



UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ  
CAMPUS DE CRATEÚS

# Sistemas Dedutivos

## Lógica para computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará  
Campus de Crateús

25 e 28 de maio de 2020

---

<sup>0</sup>Slides baseados no livro Lógica para Ciência da Computação<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>DE SOUZA, JOÃO NUNES. Lógica para ciência da computação. Elsevier Brasil, 2008.

## O que é um sistema dedutivo?

- Nas últimas aulas, vimos o que são fórmulas da lógica proposicional clássica e como atribuir valores verdade a essas fórmulas
- Vimos também a noção de consequência lógica e como determinar se um fórmula é consequência lógica de um conjunto de fórmulas  $\Gamma$
- No entanto, não vimos como, a partir de um conjunto de fórmulas  $\Gamma$ , podemos inferir novas fórmulas que sejam a consequência lógica de  $\Gamma$
- Essa é a tarefa de um **sistema dedutivo**

## O que é um sistema dedutivo?

- Um sistema dedutivo nos permite inferir, derivar ou deduzir as consequências lógicas de um conjunto de fórmulas, chamado de teoria
- Quando um sistema dedutivo infere uma fórmula  $A$  a partir de uma teoria  $\Gamma$ , escrevemos  $\Gamma \vdash A$
- O objeto  $\Gamma \vdash A$  é chamado de seqüente, no qual  $\Gamma$  é o antecedente(ou hipótese) e  $A$  é o consequente(ou conclusão)

- Existem vários procedimentos distintos que nos permitem realizar uma inferência
- Cada procedimento dá origem a um sistema dedutivo distinto
- Neste curso, iremos analisar três tipos de sistemas dedutivos: axiomatizações, **sistemas de dedução natural** e o método dos tableaux analíticos

- Obviamente, não queremos que um sistema de dedução produza fórmulas que não sejam consequência lógica da teoria usada como hipótese
- Dizemos que um sistema dedutivo  $\vdash$  é **correto** se isso nunca ocorre, ou seja, se  $\Gamma \vdash A$  então  $\Gamma \models A$
- Por outro lado, queremos que um sistema dedutivo consiga inferir todas as possíveis consequências lógicas de uma teoria
- Dizemos que um sistema dedutivo  $\vdash$  é **completo** se ele for capaz de realizar todas essas inferências, ou seja, se  $\Gamma \models A$  então  $\Gamma \vdash A$
- Todos os sistemas dedutivos que apresentaremos possuem as propriedades de **correção** e **completude**

## Introdução

- É o sistema formal de dedução mais antigo que se conhece, tendo sido usado desde a apresentação da geometria euclidiana pelos gregos
- A apresentação da axiomatização segue o estilo utilizado por Hilbert, tanto que as axiomatizações de lógicas são muitas vezes chamadas de sistemas de Hilbert
- De acordo com essa forma de apresentação, uma axiomatização possui dois tipos de elementos:
  - Os axiomas, que são fórmulas da lógica às quais se atribui um status especial de “verdades básicas”
  - As regras de inferência, que permitem inferir novas fórmulas a partir de fórmulas já inferidas

Antes de apresentarmos uma axiomatização da lógica proposicional clássica, temos de mencionar o conceito de **substituição**

## Substituições

- A substituição de um átomo  $p$  por uma fórmula  $B$  em uma fórmula  $A$  é representada por  $A[p := B]$
- Intuitivamente, se temos uma fórmula  $A = p \rightarrow (p \wedge q)$  e queremos substituir  $p$  por  $(r \vee s)$ , o resultado da substituição será  $A[p := r \vee s] = (r \vee s) \rightarrow ((r \vee s) \wedge q)$
- A definição formal de substituição se dá por indução estrutural sobre a fórmula  $A$  sobre a qual se processa a substituição, da seguinte maneira:
  - $p[p := B] = B$
  - $q[p := B] = q$ , para  $q \neq p$
  - $(\neg A)[p := B] = \neg(A[p := B])$
  - $(A_1 \square A_2)[p := B] = A_1[p := B] \square A_2[p := B]$ , para  $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

