UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Equivalência entre AFD e AFnD

Linguagens Formais e Autômatos

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

19 e 22 de outubro de 2021

[0] Slides baseados no livro HOPCROFT, John E.; MOTWANI, Rajeev; ULLMAN, Jeffrey D. Introduction to automata theory, languages, and computation. Acm Sigact News, v. 32, n. 1, p. 60-65, 2001.

O que vimos na aula passada?

1. Autômatos finitos determinísticos
2. Autômatos finitos não-determinísticos

Introdução

- Embora existam muitas linguagens para as quais um AFND é mais fácil de construir que um AFD, é um fato surpreendente que toda linguagem que pode ser descrita por algum AFND também possa ser descrita por um AFD
- No pior caso, o menor AFD pode ter 2^n estados, enquanto o menor AFND para a mesma linguagem tem apenas n estados
- A prova de que os AFDs podem fazer tudo o que os AFNDs podem fazer envolve uma "construção" importante, chamada construção de subconjuntos, porque inclui a construção de todos os subconjuntos do conjunto de estados do AFND
- Em geral, muitas provas sobre autômatos envolvem a construção de um autômato a partir de outro

Introdução

- A construção de subconjuntos começa a partir de um AFND N=($\mathcal{Q}_N$,$\Sigma, \delta_N, q_0, F_N$)
- Sua meta é a descrição de um AFD D=($\mathcal{Q}_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D$) tal que L(D)=L(N)
- Note que os alfabetos de entrada dos dois autômatos são os mesmos, e o estado inicial de D é o conjunto que contém apenas o estado inicial N

Introdução

- Os outros componentes de D são construídos como a seguir
  - $\mathcal{Q}_D$ é o conjunto de subconjuntos de $\mathcal{Q}_N$. Note que se $\mathcal{Q}_N$ tem n estados, $\mathcal{Q}_D$ terá 2^n estados. Com frequência, nem todos esses estados estão acessíveis a partir do estado inicial de $\mathcal{Q}_D$. Os estados inacessíveis podem ser "descartados"; assim, o número de estados de D pode ser efetivamente muito menor que 2^n
  - F_D é o conjunto de subconjuntos S de $\mathcal{Q}_N$ tais que $S \cap F_N \neq \emptyset$. Isto é, F_D representa todos os conjuntos de estados de N que incluem pelo menos um estado de aceitação de N
  - Para cada conjunto $S \subseteq \mathcal{Q}_N$ e para cada símbolo de entrada 'a' em Σ,

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \text{ em } S} \delta_N(p, a)$$

Isto é, para calcular $\delta_D(S, a)$, examinamos todos os estados p em S, vemos para quais estados N vai a partir de p sobre a entrada 'a' e fazemos a união de todos esses estados

Equivalência entre autômatos finitos determinísticos e não-determinísticos

Exemplo

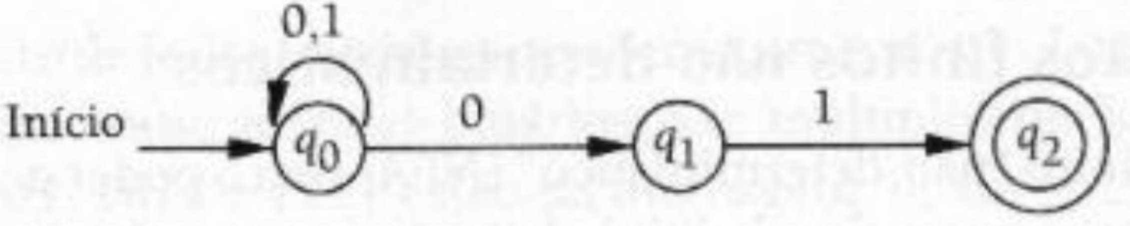

Figura: Um AFND que aceita todos as strings que terminam em 01

Exemplo

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$* \rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$* \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$* \{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Figura: A construção completa de subconjuntos a partir da figura anterior

Exemplo

	0	1
A	A	A
$\rightarrow B$	E	B
C	A	D
$*D$	A	A
E	E	F
$*F$	E	B
$*G$	A	D
$*H$	E	F

Figura: Renomeando os estados da figura anterior

Introdução

- Dos oito estados da Figura anterior, começando no estado inicial B, só podemos acessar os estados B,E e F
- Os outros cinco estados são inacessíveis
- Podemos analisar quais são os estados acessíveis como a seguir:
  - BASE: Sabemos com certeza que o conjunto unitário que consiste apenas no estado inicial de N é acessível
  - INDUÇÃO: Suponha que determinamos que o conjunto S de estados é acessível. Então, para cada entrada a, calcule o conjunto de estados $\delta_D(S, a)$; sabemos que esses conjuntos de estados também serão acessíveis

Introdução

- No exemplo, sabemos que $\{q_0\}$ é um estado do AFD D
- Descobrimos que $\delta_D(\{q_0\}, 0) = \{q_0, q_1\}$ e $\delta_D(\{q_0\}, 1) = \{q_0\}$
- Um dos dois conjuntos que calculamos é "antigo"; $\{q_0\}$ já foi considerado. Porém, o outro - $\{q_0, q_1\}$ - é novo e suas transições devem ser calculadas
- Encontramos $\delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_0, q_1\}$ e $\delta_D(\{q_0, q_1\}, 1) = \{q_0, q_2\}$
- Por exemplo, para ver o último cálculo, sabemos que

$$\delta_D(\{q_0, q_1\}, 1) = \delta_N(q_0, 1) \cup \delta_N(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$$

- $\delta_D(\{q_0, q_2\}, 0)$?
- $\delta_D(\{q_0, q_2\}, 1)$?

