Matemática Discreta

Contagem

Professora: Lílian de Oliveira Carneiro

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

Maio de 2020

Introdução

- A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar"

Introdução

- A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar"
- Combinatória é o ramo da matemática que trata da contagem

Introdução

- A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar"
- Combinatória é o ramo da matemática que trata da contagem
- Ou seja, é um ramo da matemática que estuda coleções finitas de objetos que satisfazem critérios específicos

Introdução

- A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar"
- Combinatória é o ramo da matemática que trata da contagem
- Ou seja, é um ramo da matemática que estuda coleções finitas de objetos que satisfazem critérios específicos
- Em Ciência da Computação, questões de contagem são importantes já que temos uma quantidade finita de recursos

Introdução

- A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar"
- Combinatória é o ramo da matemática que trata da contagem
- Ou seja, é um ramo da matemática que estuda coleções finitas de objetos que satisfazem critérios específicos
- Em Ciência da Computação, questões de contagem são importantes já que temos uma quantidade finita de recursos
  - Qual a quantidade de memória que será utilizada por um determinado programa que faz alocação dinâmica de memória?

Introdução

- A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar"
- Combinatória é o ramo da matemática que trata da contagem
- Ou seja, é um ramo da matemática que estuda coleções finitas de objetos que satisfazem critérios específicos
- Em Ciência da Computação, questões de contagem são importantes já que temos uma quantidade finita de recursos
  - Qual a quantidade de memória que será utilizada por um determinado programa que faz alocação dinâmica de memória?
  - Quantos usuários um determinado sistema computacional tem capacidade de atender?

Introdução

- A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar"
- Combinatória é o ramo da matemática que trata da contagem
- Ou seja, é um ramo da matemática que estuda coleções finitas de objetos que satisfazem critérios específicos
- Em Ciência da Computação, questões de contagem são importantes já que temos uma quantidade finita de recursos
  - Qual a quantidade de memória que será utilizada por um determinado programa que faz alocação dinâmica de memória?
  - Quantos usuários um determinado sistema computacional tem capacidade de atender?
  - Qual é o custo computacional em termos de tempo de execução e espaço de um determinado algoritmo?
- Além disso, contagem é a base de probabilidade e estatística

Princípios da Multiplicação

- Considere o seguinte problema:

Princípios da Multiplicação

- Considere o seguinte problema:
  - Em uma sala com 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher?

Princípios da Multiplicação

- Considere o seguinte problema:
  - Em uma sala com 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher?
    - Chamemos de h_1, h_2 e h_3 e as mulheres de m_1, m_2 e m_3

Princípios da Multiplicação

- Considere o seguinte problema:
    - Em uma sala com 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher?
        - Chamemos de h_1, h_2 e h_3 e as mulheres de m_1, m_2 e m_3
        - Podemos formar 4 casais nos quais o homem é h_1

Princípios da Multiplicação

- Considere o seguinte problema:
    - Em uma sala com 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher?
        - Chamemos de h_1, h_2 e h_3 e as mulheres de m_1, m_2 e m_3
        - Podemos formar 4 casais nos quais o homem é h_1
        - Podemos formar outros 4 casais nos quais o homem é h_2

Princípios da Multiplicação

- Considere o seguinte problema:
  - Em uma sala com 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher?
    - Chamemos de h_1, h_2 e h_3 e as mulheres de m_1, m_2 e m_3
    - Podemos formar 4 casais nos quais o homem é h_1
    - Podemos formar outros 4 casais nos quais o homem é h_2
    - E mais outros 4 casais nos quais o homem é h_3

Princípios da Multiplicação

- Considere o seguinte problema:
  - Em uma sala com 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher?
    - Chamemos de h_1, h_2 e h_3 e as mulheres de m_1, m_2 e m_3
    - Podemos formar 4 casais nos quais o homem é h_1
    - Podemos formar outros 4 casais nos quais o homem é h_2
    - E mais outros 4 casais nos quais o homem é h_3
    - Logo, o número de casais é dado por: $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$

Princípios da Multiplicação

- Considere o seguinte problema:
  - Em uma sala com 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher?
    - Chamemos de h_1, h_2 e h_3 e as mulheres de m_1, m_2 e m_3
    - Podemos formar 4 casais nos quais o homem é h_1
    - Podemos formar outros 4 casais nos quais o homem é h_2
    - E mais outros 4 casais nos quais o homem é h_3
    - Logo, o número de casais é dado por: $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$
- O exemplo acima ilustra o **Princípio da Multiplicação** ou **Princípio Fundamental da Enumeração**

Princípios da Multiplicação

- Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomar todas as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$

Princípios da Multiplicação

- Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomar todas as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$
- Assim, para formar um casal devemos tomar as decisões:

Princípios da Multiplicação

- Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomar todas as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$
- Assim, para formar um casal devemos tomar as decisões:

$$d_1 : \text{escolha do homem}$$

Princípios Básicos da Contagem

Princípios da Multiplicação

- Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomar todas as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$
- Assim, para formar um casal devemos tomar as decisões:

$$d_1 : \text{escolha do homem}$$
$$d_2 : \text{escolha da mulher}$$

Princípios da Multiplicação

- Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomar todas as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$
- Assim, para formar um casal devemos tomar as decisões:

$$d_1 : \text{escolha do homem}$$
$$d_2 : \text{escolha da mulher}$$

- Como d_1 pode ser tomada de 3 maneiras e, depois disso, d_2 pode ser tomada de 4 maneiras, o número de maneiras de se formar um casal é $3 \cdot 4 = 12$

Princípios da Multiplicação

- O **Princípio da Multiplicação** permite obter o número de elementos do conjunto

Princípios da Multiplicação

- O **Princípio da Multiplicação** permite obter o número de elementos do conjunto

$$\left\{ \begin{array}{cccc} (h_1, m_1) & (h_1, m_2) & (h_1, m_3) & (h_1, m_4) \\ (h_2, m_1) & (h_2, m_2) & (h_2, m_3) & (h_2, m_4) \\ (h_3, m_1) & (h_3, m_2) & (h_3, m_3) & (h_4, m_4) \end{array} \right\}$$

constituído por todos os casais possíveis, sem que seja necessário enumerar seus elementos

Princípios da Multiplicação

- O **Princípio da Multiplicação** permite obter o número de elementos do conjunto

$$\left\{ \begin{array}{cccc} (h_1, m_1) & (h_1, m_2) & (h_1, m_3) & (h_1, m_4) \\ (h_2, m_1) & (h_2, m_2) & (h_2, m_3) & (h_2, m_4) \\ (h_3, m_1) & (h_3, m_2) & (h_3, m_3) & (h_4, m_4) \end{array} \right\}$$

  constituído por todos os casais possíveis, sem que seja necessário enumerar seus elementos
- Em termos de conjuntos, temos:

Princípios da Multiplicação

- O **Princípio da Multiplicação** permite obter o número de elementos do conjunto

$$\left\{ \begin{array}{cccc} (h_1, m_1) & (h_1, m_2) & (h_1, m_3) & (h_1, m_4) \\ (h_2, m_1) & (h_2, m_2) & (h_2, m_3) & (h_2, m_4) \\ (h_3, m_1) & (h_3, m_2) & (h_3, m_3) & (h_4, m_4) \end{array} \right\}$$

  constituído por todos os casais possíveis, sem que seja necessário enumerar seus elementos
- Em termos de conjuntos, temos:
  - Se A e B são dois conjuntos com m e n elementos, respectivamente, então o número de elementos de $A \times B$, ou seja, o número de pares ordenados em $A \times B$ é $m \cdot n$

Princípios da Multiplicação

- João tem 5 bicicletas e 3 carros. Ele planeja ir e voltar do trabalho pedalando uma bicicleta e depois pegar um de seus carros para dirigir até um restaurante onde irá jantar. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer isso?

Princípios da Multiplicação

- João tem 5 bicicletas e 3 carros. Ele planeja ir e voltar do trabalho pedalando uma bicicleta e depois pegar um de seus carros para dirigir até um restaurante onde irá jantar. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer isso?
  - João está fazendo duas escolhas em sequência

Princípios da Multiplicação

- João tem 5 bicicletas e 3 carros. Ele planeja ir e voltar do trabalho pedalando uma bicicleta e depois pegar um de seus carros para dirigir até um restaurante onde irá jantar. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer isso?
  - João está fazendo duas escolhas em sequência
  - Portanto, ele está formando um par ordenado da forma (bicicleta, carro)

Princípios da Multiplicação

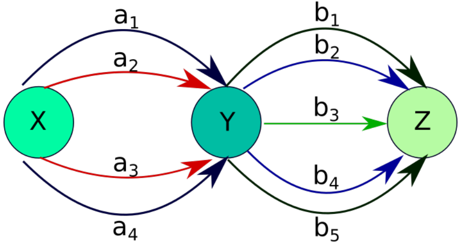
- João tem 5 bicicletas e 3 carros. Ele planeja ir e voltar do trabalho pedalando uma bicicleta e depois pegar um de seus carros para dirigir até um restaurante onde irá jantar. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer isso?
    - João está fazendo duas escolhas em sequência
    - Portanto, ele está formando um par ordenado da forma (bicicleta, carro)
    - Portanto, existem $5 \cdot 3 = 15$ maneiras possíveis

Princípios da Multiplicação

- Dadas as cidades X, Y, Z. Existem quatro rodovias que ligam a cidade X com a Y e cinco queligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas pode-se chegar a Z?