## Substituição

- Note que os itens 1 e 2 tratam do caso básico de substituir em fórmulas proposicionais
- Os itens 3 e 4 tratam dos casos indutivos
- Aplicando essa definição ao exemplo que foi visto intuitivamente, temos que:

$$\begin{aligned}(p \rightarrow (p \wedge q))[p := (r \vee s)] &= p[p := (r \vee s)] \rightarrow (p \wedge q)[p := (r \vee s)] \\ &= (r \vee s) \rightarrow (p[p := (r \vee s)] \wedge q[p := (r \vee s)]) \\ &= (r \vee s) \rightarrow ((r \vee s) \wedge q)\end{aligned}$$



## Substituição

- Quando uma fórmula  $B$  é resultante da substituição de um ou mais átomos da fórmula  $A$ , dizemos que  $B$  é uma instância da fórmula  $A$
- Com a noção de substituição bem definida, apresentamos a seguir uma axiomatização da lógica proposicional clássica

Antes de definir uma axiomatização para a lógica proposicional clássica, é importante frisarmos que pode existir mais de uma axiomatização possível, todas elas equivalentes. A axiomatização a seguir apresenta grupos de axiomas que definem o comportamento de cada um dos conectivos booleanos.

A axiomatização para a lógica proposicional clássica contém os seguintes axiomas:

- $(\rightarrow_1) p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $(\rightarrow_2) (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- $(\wedge_1) p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$
- $(\wedge_2) (p \wedge q) \rightarrow p$
- $(\wedge_3) (p \wedge q) \rightarrow q$
- $(\vee_1) p \rightarrow (p \vee q)$
- $(\vee_2) q \rightarrow (p \vee q)$
- $(\vee_3) (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q) \rightarrow r)$
- $(\neg_1) (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$
- $(\neg_2) \neg\neg p \rightarrow p$

E a seguinte regra de inferência:

Modus Ponens: A partir de  $A \rightarrow B$  e  $A$ , infere-se  $B$

- Os axiomas podem ser instanciados, ou seja, seus átomos podem ser uniformemente substituídos por qualquer fórmula de lógica.
- Nesse caso, dizemos que a fórmula resultante é uma instância do axioma
- Com essa noção de axiomatização, podemos definir a noção de dedução

## Dedução - Definição

Uma dedução é uma sequência de fórmulas  $A_1, \dots, A_n$  tal que cada fórmula na sequência ou é uma instância de um axioma ou é obtida de fórmulas anteriores por meio de regras de inferência, ou seja, por modus ponens.

## Teorema - Definição

Um teorema  $A$  é uma fórmula tal que existe uma dedução  $A_1, \dots, A_n = A$ . Representaremos um teorema por  $\vdash_{AX} A$  ou simplesmente  $\vdash A$ , quando o contexto deixar claro qual o método de inferência que está sendo usado

- A axiomatização apresentada possui a propriedade de substituição uniforme, ou seja, se  $A$  é um teorema e  $B$  é uma instância de  $A$ , então  $B$  é um teorema também.
- O motivo para isso é bem simples: se podemos aplicar uma substituição para obter  $B$  de  $A$ , podemos aplicar a mesma substituição nas fórmulas que ocorrem na dedução de  $A$  e, como toda instância de um axioma é uma fórmula dedutível, transformamos a dedução de  $A$  em uma dedução de  $B$
- Iremos definir agora quando uma fórmula  $A$  segue de um conjunto de fórmulas  $\Gamma$ , também chamado de teoria ou de conjunto de hipóteses, o que é representado por  $\Gamma \vdash_{AX} A$
- Nesse caso, trata-se de adaptar a noção de dedução para englobar os elementos de  $\Gamma$

## Definição

Dizemos que uma fórmula  $A$  é dedutível a partir de um conjunto de fórmulas  $\Gamma$  se há uma dedução, ou seja, uma sequência de fórmulas  $A_1, \dots, A_n = A$  tal que cada fórmula  $A_i$  na sequência:

- ou é uma fórmula  $A_i \in \Gamma$
- ou é uma instância de um axioma
- ou é obtida de fórmulas anteriores por meio de modus ponens