Exemplo

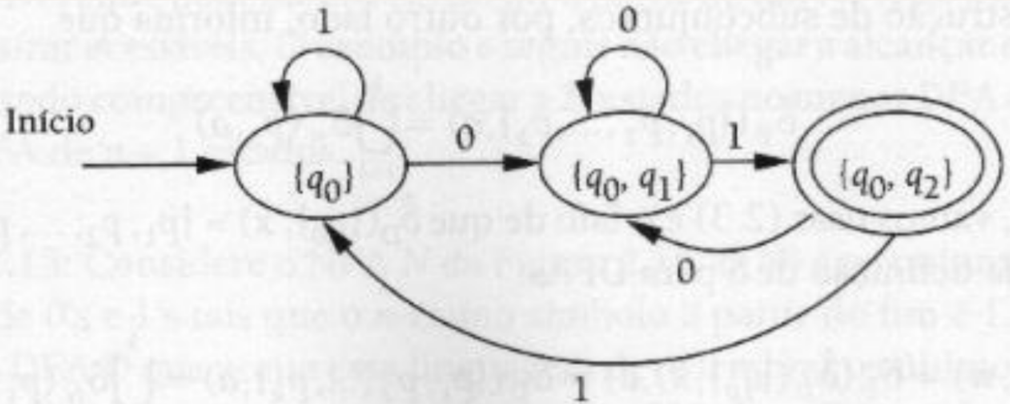

Figura: O AFD construído a partir do AFND do exemplo

Equivalência entre autômatos finitos determinísticos e não-determinísticos

Introdução

- Precisamos mostrar formalmente que a construção de subconjuntos funciona
- Depois de ler a sequência de símbolos de entrada w, o AFD construído está em um estado que é o conjunto de estados do AFND em que o AFND estaria após a leitura de w
- Como os estados de aceitação do AFD são os conjuntos que incluem pelo menos um estado de aceitação do AFND, e como o AFND também aceita se entra em pelo menos um de seus estados de aceitação, podemos então concluir que o AFD e o AFND aceitam exatamente os mesmos strings, e portanto aceitam a mesma linguagem

Equivalência entre autômatos finitos determinísticos e não-determinísticos

Teorema 1

Se D=$(\mathcal{Q}_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ é o AFD construído a partir do ANFD N=$(\mathcal{Q}_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ pela construção de subconjuntos, então L(D)=L(N)

Prova

O que realmente provaremos primeiro, por indução sobre $|w|$, é que

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$$

- BASE: Seja $|w| = 0$; isto é, w=ε. Pelas definições base de $\hat{\delta}$ para AFDs e AFNDs, tanto $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, \varepsilon)$ quanto $\hat{\delta}_N(q_0, \varepsilon)$ são iguais a $\{q_0\}$

Prova

- INDUÇÃO: Considere que w tem comprimento n+1 e suponha o enunciado para o comprimento n. Considere w na forma w=xa, onde a é o último símbolo de w. Pela hipótese indutiva, $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \hat{\delta}_N(q_0, x)$. Sejam esses dois conjuntos de estados de N indicados por $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$

Prova

- A parte indutiva da definição de $\hat{\delta}$ para AFNDs nos diz que

$$\hat{\delta}_N(q_0, w) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a) \qquad (1)$$

- A construção de subconjuntos, por outro lado, informa que

$$\hat{\delta}_D(\{p_1, p_2, ..., p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a) \qquad (2)$$

- Agora, vamos usar a equação (2) e o fato de que $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ na parte indutiva da definição de $\hat{\delta}$ para AFDs

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \delta_D(\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x), a) = \delta_D(\{p_1, p_2, ..., p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a) \qquad (3)$$

Prova

- Desse modo, as equações (1) e (3) demonstram que $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$. Quando observamos que tanto D quanto N aceitam w se e somente se $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w)$ ou $\hat{\delta}_N(\{q_0\}, w)$, respectivamente, contêm um estado em F_N, temos uma prova completa de que $L(D) = L(N)$
- $\square$

Teorema 2

Uma linguagem L é aceita por algum AFD se e somente se L é aceita por algum AFND.

Prova

($\Leftarrow$) A parte "se" é constituída pela construção de subconjuntos e pelo Teorema 1.
($\Rightarrow$) Essa parte é fácil; temos apenas de converter um AFD em um AFND idêntico. Intuitivamente, se temos o diagrama de transições para um AFD, também podemos interpretá-lo como o diagrama de transições de um AFND, que tem exatamente uma opção de transição em cada situação. Mais formalmente, seja $D = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta_D, q_0, F)$ um AFD. Defina $N = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$ como o AFND equivalente, onde δ_N é definido pela regra:

- Se $\delta_D(q, a) = p$, então $\delta_N(q, a) = \{p\}$

Então é fácil mostrar por indução sobre $|w|$ que, se $\hat{\delta}(q_0, w) = p$, então

$$\hat{\delta}(q_0, w) = \{p\}$$

Como consequência, w é aceito por D se e somente se é aceito por N; isto é, L(D)=L(N)
□

Próxima Aula

O que vem por aí?

- Epsílon transições em autômatos finitos
- Expressões regulares

Equivalência entre AFD e AFnD

Linguagens Formais e Autômatos

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

19 e 22 de outubro de 2021

[0] Slides baseados no livro HOPCROFT, John E.; MOTWANI, Rajeev; ULLMAN, Jeffrey D. Introduction to automata theory, languages, and computation. Acm Sigact News, v. 32, n. 1, p. 60-65, 2001.