Resumen

En este trabajo se compararon distintos métodos de interpolación para una función específica y se compararon sus resultados para encontrar el mejor método para esta función.

1. Introducción

Los métodos de interpolación son aquellos que dado un conjunto de datos que pueden ser obtenidos de algún experimento u otro contexto, buscan ajustar un polinomio para encontrar una relación entre los puntos o para conocer información sobre el problema. Para este trabajo se utilizaron cuadro métodos de interpolación: mínimos cuadrados, regresión polinomial, polinomios de Lagrange y polinomios de Newton, y se utilizó una función de prueba (que no se ajusta bien a los datos), para hacer comparaciones. Estos métodos dependen del problema, y el mejor ajuste de un método, no significa que lo sea para todas las funciones.

2. Mínimos cuadrados

Esta es una técnica numérica en la que se dados un conjunto de pares ordenados (x,y), se busca determinar una fórmula $y = f(x)$ que relacione las variables. Por ello, se busca encontrar los coeficientes más adecuados para ajustarse a los datos. Para determinar el ajuste, se busca minimizar un error cuadrático [1].

Sea P el polinomio de grado n-1 que se ajusta a los datos:

$$P_{n-1}(x_i) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1},$$

$$P_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j, \tag{1}$$

y como el polinomio es lineal en los coeficientes, podemos escribirlo de la forma:

$$P_{n-1}(x_i) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X_{ij}. \tag{2}$$

El error que buscamos minimizar sería:

$$r_i = y_i - \sum_{j=0}^{n-1} a_j X_{ij}. \tag{3}$$

Así, definimos el error cuadrático como:

$$S = \sum_{i=1}^{m} r_i^2 \tag{4}$$

derivamos para minimizar:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{m} r_i \frac{\partial r_i}{\partial a_j} = 0 \tag{5}$$

$$2 \sum_{i=1}^{m} r_i (-X_{ij}) = 0 \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} (y_i - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X_{ik})(-X_{ij}) = 0 \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n-1} a_k X_{ik} X_{ij} = \sum_{i=1}^{m} X_{ij} y_i \tag{8}$$

y como: $X_{ij} = X^T_{ji}$

$$X^T X a = X^T y \tag{9}$$

que será el sistema de ecuaciones que a resolver dado el grado del polinomio que creemos que ajustará mejor, y el grado máximo será la cantidad de pares (x,y) menos uno. Asimismo, se puede hacer interpolación de mínimos cuadrados utilizando funciones $f(x)$, donde los términos de la matriz se evalúan en funciones antes de resolver el sistema.

3. Regresión polinomial

Este método utiliza una idea similar al método de mínimos cuadrados, sin embargo, la matriz que se buscará solucionar sólo es la matriz X del método anterior, es decir:

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n \\
f(x_2) &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n \\
&\vdots \\
f(x_{n+1}) &= a_0 + a_1 x_{n+1} + a_2 x_{n+1}^2 + \ldots + a_n x_{n+1}^n
\end{aligned}
$$

y la forma matricial del método que se buscará solucionar, para el caso de un polinomio de grado 2, tendrá la forma:

$$
\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \tag{10}
$$

donde a son los coeficientes del polinomio ajustado.

4. Interpolación de Lagrange

Esta interpolación hace uso de un polinomio que pasa por puntos conocidos para encontrar otro punto. Se basa en los polinomios de Lagrange, donde x es un punto que se busca interpolar y x_m, x_j son los términos ya conocidos.

$$
\begin{aligned}
\ell_j(x) &= \frac{(x - x_0)}{(x_j - x_0)} \cdots \frac{(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-1})} \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})} \cdots \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)} \qquad (11) \\
&= \prod_{\substack{0 \le m \le k \\ m \ne j}} \frac{x - x_m}{x_j - x_m}. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

5. Interpolación de Newton

Se basa en la obtención de un polinomio a partir de un conjunto de puntos, que busca aproximarse a una curva. De esta forma, se forma una matriz triangular inferior, El polinomio de Newton se basa en una relación de recurrencia.

$$
\begin{bmatrix}
1 & & \ldots & & 0 \\
1 & x_1 - x_0 & & & \\
1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \\
1 & x_k - x_0 & \ldots & \ldots & \prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ \\ \vdots \\ \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \\ \vdots \\ \\ y_k \end{bmatrix} \tag{13}
$$

