SOMMAIRE

1. Rappel : espace probabilisé **2**
1.1. Univers 2
1.2. Tribu 2
1.3. Probabilité 2
2. Probabilité conditionnelle **3**
2.1. Théorème : construction d'un nouvelle probabilité relativement à un événement donné 3
2.2. Définition : probabilité conditionnelle 3
2.3. Définition : système complet d'événements 4
2.4. Théorème des probabilités totales 4
2.5. Corollaire : formule de Bayes 5
3. Indépendance d'événements **7**
3.1. Théorème : trois assertions équivalentes 7
3.2. Définition : *p*-indépendance 7
3.3. Propriétés des événements indépendants 9

1. Rappel : espace probabilisé (facultatifs)

Lors de la réalisation d'une expérience aléatoire, on est amené à choisir successivement :

1. Un univers Ω

   Il représente l'ensemble de toutes les issues **envisagées** de l'expérience. Il est donc fonction de l'idée de modélisation ***a priori*** que l'on se fait de l'expérience. Si lors du lancer d'une pièce de monnaie on considère usuellement qu'il y a deux issues "PILE" et "FACE", rien n'empêche d'en rajouter une troisième, par exemple "TRANCHE". C'est, à chacun (ou à chaque énoncé) de le définir. À défaut, on considère tacitement, qu'il s'agit de l'univers usuellement utilisé dans telle ou telle situation.

2. Une tribu $\mathcal{T}$

   Il s'agit d'une partie de $\wp(\Omega)$.

   Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés événements. Il s'agit des issues discernables ou mesurables par l'observateur.

   Si Ω est discret (***a fortiori*** si Ω est fini), on peut choisir $\mathcal{T} = \wp(\Omega)$.

   Cependant, si Ω a la puissance du continu (par exemple $\Omega = [0, 1]$), on ne peut plus choisir $\mathcal{T} = \wp(\Omega)$ car certaines parties de Ω peuvent être extrêmement complexes. On fait donc le choix d'une partie stricte de $\wp(\Omega)$ vérifiant un minimum structurel :

   - $\varnothing \in \mathcal{T}$ et $\Omega \in \mathcal{T}$
   - $A \in \mathcal{T} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$
   - $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille d'éléments de $\mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

   Ces propriétés permettront de calculer de manière commode des probabilités.

   Remarquons que, dans le cas où Ω est discret, ces propriétés sont évidemment vérifiées par $\mathcal{T} = \wp(\Omega)$.

3. Une application p de $\mathcal{T}$ dans $[0, 1]$

   Application vérifiant :

   - $p(\Omega) = 1$
   - $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille d'événements deux à deux disjoints $\Rightarrow p\left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p(A_n)$ (Propriété de σ-additivité)

   (En conséquence, on a : $p(\Omega \cup \varnothing) = p(\Omega) + p(\varnothing)$ d'où $p(\varnothing) = 0$)

   Une telle application p s'appelle probabilité.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ s'appelle un espace probabilisé.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est choisir un tel triplet.

Exemple :

Lors du lancer d'une pièce de monnaie, on convient que $\Omega = \{P ; F\}$

On choisit $\mathcal{T} = \wp(\Omega) = \{\varnothing ; \{P\} ; \{F\} ; \Omega\}$ (Ensemble des événements dont on pourra calculer la probabilité)

On définit usuellement $p : \mathcal{T} \to [0, 1]$ par $p(\{P\}) = p(\{F\}) = \frac{1}{2}$ (probabilité dite uniforme ou équirépartie)

Si l'on pense que la pièce est truquée, on peut choisir une autre probabilité.

2. Probabilité conditionnelle

2.1. Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé.

Soit B un événement tel que $p(B) \neq 0$. L'application p_B de $\mathcal{T}$ dans $[0, 1]$ définie par

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad \text{pour tout } A \in \wp(\Omega)$$

est une probabilité sur $\mathcal{T}$.

Démonstration :

On a : $$p_B(\Omega) = \frac{p(\Omega \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} = 1$$

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'événements deux à deux disjoints. On a :

$$p_B\left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \frac{p\left(\left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap B\right)}{p(B)} = \frac{p\left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap B\right)}{p(B)}$$

Or, les événements $A_n \cap B$ sont deux à deux disjoints puisque les A_n le sont, donc :

$$p\left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap B\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p(A_n \cap B)$$

D'où : $$p_B\left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \frac{\sum_{n \in \mathbb{N}} p(A_n \cap B)}{p(B)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{p(A_n \cap B)}{p(B)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_B(A_n)$$

L'application p_B est bien une probabilité, le théorème est donc démontré.

