Introdução à Lógica

Lógica para Computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

29 de setembro de 2021

[0] Slides baseados no livro Lógica para Ciência da Computação[1].

[1] DE SOUZA, JOÃO NUNES. Lógica para ciência da computação. Elsevier Brasil, 2008.

Sumário

- Linguagem Natural

Exemplo

Expressão da linguagem natural que é ambígua ou imprecisa.

Problemas

- Ambiguidades
- Imprecisões

- Linguagem Formal

Linguagem Formal

Definição

São objetos matemáticos, cujas regras de formação são precisamente definidas e às quais podemos atribuir um único sentido, sem ambiguidade.

- Diversos níveis de expressividade
- Quanto maior a expressividade, maior a complexidade de manipulação da linguagem
- Lógica proposicional
  - Expressividade limitada, mas nos permite expressar uma série de relações lógicas interessantes

Proposição

Definição

É um enunciado ao qual podemos atribuir um valor verdade (verdadeiro ou falso).

- Nem toda sentença possui valor verdade
- Exemplo: "Esta sentença é falsa"
- Auto-referente
- A linguagem proposicional exclui sentenças auto-referentes

Lógica Proposicional

- A Lógica Proposicional Clássica nos permite tratar de enunciados aos quais podemos atribuir valor verdade (as proposições) e as operações que permitem compor proposições mais complexas.
  - A partir de proposições mais simples, utilizando: conjunção ("E"), a disjunção ("OU"), a implicação ("SE...ENTÃO...") e a negação ("NÃO")
- A linguagem proposicional não nos permite expressar relações sobre elementos de um conjunto
  - como as noções de "todos", "algum" ou "nenhum".
  - relações quantificadoras
  - lógica de primeira ordem

Linguagem Proposicional

- Ao apresentarmos uma linguagem formal, precisamos fornecer os componentes básicos da linguagem, chamados de alfabeto, para em seguida fornecer as regras de formação da linguagem, também chamadas de gramática.
- No caso da lógica proposicional, o alfabeto é composto pelos seguintes elementos:
  - Um conjunto infinito e contável de símbolos proposicionais, também chamados de átomos ou variáveis proposicionais: $\mathcal{P}=\{p_0, p_1, ...\}$.
  - O conectivo unário $\neg$ (negação, lê-se: NÃO)
  - os conectivos binários $\wedge$ (conjunção, lê-se: E), $\vee$ (disjunção, lê-se: OU), e $\rightarrow$ (implicação, lê-se: SE...ENTÃO...).
  - Os elementos de pontuação, que contêm apenas os parênteses: '(' e ')'.

Fórmulas da Lógica Proposicional

- Os elementos da linguagem $\mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$ da lógica proposicional são chamados de fórmulas (ou fórmulas bem-formadas).
- O conjunto das fórmulas da lógica proposicional será definido por indução.
- Uma definição por indução pode possuir vários casos.
- O caso básico da indução é aquele no qual alguns elementos já conhecidos são adicionados ao conjunto que estamos definindo.
- Os demais casos, chamados de casos indutivos, tratam de adicionar novos elementos ao conjunto, a partir de elementos já inseridos nele.

Dessa maneira, o conjunto $\mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$ das fórmulas proposicionais é definido indutivamente como o menor conjunto, satisfazendo as seguintes regras de formação:

- Caso básico: Todos os símbolos proposicionais estão em $\mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$; ou seja, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$. Os símbolos proposicionais são chamados de fórmulas atômicas ou átomos.
- Caso indutivo 1: Se A $\in \mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$, então $\neg A \in \mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$
- Caso indutivo 2: Se A,B $\in \mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$, então $(A \vee B) \in \mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$, $(A \wedge B) \in \mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$, $(A \rightarrow B) \in \mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$