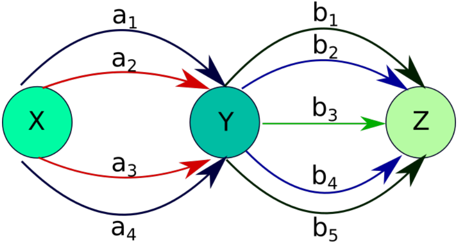
Princípios da Multiplicação

- Dadas as cidades X, Y, Z. Existem quatro rodovias que ligam a cidade X com a Y e cinco queligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas pode-se chegar a Z?



Princípios da Multiplicação

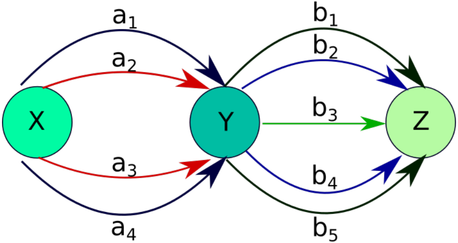
- Dadas as cidades X, Y, Z. Existem quatro rodovias que ligam a cidade X com a Y e cinco queligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas pode-se chegar a Z?



- Seja A o conjunto das rodovias que ligam X a Y

Princípios da Multiplicação

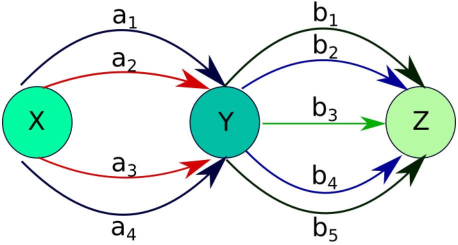
- Dadas as cidades X, Y, Z. Existem quatro rodovias que ligam a cidade X com a Y e cinco queligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas pode-se chegar a Z?



- Seja A o conjunto das rodovias que ligam X a Y
- Seja B o conjunto das rodovias que ligam Y a Z

Princípios da Multiplicação

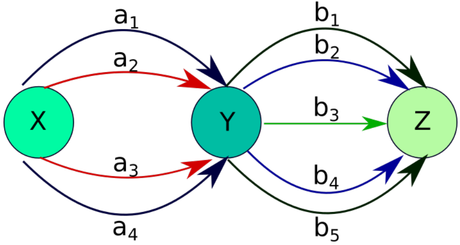
- Dadas as cidades X, Y, Z. Existem quatro rodovias que ligam a cidade X com a Y e cinco queligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas pode-se chegar a Z?



- Seja A o conjunto das rodovias que ligam X a Y
- Seja B o conjunto das rodovias que ligam Y a Z
- Como o conjunto A possui 4 elementos e o B possui 5, temos $4 \cdot 5$ pares ordenados

Princípios da Multiplicação

- Dadas as cidades X, Y, Z. Existem quatro rodovias que ligam a cidade X com a Y e cinco queligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas pode-se chegar a Z?



- Seja A o conjunto das rodovias que ligam X a Y
- Seja B o conjunto das rodovias que ligam Y a Z
- Como o conjunto A possui 4 elementos e o B possui 5, temos $4 \cdot 5$ pares ordenados
- E, portanto, $4 \cdot 5 = 20$ modos de viajar de X para Y

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
  - O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
    - O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos - não podemos usar o zero!

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
  - O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos - não podemos usar o zero!
  - O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
  - O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos - não podemos usar o zero!
  - O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos - não podemos usar o algarismo usado anteriormente!

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
  - O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos - não podemos usar o zero!
  - O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos - não podemos usar o algarismo usado anteriormente!
  - O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
  - O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos - não podemos usar o zero!
  - O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos - não podemos usar o algarismo usado anteriormente!
  - O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos - não podemos usar os dois algarismos usados anteriormente!

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
  - O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos - não podemos usar o zero!
  - O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos - não podemos usar o algarismo usado anteriormente!
  - O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos - não podemos usar os dois algarismos usados anteriormente!
- Logo, existem

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$$

números naturais de três algarismos distintos

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
- Observe que se começássemos do último algarismo, teríamos:

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
- Observe que se começássemos do último algarismo, teríamos:
  - 10 modos de escolher o último algarismo

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
- Observe que se começássemos do último algarismo, teríamos:
  - 10 modos de escolher o último algarismo
  - 9 modos de escolher o penúltimo

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
- Observe que se começássemos do último algarismo, teríamos:
    - 10 modos de escolher o último algarismo
    - 9 modos de escolher o penúltimo - não podemos usar o algarismo usado anteriormente!

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
- Observe que se começássemos do último algarismo, teríamos:
    - 10 modos de escolher o último algarismo
    - 9 modos de escolher o penúltimo - não podemos usar o algarismo usado anteriormente!
    - De quantos modos podemos escolher o primeiro?

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
- Observe que se começássemos do último algarismo, teríamos:
    - 10 modos de escolher o último algarismo
    - 9 modos de escolher o penúltimo - não podemos usar o algarismo usado anteriormente!
    - De quantos modos podemos escolher o primeiro? - **depende!**

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
- Observe que se começássemos do último algarismo, teríamos:
  - 10 modos de escolher o último algarismo
  - 9 modos de escolher o penúltimo - não podemos usar o algarismo usado anteriormente!
  - De quantos modos podemos escolher o primeiro? - **depende!**
  - Se o zero tiver sido usado anteriormente, a resposta é

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
- Observe que se começássemos do último algarismo, teríamos:
  - 10 modos de escolher o último algarismo
  - 9 modos de escolher o penúltimo - não podemos usar o algarismo usado anteriormente!
  - De quantos modos podemos escolher o primeiro? - **depende!**
  - Se o zero tiver sido usado anteriormente, a resposta é 8

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
- Observe que se começássemos do último algarismo, teríamos:
  - 10 modos de escolher o último algarismo
  - 9 modos de escolher o penúltimo - não podemos usar o algarismo usado anteriormente!
  - De quantos modos podemos escolher o primeiro? - **depende!**
  - Se o zero tiver sido usado anteriormente, a resposta é 8
  - Em caso contrário, a resposta é 7

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
- Observe que se começássemos do último algarismo, teríamos:
  - 10 modos de escolher o último algarismo
  - 9 modos de escolher o penúltimo - não podemos usar o algarismo usado anteriormente!
  - De quantos modos podemos escolher o primeiro? - **depende!**
  - Se o zero tiver sido usado anteriormente, a resposta é 8
  - Em caso contrário, a resposta é 7 - não podemos usar nem o zero nem os algarismo usados anteriormente
- É claro que esta dificuldade não ocorreria se tivéssemos começado com a escolha do primeiro algarismo do número

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
- Observe que se começássemos do último algarismo, teríamos:
  - 10 modos de escolher o último algarismo
  - 9 modos de escolher o penúltimo - não podemos usar o algarismo usado anteriormente!
  - De quantos modos podemos escolher o primeiro? - **depende!**
  - Se o zero tiver sido usado anteriormente, a resposta é 8
  - Em caso contrário, a resposta é 7 - não podemos usar nem o zero nem os algarismo usados anteriormente
- É claro que esta dificuldade não ocorreria se tivéssemos começado com a escolha do primeiro algarismo do número
- Recomendação:

Princípios da Multiplicação

- Quantos números naturais com exatamente três algarismos distintos (na base 10) existem?
- Observe que se começássemos do último algarismo, teríamos:
  - 10 modos de escolher o último algarismo
  - 9 modos de escolher o penúltimo - não podemos usar o algarismo usado anteriormente!
  - De quantos modos podemos escolher o primeiro? - **depende!**
  - Se o zero tiver sido usado anteriormente, a resposta é 8
  - Em caso contrário, a resposta é 7 - não podemos usar nem o zero nem os algarismo usados anteriormente
- É claro que esta dificuldade não ocorreria se tivéssemos começado com a escolha do primeiro algarismo do número
- Recomendação:
  - Se alguma decisão é mais complicada que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar

Princípios da Multiplicação

- As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas por quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas?

