UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Autômatos finitos com epsílon-transições

Linguagens Formais e Autômatos

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

26 de outubro de 2021

[0] Slides baseados no livro HOPCROFT, John E.; MOTWANI, Rajeev; ULLMAN, Jeffrey D. Introduction to automata theory, languages, and computation. Acm Sigact News, v. 32, n. 1, p. 60-65, 2001.

O que vimos na aula passada?

1. Autômatos finitos determinísticos
2. Autômatos finitos não-determinísticos
3. Equivalência entre AFD e AFnD

Introdução

- Agora introduziremos outra extensão dos autômatos finitos
- A nova "característica" é que permitimos transições sobre ε, o string vazio
- Na realidade, um AFND tem permissão para fazer uma transição espontaneamente, sem receber um símbolo de entrada
- Esse novo recurso não expande a classe de linguagens que podem ser aceitas por autômatos finitos, mas nos dá uma certa "conveniência de programação" adicional
- Veremos como os AFNDs com ε-transições δ, que chamamos ε-AFNDs, estão intimamente relacionados às expressões regulares e são úteis para provar a equivalência entre as classes de linguagens aceitas por autômatos finitos e por expressões regulares

Uso de ε-transições

- Começaremos com um tratamento informal dos ε-AFNDs, usando diagramas de transições que permitem ter ε como rótulo
- Nos exemplos a seguir, imagine que o autômato aceite as sequências de rótulos ao longo dos caminhos desde o estado inicial até um estado de aceitação
- Porém, cada ε encontrado ao longo de um caminho é "invisível", isto é, ele não contribui com nada para o string formado ao longo do caminho

Exemplo

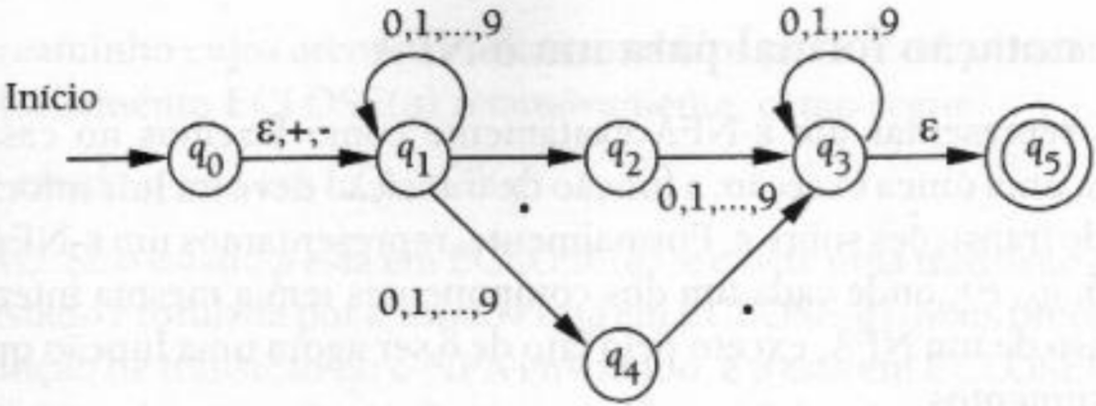

Figura: Um ε-AFND que aceita números decimais

Exemplo

- Na figura anterior, temos um ε-AFND que aceita números decimais consistindo em:
  1. Um sinal + ou - opcional
  2. Um string de dígitos
  3. Um ponto decimal
  4. Outro string de dígitos. Esse string de dígitos ou o string (2) podem ser vazios, mas pelo menos um dos strings deve ser não-vazio

