

**Exercice 1.30**

Sur une feuille quadrillée, dessinez un rectangle de 10 carrés de long et de 6 carrés de large.
En se déplaçant uniquement vers la droite ou vers le haut en suivant les lignes du quadrillage, combien y a-t-il de chemins pour aller du coin inférieur gauche au coin supérieur droit du rectangle ?

### Exercice 1.31

Quatre hommes, au bord d'un précipice, doivent traverser la passerelle qui mène sur l'autre bord. Mais il y a un problème : la passerelle n'est pas très solide et on ne peut pas la franchir à plus de deux. De plus, il faut se munir d'une torche, car la nuit est tombée et certaines planches sont pourries. Notons pour finir que le pas doit toujours s'accorder sur celui de la personne la plus lente.

André traverse en 1 minute,
Boris en 2 minutes,
Claude en 5 minutes et
Denis, plus peureux, met 8 minutes.

Ils n'ont qu'une seule torche, et ils ne peuvent pas se la lancer d'un bord du ravin à l'autre ; il faut donc la rapporter à chaque fois.

**a.** Combien y a-t-il de façons de faire traverser cette passerelle à ces quatre personnes en cinq passages ?

**b.** Quelle est la solution la plus rapide ?

### Exercice 1.32

La série *WW* dans le bloc de gauche indique un garage.


La nouvelle immatriculation française se base sur le modèle AA-111-AA (deux lettres, trois chiffres, deux lettres) en vigueur depuis 1994 en Italie.

**a.** Combien y a-t-il de plaques d'immatriculation différentes ?

En réalité, il y en a moins que cela, car on exclut les lettres *I*, *O* et *U* (du fait de leur trop grande ressemblance avec le *1*, le *0* et le *V*) ainsi que les séries *SS* et *WW* du bloc de gauche et la série *SS* du bloc de droite. De plus, les séries de chiffres démarrent à 001.

**b.** Avec ces contraintes, combien y a-t-il de plaques d'immatriculation différentes ?

**c.** Les combinaisons de lettres prêtant à rire *KK*, *PD*, *PQ*, *QQ*, et *WC* ne sont cependant pas supprimées. Si c'était le cas, combien y aurait-il de plaques d'immatriculation ?

## 1.10. Coefficients binomiaux

### Triangle de Pascal

En fait, ce triangle était connu des mathématiciens chinois au 12e siècle déjà puisque **Zhu Shi Jie** s'y intéressait. *Pascal* en fait une étude détaillée en 1653, c'est pourquoi il porte son nom.

Blaise **Pascal**
(Clermont-Ferrand, 19/6/1623 - Paris, 19/8/1662)

Le triangle de **Pascal** se construit ligne par ligne : chaque terme est l'addition des deux nombres de la ligne supérieure qui lui sont adjacents.

$p$=0
↗ $p$=1
$n$=0 ← 1 ↗ $p$=2
$n$=1 ← 1 1 ↗ $p$=3
$n$=2 ← 1 2 1 ↗ $p$=4
$n$=3 ← 1 3 **3** **1** ↗ $p$=5
$n$=4 ← 1 4 6 **4** 1 ↗ $p$=6
$n$=5 ← 1 5 10 10 5 1 ↗ $p$=7
$n$=6 ← 1 6 15 20 15 6 1 ↗
$n$=7 ← 1 7 21 35 35 21 7 1

Exemple : on voit que le **4** est égal à **3** + **1**.

Ce triangle permet de déterminer les coefficients binomiaux sans connaître la formule.

Par exemple, le nombre $C_3^4 = \frac{4!}{3!1!}$ se lit à l'intersection de la ligne $n$ = 4 et de la diagonale $p$ = 3.

**Curiosité** Dans ce triangle, si tous les nombres pairs sont coloriés en blanc et tous les nombres impairs en noir, le triangle de **Sierpinski** apparaît.
Essayez !

### Binôme de Newton

Vous connaissez les identités binomiales depuis longtemps déjà :

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Mais quelles sont les formules pour des degrés supérieurs ?
En comparant les formules de degré 0, 1, 2 et 3 avec les lignes 0, 1, 2 et 3 du triangle de Pascal, vous constaterez que les coefficients des identités binomiales correspondent avec les nombres du triangle. Donc :

C'est d'ailleurs pour cette raison qu'on les appelle coefficients binomiaux !

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

etc.

Soit $n$ un nombre entier strictement positif. La formule générale du **binôme de Newton** est :

*Rappel*

$\binom{n}{p}$ est une autre notation de $C_p^n$ .

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

### Formules concernant les coefficients binomiaux

En étudiant bien le triangle de Pascal, on peut observer les propriétés suivantes :

Il y a toujours un 1 dans les bords : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Le triangle est symétrique par rapport à la verticale : $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

Par la construction du triangle, on a : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Vérifiez encore que : $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m}{n+1}$

### Exercice 1.33

**a.** Développez $(a+b)^7$.
**b.** Écrivez le cinquième terme du développement de $(r{\cdot}s^2 + 3)^{16}$.

## 1.11 Ce qu'il faut absolument savoir

| | |
|---|---|
| Maîtriser le principe des tiroirs | ❏ ok |
| Maîtriser le principe de décomposition | ❏ ok |
| Reconnaître à quel type de dénombrement on a affaire en lisant une donnée | ❏ ok |
| Calculer tous les types de dénombrement sur sa calculatrice | ❏ ok |
| Connaître le triangle de Pascal et les coefficients binomiaux | ❏ ok |