Princípios da Multiplicação

- As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas por quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas?
  - Observe que cada letra pode ser escolhida de 26 modos e cada algarismo de 10 modos distintos. Daí, temos:

Princípios da Multiplicação

- As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas por quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas?
  - Observe que cada letra pode ser escolhida de 26 modos e cada algarismo de 10 modos distintos. Daí, temos:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175.760.000$$

Princípios Básicos da Contagem

Princípios da Multiplicação

- As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas por quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas?
  - Observe que cada letra pode ser escolhida de 26 modos e cada algarismo de 10 modos distintos. Daí, temos:
    $$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175.760.000$$
- Quantas sequências de bits com comprimento sete existem?

Princípios da Multiplicação

- As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas por quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas?
    - Observe que cada letra pode ser escolhida de 26 modos e cada algarismo de 10 modos distintos. Daí, temos:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175.760.000$$

- Quantas sequências de bits com comprimento sete existem?
    - Podemos escolher cada um dos 7 bits de duas formas diferentes

Princípios da Multiplicação

- As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas por quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas?
  - Observe que cada letra pode ser escolhida de 26 modos e cada algarismo de 10 modos distintos. Daí, temos:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175.760.000$$

- Quantas sequências de bits com comprimento sete existem?
  - Podemos escolher cada um dos 7 bits de duas formas diferentes - cada bit equivale a 0 ou 1

Princípios da Multiplicação

- As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas por quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas?
  - Observe que cada letra pode ser escolhida de 26 modos e cada algarismo de 10 modos distintos. Daí, temos:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175.760.000$$

- Quantas sequências de bits com comprimento sete existem?
  - Podemos escolher cada um dos 7 bits de duas formas diferentes - cada bit equivale a 0 ou 1
  - Assim, temos:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128$$

Princípios da Multiplicação

- Use o Princípio da Multiplicação para mostrar que o número de subconjuntos diferentes de um conjunto finito S é $2^{|S|}$
  - Seja $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ um conjunto finito. Para cada elemento de S devemos escolher se ele pertence ou não a um dado subconjunto de S

Princípios da Multiplicação

- Use o Princípio da Multiplicação para mostrar que o número de subconjuntos diferentes de um conjunto finito S é $2^{|S|}$
  - Seja $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ um conjunto finito. Para cada elemento de S devemos escolher se ele pertence ou não a um dado subconjunto de S
  - Assim, para cada elemento, temos duas escolhas para fazer

Princípios da Multiplicação

- Use o Princípio da Multiplicação para mostrar que o número de subconjuntos diferentes de um conjunto finito S é $2^{|S|}$
  - Seja $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ um conjunto finito. Para cada elemento de S devemos escolher se ele pertence ou não a um dado subconjunto de S
  - Assim, para cada elemento, temos duas escolhas para fazer
  - Logo, temos

$$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$$

Princípios da Multiplicação

- Use o Princípio da Multiplicação para mostrar que o número de subconjuntos diferentes de um conjunto finito S é $2^{|S|}$
  - Seja $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ um conjunto com n elementos, isto é, $|S| = n$. Para cada elemento de S devemos escolher se ele pertence ou não a um dado subconjunto de S
  - Assim, para cada elemento, temos duas escolhas para fazer
  - Logo, pelo Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\ elementos}$$

subconjuntos possíveis

Princípios da Multiplicação

- Use o Princípio da Multiplicação para mostrar que o número de subconjuntos diferentes de um conjunto finito S é $2^{|S|}$
  - Seja $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ um conjunto com n elementos, isto é, $|S| = n$. Para cada elemento de S devemos escolher se ele pertence ou não a um dado subconjunto de S
  - Assim, para cada elemento, temos duas escolhas para fazer
  - Logo, pelo Princípio da Multiplicação, temos:
  $$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \ elementos}$$
  subconjuntos possíveis
  - Logo, temos 2^n subconjuntos

Princípios da Multiplicação

- Use o Princípio da Multiplicação para mostrar que o número de subconjuntos diferentes de um conjunto finito S é $2^{|S|}$
  - Seja $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ um conjunto com n elementos, isto é, $|S| = n$. Para cada elemento de S devemos escolher se ele pertence ou não a um dado subconjunto de S
  - Assim, para cada elemento, temos duas escolhas para fazer
  - Logo, pelo Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\ elementos}$$

  subconjuntos possíveis
  - Logo, temos 2^n subconjuntos
  - Como $n = |S|$, conclui-se que o conjunto S possui $2^{|S|}$ subconjuntos distintos

Princípios da Multiplicação

- Generalizando o Princípio da Multiplicação para m conjuntos, temos:

Princípios da Multiplicação

- Generalizando o Princípio da Multiplicação para m conjuntos, temos:
- Se $A_1, A_2, \cdots, A_m$ são conjuntos finitos, então o número de elementos no produto cartesiano desses conjuntos é o produto do número de elementos em cada conjunto

Princípios da Multiplicação

- Generalizando o Princípio da Multiplicação para m conjuntos, temos:
- Se $A_1, A_2, \cdots, A_m$ são conjuntos finitos, então o número de elementos no produto cartesiano desses conjuntos é o produto do número de elementos em cada conjunto
- Ou seja,

Princípios da Multiplicação

- Generalizando o Princípio da Multiplicação para m conjuntos, temos:
- Se $A_1, A_2, \cdots, A_m$ são conjuntos finitos, então o número de elementos no produto cartesiano desses conjuntos é o produto do número de elementos em cada conjunto
- Ou seja,

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_m|$$

Princípio da Adição

- Considere o seguinte problema:

Princípio da Adição

- Considere o seguinte problema:
    - João tem cinco bicicletas e três carros. Ele pode chegar ao trabalho usando qualquer um desses veículos. De quantas formas diferentes ele pode chegar ao trabalho?

Princípio da Adição

- Considere o seguinte problema:
  - João tem cinco bicicletas e três carros. Ele pode chegar ao trabalho usando qualquer um desses veículos. De quantas formas diferentes ele pode chegar ao trabalho?
    - Como não é possível pegar tanto o carro quanto a bicicleta para ir ao trabalho, esses conjuntos são disjuntos. Assim,

Princípios Básicos da Contagem

Princípio da Adição

- Considere o seguinte problema:
  - João tem cinco bicicletas e três carros. Ele pode chegar ao trabalho usando qualquer um desses veículos. De quantas formas diferentes ele pode chegar ao trabalho?
    - Como não é possível pegar tanto o carro quanto a bicicleta para ir ao trabalho, esses conjuntos são disjuntos. Assim,
    - João tem $5 + 3 = 8$ opções

Princípio da Adição

- Considere o seguinte problema:
  - João tem cinco bicicletas e três carros. Ele pode chegar ao trabalho usando qualquer um desses veículos. De quantas formas diferentes ele pode chegar ao trabalho?
    - Como não é possível pegar tanto o carro quanto a bicicleta para ir ao trabalho, esses conjuntos são disjuntos. Assim,
    - João tem $5 + 3 = 8$ opções
  - Maria tem 3 sapatos e 2 sandálias. De quantas maneiras Maria pode se calçar?

Princípio da Adição

- Considere o seguinte problema:
  - João tem cinco bicicletas e três carros. Ele pode chegar ao trabalho usando qualquer um desses veículos. De quantas formas diferentes ele pode chegar ao trabalho?
    - Como não é possível pegar tanto o carro quanto a bicicleta para ir ao trabalho, esses conjuntos são disjuntos. Assim,
    - João tem $5 + 3 = 8$ opções
  - Maria tem 3 sapatos e 2 sandálias. De quantas maneiras Maria pode se calçar?
    - Como não é possível ela calçar tanto o sapato quanto a sandália, temos:

Princípio da Adição

- Considere o seguinte problema:
    - João tem cinco bicicletas e três carros. Ele pode chegar ao trabalho usando qualquer um desses veículos. De quantas formas diferentes ele pode chegar ao trabalho?
        - Como não é possível pegar tanto o carro quanto a bicicleta para ir ao trabalho, esses conjuntos são disjuntos. Assim,
        - João tem $5 + 3 = 8$ opções
    - Maria tem 3 sapatos e 2 sandálias. De quantas maneiras Maria pode se calçar?
        - Como não é possível ela calçar tanto o sapato quanto a sandália, temos:
        - Maria pode se calçar de $3 + 2 = 5$ maneiras

Princípio da Adição

- Se uma decisão pode ser tomada de n_1 maneiras ou de n_2 maneiras, de modo que nenhuma das n_1 maneiras é igual a qualquer uma das n_2 maneiras, então existem $n_1 + n_2$ maneiras de se tomar a decisão

Princípio da Adição

- Se uma decisão pode ser tomada de n_1 maneiras ou de n_2 maneiras, de modo que nenhuma das n_1 maneiras é igual a qualquer uma das n_2 maneiras, então existem $n_1 + n_2$ maneiras de se tomar a decisão
- Pensando em termos de conjuntos, temos:

Princípio da Adição

- Se uma decisão pode ser tomada de n_1 maneiras ou de n_2 maneiras, de modo que nenhuma das n_1 maneiras é igual a qualquer uma das n_2 maneiras, então existem $n_1 + n_2$ maneiras de se tomar a decisão
- Pensando em termos de conjuntos, temos:
  - Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \varnothing$) com m e n elementos, respectivamente, então o número de elementos de $A \cup B$ é $m + n$

Princípio da Adição

- Se uma decisão pode ser tomada de n_1 maneiras ou de n_2 maneiras, de modo que nenhuma das n_1 maneiras é igual a qualquer uma das n_2 maneiras, então existem $n_1 + n_2$ maneiras de se tomar a decisão
- Pensando em termos de conjuntos, temos:
  - Se A e B são dois conjuntos disjuntos $(A \cap B = \varnothing)$ com m e n elementos, respectivamente, então o número de elementos de $A \cup B$ é $m + n$
  - Generalizando, temos:

Princípios Básicos da Contagem

Princípio da Adição

- Se uma decisão pode ser tomada de n_1 maneiras ou de n_2 maneiras, de modo que nenhuma das n_1 maneiras é igual a qualquer uma das n_2 maneiras, então existem $n_1 + n_2$ maneiras de se tomar a decisão
- Pensando em termos de conjuntos, temos:
  - Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \varnothing$) com m e n elementos, respectivamente, então o número de elementos de $A \cup B$ é $m + n$
  - Generalizando, temos:
    - Se $A_1, A_2, \cdots, A_m$ são conjuntos finitos disjuntos dois a dois, ou seja, $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo i e j, com $i \neq j$, então o número de elementos na união desses conjuntos é a soma da quantidade de elementos nos conjuntos, ou seja,

Princípios Básicos da Contagem

Princípio da Adição

- Se uma decisão pode ser tomada de n_1 maneiras ou de n_2 maneiras, de modo que nenhuma das n_1 maneiras é igual a qualquer uma das n_2 maneiras, então existem $n_1 + n_2$ maneiras de se tomar a decisão
- Pensando em termos de conjuntos, temos:
  - Se A e B são dois conjuntos disjuntos $(A \cap B = \varnothing)$ com m e n elementos, respectivamente, então o número de elementos de $A \cup B$ é $m + n$
  - Generalizando, temos:
    - Se $A_1, A_2, \cdots, A_m$ são conjuntos finitos disjuntos dois a dois, ou seja, $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo i e j, com $i \neq j$, então o número de elementos na união desses conjuntos é a soma da quantidade de elementos nos conjuntos, ou seja,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|, \text{ onde}$$
$$A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i, j, \text{ com } i \neq j$$

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Em Illinois, as placas dos automóveis costumavam constituir ou em três letras seguidas por três algarismos ou em duas letras seguidas por quatro algarismos. Quantas placas como essas são possíveis?

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Em Illinois, as placas dos automóveis costumavam constituir ou em três letras seguidas por três algarismos ou em duas letras seguidas por quatro algarismos. Quantas placas como essas são possíveis?
  - Os dois tipos de placas podem ser considerados dois conjuntos disjuntos (os casos são mutuamente excludentes)

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Em Illinois, as placas dos automóveis costumavam constituir ou em três letras seguidas por três algarismos ou em duas letras seguidas por quatro algarismos. Quantas placas como essas são possíveis?
  - Os dois tipos de placas podem ser considerados dois conjuntos disjuntos (os casos são mutuamente excludentes)
  - O primeiro caso envolve a escolha de três letras (26^3) seguida pela escolha de três algarismos (10^3)

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Em Illinois, as placas dos automóveis costumavam constituir ou em três letras seguidas por três algarismos ou em duas letras seguidas por quatro algarismos. Quantas placas como essas são possíveis?
  - Os dois tipos de placas podem ser considerados dois conjuntos disjuntos (os casos são mutuamente excludentes)
  - O primeiro caso envolve a escolha de três letras (26^3) seguida pela escolha de três algarismos (10^3)
  - O segundo caso envolve a escolha de duas letras (26^2) seguida pela escolha de quatro algarismos (10^4)

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Em Illinois, as placas dos automóveis costumavam constituir ou em três letras seguidas por três algarismos ou em duas letras seguidas por quatro algarismos. Quantas placas como essas são possíveis?
  - Os dois tipos de placas podem ser considerados dois conjuntos disjuntos (os casos são mutuamente excludentes)
  - O primeiro caso envolve a escolha de três letras (26^3) seguida pela escolha de três algarismos (10^3)
  - O segundo caso envolve a escolha de duas letras (26^2) seguida pela escolha de quatro algarismos (10^4)
  - Assim, tem-se um total de

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Em Illinois, as placas dos automóveis costumavam constituir ou em três letras seguidas por três algarismos ou em duas letras seguidas por quatro algarismos. Quantas placas como essas são possíveis?
  - Os dois tipos de placas podem ser considerados dois conjuntos disjuntos (os casos são mutuamente excludentes)
  - O primeiro caso envolve a escolha de três letras (26^3) seguida pela escolha de três algarismos (10^3)
  - O segundo caso envolve a escolha de duas letras (26^2) seguida pela escolha de quatro algarismos (10^4)
  - Assim, tem-se um total de

    $$26^3 \cdot 10^3 + 26^2 \cdot 10^4 = 24.336.000$$

    diferentes placas possíveis

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?
  - Seja P o total de senhas possíveis e seja P_6, P_7 e P_8 o número de senhas com seis, sete e 8 caracteres

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?
  - Seja P o total de senhas possíveis e seja P_6, P_7 e P_8 o número de senhas com seis, sete e 8 caracteres
  - Pelo Princípio da Adição, $P = P_6 + P_7 + P_8$

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?
  - Seja P o total de senhas possíveis e seja P_6, P_7 e P_8 o número de senhas com seis, sete e 8 caracteres
  - Pelo Princípio da Adição, $P = P_6 + P_7 + P_8$
  - Resta-nos agora determinar P_6, P_7 e P_8

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?
  - Seja P o total de senhas possíveis e seja P_6, P_7 e P_8 o número de senhas com seis, sete e 8 caracteres
  - Pelo Princípio da Adição, $P = P_6 + P_7 + P_8$
  - Resta-nos agora determinar P_6, P_7 e P_8
  - Para determinar P_6 podemos proceder da seguinte maneira:

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?
  - Seja P o total de senhas possíveis e seja P_6, P_7 e P_8 o número de senhas com seis, sete e 8 caracteres
  - Pelo Princípio da Adição, $P = P_6 + P_7 + P_8$
  - Resta-nos agora determinar P_6, P_7 e P_8
  - Para determinar P_6 podemos proceder da seguinte maneira:
    - Como cada caractere pode ser ou uma letra maiúscula ou um dígito, temos 36 escolhas para cada caractere

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?
  - Seja P o total de senhas possíveis e seja P_6, P_7 e P_8 o número de senhas com seis, sete e 8 caracteres
  - Pelo Princípio da Adição, $P = P_6 + P_7 + P_8$
  - Resta-nos agora determinar P_6, P_7 e P_8
  - Para determinar P_6 podemos proceder da seguinte maneira:
    - Como cada caractere pode ser ou uma letra maiúscula ou um dígito, temos 36 escolhas para cada caractere
    - Como a sequência possui seis caracteres, pelo Princípio da Multiplicação, temos:

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?
  - Seja P o total de senhas possíveis e seja P_6, P_7 e P_8 o número de senhas com seis, sete e 8 caracteres
  - Pelo Princípio da Adição, $P = P_6 + P_7 + P_8$
  - Resta-nos agora determinar P_6, P_7 e P_8
  - Para determinar P_6 podemos proceder da seguinte maneira:
    - Como cada caractere pode ser ou uma letra maiúscula ou um dígito, temos 36 escolhas para cada caractere
    - Como a sequência possui seis caracteres, pelo Princípio da Multiplicação, temos:

$$36^6 = 2.176.782.336 \text{ sequências de caracteres}$$

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?
  - Como cada senha deve conter pelo menos um dígito, devemos desconsiderar os casos em que as sequências são formadas apenas por letras. Assim, devemos excluir as sequência sem dígitos

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?
    - Como cada senha deve conter pelo menos um dígito, devemos desconsiderar os casos em que as sequências são formadas apenas por letras. Assim, devemos excluir as sequência sem dígitos

$$26^6 = 308.915.776$$

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?
  - Como cada senha deve conter pelo menos um dígito, devemos desconsiderar os casos em que as sequências são formadas apenas por letras. Assim, devemos excluir as sequência sem dígitos
    $$26^6 = 308.915.776$$
  - Assim,
    $$P_6 = 36^6 - 26^6 = 1.867.866.560$$

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?
    - De modo análogo, temos:

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?
  - De modo análogo, temos:

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 78.364.164.096 - 8.031.810.176 = 70.332.353.920$$

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?
  - De modo análogo, temos:

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 78.364.164.096 - 8.031.810.176 = 70.332.353.920$$

$$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2.821.109.907.456 - 208.827.064.576 = 2.612.282.842.880$$

Problemas usando o Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação

- Cada usuário em um sistema de computador tem uma senha que é de seis a oito caracteres, onde cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas possíveis há?
    - De modo análogo, temos:

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 78.364.164.096 - 8.031.810.176 = 70.332.353.920$$

$$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2.821.109.907.456 - 208.827.064.576 = 2.612.282.842.880$$

    - Logo, $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2.684.483.063.360$

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Vimos que o número de elementos da união de conjuntos dois a dois disjuntos é dado pela soma do número de elementos em cada conjunto

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Vimos que o número de elementos da união de conjuntos dois a dois disjuntos é dado pela soma do número de elementos em cada conjunto
- Mas se os conjuntos têm elementos em comum, como podemos contar a quantidade de elementos na união desses conjuntos?