Autômatos finitos com epsílon-transições

Exemplo

- Há um interesse específico na transição de q_0 para q_1 rotulado por ε, $+$ ou -
- Desse modo, o estado q_1 representa a situação em que vemos o sinal, se ele existe, e talvez alguns dígitos, mas não o ponto decimal
- O estado q_2 representa a situação que acabamos de ver o ponto decimal e podemos ter visto ou não dígitos anteriores
- Em q_4, definitivamente vimos pelo menos um dígito, mas não o ponto decimal
- Desse modo, a interpretação de q_3 é que vimos um ponto decimal e pelo menos um dígito, esteja ele ou antes ou depois do ponto decimal
- Podemos permanecer em q_3 lendo outros dígitos que existirem e também temos a opção de "adivinhar" que o string de dígitos está completo e ir espontaneamente para q_5, o estado de aceitação
- $\square$

Exemplo

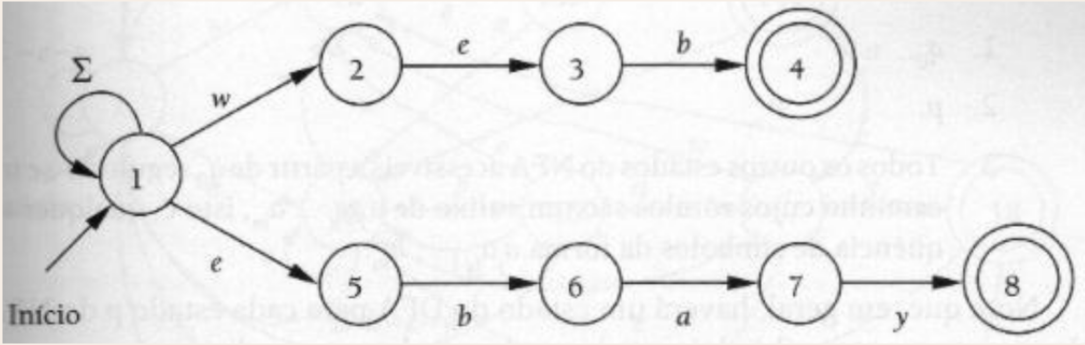

Figura: Um AFND que busca as palavras "web" e "ebay"

Exemplo

- O AFND que vimos para reconhecer um conjunto de palavras-chave pode ser simplificada ainda mais se permitimos ε-transições
- Em geral, construímos uma sequência completa de estados para cada palavra-chave, como se fosse a única palavra que o autômato precisasse reconhecer
- Depois, adicionamos um novo estado inicial, com ε-transições para os estados iniciais dos autômatos correspondentes a cada uma das palavras-chave
- $\square$

