# Tarea 6:
# Valores y vectores propios método Jacobi



**Resumen**

En este trabajo se utiliza el método de Jacobi para encontrar valores y vectores propios de una matriz simétrica con entradas reales.

## 1. Introducción

El método de Jacobi es un algoritmo para calcular todas las parejas de eigenvalores-eigenvectores de una matriz simétrica. La idea del método, es aplicar rotaciones consecutivas a la matriz de lado derecho y lado izquierdo para hacer ceros los términos distintos de la diagonal. La matriz que se utiliza para hacer estas rotaciones se conoce como matriz de Jacobi, es una matriz identidad excepto por cuatro elementos: $a_{ij}, a_{ii}, a_{jj}, a_{ji}$, donde $a_{ij}$ es el término que buscamos hacer cero. Existen distintos enfoques para el desarrollo de este método, sin embargo, conociendo las transformaciones, es posible hacer los cambios en una sólo matriz, reduciendo el uso de memoria en el programa que se utilizará.

## 2. Metodología

Sea A una matriz simétrica cuadrada de dimensión nxn,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & a_{ij} & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & a_{jj} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

de la cual queremos encontrar sus eigenvalores y eigenvectores, la matriz de Jacobi estará dada por:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & cos\theta & -sin\theta & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & sin\theta & cos\theta & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

y lo que se hace de forma iterada es:

$$\Lambda = J^T A J \tag{3}$$

donde $\Lambda$ es la matriz de eigenvalores. Cuando se multiplica $AJ$ se obtiene una relación para los nuevos valores de a:

$$b_{li} = a_{li}cos\theta + a_{lj}sen\theta \tag{4}$$
$$b_{lj} = a_{li}cos\theta - a_{lj}sen\theta \tag{5}$$

y al aplicar la transpuesta por los nuevos valores de A, se obtiene:

$$c_{im} = a_{im}cos\theta + a_{jm}sen\theta \tag{6}$$
$$c_{jm} = a_{jm}cos\theta - a_{im}sen\theta \tag{7}$$

Para obtener el ángulo por el cual se debe de multiplicar, igualamos a cero el término $c_{ij}$. Es decir,

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{ij}cos^2\theta - a_{ii}sin\theta cos\theta + a_{jj}cos\theta sin\theta + a_{ji}sin^2\theta \\ 0 &= a_{ij}cos^2\theta - a_{ii}sin\theta cos\theta + a_{jj}cos\theta sin\theta + a_{ji}sin^2\theta \end{aligned}$$

y como A es simétrica:

$$\begin{aligned} 0 &= a_{ij}(cos^2\theta - sin^2\theta) + (a_{jj} - a_{ii})sin\theta cos\theta \\ 0 &= a_{ij}cos2\theta + \frac{1}{2}(a_{jj} - a_{ii})sin2\theta \\ tan2\theta &= \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} \\ \theta &= \frac{1}{2}tan^{-1}\left(\frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Para saber con cuál término empezar, se busca el máximo de la matriz (entre los elementos distintos de la diagonal), y ese es el primero en buscar su igualación a cero. Por ejemplo, para la matriz B,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

el máximo es 2, por lo que tendremos una matriz J de la forma:

$$\begin{pmatrix} cos\theta & 0 & -sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix}$$

con $\theta$ igual a:

$$\theta = \frac{1}{2}tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot 2}{1 - 1}\right) \tag{9}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \tag{10}$$

entonces,

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

y al multiplicar, obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 3{,}0 & 2{,}0 & 0 \\ 2 & 3{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}0 \end{pmatrix}$$

y al hacer el método otra vez, buscando hacer cero el elemento máximo ($a_{12}$), se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 5{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}0 \end{pmatrix}$$

y para obtener los eigenvectores, es necesario hacer multiplicaciones consecutivas de las matrices J, en este caso se hicieron dos iteraciones, por lo que:

$$\text{Matriz eigenvectores} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1{,}0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz eigenvectores} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

**Algorithm 1** Método de Jacobi para encontrar eigenvalores

**Entrada:** Matriz Identidad, Matriz **a**, cantidad de iteraciones, N nodos de la matriz, Matriz eigenvectores (inicializada con una matriz identidad)
**Salida:** Vector de eigenvalores y matriz asociada de eigenvectores.

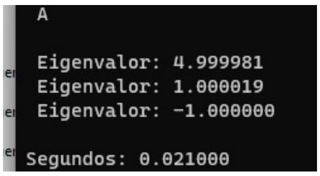
**Función máximo**
**Función multiplicar matrices (matmul)**
b1, b2, c1, c2
**for** $n = 0; n <$ cantidad de iteraciones; $i++$ **do**
    Encontrar índices de máximo: imax, jmax.
    Calcular theta.
    **for** $l = 0; l < N; l++$ **do**
        b1 = a[l][imax]*cos$\theta$+a[l][jmax]*sin$\theta$
        b2 = a[l][jmax]*cos$\theta$-a[l][imax]*sin$\theta$

        Reemplazar las entradas de **a** para trabajar con la misma matriz.
        a[l][imax] = b1
        a[l][jmax] = b2
    **for** $m = 0; m < N; m++$ **do**
        c1 = a[imax][m]*cos$\theta$+a[jmax][m]*sin$\theta$
        c2 = a[jmax][m]*cos$\theta$-a[imax][m]*sin$\theta$