2.2. Définition

L'application p_B ainsi définie s'appelle "probabilité B-conditionnelle".

On note souvent (et abusivement) $A \mid B$ l'événement "***A* est réalisé**" sachant que B l'est.

On note aussi $p(A \mid B)$ au lieu de $p_B(A)$.

On a ainsi : $$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Remarques :

- la relation ci-dessus est très utile également dans l'autre sens :

$$p(A \cap B) = p(A \mid B)\, P(B) = p(B \mid A)\, P(A)$$

- l'événement contraire de $A \mid B$ est $\overline{A} \mid B$ ("A n'est pas réalisé" sachant que B l'est).
- cas particulier : si $A \subset B$. Alors, $p(A) \leqslant p(B)$ et $p(A \cap B) = p(A)$. D'où $p(A \mid B) = \dfrac{p(A)}{p(B)}$

Exemple :

1. Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personne vaccinées. Le vaccin est-il efficace ?

   Pour le savoir, on compare la probabilité d'être malade $p(M)$ avec celle d'être malade sachant que l'on a été vacciné $p(M \mid V)$.

   On peut aussi comparer $p(M \mid V)$ et $p(M \mid \bar{V})$, on trouve $p(M \mid \bar{V}) = 3{,}25\, p(M \mid V)$

   On a : $p(V) = \dfrac{1}{3}$ et $p(V \mid M) = \dfrac{2}{15}$.

   $$p(M \mid V) = \frac{p(M \cap V)}{p(V)} = \frac{p(V \mid M)\, p(M)}{p(V)} = \frac{2}{15} \times 3\, p(M) = \frac{2}{5}\, p(M).$$

   On a : $p(M \mid V) < p(M)$. Le vaccin est donc efficace.

2. On suppose de plus que sur cent personne vaccinées, huit sont malades. Quelle est la proportion de malades dans la population ?

   On a donc : $p(M \mid V) = \dfrac{8}{100} = \dfrac{2}{25}$

   Or, $p(M \mid V) = \dfrac{2}{5}\, p(M)$ d'où : $p(M) = \dfrac{1}{5}$

   Il y a donc 20% de malades.

2.3. Définition *Système complet d'événements*

On dit qu'une famille $(B_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est un système complet d'événements lorsque :

- $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \ (i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \varnothing)$ (On dit alors que les B_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont deux à deux disjoints ou incompatibles)
- $\displaystyle\coprod_{k=1}^{n} B_k = \Omega$

Autrement dit, les B_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, constituent une partition de Ω.

2.4. Théorème *Probabilité totales*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé.

Si une famille $(B_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est un système complet d'événements alors pour tout événement A, on a :

$$p(A) = \sum_{k=1}^{n} p(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} p(A \mid B_k)\, p(B_k)$$

Démonstration :

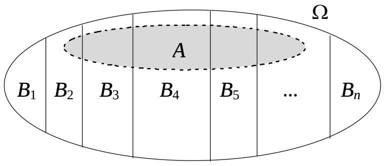
Les ensembles $A \cap B_1, A \cap B_2, \ldots, A \cap B_n$ constituent une partition de A : $A = \displaystyle\coprod_{k=1}^{n} A \cap B_k$ (union disjointe).

D'après l'additivité de la probabilité pour les ensembles disjoints on a :

$$p(A) = p\left(\coprod_{k=1}^{n} A \cap B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} p(A \cap B_k)$$

Et comme $p(A \cap B_k) = p(A \mid B_k)\, p(B_k)$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$p(A) = \sum_{k=1}^{n} p(A \mid B_k)\, p(B_k)$$



Remarques :

- La formule des probabilités totales reste vraie si B_1, B_2, ... , B_n sont des événements deux à deux incompatibles et si $A \subset \coprod_{k=1}^{n} B_k$.
- On a en particulier : $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$

Exemple :

Le feu tricolore. Un automobiliste arrive à proximité -disons une dizaine de mètres- d'un feu tricolore. On suppose qu'aucun véhicule ne le précède. On suppose que, si le feu est vert à ce moment là, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 99/100. Si le feu est orange, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 3/10 et enfin si le feu est rouge, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 1/100 (quelques fous...). Le cycle du feu tricolore dure une minute : vert : 25s, orange : 5s et rouge : 30s.