Exemplo

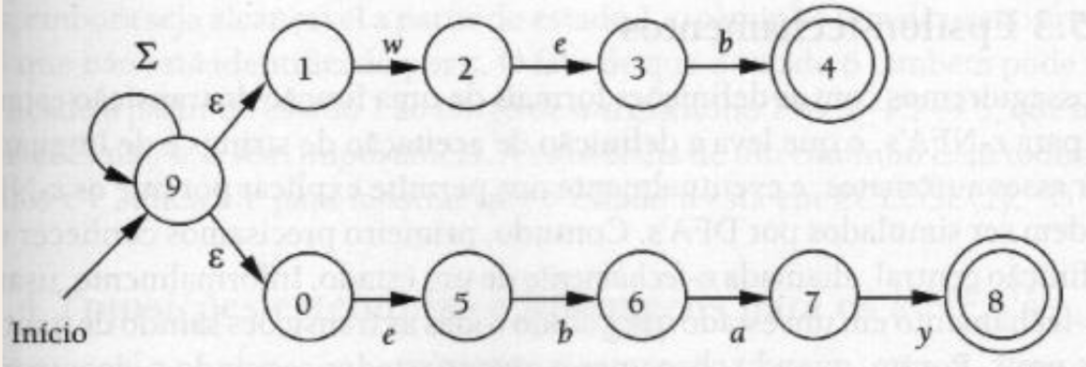

Figura: O uso de ε-transições para ajudar a reconhecer palavras-chaves

A notação formal para um δ-AFND

- Podemos representar um ε-AFND exatamente como fazemos no caso de um AFND, com uma única exceção: a função de transição deve incluir informações a respeito de transições sobre ε
- Formalmente, representamos um ε-AFND A por $A = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, q_0, F)$ onde cada um dos componentes tem a mesma interpretação que no caso de um AFND, exceto pelo fato de δ ser agora uma função que recebe como argumentos:
  1. Um estado de $\mathcal{Q}$
  2. Um elemento de $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$, isto é, um símbolo de entrada ou o símbolo ε. Exigimos que ε, o símbolo para o string vazio, não pode ser um elemento do alfabeto Σ, para não gerar nenhuma confusão

Exemplo

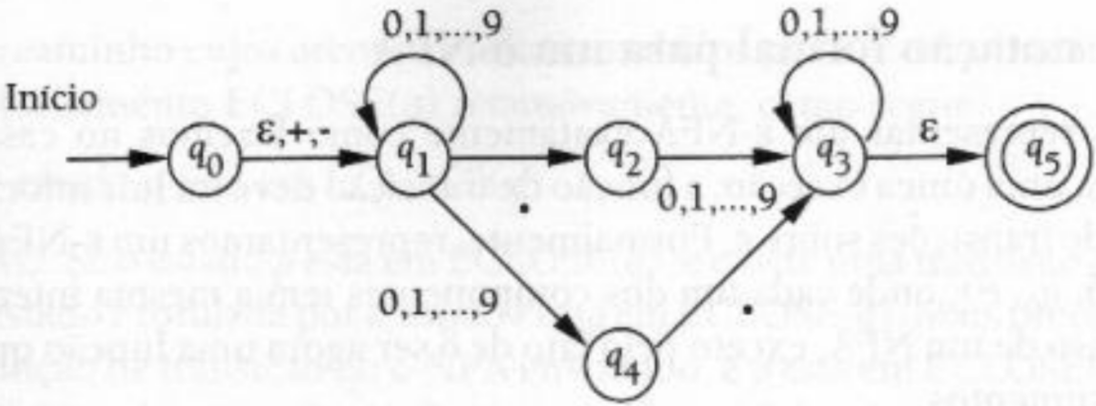

Figura: Um ε-AFND que aceita números decimais

Exemplo

O AFND da figura anterior é representando formalmente como

$$E = (\{q_0, q_1, ..., q_5\}, \{., +, -, 0, 1, ..., 9\}, \delta, q_0, \{q_5\})$$

onde δ é definido pela tabela de transições da figura a seguir

Exemplo

	ε	$+, -$	$.$	$0, 1, \ldots, 9$
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Figura: Tabela de transições referente ao ANFD anterior

Epsílon-fechamentos

- Prosseguiremos com as definições formais de uma função de transição estendida para ε-AFNDs, o que leva à definição de aceitação de strings e de linguagens por esses autômatos e eventualmente nos permite explicar porque os ε-AFNDs podem ser simulados por AFDs
- Contudo, primeiro precisamos conhecer uma definição central, chamada ε-fechamento de um estado
- Informalmente, usamos o ε-fechamento em um estado q seguindo todas as transições saindo de q rotuladas por ε
- Porém, quando chegamos a outros estados seguindo ε, acompanhamos as transições ε que saem desses estados, e assim por diante, encontrando eventualmente todo estado que pode ser alcançado a partir de q ao longo de qualquer caminho cujos arcos são todos rotulados por ε
- Formalmente, definimos o ε-fechamento ECLOSE(q) recursivamente como segue:

Epsílon-fechamentos

- BASE: O estado q está em ECLOSE(q)
- INDUÇÃO: Se o estado p está em ECLOSE(q) e existe uma transição do estado p para o estado r rotulada por ε, então r está em ECLOSE(q), então ECLOSE(q) também contém todos os estados em $\delta(p, \varepsilon)$