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Vimos que o número de elementos da união de conjuntos dois a dois disjuntos é dado pela soma do número de elementos em cada conjunto
- Mas se os conjuntos têm elementos em comum, como podemos contar a quantidade de elementos na união desses conjuntos?
  - O Princípio da Inclusão-Exclusão nos fornece uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Vimos que o número de elementos da união de conjuntos dois a dois disjuntos é dado pela soma do número de elementos em cada conjunto
- Mas se os conjuntos têm elementos em comum, como podemos contar a quantidade de elementos na união desses conjuntos?
  - O Princípio da Inclusão-Exclusão nos fornece uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos
  - Na sua versão mais simples, ele afirma que:

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Vimos que o número de elementos da união de conjuntos dois a dois disjuntos é dado pela soma do número de elementos em cada conjunto
- Mas se os conjuntos têm elementos em comum, como podemos contar a quantidade de elementos na união desses conjuntos?
  - O Princípio da Inclusão-Exclusão nos fornece uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos
  - Na sua versão mais simples, ele afirma que:
    - Se dois conjuntos A e B são tais que existem k elementos comuns a estes conjuntos e se o número de elementos de A é igual a n e o número de elementos de B é igual a m, então o número de elementos na união $A \cup B$ é $m + n - k$

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Vimos que o número de elementos da união de conjuntos dois a dois disjuntos é dado pela soma do número de elementos em cada conjunto
- Mas se os conjuntos têm elementos em comum, como podemos contar a quantidade de elementos na união desses conjuntos?
  - O Princípio da Inclusão-Exclusão nos fornece uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos
  - Na sua versão mais simples, ele afirma que:
    - Se dois conjuntos A e B são tais que existem k elementos comuns a estes conjuntos e se o número de elementos de A é igual a n e o número de elementos de B é igual a m, então o número de elementos na união $A \cup B$ é $m + n - k$
    - Em outras palavras,

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Vimos que o número de elementos da união de conjuntos dois a dois disjuntos é dado pela soma do número de elementos em cada conjunto
- Mas se os conjuntos têm elementos em comum, como podemos contar a quantidade de elementos na união desses conjuntos?
    - O Princípio da Inclusão-Exclusão nos fornece uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos
    - Na sua versão mais simples, ele afirma que:
        - Se dois conjuntos A e B são tais que existem k elementos comuns a estes conjuntos e se o número de elementos de A é igual a n e o número de elementos de B é igual a m, então o número de elementos na união $A \cup B$ é $m + n - k$
        - Em outras palavras,

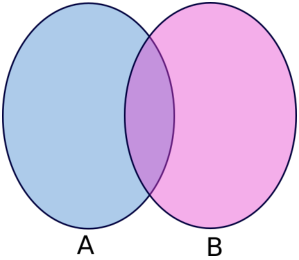
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Princípios Básicos da Contagem

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Se dois conjuntos A e B são tais que existem k elementos comuns a estes conjuntos e se o número de elementos de A é igual a n e o número de elementos de B é igual a m, então o número de elementos na união $A \cup B$ é $m + n - k$
- Em outras palavras,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

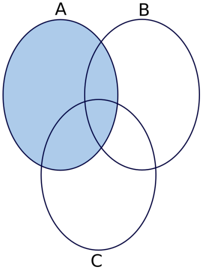


Princípio da Inclusão-Exclusão

- Para três conjuntos A, B e C, temos:

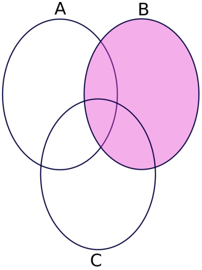
Princípio da Inclusão-Exclusão

- Para três conjuntos A, B e C, temos:



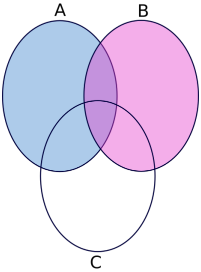
Princípio da Inclusão-Exclusão

- Para três conjuntos A, B e C, temos:



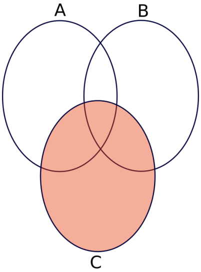
Princípio da Inclusão-Exclusão

- Para três conjuntos A, B e C, temos:



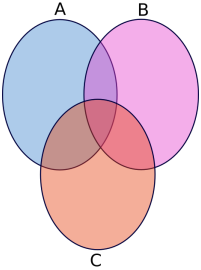
Princípio da Inclusão-Exclusão

- Para três conjuntos A, B e C, temos:



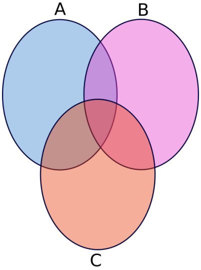
Princípio da Inclusão-Exclusão

- Para três conjuntos A, B e C, temos:



Princípio da Inclusão-Exclusão

- Para três conjuntos A, B e C, temos:



- O Princípio da Inclusão-Exclusão afirma que: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos finitos, então o número de elementos na união desses conjuntos é dado por:

Princípios Básicos da Contagem

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos finitos, então o número de elementos na união desses conjuntos é dado por:

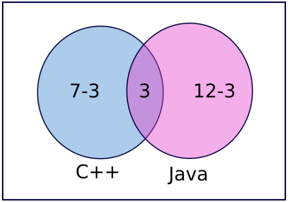
$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Um setor de uma consutoria de informática tem 30 programadores: 12 desses programam em Java, 7 em C++ e 3 em ambas as linguagens. Quantos desses programadores não trabalham nem com Java e nem com C++?

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Um setor de uma consutoria de informática tem 30 programadores: 12 desses programam em Java, 7 em C++ e 3 em ambas as linguagens. Quantos desses programadores não trabalham nem com Java e nem com C++?
  - Considere o seguinte diagrama:

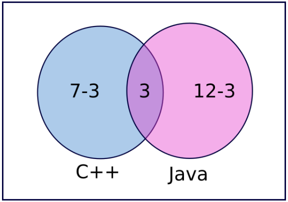


- Logo, $|A \cup B| = 12 + 7 - 3 = 16$

Princípios Básicos da Contagem

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Um setor de uma consutoria de informática tem 30 programadores: 12 desses programam em Java, 7 em C++ e 3 em ambas as linguagens. Quantos desses programadores não trabalham nem com Java e nem com C++?
  - Considere o seguinte diagrama:



- Logo, $|A \cup B| = 12 + 7 - 3 = 16$
- Como são 30 programadores no total, o número dos que não trabalham nem com Java e nem com C++ é igual a 14

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Uma companhia de computadores recebe 350 currículos de graduados para uma proposta de trabalho de planejamento de uma nova linha de servidores Web. Suponha que 220 dessas pessoas sejam da área de Ciência da Computação, 147 de Sistemas de Informação e 51 de Ciência da Computação e de Sistemas de Informação. Quantos desses graduados não são da área de Ciência da Computação nem de Sistemas de Informação?

