Caminhos, ciclos e trilhas

Algoritmos em grafos

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

23 de março de 2022

O que vimos na aula passada?

- Apresentação da disciplina
- Conceitos básicos

Conexão em grafos

- Um passeio (walk) é uma lista $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ de vértices e arestas tal que, para $1 \leq i \leq k$, a aresta e_i possui extremidades v_{i-1} e v_i
- Uma trilha (trail) é um passeio sem repetição de arestas
- Um u, v-passeio ou uma u, v-trilha possui u como primeiro vértice e v como último (extremidades)
- Um u, v-caminho é um caminho cujos vértices de grau 1 (suas extremidades) são u e v; os outros são vértices internos. Não temos repetição de vértices.
- O comprimento (length) de um passeio, triha, caminho ou ciclo é o número de suas arestas
- Um passeio ou trilha é fechado se suas extremidades são as mesmos

Conexão em grafos

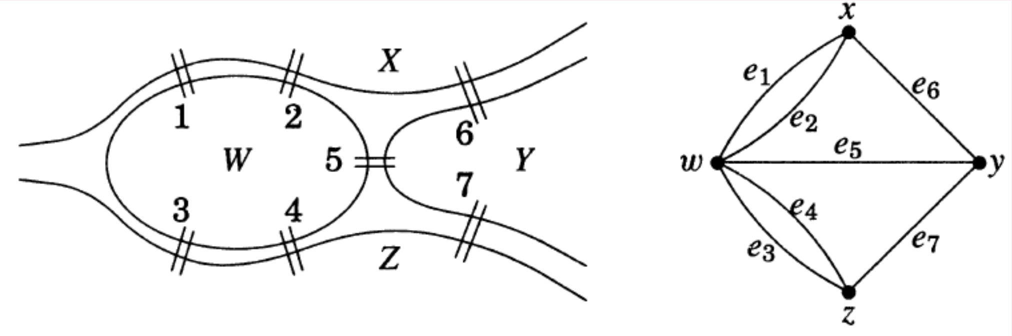

Figura: Fonte: Livro Introduction to Graph Theory - Douglas B. West

Conexão em grafos

- Em um certo grafo G, suponha que seguimos um caminho de u para v e então seguimos um caminho de v para w
- O resultado não necessariamente é um caminho de u para w
- Contudo, teremos um passeio de u para w
- Como ilustrado a seguir, esse passeio contém um caminho de u para w

Conexão em grafos

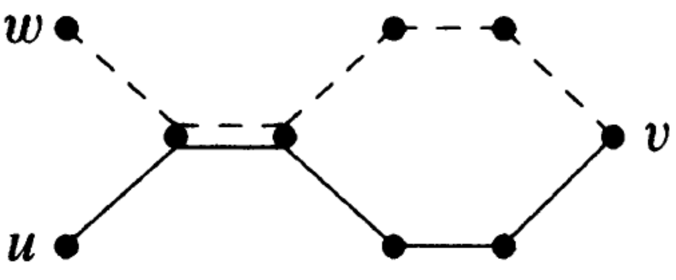

Figura: Fonte: Livro Introduction to Graph Theory - Douglas B. West

Lema

Todo u, v-passeio W contém um u, v-caminho P.

Prova

Prova por indução no comprimento l do passeio de u a v.

- Caso Base: $l = 0$. Possuindo nenhuma aresta, W possui um único vértice ($u = v$). Esse vértice é um u, v-caminho de comprimento 0.
- Passo da indução: $l \geq 1$.
  - Suponha que a afirmação está garantida para passeios de comprimento menor que l
  - Se W não possui repetição de vértices, então seus vértices e arestas formam um u, v-caminho
  - Se W possui um vértice w repetido, então a remoção dos vértices e arestas entre as ocorrências de w (mantendo uma cópia de w) garante um u, v-caminho mais curto W' contido em W
  - Por hipótese da indução, W' contém um u, v-caminho P e esse caminho está contido em W

Caminhos, ciclos e trilhas

Conexão em grafos

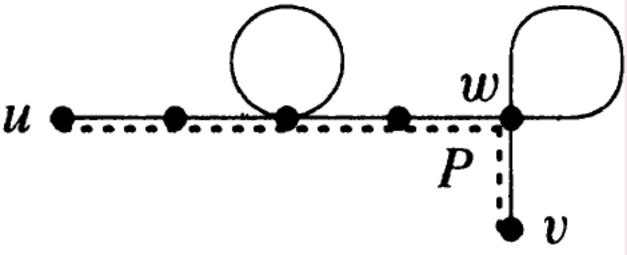

Figura: Fonte: Livro Introduction to Graph Theory - Douglas B. West

Definição

- Um grafo G é conexo ou conectado se ele tem um caminho de u para v para quaisquer pares de vértices $u, v \in V(G)$
- Caso contrário G é desconexo ou desconectado
- Se G tem um caminho de u para v, então u é conectado a v em G
- A relação de conexão em $V(G)$ consiste de pares ordenados (u, v) tal que u é conectado a v
- A relação de conexão é uma relação de equivalência: reflexiva (caminhos de tamanho 0), simétrica (caminhos são reversíveis) e transitiva