Exemplo

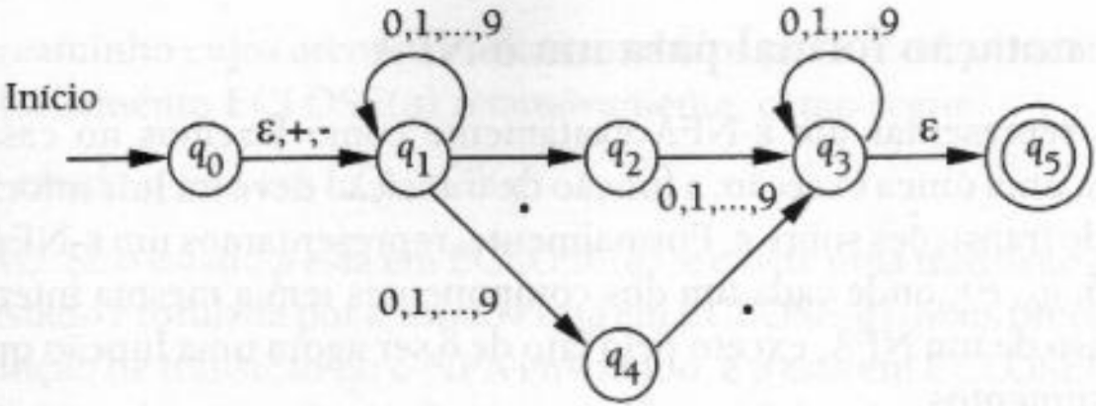

Figura: Um ε-AFND que aceita números decimais

Exemplo

Para o autômato da figura anterior, cada estado é seu próprio ε-fechamento, com duas exceções: ECLOSE(q_0)=$\{q_0, q_1\}$ e ECLOSE(q_3)=$\{q_3, q_5\}$. A razão é que existem apenas duas ε-transições, uma que adiciona q_1 a ECLOSE(q_0) e a outra que adiciona q_5 a ECLOSE(q_3)

Exemplo

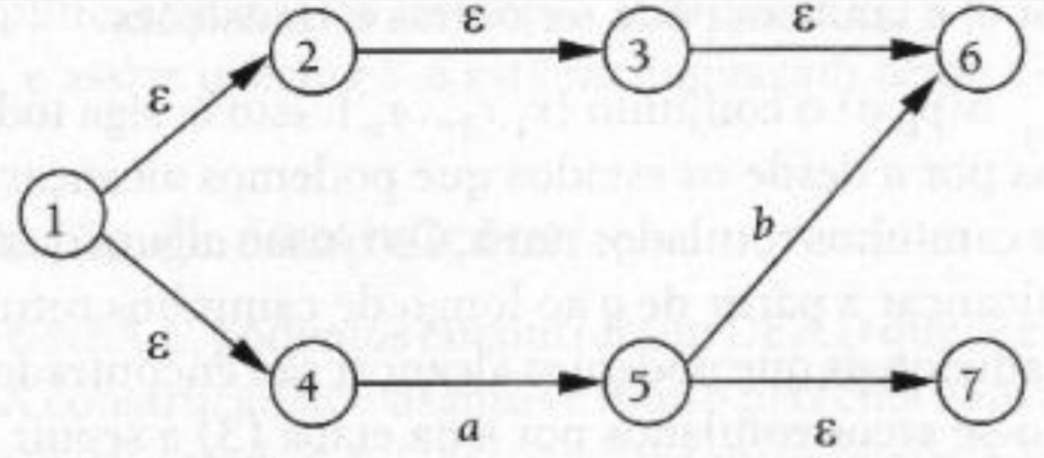

Figura: Alguns estados e transições

Exemplo

ECLOSE(1)=$\{1, 2, 3, 4, 6\}$

Transições estendidas e linguagens para os ε-AFNDs

- o ε-fechamento nos permite explicar facilmente qual será a aparência das transições de um ε-ANFD quando é dada uma sequência de entradas (não-vazia)
- A partir daí, podemos definir o que significa um ε-AFND aceitar sua entrada
- Suponha que $E = \{\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ seja um ε-AFND
- Primeiro, definimos $\hat{\delta}$, a função de transição estendida, a fim de refletir o que acontece em uma sequência de entradas
- O objetivo é fazer com que $\hat{\delta}(q, w)$ seja o conjunto de estados que podem ser alcançados ao longo de um caminho cujos rótulos, quando concatenados, formam a string w
- Como sempre, os valores de ε ao longo desse caminho não contribuem para w