Quelle est la probabilité que l'automobiliste passe sans s'arrêter à ce feu tricolore ?

Soient A l'événement "l'automobiliste passe sans s'arrêter au feu" et V (resp O et R) = "le feu est vert (resp orange et rouge)".

Comme $V \cup O \cup R = \Omega$, on a :

$$P(A) = P(A \mid V)P(V) + P(A \mid O)P(O) + P(A \mid R)P(R) = \frac{99}{100} \times \frac{5}{12} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{100} \times \frac{1}{2} = \frac{177}{400} < \frac{1}{2} \ldots$$

2.5. Corollaire *Formule de Bayes*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé.

Soit $(B_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ un système complet d'événements.

Soit A un événement tel que $p(A) \neq 0$.

Alors : $$\forall j \in [\![1, n]\!],\ p(B_j \mid A) = \frac{p(A \mid B_j)\, p(B_j)}{\sum_{k=1}^{n} p(A \mid B_k)\, p(B_k)}$$

Démonstration :

D'après la formule des probabilité totales :

$$p(A) = \sum_{k=1}^{n} p(A \mid B_k)\, p(B_k)$$

D'où : $$\forall j \in [\![1, n]\!],\ p(B_j \mid A) = \frac{p(A \cap B_j)}{p(A)} = \frac{p(A \mid B_j)\, p(B_j)}{\sum_{k=1}^{n} p(A \mid B_k)\, p(B_k)}$$

Remarque : on peut toujours se passer de cette formule lourde.

Exemple :

Un individu est tiré au hasard d'une population dans laquelle une personne sur 10000 est séropositive.

On lui fait passer un test de dépistage de séropositivité.

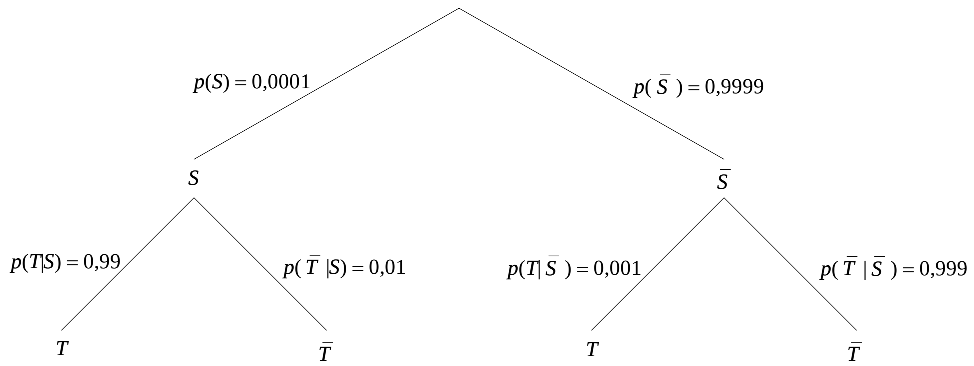
Sachant que le test est positif, **quelle est la probabilité que la personne soit effectivement séropositive** ?

Données :

- Si on est séropositif, alors le test est positif avec une probabilité de 0,99.
- Si on n'est pas séropositif, alors le test est positif avec une probabilité de 0,001.

Notons S l'événement "l'individu est séropositif" et T "le test est positif"

Illustrons la situation à l'aide d'un arbre :



$$p(S \mid T) = \frac{p(S \cap T)}{p(T)} = \frac{p(T \mid S)\, p(S)}{p(T)} = \frac{p(T \mid S)\, p(S)}{p(T \mid S)\, p(S) + p(T \mid \bar{S})\, p(\bar{S})} = \frac{1}{1 + \frac{p(T \mid \bar{S})\, p(\bar{S})}{p(T \mid S)\, p(S)}} \simeq 0,090 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Conclusion : même si le test est positif, on a environ 9 chances sur 10 de ne pas être malade ! (Ouf !)

3. Indépendance d'événements

<u>3.1. Théorème</u>

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé.