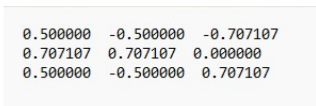
        Reemplazar las entradas de la matriz **a**.
        a[imax][m] = c1
        a[jmax][m] = c2
    Cambiar los valores de la matriz identidad para encontrar los eigenvectores.
    I[imax][imax] = cos$\theta$
    I[jmax][jmax] = cos$\theta$
    I[imax][jmax] = -sin$\theta$
    I[jmax][imax] = sin$\theta$
    Multiplicar la nueva matriz identidad por la de eigenvectores, solo en la primera iteración tendrán los mismos valores.
    eigenvectores = matmul(eigenvectores, I)
**retorna:** matriz de eigenvectores y eigenvalores.

# 3. Resultados

Se utilizó la matriz de ejemplo B para revisar los resultados y una matriz tridiagonal con entradas 2 y -1 y con 1000 nodos. Como en algunos casos se repite el máximo, el inicializador se cambió para cada iteración utilizando una función aleatoria, ya que se encontró que para la matriz tridiagonal con 5 nodos, el valor de los eigenvalores mejoraba si se buscaba a partir del punto i=1, j=2 en lugar de i=0, j=1 (en esta matriz, el máximo se repite en varios elementos).



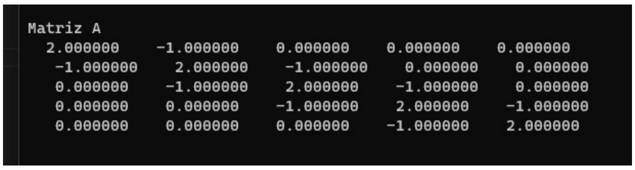
(a) 10 nodos



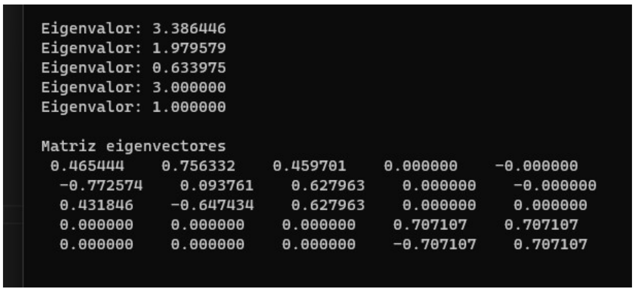
(b) 100 nodos

Figura 1: Resultados utilizando la matriz B con dos iteraciones.

Además, para la matriz tridigonal 5x5 se encontró:




(a) 10 nodos




(b) 100 nodos

Figura 2: Resultados utilizando la matriz tridigonal con 5 nodos, y con 100 iteraciones.

Y para la matriz tridigonal con 1000 nodos, se encontró:

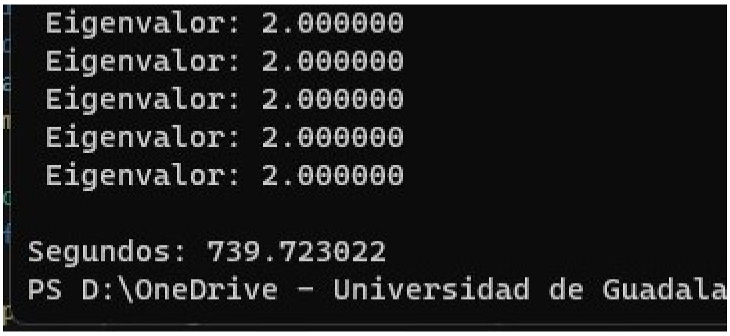



Figura 3: Matriz tridiagonal con 1000 nodos, con 100 iteraciones.

y los resultados resumidos:

| n | lambda - lambda aproximado | vector propio - vector propio aproximado |
|---|---|---|
| eigenvalor más grande | 4.0-3.0 = 1.0 | 0.02982 |
| eigenvalor más pequeño | 1-0 = 1.0 | 0.02844 |

Cuadro 1: Resultados utilizando el método de Jacobi con 100 iteraciones.

## 4. Discusiones y conclusiones

Se encontró que el valor de los eigenvalores cambiaba con el primer valor que se escogiera al inicializar el buscador del máximo (para esta matriz tridigonal que tenía muchos términos similares), ya que había varios elementos iguales, y se encontraba un cambio en resultados con matrices con nodos menores a 100. Además, se observó que había ocasiones donde el término que se buscaba hacer cero, no se hacía cero, simplemente cambiaba de signo y como el máximo que se buscaba era el mayor absoluto a todos, este se ciclaba, sin embargo, no se encontró una razón sustancial para este comportamiento, además en algunas ocasiones el resultado no cambiaba, encontraba el mismo eigenvalor en muchas ocasiones. No obstante, el trabajar con la misma matriz, aceleró el proceso de convergencia para 100, 200 iteraciones. Como se muestra en el Cuadro 1., los resultados no mejoraron en comparación con el método de la potencia y el método de la potencia inversa, y aunque los resultados de los eigenvectores sean mínimos, esto ocurrió porque en este caso, los eigenvectores tenían en su mayoría términos igual a cero.