Transições estendidas e linguagens para os ε-AFNDs

A definição recursiva apropriada de $\hat{\delta}$ é:

- BASE: $\hat{\delta}(q, \varepsilon)$=ECLOSE(q). Isto é, se o rótulo do caminho é ε, então podemos seguir apenas arcos rotulados por ε que se estendem desde o estado q; isso é exatamente o que ECLOSE faz.

Transições estendidas e linguagens para os ε-AFNDs

- INDUÇÃO: Suponha que w tenha a forma xa, onde 'a' é o último símbolo de w. Note que 'a' é um elemento de Σ; ele não pode ser ε, que não está em Σ. Calculamos $\hat{\delta}(q, w)$ da seguinte forma:
  1. Seja $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$ o valor de $\hat{\delta}(q, x)$. Isto é, os p_i's são todos e somente os estados que podemos alcançar a partir de q seguindo um caminho rotulado por x. Esse caminho pode terminar com uma ou mais transições rotuladas por ε, e também pode ter outras ε-transições
  2. Seja $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$ o conjunto $\{r_1, r_2, ..., r_m\}$. Isto é, siga todas as transições rotuladas por a desde os estados que podemos alcançar a partir de q ao longo de caminhos rotulados por x. Os r_j's são alguns dos estados que podemos alcançar a partir de q ao longo de caminhos rotulados por w. Os estados adicionais que podemos alcançar são encontrados a partir dos r_j, seguindo-se arcos rotulados por ε na etapa (3) a seguir
  3. Então, $\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{j=1}^{m}$ ECLOSE(r_j). Essa etapa adicional de fechamento inclui todos os caminhos desde q rotulados por w, considerando-se a possibilidade de existirem arcos adicionais rotulados por ε que podemos seguir após efetuar uma transição sobre o último símbolo "real", a.

Exemplo

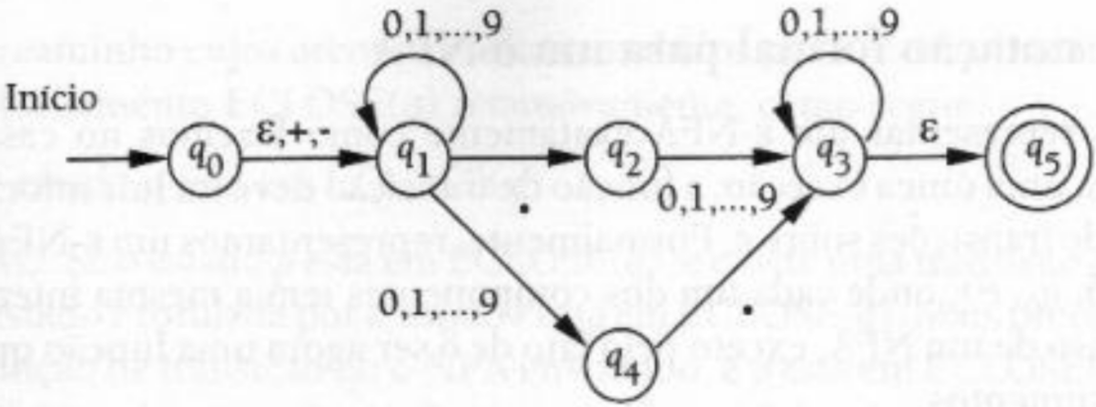

Figura: Um ε-AFND que aceita números decimais

Exemplo

Vamos calcular $\hat{\delta}(q_0, 5.6)$ para o ε-AFND da figura anterior. Um resumo das etapas necessárias é o seguinte:

- $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon)$=ECLOSE($q_0$)=$\{q_0, q_1\}$
- Calcule $\hat{\delta}(q_0, 5)$ da seguinte forma:
  1. Primeiro, calcule as transições sobre a entrada 5 a partir dos estados q_0 e q_1 que obtivemos no cálculo de $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon)$. Isto é, calculamos $\delta(q_0, 5) \cup \delta(q_1, 5) = \{q_1, q_4\}$
  2. Em seguida, faça o ε-fechamento dos elementos do conjunto calculado na etapa (1). Obtemos ECLOSE(q_1) $\cup$ ECLOSE(q_4)=$\{q_1\} \cup \{q_4\} = \{q_1, q_4\}$. Esse conjunto é $\hat{\delta}(q_0, 5)$. Esse padrão de duas etapas se repete para os dois símbolos seguintes.

Exemplo

- Calcule $\hat{\delta}(q_0, 5.)$ como segue:
  1. Primeiro, calcule $\delta(q_1, \;.) \cup \delta(q_4, \;.) = \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_2, q_3\}$
  2. Em seguida, calcule

$$\hat{\delta}(q_0, 5.) = \text{ ECLOSE}(q_2) \cup \text{ ECLOSE}(q_3) = \{q_2\} \cup \{q_3, q_5\} = \{q_2, q_3, q_5\}$$

- Calcule $\hat{\delta}(q_0, 5.6)$ da seguinte forma:
  1. Primeiro, calcule $\delta(q_2, 6) \cup \delta(q_3, 6) \cup \delta(q_5, 6) = \{q_3\} \cup \{q_3\} \cup \emptyset = \{q_3\}$
  2. Em seguida, calcule $\hat{\delta}(q_0, 5.6) = \text{ ECLOSE}(q_3) = \{q_3, q_5\}$
- $\square$

Transições estendidas e linguagens para os ε-AFNDs

- Agora podemos definir a linguagem de um ε-AFND E=$(\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, q_0, F)$ da maneira esperada: L(E)=$\{w|\hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$
- Ou seja, a linguagem de E é o conjunto de strings w que levam do estado inicial a pelo menos um estado de aceitação
- Para exemplificar, vimos no exemplo anterior que $\hat{\delta}(q_0, 5.6)$ contém o estado de aceitação q_5, e assim a string 5.6 está na linguagem desse ε-AFND

Eliminação de ε-transições

- Dado qualquer ε-AFND E, podemos encontrar um AFD D que aceita a mesma linguagem que E
- A construção que usamos é muito parecida com a construção de subconjuntos, pois os estados de D são subconjuntos dos estados de E
- A única diferença é que devemos incorporar as ε-transições de E, o que fazemos por meio do mecanismo de ε-fechamento
- Seja E=$(\mathcal{Q}_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$. Então o AFD equivalente

$$D = (\mathcal{Q}_D, \Sigma, \delta_D, q_0, F_D)$$

  é definido como a seguir:

Eliminação de ε-transições

- Seja E=$(\mathcal{Q}_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$. Então o AFD equivalente

$$D = (\mathcal{Q}_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$$

é definido como a seguir:

(1) $\mathcal{Q}_D$ é o conjunto de subconjuntos de $\mathcal{Q}_E$. Mais precisamente, descobriremos que todos os estados acessíveis de D são subconjuntos com ε-fechamento de $\mathcal{Q}_E$; isto é, conjuntos $S \subseteq \mathcal{Q}_E$ tais que S=ECLOSE(S)

(2) q_D =ECLOSE(q_0); isto é, obtemos o estado inicial de D fechando o conjunto que consiste apenas no estado inicial de E