6. Resultados

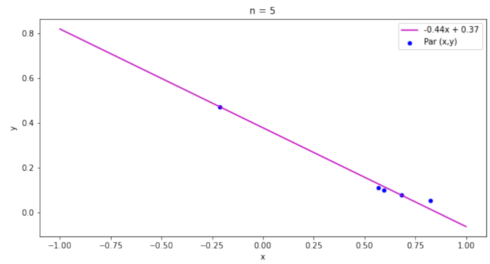
Se utilizó la función:

$$
f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2},
$$

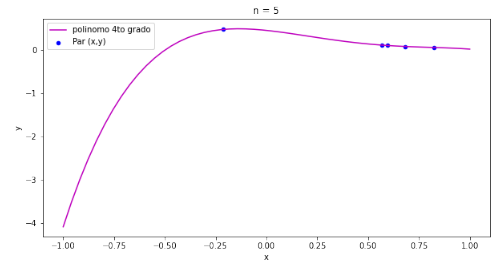
para hacer pruebas con todos los métodos de interpolación, un vector aleatorio de -1 a 1, y distintos tamaños para este vector 5, 100 y 1000. Además, se hicieron pruebas con distintos polinomios para visualizar el comportamiento de los métodos.

6.1. Mínimos cuadrados

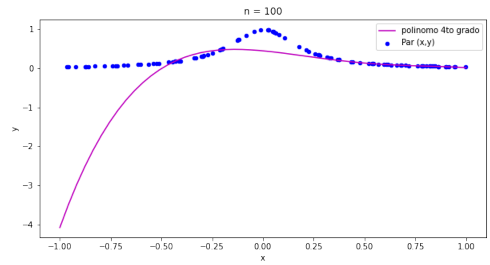
Para el caso de mínimos cuadrados con un polinomio de grado m, se encontraron distintos comportamientos con la función de prueba:



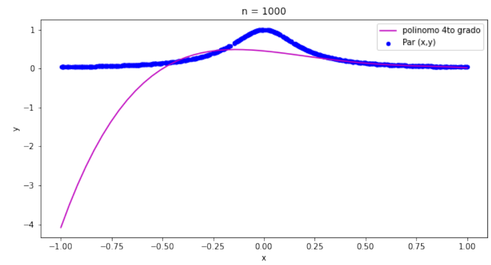
(a) Línea recta



(b) Polinomio n = 5



(c) Polinomio n = 100



(d) Polinomio n = 1000

donde se muestra que con pocas pruebas tiene mejores resultados, sin embargo, conforme aumenta la cantidad de puntos y estos toman forma de la función de prueba, se intenta ajustar pero sólo se ajusta de algunas partes.