- Note que, no caso de o conjunto  $\Gamma$  ser um conjunto vazio,  $\Gamma = \emptyset$ , temos que  $\emptyset \vdash_{AX} A$  implica que  $A$  é um teorema, o que é representado simplesmente por  $\vdash_{AX} A$
- Note também que não podemos aplicar a substituição uniforme nos elementos de  $\Gamma$ ; a substituição uniforme só pode ser aplicadas aos axiomas da lógica.
- Também é costume representar o conjunto  $\Gamma$  como uma sequência de fórmulas, sem o uso das chaves delimitadoras de conjuntos. Assim, se  $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , em vez de escrevermos  $\{A_1, \dots, A_n\} \vdash A$ , escrevemos simplesmente  $A_1, \dots, A_n \vdash A$
- Similarmente, em vez de escrevermos  $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ , escrevemos simplesmente  $\Gamma, A \vdash B$ , representando a união das hipóteses pela concatenação de listas de hipóteses.



## Teorema da Dedução

O Teorema da Dedução estabelece a relação entre o conectivo da implicação,  $\rightarrow$ , e a dedução lógica representada por  $\vdash$

## Teorema da Dedução

$\Gamma, A \vdash B$  se, e somente se,  $\Gamma \vdash A \rightarrow B$

$A \rightarrow B, C \rightarrow A, C \vdash B$

1.  $A \rightarrow B$  hipótese
2.  $C \rightarrow A$  hipótese
3.  $C$  hipótese
4.  $A$  *modus ponens* 2, 3
5.  $B$  *modus ponens* 1, 4

Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

# Exemplos

$p \rightarrow q, p \rightarrow r, p \vdash q \wedge r$

1.	$p \rightarrow q$	hipótese
2.	$p \rightarrow r$	hipótese
3.	$p$	hipótese
4.	$q$	<i>modus ponens</i> 1, 3
5.	$r$	<i>modus ponens</i> 2, 3
6.	$q \rightarrow (r \rightarrow (q \wedge r))$	instância de $(\wedge_1)$
7.	$r \rightarrow (q \wedge r)$	<i>modus ponens</i> 6, 4
8.	$q \wedge r$	<i>modus ponens</i> 7, 5

Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

- Os métodos de inferência Axiomatização e Dedução Natural permitem mostrar quando uma fórmula pode ser a conclusão de um conjunto de hipóteses
- No entanto, nenhum desses métodos provê, de maneira óbvia, um procedimento de decisão
- Um procedimento de decisão permite determinar a validade de um sequente, ou seja, determinar se  $B_1, \dots, B_n \vdash A_1, \dots, A_m$  ou se  $B_1, \dots, B_n \not\vdash A_1, \dots, A_m$
- No caso típico, estamos interessados em decidir sequentes com o consequente unitário, da forma  $\Gamma \vdash A$
- Os métodos dos sistemas axiomáticos e da dedução natural apenas nos permitiriam demonstrar como  $A$  poderia ser inferido a partir de  $\Gamma$
- Mas esses métodos não nos permitiam inferir que  $\Gamma \not\vdash A$ , ou seja, não permitiam inferir a falsidade de um sequente

- É importante notar que  $\Gamma \not\models A$  não implica que  $\Gamma \vdash \neg A$
- Isso pode ser visualizado mais facilmente pela noção de consequência lógica
- Considere a (in)consequência lógica  $p \not\models q$  em que claramente podemos ter uma valoração  $v$  que satisfaz  $p$  e contradiz  $q$ ; com isso não podemos afirmar que  $p \models \neg q$ , pois podemos ter uma valoração  $v'$  que satisfaz  $p$  e  $q$ , falsificando  $\neg q$
- Dessa forma, temos que  $p \not\models q$  e  $p \not\models \neg q$

- Esse exemplo, aliás, é muito conveniente para ilustra o fato de que os métodos baseados em Tabelas da Verdade são procedimentos de decisão
- Porém, como já vimos, esses procedimentos têm um crescimento no número de linhas das Tabelas da Verdade exponencial com o número de símbolos proposicionais
- Apresentaremos agora um método de decisão baseado em um sistema de inferência, o qual não necessariamente gera provas de tamanho exponencial com o número de símbolos proposicionais
- Tal método é chamado de método dos tableaux analíticos ou tableaux semânticos

