S T Q Q S S D
L M M J V S D

Prova 2

1) Os espaços vetoriais reais de um tal conjunto sendo ele não nulo, possuindo duas formas de operação, sendo elas a de soma e a multiplicação por escalar. A dimensão desses espaços contituidos pelos valores que representam dimensões. Os subespaços vetoriais serão subespaços de um certo espaço vetorial V, sendo esses subespaços, subconjuntos W tal que eles são espaços vetoriais menores ao espaço que ele está contido e para esses subespaços existem suas somas e as multiplicações por escalar necessita existir como também seu vetor nulo.
Combinação linear dependente é a formação de um vetor V qualquer a partir da soma de outros dois quaisquer vetores, que com essa soma represente o vetor V.
Combinação linearmente independente é a formação de um vetor V qualquer a partir da soma de outros dois quaisquer vetores, porém essa soma da zero, dando zero com esses vetores da soma tendo sentidos diferentes geram uma combinação linearmente independente.
Base vetorial será o menor número de vetores que através de uma combinação linear geram um espaço vetorial.

S T Q Q S S D
L M M J V S D

2) $S = \{(1,1,-2,4);(1,1,-1,2);(1,4,-4,8)\}$

a) O vetor $(\frac{2}{3},1,-1,2)$ pertence a S?

Se este vetor pertence a W, então existe a, b, c reais tal que este vetor que vou denominar de $V = aS_1 + bS_2 + cS_3 \Rightarrow$

$(2/3,1,-1,2) = a(1,1,-2,4) + b(1,1,-1,2) + c(1,4,-4,8)$

Desse modo podemos montar o sistema:

$$\begin{cases} a+b+c = 2/3 \\ a+b+4c = 1 \\ -2a-b-4c = -1 \\ 4a+2b+8c = 2 \end{cases}$$

Colocando as equações em uma matriz completa temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2/3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -4 & -1 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{array}\right] L_3 = L_3 + L_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2/3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{array}\right] L_2 = L_2 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3 & 1/3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{array}\right] L_3 = L_3 \cdot -1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{array}\right] L_2 = L_2 \cdot 1/3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{array}\right] L_1 = L_1 - L_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{array}\right] L_1 = L_1 - L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 5/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{array}\right]$$

Temos que $b = 5/9$, $c = 1/9$, $a = 0$

$(2/3, 1, -1, 2) = 0(1, 1, -2, 4) + 5/9(1, 1, -1, 2) + 1/9(1, 4, -4, 8) \Rightarrow$

$(2/3, 1, -1, 2) = (0, 0, 0, 0) + (5/9, 5/9, -5/9, 10/9) + (1/9, 4/9, -4/9, 8/9) \Rightarrow$

$(2/3, 1, -1, 2) = (2/3, 1, -1, 2)$

Dessa forma, podemos vê que o vetor pertence a S.

b) O vetor $(0,0,1,1)$ pertence a S?

$(0,0,1,1) = a(1,1,-2,4) + b(1,1,-1,2) + c(1,4,-4,8)$

Podemos montar o sistema dessa forma:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b + 4c = 0 \\ -2a - b - 4c = 1 \\ 4a + 2b + 8c = 1 \end{cases}$$

A matriz ampliada desse sistema fica:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right] L_2 = L_2 + L_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right] L_3 = L_3 + L_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_3 = L_3 - L_2 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right] L_1 = L_1 + L_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right] L_2 = L_2 \cdot -1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right] L_3 = L_3 \cdot -\frac{1}{3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right] L_1 = L_1 - L_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right]$$

Então temos que $a=-1$, $b=0$ e $c=0$

$(0,0,1,1)=-1(2,1,-2,4)+0(1,1,-1,2)+0(1,4,-4,8) \Rightarrow$

$(0,0,1,1)=(-1,-1,2,-4)+(0,0,0,0)+(0,0,0,0) \Rightarrow$

$(0,0,1,1)\neq(-1,-1,2,4)$

Desse modo podemos vê que esse vetor não pertence a S.

