UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Lógica de Primeira Ordem

Lógica para Computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

25 e 29 de junho de 2021

[0] Slides baseados no livro Logic in Computer Science: Modelling and reasoning about systems.[1].

[1] HUTH, Michael; RYAN, Mark. Logic in Computer Science: Modelling and reasoning about systems. Cambridge university press, 2004.

Lógica de primeira ordem

Introdução

- A lógica proposicional permite caracterizar de forma rigorosa e precisa relacionamentos entre proposições
- Consideramos uma extensão da lógica proposicional, visando torná-la mais expressiva, mais próxima da linguagem natural
- Isso amplia as oportunidades de aplicação da lógica para inferir fatos a respeito dos sistemas que correspondam a sua semântica
- Mas, para isso, será pago o preço de aumentar consideravelmente a complexidade da lógica

Introdução

Consideremos, por exemplo, as seguintes sentenças proposicionais:

- $e_1 \rightarrow s_1$
- $e_2 \rightarrow s_2$
- $e_3 \rightarrow s_3$

Introdução

- Intuitivamente, os índices de valor 1 correspondem a Marcelo, os índices de valor 2 a Ana e os de índice 3 a Fábio.
- As proposições e_i denotam que "o indivíduo i pratica esportes" e as s_i denotam "o indivíduo i tem boa saúde"

Lógica de primeira ordem

Introdução

- Se os únicos indivíduos do domínio forem esses três, não precisa estender a lógica proposicional
- Mas, se quisermos, por exemplo, escrever que "qualquer pessoa que pratica esportes tem boa saúde"?
- Precisaríamos de algo como : "$e_i \rightarrow s_i$", para qualquer valor de $i \in I = \{1, 2, 3\}$
- Isso, entretanto, não pertence a linguagem proposicional

Introdução

- A novidade é que as proposições representam agora propriedades relativas aos indivíduos correspondentes aos índices pertencentes a I
- O nome usualmente adotado para essas propriedades é predicados, e por esse motivo, a lógica proposicional estendida dessa forma é chamada lógica de predicados ou lógica de primeira ordem (LPO)

Lógica de primeira ordem

Composição da Lógica de Primeira Ordem

- A lógica de primeira ordem se divide em três partes:
  - a linguagem, que trata dos símbolos utilizados e da regra de formação de fórmulas
  - a semântica, que interpreta a linguagem, dando-lhe um significado
  - e os sistemas dedutivos, que ditam as regras para a demonstração de teoremas
- Diferentemente da lógica proposicional, a linguagem da LPO não é única
- Há alguns símbolos comuns a todas as linguagens e outros específicos como, por exemplo, o símbolo $+$ para a aritmética e $\in$ para a teoria dos conjuntos
- Por isso, precisamos estabelecer a linguagem a qual estamos nos referindo

Lógica de primeira ordem

Composição da Lógica de Primeira Ordem

- Na linguagem de primeira ordem, destacaremos os seguintes aspectos:
  - o alfabeto (os símbolos utilizados);
  - os termos (sequências finitas de símbolos que representam indivíduos do universo a que se refere a linguagem);
  - e as fórmulas (sequência finita de símbolos que representam asserções sobre os indivíduos)

O alfabeto da linguagem de primeira ordem é constituída pelos seguintes símbolos:

- Variáveis: representadas pelas letras minúsculas, eventualmente indexadas com números naturais: $x_1, x_2, \ldots$
- Conectivos: $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$,...
- Quantificadores: $\forall$ (Quantificador universal), $\exists$ (Quantificador existencial)
- Delimitadores: (e) e a vírgula
- Símbolo da igualdade: $=$

Lógica de primeira ordem

O alfabeto da linguagem de primeira ordem é constituída pelos seguintes símbolos:

- Símbolos relacionais: para cada natural n, existe uma lista (talvez vazia) de símbolos relacionais n-ários. Geralmente representadas por letras maiúsculas e podem ser indexadas pelos naturais
- Símbolos funcionais: para cada natural n, existe uma lista (talvez vazia) de símbolos funcionais n-ários. Geralmente representadas por letras minúsculas e podem ser indexadas pelos naturais
- Constantes: uma lista (pode ser vazia) de símbolos. Geralmente usamos as letras minúsculas do início do alfabeto (a,b,c,...), eventualmente indexadas com números naturais