- Tableau analíticos é um método de inferência baseado em refutação: para provarmos que  $B_1, \dots, B_n \vdash A_1, \dots, A_m$ , afirmaremos a veracidade de  $B_1, \dots, B_n$  e a falsidade de  $A_1, \dots, A_m$ , na esperança de derivarmos uma contradição
- Se a contradição for obtida, teremos demonstrado o sequente
- Por outro lado, se não for obtida uma contradição, teremos obtido um contra-exemplo ao sequente, ou seja, teremos construído uma valoração que satisfaz todas as fórmulas  $B_i$  do antecedente e falsifica todas as fórmulas  $A_j$  do consequente

## Fórmulas marcadas

- Para afirmar a veracidade ou a falsidade de fórmula, o método dos tableaux analíticos lida com fórmulas marcadas pelos símbolos T(de true, verdadeira) e F(falso)
- Dessa forma, em vez de lidar com fórmulas puras, do tipo  $A$ , lidaremos com fórmulas marcadas, do tipo TA e FA
- As fórmulas marcadas TA e FA são chamadas de fórmulas conjugadas
- O passo inicial para a criação de um tableau para um sequente  $B_1, \dots, B_n \vdash A_1, \dots, A_m$  é marcar todas as fórmulas da seguinte maneira: as fórmulas do antecedente(aquelas cuja veracidade queremos afirmar) são marcadas por T; as fórmulas do consequente, cuja finalidade em um processo de refutação queremos afirmar, são marcadas por F



Dessa forma, o sequente  $B_1, \dots, B_n \vdash A_1, \dots, A_m$  dá origem ao tableau inicial:

$TB_1$

.

.

.

$TB_n$

$FA_1$

.

.

.

$FA_m$

- Esse formato inicial do tableau indica que um tableau é uma árvore
- Em seguida, o tableau é expandido por regras que podem simplesmente adicionar novas fórmulas ao final de um ramo (regras do tipo  $\alpha$ ) ou bifurcar um ramo em dois (regras do tipo  $\beta$ )

# Regras de expansão $\alpha$ e $\beta$

- As fórmulas marcadas de um tableau podem ser de dois tipos: fórmulas do tipo  $\alpha$  e fórmulas do tipo  $\beta$
- As fórmulas do tipo  $\alpha$  se decompõem em fórmulas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , conforme ilustrado na figura abaixo

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
$TA \wedge B$	TA	TB
$FA \vee B$	FA	FB
$FA \rightarrow B$	TA	FB
$T \neg A$	FA	FA

- As fórmulas do tipo  $\beta$  se decompõe em fórmulas  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , conforme ilustrado na figura abaixo

$\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$
$FA \wedge B$	FA	FB
$TA \vee B$	TA	TB
$TA \rightarrow B$	FA	TB
$F \neg A$	TA	TA

- Note que a escolha de classificar  $T\neg A$  como fórmula do tipo  $\alpha$  e  $F\neg A$  como fórmula do tipo  $\beta$  é arbitrária e foi feita com o intuito de dar simetria ao conjunto de fórmulas marcadas
- Assim, se uma fórmula é do tipo  $\alpha$ , a fórmula conjugada é do tipo  $\beta$ , e vice-versa
- As regras de expansão de um tableau são as seguintes

## Expansão $\alpha$

Se um ramo do tableau contém uma fórmula do tipo  $\alpha$ , adicionam-se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  ao fim de todos os ramos que contêm  $\alpha$

## Expansão $\beta$

Se um ramo do tableau contém uma fórmula do tipo  $\beta$ , esse ramo é bifurcado em dois ramos, encabeçados por  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , respectivamente

