(1) Show that x - sinx = o(x^2), as x→ 0.

Sabemos que f(n) = o(g(n)), $n \to a$, quiere decir:

$$\lim_{n\to a} \frac{f(n)}{g(n)} = 0,$$

entonces,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sinx}{x^2},$$

aplicando la regla de l'Hopital al límite anterior varias veces, se obtendrá:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - senx}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx}{2x}, = \lim_{x\to 0} \frac{senx}{2} = 0,$$

lo que demuestra x-sinx = o(x^2).

(2) Suppose that f(**x**) = o(g(**x**)). Show that f(**x**) = O(g(**x**)). Tip: Show that for any given $\epsilon > 0$, there exist $\delta > 0$ such that if 0 $< ||x|| < \delta$, then $|f(\mathbf{x})| < \epsilon|g(\mathbf{x})|$.

Utilizando la definición de límite en varias variables:

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(\infty,\ldots,\infty)} f(x_1, \ldots, x_n) = L$$

Para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que $|f(x_1, .., x_n) - L| < \epsilon$, que satisface $||\mathbf{x}|| < \delta$.

Así, se tiene:

$$\lim_{\mathbf{x}\to a} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = 0,$$

de esta forma,

$$\left| \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)} - 0 \right| < \epsilon,$$

utilizando la desigualdad: $|a| \leq |a - b| + |b|$

$$\left| \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)} \right| \leq \left| \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)} - 0 \right| + 0 < \epsilon,$$
$$|f(x_1, \ldots, x_n)| < \epsilon |g(x_1, \ldots, x_n)|$$

que es lo que se buscaba demostrar, que f(**x**) estuviera acotado por g(**x**) para toda $x > x_0$.

(3) Show that if funcions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfy f(**x**) = -g(**x**) + o(g(**x**)) and g(**x**)$>$ 0 for all $\mathbf{x} \neq 0$, then for all $\mathbf{x} \neq 0$ sufficiently small, we have f(**x**) $<$ 0.
Se tiene:

$$f(\mathbf{x}) = -g(\mathbf{x}) + o(g(\mathbf{x})),$$
$$f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = o(g(\mathbf{x})),$$

además,

$$\lim_{\mathbf{x}\to a} \frac{f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = 0,$$
$$\lim_{\mathbf{x}\to a} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = -1,$$
$$\lim_{\mathbf{x}\to a} f(\mathbf{x}) = -\lim_{\mathbf{x}\to a} g(\mathbf{x}).$$

Sabemos que g($\mathbf{x}$) > 0, entonces, hay que demostrar que su límite ($x \to a$) también será > 0. Así, el límite de f($\mathbf{x}$) cuando $x \to a$ será < 0, y aplicando la misma idea, f($\mathbf{x}$) < 0.

Esto se puede demostrar por contradicción, vamos a suponer que

$$\lim_{\mathbf{x}\to a} g(\mathbf{x}) = L < 0,$$

y vamos a escoger un $\epsilon = -\frac{L}{2} > 0$, tal que $\delta > 0$, y $|g(\mathbf{x}) - L| < -\frac{L}{2}$. Quitando el valor absoluto,

$$\frac{L}{2} < g(\mathbf{x}) - L < -\frac{L}{2},$$

tomando el lado derecho de la desigualdad:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &< -\frac{L}{2} + L, \\ &< \frac{L}{2}, \\ &< 0, \end{aligned}$$

y se llega a una contradicción. Así, el $\lim_{x\to a} f(\mathbf{x}) < 0$, y por lo tanto: f($\mathbf{x}$) < 0.

(4) Compute the stationary points of f(x, y) = $\frac{3x^4-4x^3-12x^2+18}{12(1+4y^2)}$ and determine their corresponding type (i. e: minimum, maximum or saddle point).

Primero, se deben de calcular los puntos donde las primeras derivadas parciales se anulan y después calcular el Hessiano para saber qué tipo de puntos son, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x(x+1)(x-2)}{1+4y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-2y}{3(1+4y^2)^2}(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18), \end{aligned}$$

se tienen puntos estacionarios en: (0, 0), (-1, 0), (2, 0), (1.2011, 0), (2.5417, 0). Para saber su tipo, se calcula el determinante del Hessiano,

$$H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{3x^2-2x-2}{(1+4y^2)} & \frac{-8y(x^3-x^2-2x)}{(1+4y^2)^2} \\ \frac{-8y(x^3-x^2-2x)}{(1+4y^2)^2} & -\frac{2}{3}(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18)\frac{(1-12y^2)}{(1+4y^2)^3} \end{bmatrix},$$

y se evalúa su determinante en estos puntos:

$$\begin{aligned} det(H(0,0)) &= 24, \\ det(H(2,0)) &= -12, \\ det(H(-1,0)) &= -74. \\ det(H(1{,}2011,0)) &> 0, \\ det(H(2{,}5417,0)) &< 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los puntos (2, 0), (-1, 0) y (2.5417, 0) son puntos silla; y los punto (0,0) y (1.2011, 0) son mínimos locales.