Alfabeto da LPO

- Enquanto os demais símbolos são comuns, os relacionais, funcionais e as constantes são específicas da linguagem que estamos trabalhando
- Fixaremos duas linguagens como exemplo: a linguagem N tratará dos conjuntos numéricos (o universo são números) e a linguagem P tratará das relações familiares (o universo são pessoas)
- Embora trataremos posteriormente da semântica, já podemos antecipar algumas ideias para acompanhar intuitivamente a construção da linguagem
- Para interpretar as fórmulas, precisamos estabelecer um conjunto universo chamado domínio
- Um modelo para a linguagem será formado por um conjunto não-vazio (domínio), uma operação n-ária para cada símbolo funcional n-ário, uma relação n-ária para cada símbolo relacional n-ário e um elemento do domínio para cada constante da linguagem

Alfabeto da LPO

- Para interpretar as fórmulas, precisamos estabelecer um conjunto universo chamado domínio
- Os símbolos funcionais n-ários correspondem a operações n-árias no universo
- Os símbolos relacionais n-ários serão interpretados como relações n-árias sobre o universo
- As constantes serão elementos do universo

Modelo ou Assinatura - Definição

Um modelo (ou assinatura) para a linguagem será formado por um conjunto não vazio (chamado domínio ou universo), uma operação n-ária para cada símbolo funcional n-ário da linguagem, uma relação n-ária para cada símbolo relacional n-ário e um elemento do domínio para cada constante da linguagem

Lógica de primeira ordem

Exemplo de modelo/linguagem

- Na linguagem dos números, temos dois símbolos funcionais binários (+ e .), duas constantes (0 e 1) e um símbolo relacional binário (<=)
- Um modelo para a linguagem poderá ser um dos conjuntos numéricos que conhecemos - os naturais, os inteiros, os racionais, os reais ou os complexos - com as suas operações usuais
- Na linguagem P das pessoas podemos estabelecer os símbolos funcionais unários PAI, MAE, os símbolos relacionais unários HOMEM, MULHER, o símbolo relacional binário IRMÃOS e as constantes JOÃO e MARIA

Termos

- Relacionando com a língua portuguesa, para formarmos uma oração temos um verbo que relaciona o sujeito ao objeto
- Exemplo: "o cachorro do primo de José mordeu o nariz do sobrinho do meu vizinho"
- Temos um verbo ("morder") que corresponde a um símbolo relacional
- Um sujeito ("o cachorro do primo de José")
- E um objeto ("o nariz do sobrinho do meu vizinho")

Termos

- Esses termos correspondem a termos de uma LPO
- O sujeito da oração é centrado no nome próprio José, que corresponde a uma constante
- As expressões "primo de" e "cachorro de" correspondem a símbolos funcionais, que associam um objeto a outro na frase
- O pronome "meu" torna implícito o pronome "eu", no objeto da oração, que corresponde a uma variável da linguagem pois, apenas lendo a frase, não podemos saber a quem se refere pronomes como "eu", "ele" ou "ela"
- Interpretar a frase dependerá do contexto que, na LPO, corresponde a valoração das variáveis

Termos

- Assim, os termos são formados por aplicações sucessivas de símbolos funcionais sobre as variáveis e as constantes
- Formalmente, são sequências finitas de símbolos do alfabeto que segue as seguintes regras
  - As variáveis são termos
  - As constantes são termos
  - Se $t_1, ..., t_n$ são termos e F é um símbolo funcional n-ário, então $\mathrm{F}(t_1, .., t_n)$ é um termo
  - Todos os termos têm umas das formas acima

Termos

- Como veremos nas abreviaturas, símbolos funcionais binários costumam, na prática, seguir uma sintaxe diferente
- Escrevemos $(t_1 F t_2)$ no lugar de $F(t_1, t_2)$
- Por exemplo, escrevemos (x+y) em vez de +(x,y)
- Exemplos de termos na linguagem P: PAI(João), PAI(MAE(Maria)), MAE(x)

Termos

- Continuando a comparação entre lógica de primeira ordem e gramática da linguagem natural, os termos mais simples - que são variáveis e constantes - correspondem aos sujeitos e objetos constituídos por uma única palavra
- Assim, as constantes representam os substantivos (ou melhor ainda, os substantivos próprios), pois indicam objetos (ou pessoas, ou seres de qualquer espécie, dependendo de qual é o domínio da linguagem) bem definidos
- As variáveis podem ser comparadas aos pronomes, que representam objetos indefinidos (ele, ela, alguém, isto, aquilo)