## Regras de expansão $\alpha$ e $\beta$

- Note que, se  $p$  é um átomo,  $Tp$  e  $Fp$  não são nem fórmulas do tipo  $\alpha$  nem do tipo  $\beta$  e portanto não podem gerar expansões do tableau
- Em cada ramo, uma fórmula só pode ser expandida uma única vez
- Um ramo que não possui mais fórmulas para serem expandidas é dito saturado
- Como expansões  $\alpha$  e  $\beta$  sempre geram fórmulas de tamanho menor, eventualmente todas as fórmulas serão expandidas até chegarmos ao nível atômico, quando todos os ramos estarão saturados
- Portanto, o processo de expansão sempre termina



- Um ramo do tableau está fechado se este possui um par de fórmulas conjugadas do tipo TA e FA
- Um ramo fechado não necessita mais ser expandido, mesmo que não esteja ainda saturado
- Um tableau está fechado se todos os seus ramos estão fechados

### Definição

Um sequente  $B_1, \dots, B_n \vdash_{TA} A_1, \dots, A_m$  foi deduzido pelo método dos tableaux analíticos se existir um tableau fechado para ele

- No caso da dedução de um teorema  $\vdash_{TA} A$  pelo método dos tableaux analíticos, devemos construir um tableau fechado para FA

# Exemplos

$\vdash p \vee \neg p$

1.  $Fp \vee \neg p$   
2.  $Fp$   
3.  $F\neg p$   
4.  $Tp$   
 $\times$

Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

# Exemplos

$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$

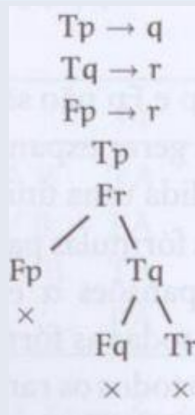


Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

# Exemplos

$p, p \wedge q \rightarrow r \vdash r$

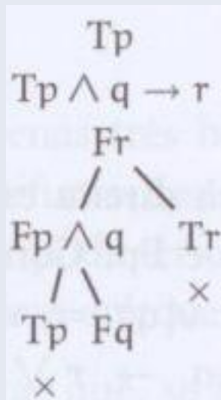


Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

# Exemplos

$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \vee s \vdash r$

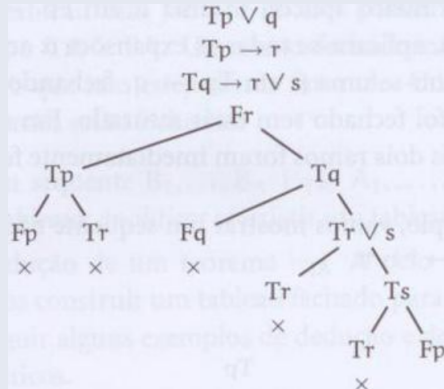


Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

Um mesmo sequente pode ter mais de um tableaux.



# Exemplos

$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \vdash r$

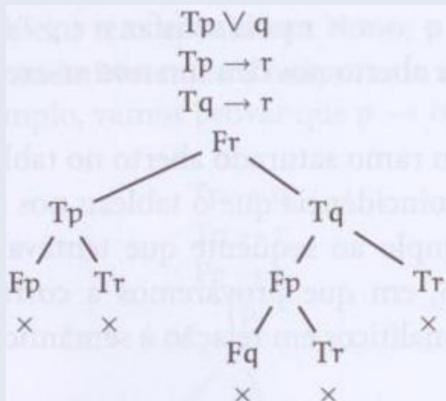


Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

# Exemplos

$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \vdash r$

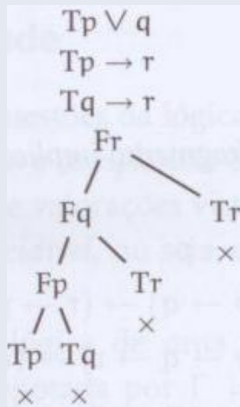


Figura: Fonte: Livro Lógica para Computação - Silva, Finger e Melo

## O que vem por aí?

- Exercícios
- Dedução Natural



UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ  
CAMPUS DE CRATEÚS

# Sistemas Dedutivos

## Lógica para computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará  
Campus de Crateús

25 e 28 de maio de 2020

---

<sup>0</sup>Slides baseados no livro Lógica para Ciência da Computação<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>DE SOUZA, JOÃO NUNES. Lógica para ciência da computação. Elsevier Brasil, 2008.