(5) Show that the function f($\mathbf{x}$) = $8x_1 + 12x_2 + x_1^2 - 2x_2^2$ has only one stationary point, and that it is neither a maximum or minimum, but a saddle point. Plot the contour lines of f.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 8x_1 + 12x_2 + x_1^2 - 2x_2^2, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 8 + 2x_1, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 12 - 4x_2, \end{aligned}$$

igualando las derivadas a cero, se encuentra que el punto estacionario está en (-4, 3). Para saber qué tipo de punto es, se evalúa en el determinante del Hessiano, si es menor a cero se clasifica como punto silla y si es mayor a cero se clasifica como punto local mínimo o máximo.

$$det(H(-4,3)) = (2)(-4) < 0,$$

por lo tanto, este es un punto silla.

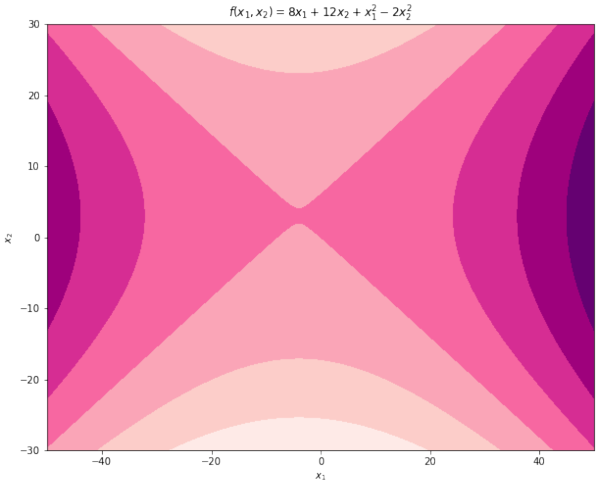

Figura 1: Líneas de contorno.

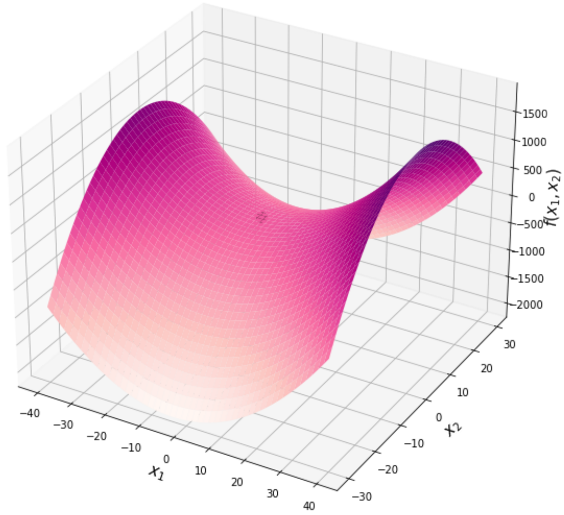

Figura 2: Gráfica con punto silla en (-4, 3).

(6) Compute the gradient $\nabla f(\mathbf{x})$ and Hessian $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ of the Rosenbrock function

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2]$$

where $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_N]^T \in \mathbb{R}^N$. If n=2 show that $\mathbf{x}^* = [1, 1]^T$ is the only local minimizer of this function, and that the Hessian matrix at that points is positive define. Plot the contour lines of f.

El gradiente es:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 400x_1^3 - 400x_2x_1 + 2x_1 - 2 \\ 200(x_2 - x_1^2) + 400x_2^3 - 400x_3x_2 + 2x_2 - 2 \\ 200(x_3 - x_2^2) + 400x_3^3 - 400x_4x_3 + 2x_3 - 2 \\ \vdots \\ 200(x_n - x_{n-1}^2) + 400x_{n-1}^3 - 400x_nx_{n-1} + 2x_{n-1} - 2 \\ 200(x_n - x_{n-1}^2) \end{bmatrix}.$$

El Hessiano es:

$$\begin{bmatrix} 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 & -400x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -400x_1 & 200x_2 + 1200x_2^2 - 400x_3 & -400x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -400x_2 & \dots & & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ \dots & \dots & & \dots & & 200 \end{bmatrix}$$

Para n = 2 (cambiando de variables), se tendrá:

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2,$$

y calculando sus derivadas parciales, se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -400xy + 400x^3 - 2(1-x),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 200(y - x^2),$$

igualando a cero, se tienen dos soluciones para y = x, -x. Por lo que, para obtener el valor en x:

$$\frac{\partial f(x,x)}{\partial x} = (400x^2 + 2)(x - 1),$$

Así, el punto es (1, 1). Calculando el Hessiano para saber qué tipo de punto será:

$$H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} -400y + 1200x^2 + 2 & -400x \\ -400x & 200 \end{bmatrix},$$

evaluado en (1, 1) es mayor a cero, y por lo tanto este será un mínimo local. Además, para calcular que es definida positiva, se evaluarán los eigenvalores:

$$det(H(f(x,y))) = \begin{vmatrix} -400y + 1200x^2 + 2 - \lambda & -400x \\ -400x & 200 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

se encuentra que ambas soluciones son mayores a cero, por lo tanto, es definida positiva.