Eliminação de ε-transições

(3) F_D representa os conjuntos de estados que contêm pelo menos um estado de aceitação de E. Ou seja, $F_D = \{S | S \text{ está em } \mathcal{Q}_D \text{ e } S \cap F_E \neq \emptyset\}$

(4) $\delta_D(S, a)$ é calculado, para todo 'a' em Σ e todos os conjuntos S em $\mathcal{Q}_D$ por:

   (a) Seja S=$\{p_1, p_2, ..., p_k\}$

   (b) Calcule $\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a)$; seja esse conjunto $\{r_1, r_2, ..., r_m\}$

   (c) Então $\delta_D(S, a) = \bigcup_{i=1}^{m} \text{ECLOSE}(r_j)$

Exemplo

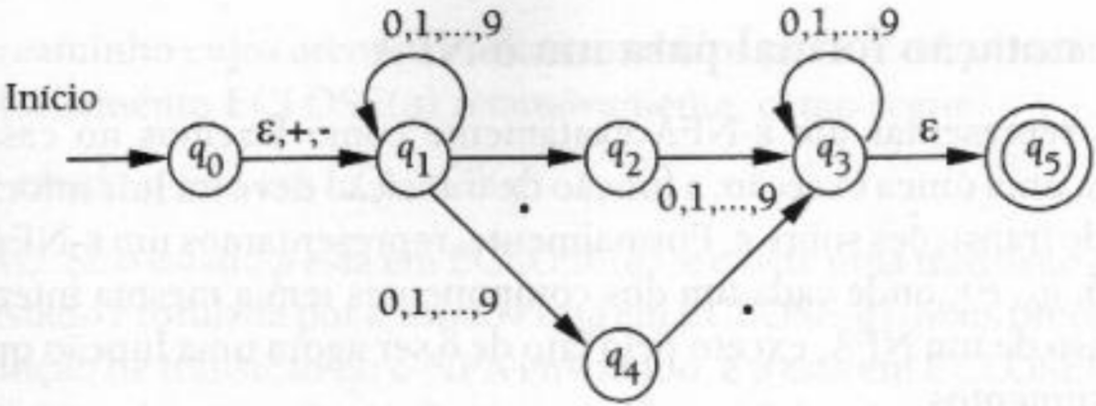

Figura: Um ε-AFND que aceita números decimais

Exemplo

- Vamos eliminar as ε-transições do ε-AFND da figura anterior, que chamaremos E no texto a seguir
- A partir de E, construímos um AFD D, mostrado na figura a seguir
- Entretanto, para evitar confusão, omitimos da figura a seguir o estado morto $\emptyset$ e todas as transições para este estado
- Você deve imaginar que, para cada estado na figura a seguir, há transições adicionais de qualquer estado para $\emptyset$ para quaisquer símbolos de entrada em que uma transição não é indicada
- Além disso, o estado $\emptyset$ tem transições para ele mesmo para todos os símbolos de entrada