③ Mostre que o subespaço abaixo é uma base de M(2,2).

$$V=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

Se o subespaço V é uma base de M(2,2), então a soma das matrizes do subespaço será igual a $M(2,2)=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=a.\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b.\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+c.\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+d.\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&b\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\c&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&d\end{bmatrix}\Rightarrow a=b=c=d=0$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Dessa forma temos que V é uma base de M(2,2)

(1) Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^3$, gerado por $(1,0,0)$ e W o subespaço $\mathbb{R}^3$, gerado por $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$. Mostre que o $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

Podemos vê que $V = \{(1,0,0)\}$ e $W = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$, então desse modo $V \oplus W = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$, com V e $W \in \mathbb{R}^3$. Dessa forma temos:

$$x(1,0,0) + y(1,1,0) + z(0,1,1) = (0,0,0)$$

Como sabemos que $V+W$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, temos também que $V \oplus W$ também pertence a $\mathbb{R}^3$. Dessa forma multiplicando os valores da equação acima temos:

$$(x,0,0) + (y,y,0) + (0,z,z) = \{x+y+0,\ 0+y+z,\ 0+0+z\}$$

Formando um sistema com esses valores temos:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \quad z=0 \quad \begin{matrix} y+z=0 \\ y+0=0 \\ y=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x+y=0 \\ x+0=0 \\ x=0 \end{matrix}$$

Desse modo, podemos vê que x, y e z são iguais a zero, ou seja, assim vemos que os elementos que compõem $V \oplus W$ são linearmente independente e $V+W$ pode ser uma base de $\mathbb{R}^3$. Dessa forma $V \oplus W$ podem sim formar todos os elementos de $\mathbb{R}^3$.

⑤ Sejam $\beta_1 = \{(1,0),(0,2)\}$; $\beta_2 = \{(-1,0),(1,1)\}$ e $\beta_3 = \{(-1,-1),(0,-1)\}$ três bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Ache as matrizes de mudanças de bases abaixo:

a) $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$

$(-1,0) = a(1,0) + b(0,2)$
$(-1,0) = -1(1,0) + 0(0,2)$ $a=-1$ e $b=0$
$(-1,0) = (-1,0) + (0,0)$
$(-1,0) = (-1,0)$

$(1,1) = c(1,0) + d(0,2)$
$(1,1) = 1(1,0) + 1/2(0,2)$ $c=1$ e $d=1/2$
$(1,1) = (1,0) + (0,1)$
$(1,1) = (1,1)$

$$[I]_{\beta_2}^{\beta_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $[I]_{\beta_2}^{\beta_3}$

$(-1,-1) = a(-1,0) + b(1,1)$
$(-1,-1) = 0(-1,0) + (-1(1,1))$ $a=0$ e $b=-1$
$(-1,-1) = (0,0) + (-1,-1)$
$(-1,-1) = (-1,-1)$

$(0,-1) = c(-1,0) + d(1,1)$
$(0,-1) = -1(-1,0) + (-1(1,1))$ $c=-1$ e $d=-1$
$(0,-1) = (1,0) + (-1,-1)$
$(0,-1) = (0,-1)$

$$[I]_{\beta_2}^{\beta_3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

c) $[I]_{\beta_1}^{\beta_3}$

$(-1,-1) = a(1,0) + b(0,2)$
$(-1,-1) = -1(1,0) + (-1/2(0,2))$ $\quad a = -1$ e $b = -1/2$
$(-1,-1) = (-1,0) + (0,-1)$
$(-1,-1) = (-1,-1)$

$(0,-1) = c(1,0) + b(0,2)$
$(0,-1) = 0(1,0) + (-1/2(0,2))$ $\quad c = 0$ e $d = -1/2$
$(0,-1) = (0,0) + (0,-1)$
$(0,-1) = (0,-1)$

$$[I]_{\beta_1}^{\beta_3} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

d) $[I]_{\beta_1}^{\beta_2} \times [I]_{\beta_2}^{\beta_3}$

$$[I]_{\beta_1}^{\beta_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [I]_{\beta_2}^{\beta_3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0+0.-1 & -1.-1+0.-1 \\ 1.0+1.-1 & 1.-1+1.-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[I]_{\beta_1}^{\beta_2} \times [I]_{\beta_2}^{\beta_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

⑥ Explique o que você entendeu por transformações lineares e a importância delas para o contexto dos espaços vetoriais.

Transformações lineares é quando uma função é diretamente capaz de modificar valores de espaços vetoriais quaisquer no domínio onde ele se encontra para espaços no contradomínio. Para que se possa haver essa modificação existem duas leis que tem que valerem que são elas:

1- A transformação da soma de dois espaços vetoriais é sempre equivalente a soma das transformações destes espaços.

2- A tranformação da multiplicação de um espaço vetorial por escalar é sempre equivalente a multiplicação deste escalar pela transformação deste espaço vetorial.