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Uma companhia de computadores recebe 350 currículos de graduados para uma proposta de trabalho de planejamento de uma nova linha de servidores Web. Suponha que 220 dessas pessoas sejam da área de Ciência da Computação, 147 de Sistemas de Informação e 51 de Ciência da Computação e de Sistemas de Informação. Quantos desses graduados não são da área de Ciência da Computação nem de Sistemas de Informação?

$$|S \cup C| = 220 + 147 - 51 = 316$$

Princípio da Inclusão-Exclusão

- Uma companhia de computadores recebe 350 currículos de graduados para uma proposta de trabalho de planejamento de uma nova linha de servidores Web. Suponha que 220 dessas pessoas sejam da área de Ciência da Computação, 147 de Sistemas de Informação e 51 de Ciência da Computação e de Sistemas de Informação. Quantos desses graduados não são da área de Ciência da Computação nem de Sistemas de Informação?

$$|S \cup C| = 220 + 147 - 51 = 316$$

- Assim, $350 - 316 = 34$ dos currículos recebidos não são de graduados nem em Ciência da Computação nem em Sistemas de Informação

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- A Combinatória não se ocupa apenas com a contagem de elementos de conjuntos

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- A Combinatória não se ocupa apenas com a contagem de elementos de conjuntos
- Muitas vezes, o que se deseja é determinar a existência ou não de conjuntos satisfazendo certas propriedades

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

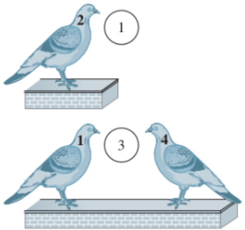
- A Combinatória não se ocupa apenas com a contagem de elementos de conjuntos
- Muitas vezes, o que se deseja é determinar a existência ou não de conjuntos satisfazendo certas propriedades
- Uma ferramenta simples para resolver alguns desses problemas é o **Princípio da Casa dos Pombos** ou **Princípio das Gavetas de Dirichlet**

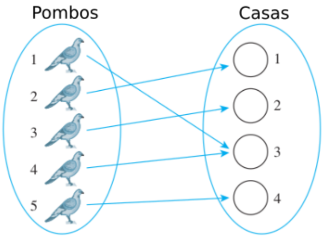
Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- A Combinatória não se ocupa apenas com a contagem de elementos de conjuntos
- Muitas vezes, o que se deseja é determinar a existência ou não de conjuntos satisfazendo certas propriedades
- Uma ferramenta simples para resolver alguns desses problemas é o **Princípio da Casa dos Pombos** ou **Princípio das Gavetas de Dirichlet**
- *Se* $n+1$ *pombos são colocados em* n *casas de pombos, então pelo menos uma delas conterá mais do que um pombo*

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- *Se $n+1$ pombos são colocados em n casas de pombos, então pelo menos uma delas conterá mais do que um pombo*





Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Se $n+1$ pombos são colocados em n casas de pombos, então pelo menos uma delas conterá mais do que um pombo '
  - Suponha que todas as casas têm no máximo um pombo

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Se $n+1$ pombos são colocados em n casas de pombos, então pelo menos uma delas conterá mais do que um pombo '
  - Suponha que todas as casas têm no máximo um pombo
  - Então, como há n casas, a quantidade de pombos é no máximo n

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Se $n+1$ pombos são colocados em n casas de pombos, então pelo menos uma delas conterá mais do que um pombo '
  - Suponha que todas as casas têm no máximo um pombo
  - Então, como há n casas, a quantidade de pombos é no máximo n
  - Chegamos a uma contradição, já que, por hipótese, temos $n+1$ pombos

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Se $n+1$ pombos são colocados em n casas de pombos, então pelo menos uma delas conterá mais do que um pombo '
  - Suponha que todas as casas têm no máximo um pombo
  - Então, como há n casas, a quantidade de pombos é no máximo n
  - Chegamos a uma contradição, já que, por hipótese, temos $n+1$ pombos
- **Teorema.** Se k é um número inteiro positivo e $k+1$ ou mais objetos são colocados dentro de k caixas, então há pelo menos uma caixa que terá dois ou mais objetos

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- **Exemplo.** Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- **Exemplo.** Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês
    - Existem apenas 12 meses

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- **Exemplo.** Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês
    - Existem apenas 12 meses
- **Exemplo.** Entre qualquer grupo de 367 pessoas, deverá existir ao menos duas com a mesma data de aniversário

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- **Exemplo.** Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês
  - Existem apenas 12 meses
- **Exemplo.** Entre qualquer grupo de 367 pessoas, deverá existir ao menos duas com a mesma data de aniversário
  - Existem apenas 366 datas possíveis

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- **Exemplo.** Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês
  - Existem apenas 12 meses
- **Exemplo.** Entre qualquer grupo de 367 pessoas, deverá existir ao menos duas com a mesma data de aniversário
  - Existem apenas 366 datas possíveis
- Quantos estudantes deve haver em uma turma para garantir que pelo menos dois tenham a mesma nota nas provas finais, se a nota é inteira e varia de 0 a 10?

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- **Exemplo.** Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês
  - Existem apenas 12 meses
- **Exemplo.** Entre qualquer grupo de 367 pessoas, deverá existir ao menos duas com a mesma data de aniversário
  - Existem apenas 366 datas possíveis
- Quantos estudantes deve haver em uma turma para garantir que pelo menos dois tenham a mesma nota nas provas finais, se a nota é inteira e varia de 0 a 10?
  - Existem 11 notas possíveis

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- **Exemplo.** Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês
  - Existem apenas 12 meses
- **Exemplo.** Entre qualquer grupo de 367 pessoas, deverá existir ao menos duas com a mesma data de aniversário
  - Existem apenas 366 datas possíveis
- Quantos estudantes deve haver em uma turma para garantir que pelo menos dois tenham a mesma nota nas provas finais, se a nota é inteira e varia de 0 a 10?
  - Existem 11 notas possíveis
  - Assim, pelo Princípio da Casa dos Pombos, entre quaisquer 12 estudantes há pelo menos dois com a mesma nota

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- José tem uma gaveta cheia de meias, 12 vermelhas e 14 verdes. A fim de evitar acordar seu companheiro de quarto, ele deve pegar uma seleção de roupas no escuro e se vestir no corredor. Quantas meias ele deve pegar no escuro a fim de ter certeza de ter um par combinando?

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- José tem uma gaveta cheia de meias, 12 vermelhas e 14 verdes. A fim de evitar acordar seu companheiro de quarto, ele deve pegar uma seleção de roupas no escuro e se vestir no corredor. Quantas meias ele deve pegar no escuro a fim de ter certeza de ter um par combinando?
  - O número mínimo de meias que ele deve escolher é 3, pois:

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- José tem uma gaveta cheia de meias, 12 vermelhas e 14 verdes. A fim de evitar acordar seu companheiro de quarto, ele deve pegar uma seleção de roupas no escuro e se vestir no corredor. Quantas meias ele deve pegar no escuro a fim de ter certeza de ter um par combinando?
  - O número mínimo de meias que ele deve escolher é 3, pois:
    - **Casas:** Uma meia vermelha, uma meia verde (2)

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- José tem uma gaveta cheia de meias, 12 vermelhas e 14 verdes. A fim de evitar acordar seu companheiro de quarto, ele deve pegar uma seleção de roupas no escuro e se vestir no corredor. Quantas meias ele deve pegar no escuro a fim de ter certeza de ter um par combinando?
  - O número mínimo de meias que ele deve escolher é 3, pois:
    - **Casas:** Uma meia vermelha, uma meia verde (2)
    - **Pombos:** 3 meias

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- José tem uma gaveta cheia de meias, 12 vermelhas e 14 verdes. A fim de evitar acordar seu companheiro de quarto, ele deve pegar uma seleção de roupas no escuro e se vestir no corredor. Quantas meias ele deve pegar no escuro a fim de ter certeza de ter um par combinando?
  - O número mínimo de meias que ele deve escolher é 3, pois:
    - **Casas:** Uma meia vermelha, uma meia verde (2)
    - **Pombos:** 3 meias
    - **Relação:** Associar cada meia a sua cor

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- José tem uma gaveta cheia de meias, 12 vermelhas e 14 verdes. A fim de evitar acordar seu companheiro de quarto, ele deve pegar uma seleção de roupas no escuro e se vestir no corredor. Quantas meias ele deve pegar no escuro a fim de ter certeza de ter um par combinando?
  - O número mínimo de meias que ele deve escolher é 3, pois:
    - **Casas:** Uma meia vermelha, uma meia verde (2)
    - **Pombos:** 3 meias
    - **Relação:** Associar cada meia a sua cor
    - Pelo Princípio das Casas de Pombos, entre quaisquer 3 meias escolhidas José formará um par de meias com a mesma cor

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Uma caixa contém 3 tipos de bolas (azuis, verdes, amarelas). Qual o número mínimo de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos duas bolas da mesma cor?