Fórmulas são sequências finitas de símbolos do alfabeto que seguem as seguintes regras:

- Se s e t são termos, então t=s é fórmula
- Se $t_1, ..., t_n$ são termos e R um símbolo relacional n-ário, então R($t_1, ..., t_n$) é uma fórmula
- Se A e B são fórmulas, $\neg A$, $A \rightarrow B$, $A \wedge B$, $A \vee B$ e $A \leftrightarrow B$
- Se A é fórmula e x é uma variável, então $\forall x A$ e $\exists x A$ são fórmulas
- Todas as fórmulas têm uma das formas acima

Termos

- Como acontece com os termos, a sintaxe dos símbolos relacionais binários também pode seguir uma regra diferente: se t_1 e t_2 são termos e R é um símbolo relacional binário, escrevemos $(t_1 R t_2)$ no lugar de $\mathrm{R}(t_1, t_2)$
- Por exemplo, escrevemos $x \leq y$ em vez de $\leq$ (x,y)

Lógica de primeira ordem

- Fazendo novamente a analogia entre lógica de primeira ordem e gramática da língua portuguesa, as fórmulas correspondem às frases, que fazem alguma asserção (verdadeira ou não) a respeito dos elementos do universo
- Os símbolos relacionais e o símbolo de igualdade correspondem aos verbos (ou às locuções verbais)
- As fórmulas atômicas são as orações
- Por exemplo, a frase "o pai de João é irmão da mãe de Maria" pode ser representado, na linguagem P, pela fórmula Irmãos (Pai(João), Mãe(Maria))

- Se quisermos dizer que “todas as pessoas possuem alguma irmã” (independente de isso ser ou não verdade) podemos escrever
- $$\forall x(\exists y(\text{Irmãos}(x, y) \wedge \text{Mulher}(y)))$$

Lógica de primeira ordem

- Na linguagem dos números, os “verbos” são $\leq$ e $=$
- Um exemplo de fórmula: x $\leq$ (y+1)
- Se quisermos dizer que não existe raiz de 2, podemos escrever
- $$\forall x(\neg((x.x) = (1 + 1)))$$

- As fórmulas dos dois primeiros tipos são chamadas de atômicas, pois não possuem nem conectivos e nem quantificadores
- O conjunto de fórmulas e dos termos de um modelo (ou assinatura) são os menores conjuntos que atendem a essas regras

Lógica de primeira ordem

Omissão de parênteses

- Como acontece com a lógica proposicional, omitimos o excesso de parênteses quando a ausência deles não prejudica a compreensão da fórmula nem causa ambiguidades
- Segue abaixo algumas regras que utilizaremos para omitir parênteses
  - Omitimos os parênteses externos de uma fórmula, recolocando quando a usamos para compor fórmulas
  - Por exemplo, escrevemos $A \wedge B$ no lugar de (A $\wedge B$), mas recolocamos os parênteses quando escrevemos, por exemplo, $\forall x(A \wedge B)$
  - Em sequências de conjunções sem sequências de disjunções, omitimos o uso excessivo de parênteses
  - Isto é, escrevemos $A \wedge B \wedge C$ no lugar de $(A \wedge B) \wedge C$ ou de $A \wedge (B \wedge C)$, o mesmo valendo para o conectivo $\vee$

Omissão de parênteses

- Eventualmente, quando não houver riscos de más interpretações, omitimos os parênteses externos em subfórmulas do tipo $\forall x A$, $\exists x A$ e $\neg A$
- Por exemplo, escrevemos $\neg\forall x\exists y A$ em vez de $\neg(\forall x(\exists y A))$

Abreviaturas

- Podemos incluir novos símbolos na linguagem da lógica de primeira ordem, enxergando-os como abreviaturas da linguagem que já conhecemos, ou podemos reduzir a quantidade de símbolos primitivos e definir os demais a partir desses
- Por exemplo, na linguagem P, podemos definir uma relação binária que signifique "x é tio de y"
- Assim, se t e s são termos, definimos a relação Tio(t,s) como

$$Homem(t) \wedge (\text{Irmãos}(t, Pai(s)) \vee \text{Irmãos}(t, Mae(s)))$$

Lógica de primeira ordem

- Na linguagem N podemos adicionar um símbolo relacional binário $<$ de modo que t $<$ s seja abreviatura de $(\neg(t = s)) \wedge (t \leq s))$
- Algumas abreviaturas são comuns a todas as linguagens de primeira ordem
- Listamos abaixo algumas delas:
  - Diferente: t $\neq$ s é abreviatura de $\neg(t = s)$
  - Não existe: $\nexists xA$ é a abreviatura de $\neg\exists xA$