Fórmulas da Lógica Proposicional

- Se p,q e r são símbolos proposicionais, pelo item 1, ou seja, o caso básico, eles são também fórmulas da linguagem proposicional
- Então, $\neg p$ e $\neg\neg p$ também são fórmulas, como
  - $(p \wedge q)$, $(p \vee (p \vee \neg q))$, $((r \wedge \neg p) \rightarrow \neg q)$ etc
  - Em geral, usamos as letras minúsculas p,q,r e s para representar os símbolos atômicos
  - E as letras maiúsculas A,B,C e D para representar fórmulas
  - Desse modo, se tomarmos a fórmula $((r \wedge \neg p) \rightarrow \neg q)$, podemos dizer que ela é da forma $(A \rightarrow B)$ em que
    - A=(r $\vee\neg$ p) e B=$\neg$ q
    - Já a fórmula A é da forma (A_1 e A_2), onde A_1=r e A_2=$\neg$ p; similarmente, B é da forma $\neg B_1$, onde B_1=q

Fórmulas da Lógica Proposicional

- A definição de $\mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$ ainda exige que $\mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$ seja o menor conjunto satisfazendo as regras de formação. Essa condição é chamada de cláusula maximal
- Isto é necessário para garantir que nada de indesejado se torne também uma fórmula
- Por exemplo: para evitar que os números naturais sejam considerados fórmulas da lógica proposicional

Fórmulas da Lógica Proposicional

- De acordo com a definição de fórmula, o uso de parênteses é obrigatório ao utilizar os conectivos binários. Na prática, no entanto, usamos abreviações que permitem omitir os parênteses em diversas situações:
  - Os parênteses mais externos de uma fórmula podem ser omitidos. Dessa forma, podemos escrever p∧q em ver de $(p \land q), (r \land \neg p) \to \neg q$ em vez de $((r \land \neg p) \to \neg q)$
  - O uso repetido dos conectivos $\land$ e $\lor$ dispensa o uso de parênteses. Por exemplo, podemos escrever $p \land q \land \neg r \land \neg s$ em vez de $((p \land q) \land \neg r) \land \neg s$; note que os parênteses aninham-se à esquerda
  - O uso repetido do conectivo $\to$ também dispensa o uso de parênteses, só que os parênteses aninham-se à direita. Dessa forma, podemos escrever $p \to q \to r$ para representar $p \to (q \to r)$

Fórmulas da Lógica Proposicional

- Além disso, nas fórmulas em que há uma combinação de conectivos, existe uma precedência entre eles, dada pela ordem: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$. Dessa forma:
  - $\neg p \wedge q$ representa $(\neg p \wedge q)$ [e não $\neg(p \wedge q)$]
  - $p \vee q \wedge r$ representa $p \vee (q \wedge r)$
  - $p \vee \neg q \rightarrow r$ representa $(p \vee \neg q) \rightarrow r$

Em geral, deve-se preferir clareza à economia de parênteses e, na dúvida, é bom deixar alguns parênteses para explicitar o sentido de uma fórmula.

Sub fórmulas

- Definiremos a seguir, por indução sobre estrutura das fórmulas (também chamada de indução estrutural), a noção do conjunto de sub fórmulas de uma fórmula A, Subf(A)
- Na indução estrutural, o caso básico analisa as fórmulas de estrutura mais simples, ou seja, o caso básico trata de fórmulas atômicas
- Os casos indutivos tratam das fórmulas de estrutura composta, ou seja, de fórmulas que contêm conectivos unários e binários
- Assim, o conjunto Subf(A) de sub fórmulas de uma fórmula A é definido da seguinte maneira:
  - Caso básico: A=p. Subf(p)={p}, para toda fórmula atômica p $\in \mathcal{P}$
  - Caso A= $\neg$ B. Subf($\neg B$) $= \{\neg B\} \cup$ Subf(B)
  - Caso A= B $\wedge$ C. Subf($B \wedge C$)= $\{B \wedge C\} \cup$ Subf(B) $\cup$ Subf(C)
  - Caso A= B $\vee$ C. Subf($B \vee C$)= $\{B \vee C\} \cup$ Subf(B) $\cup$ Subf(C)
  - Caso A= B $\rightarrow$ C. Subf($B \rightarrow C$)= $\{B \rightarrow C\} \cup$ Subf(B) $\cup$ Subf(C)

