UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Introdução à Lógica

Lógica para Computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

11 de maio de 2021

[0]Slides baseados no livro Lógica para Ciência da Computação[1].

[1]DE SOUZA, JOÃO NUNES. Lógica para ciência da computação. Elsevier Brasil, 2008.

Sumário

1. Introdução
2. Linguagem proposicional
3. Fórmulas da lógica proposicional
4. Sub fórmulas
5. Tamanho de fórmulas
6. Expressando ideias com o uso de fórmulas

Introdução à Lógica proposicional

- Linguagem Natural

Exemplo

Expressão da linguagem natural que é ambígua ou imprecisa.

Problemas

- Ambiguidades
- Imprecisões

- Linguagem Formal

Linguagem Formal

Definição

São objetos matemáticos, cujas regras de formação são precisamente definidas e às quais podemos atribuir um único sentido, sem ambiguidade.

- Diversos níveis de expressividade
- Quanto maior a expressividade, maior a complexidade de manipulação da linguagem
- Lógica proposicional
    - Expressividade limitada, mas nos permite expressar uma série de relações lógicas interessantes

Proposição

Definição

É um enunciado ao qual podemos atribuir um valor verdade (verdadeiro ou falso).

- Nem toda sentença possui valor verdade
- Exemplo: "Esta sentença é falsa"
- Auto-referente
- A linguagem proposicional exclui sentenças auto-referentes

Lógica Proposicional

- A Lógica Proposicional Clássica nos permite tratar de enunciados aos quais podemos atribuir valor verdade (as proposições) e as operações que permitem compor proposições mais complexas.
  - A partir de proposições mais simples, utilizando: conjunção ("E"), a disjunção ("OU"), a implicação ("SE...ENTÃO...") e a negação ("NÃO")
- A linguagem proposicional não nos permite expressar relações sobre elementos de um conjunto
  - como as noções de "todos", "algum" ou "nenhum".
  - relações quantificadoras
  - lógica de primeira ordem

Linguagem Proposicional

- Ao apresentarmos uma linguagem formal, precisamos fornecer os componentes básicos da linguagem, chamados de alfabeto, para em seguida fornecer as regras de formação da linguagem, também chamadas de gramática.
- No caso da lógica proposicional, o alfabeto é composto pelos seguintes elementos:
  - Um conjunto infinito e contável de símbolos proposicionais, também chamados de átomos ou variáveis proposicionais: $\mathcal{P}=\{p_0, p_1, \ldots\}$.
  - O conectivo unário $\neg$ (negação, lê-se: NÃO)
  - os conectivos binários $\wedge$ (conjunção, lê-se: E), $\vee$ (disjunção, lê-se: OU), e $\rightarrow$ (implicação, lê-se: SE...ENTÃO...).
  - Os elementos de pontuação, que contêm apenas os parênteses: '(' e ')'.

Fórmulas da Lógica Proposicional

- Os elementos da linguagem $\mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$ da lógica proposicional são chamados de fórmulas (ou fórmulas bem-formadas).
- O conjunto das fórmulas da lógica proposicional será definido por indução.
- Uma definição por indução pode possuir vários casos.
- O caso básico da indução é aquele no qual alguns elementos já conhecidos são adicionados ao conjunto que estamos definindo.
- Os demais casos, chamados de casos indutivos, tratam de adicionar novos elementos ao conjunto, a partir de elementos já inseridos nele.

Fórmulas da Lógica Proposicional

Dessa maneira, o conjunto $\mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$ das fórmulas proposicionais é definido indutivamente como o menor conjunto, satisfazendo as seguintes regras de formação:

- Caso básico: Todos os símbolos proposicionais estão em $\mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$; ou seja, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$. Os símbolos proposicionais são chamados de fórmulas atômicas ou átomos.
- Caso indutivo 1: Se A $\in \mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$, então $\neg A \in \mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$
- Caso indutivo 2: Se A,B $\in \mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$, então $(A \vee B) \in \mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$, $(A \wedge B) \in \mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$, $(A \rightarrow B) \in \mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$