Definições

- As componentes de um grafo G são os seus subgrafos conexos maximais
- Uma componente (ou grafo) é trivial se ela não tem aresta; caso contrário ela é não trivial
- Um vértice isolado é um vértice de grau zero

Conexão em grafos

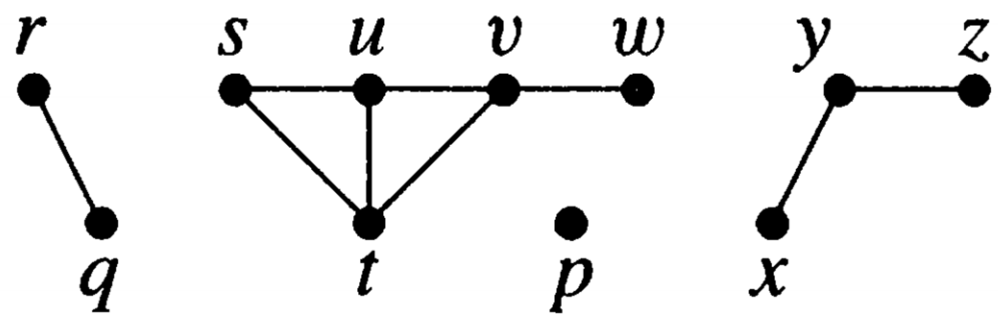

Figura: Fonte: Livro Introduction to Graph Theory - Douglas B. West

Definições

- Uma aresta de corte ou um vértice de corte de um grafo é uma aresta ou um vértice cuja a exclusão incrementa o número de componentes do grafo
- Escrevemos $G - e$ ou $G - M$ para o subgrafo de G obtido removendo uma aresta e ou um conjunto de arestas M
- Escrevemos $G - v$ ou $G - S$ para o subgrafo obtido removendo um vértice v ou um conjunto de vértices S
- Um subgrafo induzido é um subgrafo obtido removendo um conjunto de vértices
- Escrevemos $G[T]$ for $G - \overline{T}$, onde o $\overline{T} = V(G) - T$. Esse é o subgrafo induzido por T.

Teorema

Uma aresta é uma aresta de corte se e somente se ela não pertence a um ciclo.

Ideia da prova

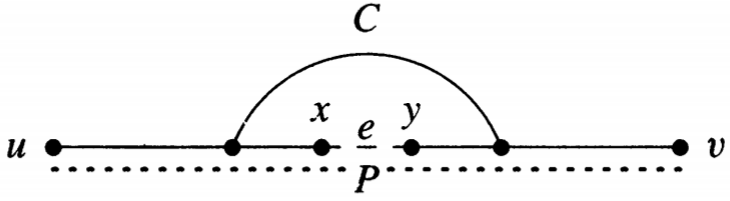

Figura: Fonte: Livro Introduction to Graph Theory - Douglas B. West

Grafos bipartidos

Teorema

Todo passeio fechado ímpar contém um ciclo ímpar.

Ideia da prova

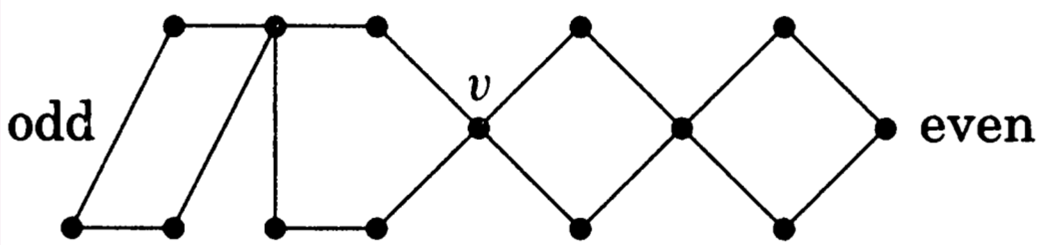

Figura: Fonte: Livro Introduction to Graph Theory - Douglas B. West

Próxima Aula

O que vem por aí?

- Grafos eulerianos
- Grafos hamiltonianos
- Algoritmo de busca em largura
- Algoritmo de busca em profundidade
- Ordenação topológica e conectividade
- Teste 1
- Avaliação 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Caminhos, ciclos e trilhas

Algoritmos em grafos

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

23 de março de 2022