Sub fórmulas

- Os três últimos casos indutivos poderiam ter sido expressos da seguinte forma compacta: Para $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, se A= B $\circ$ C então Subf(A)= $\{A\} \cup$ Subf(B) $\cup$ Subf(C)
- Dessa forma, temos que o conjunto de sub fórmulas da fórmula A=(p $\vee\neg$ q) $\rightarrow$ (r $\wedge\neg$ q) é o conjunto $\{$A,p $\vee\neg$ q,p,$\neg$ q,q,r $\wedge\neg$ q,r$\}$
- Note que não há necessidade de contabilizar sub fórmulas "repetidas" mais de uma vez
- Pela definição anterior, uma fórmula sempre é sub fórmula de si mesma
- No entanto, definimos B como uma sub fórmula própria de A se B $\in$ Subf(A)-A, ou seja, se B é uma sub fórmula de A diferente de A
- Se A=(p $\vee\neg$ q) $\rightarrow$ (r $\wedge\neg$ q), as sub fórmulas próprias de A são $\{p \vee \neg q, p, \neg q, q, r \wedge \neg q, r\}$

Tamanho das fórmulas

Definição

O tamanho ou complexidade de uma fórmula A, representado por $|A|$, é um número inteiro positivo, também definido por indução estrutural sobre uma fórmula:

- $|\mathrm{p}|$=1 para toda fórmula atômica $p \in \mathcal{P}$
- $|\neg A| = 1 + |A|$
- $|A^{\circ} B| = 1 + |A| + |B|$, para $^{\circ} \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Tamanho das fórmulas

- O primeiro caso é a base da indução e diz que toda fórmula atômica possui tamanho 1
- Os demais casos indutivos definem o tamanho de uma fórmula composta a partir do tamanho de seus componentes
- O item 2 trata do tamanho de fórmulas com conectivo unário
- O item 3 trata do tamanho de fórmulas com conectivos binários, tratando dos três conectivos binários de uma só vez
- Note que o tamanho $|A|$ de uma fórmula A assim definido corresponde ao número de símbolos que ocorrerem na fórmula, excetuando-se os parênteses

Tamanho das fórmulas

- Por exemplo: suponha que temos a fórmula A=$(p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$ e vamos calcular sua complexidade:

$|(p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg q)| = 1 + |p \vee \neg q| + |r \wedge \neg q|$
$= 3 + |p| + |\neg\ q| + |r| + |\neg\ q|$
$=5 + |p| + |q| + |r| + |q|$
$=9$

- Note que se uma sub fórmula ocorre mais de uma vez em A, sua complexidade é contabilizada cada vez que ela ocorre

Expressando ideias com o uso de fórmulas

- Já temos base para começar a expressar propriedades do mundo real em lógica proposicional
- Assim, podemos ter símbolos atômicos com nomes mais representativos das propriedades que queremos expressar
- Por exemplo, se queremos falar sobre pessoas e suas atividades ao longo da vida, podemos utilizar os símbolos proposicionais criança, jovem, adulto, idoso, estudante, trabalhador e aposentado

Expressando ideias com o uso de fórmulas

- Com esse vocabulário básico, para expressarmos que uma pessoa é criança, ou jovem, ou adulto ou idoso, escrevemos a fórmula:

$$\text{criança} \vee \text{jovem} \vee \text{adulto} \vee \text{idoso}$$

- Para expressar que um jovem trabalha ou estuda, escrevemos

$$\text{jovem} \rightarrow \text{trabalhador} \vee \text{estudante}$$

- para expressar a proibição de que não podemos ter uma criança aposentada, umas das forma possíveis é escrever:

$$\neg\,(\text{criança} \wedge \text{aposentado})$$

- Iremos ver mais adiante que esta é apenas uma das formas de expressar essa ideia, que pode ser expressa de diversas formas equivalentes

Próxima Aula

O que vem por aí?

- Semântica da lógica proposicional
  - valores verdade
  - matriz de conectivos
  - valoração de fórmulas complexas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Introdução à Lógica

Lógica para Computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

29 de setembro de 2021

[0]Slides baseados no livro Lógica para Ciência da Computação[2].

[1]DE SOUZA, JOÃO NUNES. Lógica para ciência da computação. Elsevier Brasil, 2008.