Soient $A, B \in \mathcal{T}$ tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1) $p_B(A) = p(A)$

2) $p_A(B) = p(B)$

3) $p(A \cap B) = p(A)\, p(B)$

<u>Démonstration</u> :

$$p_B(A) = p(A) \iff p(A \cap B) = p(A)\, p(B) \iff p_A(B) = p(B)$$

<u>3.2. Définition</u> **p-indépendance**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé.

Soient $A, B \in \mathcal{T}$.

On dit que A et B sont p-indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A)\, p(B)$.

<u>Remarques immédiates</u> :

- Cette définition permet d'étendre l'indépendance à des événements de probabilité nulle
- On peut généraliser cette définition à n événements ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) A_1, A_2, ... , A_n qui seront dit "indépendants dans leur ensemble" lorsque :

$$p\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} p(A_k)$$

- **La notion d'indépendance dépend de la probabilité p.** Cependant lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, on parlera d'événements indépendants au lieu de p-indépendants.

<u>Exemples</u> :

- On lance deux dés et on désigne par A l'événement "le premier dé amène un nombre pair", par B l'événement "le deuxième dé amène un nombre impair" et par C l'événement "les deux dés amènent un nombre pair".

  On a : $p(A) = \frac{1}{2}$; $p(B) = \frac{1}{2}$; $p(C) = \frac{1}{4}$; $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$; $p(A \cap C) = \frac{1}{2}$; $p(B \cap C) = 0$. (Arbres)

  On conclut : A et B sont indépendants ; A et C sont dépendants ; B et C sont dépendants.
- On lance une pièce deux fois de suite et on considère les événements A_1 = "FACE au premier lancer" et A_2 = "FACE au second lancer". On a $\Omega = \{FF ; FP ; PF ; PP\}$. $p(A_1) = 0{,}5$; $p(A_2) = 0{,}5$; $p(A_1 \cap A_2) = 0{,}25$. Les événements sont indépendants, ce qui est rassurant.
- Deux événements A et B non impossibles et incompatibles sont toujours dépendants puisque $p(A \cap B) = 0$ et $p(A)p(B) \neq 0$.

Remarque : il faut être méfiant avec la notion d'indépendance. Deux événements peuvent intuitivement sembler indépendants sans pour autant l'être après calculs. Par exemple, considérons l'expérience suivante :

Quatre lots sont répartis entre 5 personne P_1, ... , P_5 de la façon suivante : chaque lot est attribué par tirage au sort d'une personne parmi les 5.

L'univers Ω de cette expérience aléatoire est l'ensemble des 4-listes de $\{P_1 ; ... ; P_5\}$. Il y en a 5^4.

Pour tout $k \in [\![1, 5]\!]$, notons E_k l'événement décrit par "la personne P_k ne reçoit aucun lot".

Les événements E_k, $1 \leqslant k \leqslant 5$, sont-ils indépendants ? Réponse : non.

En effet, soient h et k distincts compris entre 1 et 5.

L'événement E_k est constitué des 4-listes de $\{P_1 ; ... ; P_5\} \setminus \{P_k\}$. Il y en a 4^4.

Avec la probabilité uniforme P sur Ω, on a : $p(E_k) = \dfrac{4^4}{5^4}$. De même $p(E_h) = \dfrac{4^4}{5^4}$.

$E_k \cap E_h$ est constitué des 4-listes de $\{P_1 ; ... ; P_5\} \setminus \{P_k ; P_h\}$. Il y en a 3^4. Donc $p(E_k \cap E_h) = \dfrac{3^4}{5^4}$

Et comme $p(E_k).p(E_h) = \dfrac{4^4}{5^4} \times \dfrac{4^4}{5^4}$, on a : $p(E_k \cap E_h) \neq p(E_k).p(E_h)$

Exercice :

Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches.

Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches.