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Uma caixa contém 3 tipos de bolas (azuis, verdes, amarelas). Qual o número mínimo de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos duas bolas da mesma cor?
  - Devemos retirar 4 bolas, pois:

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Uma caixa contém 3 tipos de bolas (azuis, verdes, amarelas). Qual o número mínimo de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos duas bolas da mesma cor?
  - Devemos retirar 4 bolas, pois:
    - **Casas:** Três caixas: uma azul, uma verde e uma amarela (3)

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Uma caixa contém 3 tipos de bolas (azuis, verdes, amarelas). Qual o número mínimo de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos duas bolas da mesma cor?
  - Devemos retirar 4 bolas, pois:
    - **Casas:** Três caixas: uma azul, uma verde e uma amarela (3)
    - **Pombos:** 4 bolas

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Uma caixa contém 3 tipos de bolas (azuis, verdes, amarelas). Qual o número mínimo de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos duas bolas da mesma cor?
  - Devemos retirar 4 bolas, pois:
    - **Casas:** Três caixas: uma azul, uma verde e uma amarela (3)
    - **Pombos:** 4 bolas
    - **Relação:** Associar cada bola a sua cor

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Uma caixa contém 3 tipos de bolas (azuis, verdes, amarelas). Qual o número mínimo de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos duas bolas da mesma cor?
  - Devemos retirar 4 bolas, pois:
    - **Casas:** Três caixas: uma azul, uma verde e uma amarela (3)
    - **Pombos:** 4 bolas
    - **Relação:** Associar cada bola a sua cor
    - Pelo Princípio das Casas de Pombos, entre quaisquer 4 bolas retiradas, pelo menos 2 têm a mesma cor

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Uma caixa contém 3 tipos de bolas (azuis, verdes, amarelas). Qual o número mínimo de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos duas bolas da mesma cor?
    - Devemos retirar 4 bolas, pois:
        - **Casas:** Três caixas: uma azul, uma verde e uma amarela (3)
        - **Pombos:** 4 bolas
        - **Relação:** Associar cada bola a sua cor
        - Pelo Princípio das Casas de Pombos, entre quaisquer 4 bolas retiradas, pelo menos 2 têm a mesma cor
    - Observe que ao retirarmos três bolas da caixa, a pior hipótese é que cada uma seja de uma cor

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Em um pomar existem 106 goiabeiras. É conhecido que cada uma dessas goiabeiras não produz anualmente mais do que 92 frutos. Prove que existem 2 goiabeiras no pomar que têm a mesma quantidade de frutos.

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Em um pomar existem 106 goiabeiras. É conhecido que cada uma dessas goiabeiras não produz anualmente mais do que 92 frutos. Prove que existem 2 goiabeiras no pomar que têm a mesma quantidade de frutos.
  - Para este problema temos a seguinte configuração:

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Em um pomar existem 106 goiabeiras. É conhecido que cada uma dessas goiabeiras não produz anualmente mais do que 92 frutos. Prove que existem 2 goiabeiras no pomar que têm a mesma quantidade de frutos.
  - Para este problema temos a seguinte configuração:
    - **Casas:** Quantidade de frutos: $0, 1, 2, \cdots, 92$

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Em um pomar existem 106 goiabeiras. É conhecido que cada uma dessas goiabeiras não produz anualmente mais do que 92 frutos. Prove que existem 2 goiabeiras no pomar que têm a mesma quantidade de frutos.
    - Para este problema temos a seguinte configuração:
        - **Casas:** Quantidade de frutos: $0, 1, 2, \cdots, 92$
        - **Pombos:** Goiabeiras 106

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Em um pomar existem 106 goiabeiras. É conhecido que cada uma dessas goiabeiras não produz anualmente mais do que 92 frutos. Prove que existem 2 goiabeiras no pomar que têm a mesma quantidade de frutos.
  - Para este problema temos a seguinte configuração:
    - **Casas:** Quantidade de frutos: $0, 1, 2, \cdots, 92$
    - **Pombos:** Goiabeiras 106
    - **Relação:** Associar cada goiabeira à quantidade de frutos que ela contém

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Em um pomar existem 106 goiabeiras. É conhecido que cada uma dessas goiabeiras não produz anualmente mais do que 92 frutos. Prove que existem 2 goiabeiras no pomar que têm a mesma quantidade de frutos.
  - Para este problema temos a seguinte configuração:
    - **Casas:** Quantidade de frutos: $0, 1, 2, \cdots, 92$
    - **Pombos:** Goiabeiras 106
    - **Relação:** Associar cada goiabeira à quantidade de frutos que ela contém
    - Temos 93 casas e 106 pombos

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Em um pomar existem 106 goiabeiras. É conhecido que cada uma dessas goiabeiras não produz anualmente mais do que 92 frutos. Prove que existem 2 goiabeiras no pomar que têm a mesma quantidade de frutos.
  - Para este problema temos a seguinte configuração:
    - **Casas:** Quantidade de frutos: $0, 1, 2, \cdots, 92$
    - **Pombos:** Goiabeiras 106
    - **Relação:** Associar cada goiabeira à quantidade de frutos que ela contém
    - Temos 93 casas e 106 pombos
    - Se associarmos um número k a cada casa, isto significa que nela serão colocadas as goiabeiras que têm exatamente k frutos

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- Em um pomar existem 106 goiabeiras. É conhecido que cada uma dessas goiabeiras não produz anualmente mais do que 92 frutos. Prove que existem 2 goiabeiras no pomar que têm a mesma quantidade de frutos.
  - Para este problema temos a seguinte configuração:
    - **Casas:** Quantidade de frutos: $0, 1, 2, \cdots, 92$
    - **Pombos:** Goiabeiras 106
    - **Relação:** Associar cada goiabeira à quantidade de frutos que ela contém
    - Temos 93 casas e 106 pombos
    - Se associarmos um número k a cada casa, isto significa que nela serão colocadas as goiabeiras que têm exatamente k frutos
    - Como $106 > 94 = 93 + 1$, o Princípio das Casas dos Pombos nos garante que existem, pelo menos, duas goiabeiras com a mesma quantidade de frutos

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- O Princípio da Casa dos Pombos pode ser usado para demonstrar diversas funções

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- O Princípio da Casa dos Pombos pode ser usado para demonstrar diversas funções
  - Uma função f de um conjunto com $k+1$ ou mais elementos para um conjunto com k elementos não é injetora

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- O Princípio da Casa dos Pombos pode ser usado para demonstrar diversas funções
  - Uma função f de um conjunto com $k+1$ ou mais elementos para um conjunto com k elementos não é injetora
    - Suponha que para cada elemento y no contradomínio de f temos uma caixa que contém todos os elementos x do domínio de f, tal que $f(x) = y$

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- O Princípio da Casa dos Pombos pode ser usado para demonstrar diversas funções
  - Uma função f de um conjunto com $k+1$ ou mais elementos para um conjunto com k elementos não é injetora
    - Suponha que para cada elemento y no contradomínio de f temos uma caixa que contém todos os elementos x do domínio de f, tal que $f(x) = y$
    - Como o domínio contém $k+1$ ou mais elementos e o contradomínio contém apenas k elementos

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- O Princípio da Casa dos Pombos pode ser usado para demonstrar diversas funções
  - Uma função f de um conjunto com $k + 1$ ou mais elementos para um conjunto com k elementos não é injetora
    - Suponha que para cada elemento y no contradomínio de f temos uma caixa que contém todos os elementos x do domínio de f, tal que $f(x) = y$
    - Como o domínio contém $k + 1$ ou mais elementos e o contradomínio contém apenas k elementos
    - Pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos uma das caixas contém dois ou mais elementos x do domínio

Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

- O Princípio da Casa dos Pombos pode ser usado para demonstrar diversas funções
  - Uma função f de um conjunto com $k+1$ ou mais elementos para um conjunto com k elementos não é injetora
    - Suponha que para cada elemento y no contradomínio de f temos uma caixa que contém todos os elementos x do domínio de f, tal que $f(x) = y$
    - Como o domínio contém $k+1$ ou mais elementos e o contradomínio contém apenas k elementos
    - Pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos uma das caixas contém dois ou mais elementos x do domínio
    - Portanto, f não pode ser uma função injetora

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- O Princípio da Casa dos Pombos afirma que deverá haver pelo menos dois objetos na mesma caixa quando houver mais objetos do que caixas

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- O Princípio da Casa dos Pombos afirma que deverá haver pelo menos dois objetos na mesma caixa quando houver mais objetos do que caixas
- No entanto, mais pode ser dito quando o número de objetos excede um múltiplo do número de caixas

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- O Princípio da Casa dos Pombos afirma que deverá haver pelo menos dois objetos na mesma caixa quando houver mais objetos do que caixas
- No entanto, mais pode ser dito quando o número de objetos excede um múltiplo do número de caixas
  - Por exemplo, entre qualquer conjunto de 21 dígitos decimais, haverá 3 que serão os mesmos

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- O Princípio da Casa dos Pombos afirma que deverá haver pelo menos dois objetos na mesma caixa quando houver mais objetos do que caixas
- No entanto, mais pode ser dito quando o número de objetos excede um múltiplo do número de caixas
  - Por exemplo, entre qualquer conjunto de 21 dígitos decimais, haverá 3 que serão os mesmos
    - Observe que temos 21 objetos para distribuirmos em 10 caixas