6.2. Regresión polinomial

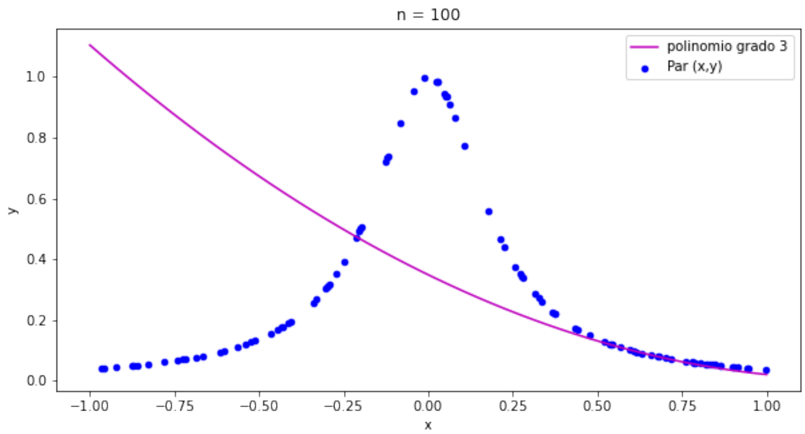


Figura 1: Polinomio grado 4, regresión polinomial

6.3. Lagrange

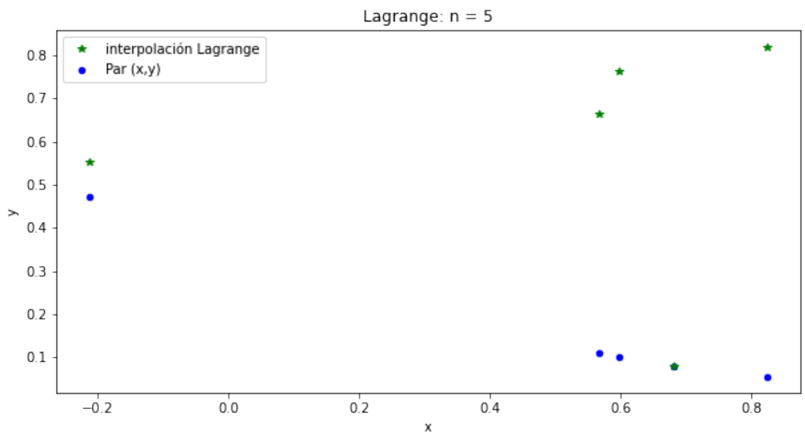
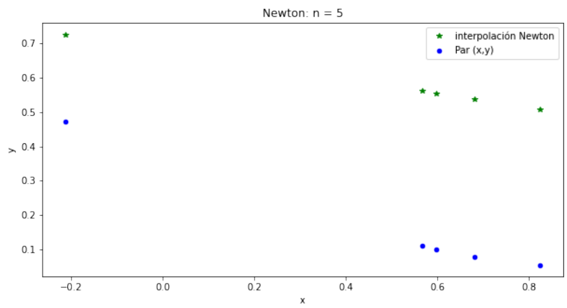
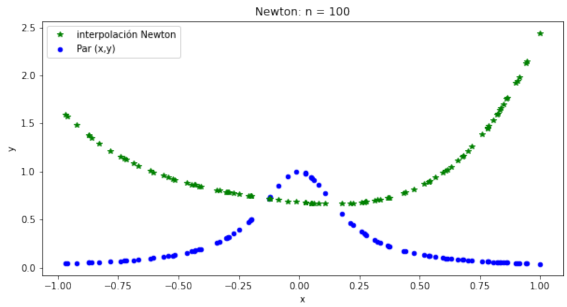


Figura 2: Ejemplo para n = 5

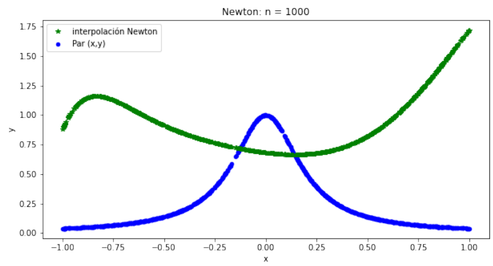
6.4. Interpolación Newton



(a) Polinomio grado 1



(b) Polinomio grado 4



(c) Polinomio grado 9

Métodos	Error (n=5)	Error (n=100)	Error (n=1000)
Mínimos cuadrados lineal:	0.01471	0.2577	0.2892
Mínimos cuadrados grado m (4):	6.74e-07	0.3789	0.4608
Mínimos cuadrados combinación funciones	0.3633	0.4662	0.5049
Polinomio de grado m (3)	0.0017	0.2941	0.3378
Polinomio de Lagrange	0.3507	13.8818	131.73
Polinomio de Newton	0.4126	0.8320	0.7103

Cuadro 1: Comparación de métodos

7. Discusiones y conclusiones

Una de las desventajas de los métodos de interpolación es que son muy dependientes de los datos, si el método de Newton funciona muy bien con un conjunto de puntos o con ciertas funciones, no necesariamente lo hará con todas las funciones, como se ve en la Cuadro. 1 con las celdas de color, donde el error aumentó considerablemente. Posiblemente, el error con el método de Lagrange pudo haber sido el rango de estudio, ya que Lagrange hace divisiones y si la diferencia entre el muestreo es muy pequeña, el numerador incrementará, que fue lo que ocurrió en este caso para la función estudiada. También se mostró que el método de mínimos cuadrados tuvo buenos resultados, y al igual que el polinomio de grado m, sus diferencias fueron mínimas. Para esta función, el método de mínimos cuadrados fue el que mostró mejores resultados. También, se observa en las figuras que conforme se aumenta la cantidad de puntos, los polinomios buscan ajustarse pero sólo lo logran en ciertos pedazos de datos, y en otros la forma se pierde y por ello el error incrementa en la mayoría de los casos.

Referencias

[1] R.L. Burden, J.D. Faires, and A.M. Burden. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 2015.