Exemplo

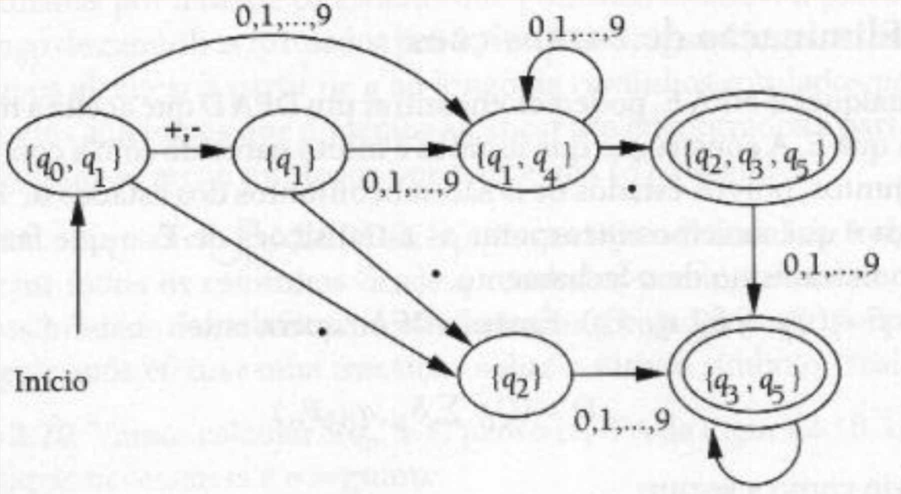

Figura: O AFD D que elimina ε-transições da ε-AFND do exemplo

Teorema

Uma linguagem L é aceita por algum ε-AFND se e somente se L é aceita por algum AFD.

Prova

- ($\Leftarrow$) Esse sentido é fácil
- Suponha que $L = L(D)$ para algum AFD
- Transforme D em um ε-AFD E adicionando transições $\delta(q, \varepsilon) = \emptyset$ para todos os estados de D
- Tecnicamente, também devemos converter as transições de D em símbolos de entrada, por exemplo $\delta_D(q, a) = \{p\}$
- Desse modo, as transições E e D são iguais

Prova

- $(\Rightarrow)$ Seja $E = (\mathcal{Q}_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$
- Precisamos mostrar que L(D)=L(E), e o fazemos mostrando que as funções de transição estendida de E e D são iguais
- Formalmente, mostramos $\hat{\delta}_E(q_0, w) = \hat{\delta}_D(q_0, w)$ por indução sobre o comprimento de w

Prova

- BASE: Se $|w| = 0$, então w=ε
  - Sabemos que $\hat{\delta}_E(q_0, \varepsilon) = ECLOSE(q_0)$
  - Também sabemos que $q_D = ECLOSE(q_0)$, porque esse é o modo como o estado inicial de D é definido
  - Por fim, para um AFD, sabemos que $\hat{\delta}(p, \varepsilon) = p$ para qualquer estado p e assim, em particular, $\hat{\delta}_D(q_D, \varepsilon)$ =ECLOSE(q_0)
  - Provamos portanto que $\hat{\delta}_E(q_D, \varepsilon) = \hat{\delta}_D(q_D, \varepsilon)$

Prova

- INDUÇÃO: Suponha que w=xa, onde 'a' é o último símbolo de w, e que o enunciado seja verdadeiro para x
  - Isto é, $\hat{\delta}_E(q_0, x) = \hat{\delta}_D(q_D, x)$
  - Sejam esses dois conjuntos de estados $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$
    Pela definição de $\hat{\delta}$ para ε-AFNDs, calculamos $\hat{\delta}_E(q_0, w)$ por:
    1. Seja $\{r_1, r_2, ..., r_m\}$ o conjunto $\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a)$
    2. Então, $\hat{\delta}_E(q_0, w) = \bigcup_{j=1}^{m} \text{ECLOSE}(r_j)$

Eliminação de ε-transições

- Se examinarmos a construção do AFD D na construção de subconjuntos modificada anterior, veremos que $\delta_D(\{p_1, p_2, ..., p_k\}, a)$ é construída pelas mesmas etapas (1) e (2) anteriores
- Desse modo, $\hat{\delta}_D(q_D, w)$, que é $\hat{\delta}_D(\{p_1, p_2, ..., p_k\}, a)$, é o mesmo conjunto que $\hat{\delta}_E(q_0, w)$
- Assim, provamos que $\hat{\delta}_E(q_0, w) = \hat{\delta}_D(q_D, w)$ e concluímos a parte indutiva
- $\square$

Próxima Aula

O que vem por aí?

- Expressões regulares

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Autômatos finitos com epsílon-transições

Linguagens Formais e Autômatos

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

26 de outubro de 2021

[0]Slides baseados no livro HOPCROFT, John E.; MOTWANI, Rajeev; ULLMAN, Jeffrey D. Introduction to automata theory, languages, and computation. Acm Sigact News, v. 32, n. 1, p. 60-65, 2001.