A definição de sub-termos e sub-fórmulas é feita de forma recursiva

Sub-termos

Seja t um termo. Definimos os sub-termos de t da seguinte maneira:

- Se t é uma variável ou constante, então t não possui sub-termos
- Se t é da forma F(t_1,...,t_n), então os sub-termos de t são t_1, .., t_n e os sub-termos de t_1, os sub-termos de t_2,..., e os sub-termos de t_n

Sub-fórmula

Seja A uma fórmula. Definimos as sub-fórmulas de A da seguinte forma:

- Se A é uma fórmula atômica, então A não possui sub-fórmulas
- Se A é da forma $\neg B$ ou da forma $\forall x B$ então as sub-fórmulas de A são B e as sub-fórmulas de B
- Se A é da forma $B \Box C$, então as sub-fórmulas de A são B, C e as sub-fórmulas de B e as sub-fórmulas de C, com $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Variável livre

- Uma ocorrência de uma variável é livre em uma fórmula A se não ocorre no escopo de um quantificador
- Ou seja, uma ocorrência de uma variável x é livre em A se não ocorre dentro de uma subfórmula da forma $\forall xB$ e se a própria fórmula A não é dessa forma
- Quando uma ocorrência de uma variável não é livre, dizemos que é uma ocorrência ligada
- Sempre que nos referimos a uma ocorrência de uma variável, estamos nos referindo a uma ocorrência do símbolo em uma fórmula atômica, não considerando as variáveis apresentadas ao lado do quantificador (como a variável x em $\forall x(y = y)$)

Definição

Se t e s são termos e x é uma variável, definimos $[t]_x^s$ o termo obtido substituindo a variável x pelo termo s. Formalmente, definimos recursivamente da seguinte forma:

- $[x]_x^s$ é o termo s
- se c é uma constante, $[c]_x^s$ é o termo c
- se v é uma variável diferente de x, $[v]_x^s$ é o termo v
- se t é da forma $F(t_1, ..., t_n)$, então $[t]_x^s$ é o termo $F([t_1]_x^s, ..., [t_n]_x^s)$

Definição

Se A é uma fórmula, x é uma variável e t é um termo, definimos $[A]_x^t$ a fórmula obtida substituindo todas as ocorrências livre da variável x pelo termo t. Formalmente, definimos do seguinte modo:

- se A é da forma R($t_1, ..., t_n$), então $[A]_x^t$ é a fórmula R($[t_1]_x^t, ..., [t_n]_x^t$);
- se A é da forma $(t_1 = t_2)$, então $[A]_x^t$ é a fórmula $([t_1]_x^t = [t_2]_x^t)$;
- se A é da forma $\neg B$ então $[A]_x^t$ é a fórmula $\neg[B]_x^t$;
- se A é da forma $B \wedge C$ então $[A]_x^t$ é a fórmula $[B]_x^t \wedge [C]_x^t$;
- se A é da forma $\forall vB$, onde v é uma variável diferente de x, então $[A]_x^t$ é a fórmula $\forall v[B]_x^t$;
- se A é da forma $\forall xB$ então $[A]_x^t$ é a própria fórmula A

Lógica de primeira ordem

- Para facilitar a notação, em caso de sucessivas substituições evitamos a repetição dos colchetes
- Assim, denotamos por $[A]^{t_1,\ldots,t_n}_{x_1,\ldots,x_n}$ a fórmula obtida pela substituição em A de todas as ocorrências livres das variáveis $x_1, \ldots, x_n$ pelos termos $t_1, \ldots, t_n$, respectivamente

Definição

Chamamos de sentença uma fórmula sem variável livre. Isto é, A é uma sentença se A e $[A]^t_x$ são a mesma fórmula, para quaisquer variável x e termo t

Próxima Aula

O que vem por aí?

- Exercícios
- Semântica da lógica de primeira ordem

Lógica de Primeira Ordem
Lógica para Computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

25 e 29 de junho de 2021

[0]Slides baseados no livro Logic in Computer Science: Modelling and reasoning about systems.[2].

[1]HUTH, Michael; RYAN, Mark. Logic in Computer Science: Modelling and reasoning about systems. Cambridge university press, 2004.