Fórmulas da Lógica Proposicional

- Se p,q e r são símbolos proposicionais, pelo item 1, ou seja, o caso básico, eles são também fórmulas da linguagem proposicional
- Então, $\neg p$ e $\neg\neg p$ também são fórmulas, como
  - $(p \wedge q)$, $(p \vee (p \vee \neg q))$, $((r \wedge \neg p) \to \neg q)$ etc
  - Em geral, usamos as letras minúsculas p,q,r e s para representar os símbolos atômicos
  - E as letras maiúsculas A,B,C e D para representar fórmulas
  - Desse modo, se tomarmos a fórmula $((r \wedge \neg p) \to \neg q)$, podemos dizer que ela é da forma $(A \to B)$ em que
    - A=(r $\vee\neg$ p) e B=$\neg$ q
    - Já a fórmula A é da forma (A_1 e A_2), onde A_1=r e A_2=$\neg$ p; similarmente, B é da forma $\neg B_1$, onde B_1=q

Fórmulas da Lógica Proposicional

- A definição de $\mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$ ainda exige que $\mathcal{L}_{\mathcal{LP}}$ seja o menor conjunto satisfazendo as regras de formação. Essa condição é chamada de cláusula maximal
- Isto é necessário para garantir que nada de indesejado se torne também uma fórmula
- Por exemplo: para evitar que os números naturais sejam considerados fórmulas da lógica proposicional

Fórmulas da Lógica Proposicional

- De acordo com a definição de fórmula, o uso de parênteses é obrigatório ao utilizar os conectivos binários. Na prática, no entanto, usamos abreviações que permitem omitir os parênteses em diversas situações:
  - Os parênteses mais externos de uma fórmula podem ser omitidos. Dessa forma, podemos escrever p∧q em ver de $(p \wedge q), (r \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$ em vez de $((r \wedge \neg p) \rightarrow \neg q)$
  - O uso repetido dos conectivos $\wedge$ e $\vee$ dispensa o uso de parênteses. Por exemplo, podemos escrever $p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s$ em vez de $((p \wedge q) \wedge \neg r) \wedge \neg s$; note que os parênteses aninham-se à esquerda
  - O uso repetido do conectivo $\rightarrow$ também dispensa o uso de parênteses, só que os parênteses aninham-se à direita. Dessa forma, podemos escrever $p \rightarrow q \rightarrow r$ para representar $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Fórmulas da Lógica Proposicional

- Além disso, nas fórmulas em que há uma combinação de conectivos, existe uma precedência entre eles, dada pela ordem: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$. Dessa forma:
    - $\neg p \wedge q$ representa $(\neg p \wedge q)$ [e não $\neg(p \wedge q)$]
    - $p \vee q \wedge r$ representa $p \vee (q \wedge r)$
    - $p \vee \neg q \rightarrow r$ representa $(p \vee \neg q) \rightarrow r$

Em geral, deve-se preferir clareza à economia de parênteses e, na dúvida, é bom deixar alguns parênteses para explicitar o sentido de uma fórmula.

Sub fórmulas

- Definiremos a seguir, por indução sobre estrutura das fórmulas (também chamada de indução estrutural), a noção do conjunto de sub fórmulas de uma fórmula A, Subf(A)
- Na indução estrutural, o caso básico analisa as fórmulas de estrutura mais simples, ou seja, o caso básico trata de fórmulas atômicas
- Os casos indutivos tratam das fórmulas de estrutura composta, ou seja, de fórmulas que contêm conectivos unários e binários
- Assim, o conjunto Subf(A) de sub fórmulas de uma fórmula A é definido da seguinte maneira:
  - Caso básico: A=p. Subf(p)={p}, para toda fórmula atômica p $\in \mathcal{P}$
  - Caso A= $\neg$ B. Subf($\neg B$) $=$ $\{\neg B\}\cup$ Subf(B)
  - Caso A= B $\wedge$ C. Subf($B \wedge C$)= $\{B \wedge C\}\cup$ Subf(B) $\cup$ Subf(C)
  - Caso A= B $\vee$ C. Subf($B \vee C$)= $\{B \vee C\}\cup$ Subf(B) $\cup$ Subf(C)
  - Caso A= B $\rightarrow$ C. Subf($B \rightarrow C$)= $\{B \rightarrow C\}\cup$ Subf(B) $\cup$ Subf(C)

