Resumen

En este trabajo se presenta el método de cuadratura Gaussiana para calcular integrales.

1. Introducción

Este es un método de aproximación de una integral definida de una función, busca obtener el resultado exacto al integrar polinomios de grado 2n-1 o menos, donde n es la cantidad de nodos escogidos en el intervalo [a, b]. A diferencia de las fórmulas de Newton-Cotes, la cuadratura Gaussiana selecciona los puntos de evaluación de manera óptima, y no en una forma igualmente espaciada. Se escogen nodos en el intervalo [a,b], y coeficientes para la aproximación [1].

2. Metodología

Se aproxima la integral de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{1}$$

Supongamos que se escogen dos nodos y se quieren determinar los coeficientes c_i, y que el intervalo de integración es a = -1.0 y b = 1.0,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2), \tag{2}$$

como se tienen 2n parámetros a elegir (n coeficientes y n nodos), se tendrá máximo un polinomio de grado 2n-1, ya que este contiene 2n parámetros, por lo tanto, se tendría un polinomio de grado 3: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, así:

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x_3)dx = a_0 \int 1dx + a_1 \int x dx + a_2 \int x^2 dx + a_3 \int x^3 dx,$$

esta fórmula produce resultados exactos cuando f(x) = 1, x, x^2, x_3, y el sistema de ecuaciones tiene solución única:

$$c_1 = 1, c_2 = 1, x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

por lo tanto, la ec. (2) se aproxima a:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 1 \cdot f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1 \cdot f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Con está fórmula, es posible encontrar los coeficientes de polinomios de grado superior, sin embargo, se pueden obtener también utilizando los polinomios de Legendre. La ventaja de estos polinomios es que sus raíces son diferentes, se encuentran en el intervalo (-1, 1), y tienen simetría en el origen. Para calcular los coeficientes:

$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx. \tag{3}$$

Además, como la integral está un intervalo arbitrario [a, b] se tiene que hacer un cambio de variable a otra integral en el intervalo [-1, 1]:

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left[(b-a)t + (a+b)\right],$$

por lo que la integral a evaluar se vuelve:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}\left[(b-a)t + (a+b)\right]\right) \frac{b-a}{2} dt. \tag{4}$$

Algorithm 1 Cuadratura Gaussiana

Entrada: Cantidad de nodos: int n; polinomio a utilizar: P2, P3, P4; función a evaluar: double function(double x); límites de integración: double a, double b.
Salida: Solución aproximada de la integral.

function FUNCTION(double x)
    Función a integrar.
function P2((double x))
    Polinomio Legendre grado 2: $x^2 - 1/3$.
function P3((double x))
    Polinomio Legendre grado 3: $x^3 - (3/5)x$.
function P4((double x))
    Polinomio Legendre grado 4: $x^4 - (6/7)x^2 + (3/35)$.
function BISECTION(int n, double f(double x), double a, double b, double TOL, double MaxIter)
    Resolver las raíces de P2, P3 y P4 utilizando el método de bisección.
function LI(int n, double x, double xi[], int i)
    Función a integrar para encontrar los coeficientes.
function CI(int n, double f(double x), int raiz)
    Encontrar los coeficientes Ci utilizando el método de Simpson (o cualquier otro método de integración) en el intervalo -1 a 1.

Función principal: GaussQuadra (cuadratura de Gauss)
xi = raíces de cada polinomio
c = (b-a)/2
sum = 0
for $i = 0; i < n; i++$ **do**
    sum += Ci(n, grado, i)*function((b-a)/2 * xi[i] + (a+b)/2)
integral = sum*(b-a)/2
return: integral.

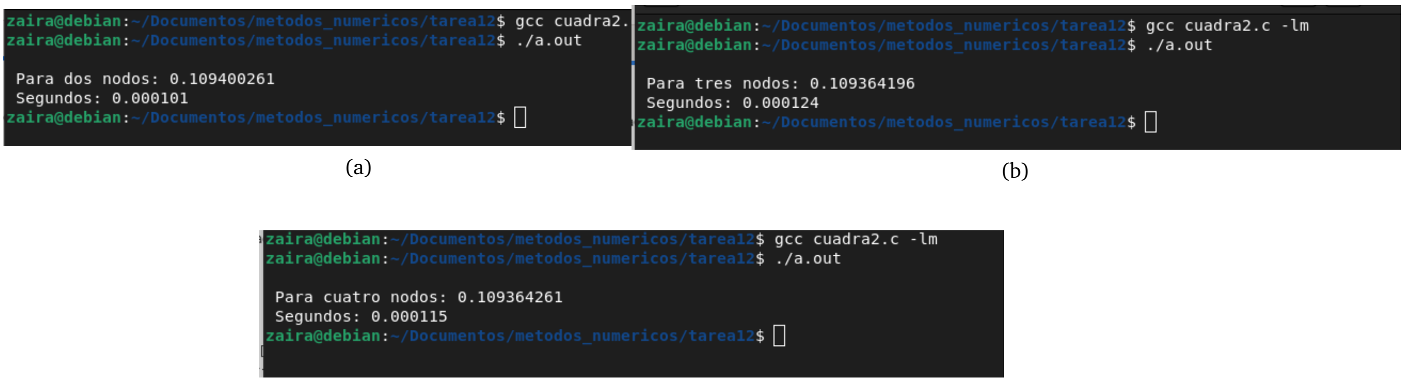
---

3. Resultados

Se utilizó la función:

$$\int_{1}^{1,5} e^{-x^2} dx \approx 0{,}109364260,$$

para 2, 3 y 4 nodos y se obtuvo de resultado:



(a) (b) (c)

Figura 1: Resultados aplicando la cuadratura de Gauss

4. Conclusiones

Una ventaja de este método, es que sólo depende de la cantidad de nodos a escoger y no de la cantidad de intervalos como en los métodos de Newton-Cotes, donde había diferencias significativas conforme se aumentara la cantidad de intervalos. Sin embargo, para una mejora del método, se debe de programar para todos los polinomios de Legendre y como se mostró, se resuelvan sus raíces y coeficientes antes de integrar. Sin embargo, aún con un polinomio de grado dos, se obtuvieron buenos resultados.

Referencias

[1] R.L. Burden, J.D. Faires, and A.M. Burden. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 2015.