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- O Princípio da Casa dos Pombos afirma que deverá haver pelo menos dois objetos na mesma caixa quando houver mais objetos do que caixas
- No entanto, mais pode ser dito quando o número de objetos excede um múltiplo do número de caixas
  - Por exemplo, entre qualquer conjunto de 21 dígitos decimais, haverá 3 que serão os mesmos
    - Observe que temos 21 objetos para distribuirmos em 10 caixas
    - Quando fazemos esta distribuição, uma das caixas conterá mais que 2 objetos

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- Se N objetos são colocados em k caixas, então há pelo menos uma caixa com $\lceil \frac{N}{k} \rceil$

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- Se N objetos são colocados em k caixas, então há pelo menos uma caixa com $\lceil \frac{N}{k} \rceil$
- **Observação:** $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- Se N objetos são colocados em k caixas, então há pelo menos uma caixa com $\lceil \frac{N}{k} \rceil$
- **Observação:** $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x
- $\lceil x \rceil = min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$ é chamdada de **função teto**

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- Se N objetos são colocados em k caixas, então há pelo menos uma caixa com $\lceil \frac{N}{k} \rceil$
- **Observação:** $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x
- $\lceil x \rceil = min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$ é chamdada de **função teto**
  - Suponha que nenhuma das caixas tenha mais que $\lceil \frac{N}{k} \rceil - 1$

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- Se N objetos são colocados em k caixas, então há pelo menos uma caixa com $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$
- **Observação:** $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x
- $\lceil x \rceil = min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$ é chamdada de **função teto**
  - Suponha que nenhuma das caixas tenha mais que $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$
  - Então, o número total de objetos é no máximo

$$k \left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1 \right)$$

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- Se N objetos são colocados em k caixas, então há pelo menos uma caixa com $\lceil \frac{N}{k} \rceil$
- **Observação:** $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x
- $\lceil x \rceil = min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$ é chamdada de **função teto**
  - Suponha que nenhuma das caixas tenha mais que $\lceil \frac{N}{k} \rceil - 1$
  - Então, o número total de objetos é no máximo

$$k \left(\lceil \frac{N}{k} \rceil - 1 \right)$$

    - Da teoria de função teto, temos que $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- Se N objetos são colocados em k caixas, então há pelo menos uma caixa com $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$
- **Observação:** $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x
- $\lceil x \rceil = min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$ é chamdada de **função teto**
  - Suponha que nenhuma das caixas tenha mais que $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$
  - Então, o número total de objetos é no máximo

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right)$$

    - Da teoria de função teto, temos que $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$
  - Assim, $\frac{N}{k} \leq \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil < \frac{N}{k} + 1$

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- Se N objetos são colocados em k caixas, então há pelo menos uma caixa com $\lceil \frac{N}{k} \rceil$
- **Observação:** $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x
- $\lceil x \rceil = min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$ é chamdada de **função teto**
  - Suponha que nenhuma das caixas tenha mais que $\lceil \frac{N}{k} \rceil - 1$
  - Então, o número total de objetos é no máximo

$$k \left(\lceil \frac{N}{k} \rceil - 1 \right)$$

    - Da teoria de função teto, temos que $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$
  - Assim, $\frac{N}{k} \leq \lceil \frac{N}{k} \rceil < \frac{N}{k} + 1$
  - Daí, temos:

$$k \left(\lceil \frac{N}{k} \rceil - 1 \right) < k \left(\left(\frac{N}{k} + 1 \right) - 1 \right)$$

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- Se N objetos são colocados em k caixas, então há pelo menos uma caixa com $\lceil \frac{N}{k} \rceil$
- **Observação:** $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x
- $\lceil x \rceil = min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$ é chamdada de **função teto**
  - Suponha que nenhuma das caixas tenha mais que $\lceil \frac{N}{k} \rceil - 1$
  - Então, o número total de objetos é no máximo

$$k \left(\lceil \tfrac{N}{k} \rceil - 1 \right)$$

    - Da teoria de função teto, temos que $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$
  - Assim, $\frac{N}{k} \leq \lceil \frac{N}{k} \rceil < \frac{N}{k} + 1$
  - Daí, temos:

$$k \left(\lceil \tfrac{N}{k} \rceil - 1 \right) < k \left(\left(\tfrac{N}{k} + 1 \right) - 1 \right)$$

    - Mas $k \left(\left(\frac{N}{k} + 1 \right) - 1 \right) = N$

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- Se N objetos são colocados em k caixas, então há pelo menos uma caixa com $\lceil \frac{N}{k} \rceil$
- **Observação:** $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x
- $\lceil x \rceil = min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$ é chamdada de **função teto**
  - Suponha que nenhuma das caixas tenha mais que $\lceil \frac{N}{k} \rceil - 1$
  - Então, o número total de objetos é no máximo

$$k \left(\lceil \frac{N}{k} \rceil - 1 \right)$$

    - Da teoria de função teto, temos que $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$
  - Assim, $\frac{N}{k} \leq \lceil \frac{N}{k} \rceil < \frac{N}{k} + 1$
  - Daí, temos:

$$k \left(\lceil \frac{N}{k} \rceil - 1 \right) < k \left(\left(\frac{N}{k} + 1 \right) - 1 \right)$$

    - Mas $k \left(\left(\frac{N}{k} + 1 \right) - 1 \right) = N$
  - Logo, $k \left(\lceil \frac{N}{k} \rceil - 1 \right) < N$. ABSURDO!

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- **Exemplo:** Entre 100 pessoas, há pelo menos $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ que nasceram no mesmo mês

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- **Exemplo:** Entre 100 pessoas, há pelo menos $\lceil \frac{100}{12} \rceil = 9$ que nasceram no mesmo mês
- **Exemplo:** Em um grupo de 40 pessoas, pelos menos 4 pessoas têm o mesmo signo

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- **Exemplo:** Entre 100 pessoas, há pelo menos $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ que nasceram no mesmo mês
- **Exemplo:** Em um grupo de 40 pessoas, pelos menos 4 pessoas têm o mesmo signo
  - De fato,

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- **Exemplo:** Entre 100 pessoas, há pelo menos $\lceil \frac{100}{12} \rceil = 9$ que nasceram no mesmo mês
- **Exemplo:** Em um grupo de 40 pessoas, pelos menos 4 pessoas têm o mesmo signo
  - De fato,
    - Temos 40 pessoas (objetos) e 12 signos (gavetas)

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- **Exemplo:** Entre 100 pessoas, há pelo menos $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ que nasceram no mesmo mês
- **Exemplo:** Em um grupo de 40 pessoas, pelos menos 4 pessoas têm o mesmo signo
  - De fato,
    - Temos 40 pessoas (objetos) e 12 signos (gavetas)
    - Logo, pelo menos uma gaveta conterá $\left\lceil \frac{40}{12} \right\rceil = 4$ objetos
- **Exemplo:** Considere um grupo de 90 torcedores, cada um de um dos seguintes times: Ceará, Fortaleza, Bahia e Vitória. Mostre que nesse grupo há pelo menos 23 torcedores de um mesmo time

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- **Exemplo:** Entre 100 pessoas, há pelo menos $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ que nasceram no mesmo mês
- **Exemplo:** Em um grupo de 40 pessoas, pelos menos 4 pessoas têm o mesmo signo
  - De fato,
    - Temos 40 pessoas (objetos) e 12 signos (gavetas)
    - Logo, pelo menos uma gaveta conterá $\left\lceil \frac{40}{12} \right\rceil = 4$ objetos
- **Exemplo:** Considere um grupo de 90 torcedores, cada um de um dos seguintes times: Ceará, Fortaleza, Bahia e Vitória. Mostre que nesse grupo há pelo menos 23 torcedores de um mesmo time
  - Temos 90 torcedores (objetos) e 4 times (gavetas)

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos

- **Exemplo:** Entre 100 pessoas, há pelo menos $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ que nasceram no mesmo mês
- **Exemplo:** Em um grupo de 40 pessoas, pelos menos 4 pessoas têm o mesmo signo
  - De fato,
    - Temos 40 pessoas (objetos) e 12 signos (gavetas)
    - Logo, pelo menos uma gaveta conterá $\left\lceil \frac{40}{12} \right\rceil = 4$ objetos
- **Exemplo:** Considere um grupo de 90 torcedores, cada um de um dos seguintes times: Ceará, Fortaleza, Bahia e Vitória. Mostre que nesse grupo há pelo menos 23 torcedores de um mesmo time
  - Temos 90 torcedores (objetos) e 4 times (gavetas)
  - Logo, pelo menos uma gaveta conterá $\left\lceil \frac{90}{4} \right\rceil = 23$ objetos
  - Logo há pelo menos 23 torcedores de um mesmo time nesse grupo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Matemática Discreta

Contagem

Professora: Lílian de Oliveira Carneiro

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

Maio de 2020