Sub fórmulas

- Os três últimos casos indutivos poderiam ter sido expressos da seguinte forma compacta: Para $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, se A= B $\circ$ C então Subf(A)= $\{A\} \cup$ Subf(B) $\cup$ Subf(C)
- Dessa forma, temos que o conjunto de sub fórmulas da fórmula A=(p $\vee\neg$ q) $\rightarrow$ (r $\wedge\neg$ q) é o conjunto $\{$A,p $\vee\neg$ q,p,$\neg$ q,q,r $\wedge\neg$ q,r$\}$
- Note que não há necessidade de contabilizar sub fórmulas "repetidas" mais de uma vez
- Pela definição anterior, uma fórmula sempre é sub fórmula de si mesma
- No entanto, definimos B como uma sub fórmula própria de A se B $\in$ Subf(A)-A, ou seja, se B é uma sub fórmula de A diferente de A
- Se A=(p $\vee\neg$ q) $\rightarrow$ (r $\wedge\neg$ q), as sub fórmulas próprias de A são $\{p \vee \neg q, p, \neg q, q, r \wedge \neg q, r\}$

Tamanho das fórmulas

Definição

O tamanho ou complexidade de uma fórmula A, representado por $|A|$, é um número inteiro positivo, também definido por indução estrutural sobre uma fórmula:

- |p|=1 para toda fórmula atômica $p \in \mathcal{P}$
- $|\neg A| = 1 + |A|$
- $|A^\circ B| = 1 + |A| + |B|$, para $^\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Tamanho das fórmulas

- O primeiro caso é a base da indução e diz que toda fórmula atômica possui tamanho 1
- Os demais casos indutivos definem o tamanho de uma fórmula composta a partir do tamanho de seus componentes
- O item 2 trata do tamanho de fórmulas com conectivo unário
- O item 3 trata do tamanho de fórmulas com conectivos binários, tratando dos três conectivos binários de uma só vez
- Note que o tamanho $|A|$ de uma fórmula A assim definido corresponde ao número de símbolos que ocorrerem na fórmula, excetuando-se os parênteses

Tamanho das fórmulas

- Por exemplo: suponha que temos a fórmula A=$(\mathrm{p} \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$ e vamos calcular sua complexidade:

$|(\mathrm{p} \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg q)| = 1 + |\mathrm{p} \vee \neg q| + |r \wedge \neg q|$
$= 3 + |\mathrm{p}| + |\neg\ \mathrm{q}| + |\mathrm{r}| + |\neg\ \mathrm{q}|$
$=5 + |\mathrm{p}| + |\mathrm{q}| + |\mathrm{r}| + |\mathrm{q}|$
$=9$

- Note que se uma sub fórmula ocorre mais de uma vez em A, sua complexidade é contabilizada cada vez que ela ocorre

Expressando ideias com o uso de fórmulas

- Já temos base para começar a expressar propriedades do mundo real em lógica proposicional
- Assim, podemos ter símbolos atômicos com nomes mais representativos das propriedades que queremos expressar
- Por exemplo, se queremos falar sobre pessoas e suas atividades ao longo da vida, podemos utilizar os símbolos proposicionais criança, jovem, adulto, idoso, estudante, trabalhador e aposentado

Expressando ideias com o uso de fórmulas

- Com esse vocabulário básico, para expressarmos que uma pessoa é criança, ou jovem, ou adulto ou idoso, escrevemos a fórmula:

criança $\vee$ jovem $\vee$ adulto $\vee$ idoso

- Para expressar que um jovem trabalha ou estuda, escrevemos

jovem $\rightarrow$ trabalhador $\vee$ estudante

- para expressar a proibição de que não podemos ter uma criança aposentada, umas das forma possíveis é escrever:

$\neg$ (criança $\wedge$ aposentado)

- Iremos ver mais adiante que esta é apenas uma das formas de expressar essa ideia, que pode ser expressa de diversas formas equivalentes

Próxima Aula

O que vem por aí?

- Semântica da lógica proposicional
  - valores verdade
  - matriz de conectivos
  - valoração de fórmulas complexas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Introdução à Lógica

Lógica para Computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

11 de maio de 2021

[0]Slides baseados no livro Lógica para Ciência da Computação[2].

[1]DE SOUZA, JOÃO NUNES. Lógica para ciência da computação. Elsevier Brasil, 2008.