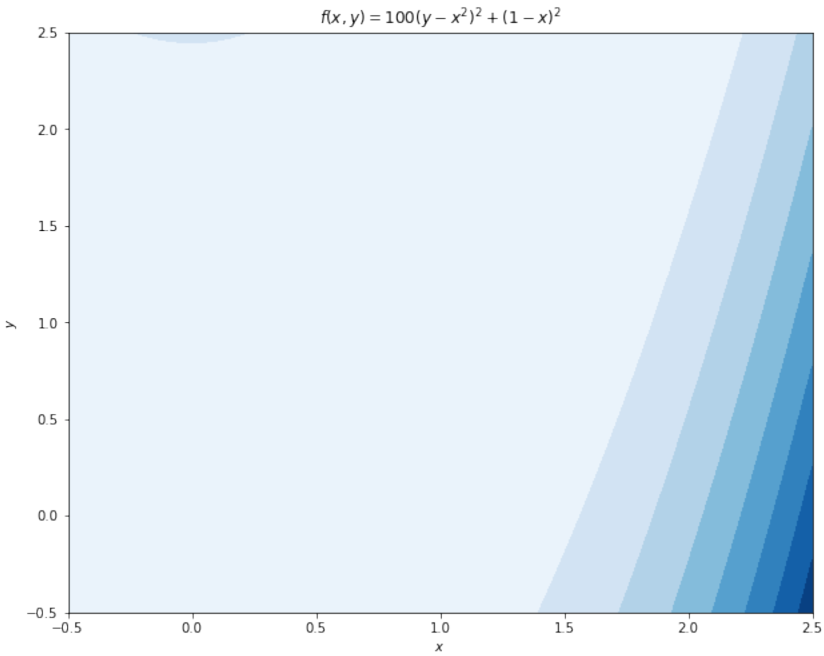

Figura 3: Líneas de contorno

(7) Show, without using the optimaly conditions, that f($\mathbf{x}$) $> f(\mathbf{x}^*)$ for all $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ if

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x}$$

$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \succ 0$ and $\mathbf{Q}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.

Podemos escribir el vector $\mathbf{x}$ como una combinación de $\mathbf{x}^*$ más otro vector, es decir: $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es un vector distinto de cero, así:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^* + \mathbf{u}), =$$

además que como la matriz Q es definida positiva, esta es simétrica y podemos desarrollar la expresión de la forma:

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^* + \mathbf{u}) &= (\mathbf{x}^* + \mathbf{u})^T Q(\mathbf{x}^* + \mathbf{u}) - \mathbf{b}^T(\mathbf{x}^* + \mathbf{u}),\\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbf{x}^{*T} Q\mathbf{x}^* + 2\mathbf{x}^{*T} Q\mathbf{u} + \mathbf{u}^T Q\mathbf{u}\right] - \mathbf{b}^T\mathbf{x}^* - \mathbf{b}^T\mathbf{u},\\
&= \frac{1}{2}\mathbf{x}^{*T} Q\mathbf{x}^* + \mathbf{x}^{*T} Q\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T Q\mathbf{u} - \mathbf{b}^T\mathbf{x}^* - (\mathbf{x}^{*T} Q^T\mathbf{u}\ ),\\
&= f(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T Q\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

Como sabemos que Q es definida positiva, el término $\mathbf{u}^T Q\mathbf{u} > 0$, y por lo tanto, $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^*)$.

(8) Let $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be a real symmetric matrix. Show that

$$
\max\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} : ||\mathbf{x}|| = 1\} = \lambda_{\max}(\mathbf{A})
$$

Podemos reescribir el problema como:

$$
= \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}},
$$

ya que la norma del vector es igual a uno. Como la matriz es simétrica, podemos encontrar la matriz de sus eigenvalores como una factorización de la forma: $U^T\Lambda U$, así, haciendo un cambio de variable $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$, se obtendrá:

$$
\begin{aligned}
\max_{\mathbf{y}\neq 0} \frac{\mathbf{y}^T U^T A U\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T U^T U\mathbf{y}} &= \max_{\mathbf{y}\neq 0} \frac{\mathbf{y}^T\Lambda\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T I\mathbf{y}},\\
&= \max_{\mathbf{y}\neq 0} \frac{\sum_i \lambda_i y_i^2}{\sum_i y_i^2},
\end{aligned}
$$

si proponemos que el λ_j es el más grande, este podrá acotar a la parte superior del problema, ya que un número positivo por un número más grande, acotará a todos, es decir:

$$
\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_j y_1^2 + \lambda_j y_2^2 + \ldots + \lambda_j y_n^2
$$

así, podemos acotar:

$$
\max_{\mathbf{y}\neq 0} \frac{\sum_i \lambda_i y_i^2}{\sum_i y_i^2} \leq \lambda_j.
$$

Y este tendrá una solución de la forma: $\mathbf{y} = (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, que tendrá un uno en el j-ésimo elemento, y cuando regresamos al problema original: $\mathbf{x} = \mathbf{u}_j$, y al multiplicar $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, se obtendrá el vector propio asociado al eigenvalor más grande.