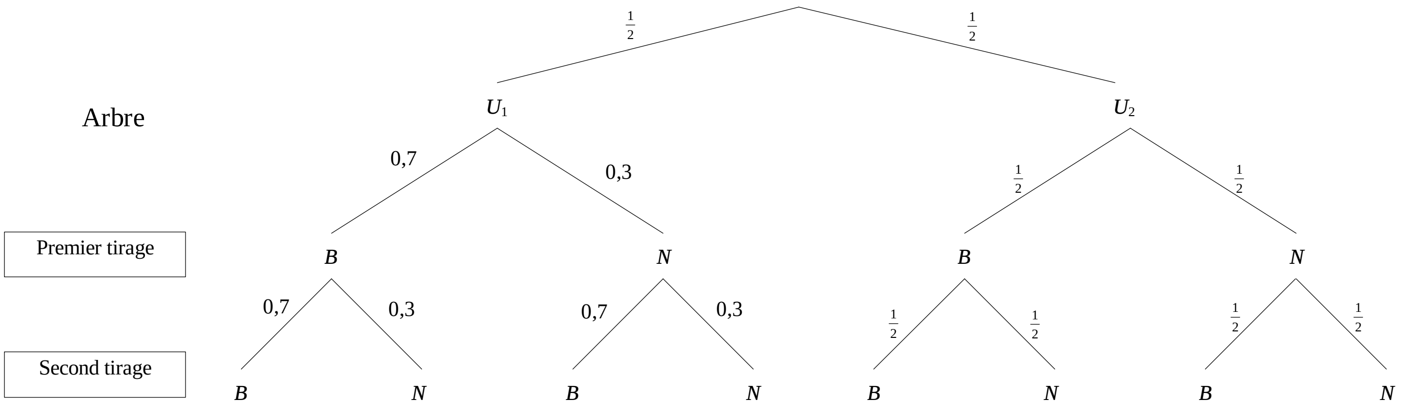
On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie. On note :

B_1 l'événement "obtenir une boule blanche au premier tirage"

B_2 l'événement "obtenir une boule blanche au second tirage"

Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Arbre



Comparons $p(B_1)p(B_2)$ et $P(B_1 \cap B_2)$

L'événement B_1 correspond au chemin $U_1\ B$ ou au chemin $U_2\ B$

$p(B_1) = 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}35 + 0{,}25 = 0{,}6$

L'événement B_2 correspond aux chemins U_1BB ; U_1NB ; U_2BB ; U_2NB

$p(B_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}6$

Donc $p(B_1)p(B_2) = 0{,}36$.

L'événement $B_1 \cap B_2$ correspond aux chemins : U_1BB ; U_2BB

$p(B_1 \cap B_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}37$.

Comme $p(B_1)p(B_2) \neq p(B_1 \cap B_2)$, on déduit : **$B_1$ et B_2 ne sont pas indépendants.**

Remarque : ce résultat peut paraître surprenant. Il est dû à la composition différente entre boules blanches et noires dans les deux urnes et qu'on ne sait pas, a priori, dans quelle urne seront effectués les tirages.

3.3. Propriétés des événements indépendants

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé.

1) Si A et B sont des événements indépendants, alors A et $\Omega \setminus B$ aussi.
2) Si [(A et B sont indépendants), (A et C sont indépendants) et ($B \subset C$)] alors A et $C \setminus B$ sont indépendants.
3) Tout événement A est indépendant de l'événement impossible (resp. certain).
4) Si $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles et si A est indépendant de chaque A_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, alors A est indépendant de $\coprod_{k=1}^{n} A_k$.

Démonstration :

1) D'après la formule des probabilités totales :

$$p(A) = p(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

Et comme A et B sont indépendants :

$$p(A) = p(A)p(B) + P(A \cap \overline{B})$$

D'où :

$$P(A \cap \overline{B}) = p(A)(1 - p(B) = p(A)p(\overline{B})$$

Donc A et $\overline{B}$ sont indépendants.

On en déduit : A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

2) $p(A \cap (C \setminus B)) = p((A \cap C) \setminus (A \cap B)) \overset{B \subset C}{=} p(A \cap C) - p(A \cap B) = p(A)p(C) - p(A)p(B) \overset{B \subset C}{=} p(A)p(C \setminus B)$

Donc A et $C \setminus B$ sont indépendants.

3) $p(A \cap \varnothing) = p(\varnothing) = 0 = p(\varnothing)p(A)$

$p(A \cap \Omega) = p(A) = p(A)p(\Omega)$

4) $p\left(A \cap \coprod_{k=1}^{n} A_k \right) = p\left(\coprod_{k=1}^{n} A \cap A_k \right) = \sum_{k=1}^{n} p(A \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} p(A)\,p(A_k) = p(A) \sum_{k=1}^{n} p(A_k) = p(A)\,p\left(\coprod_{k=1}^{n} A_k \right)$