Grafos

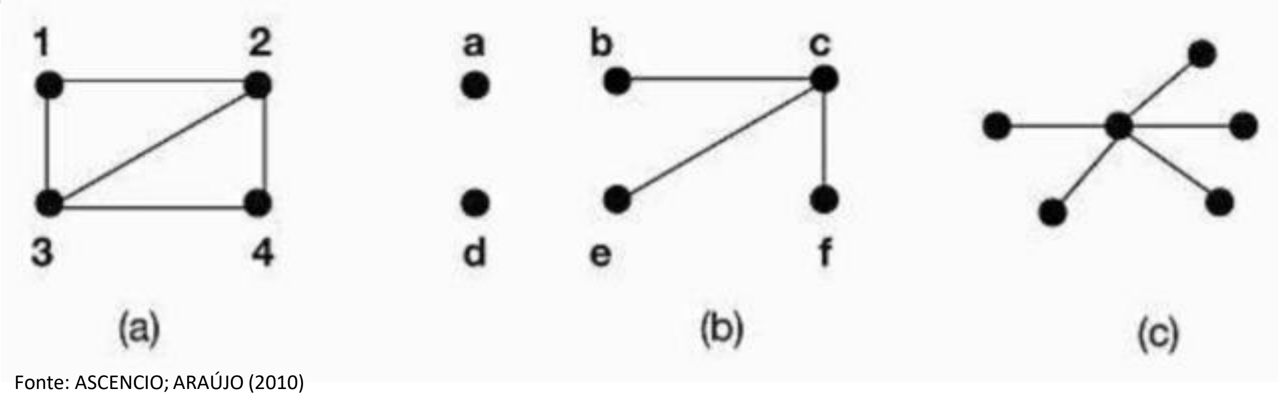
[Representação e Encaminhamento]

Aplicações: malhas e mapeamentos de estradas, estabelecimento de rotas, estruturação de hiperlinks, mapeamentos de estruturas, entre outras.

Um grafo é formado por dois conjuntos, vértices (V) e arestas (E). Cada aresta é representada por e = (u,v)

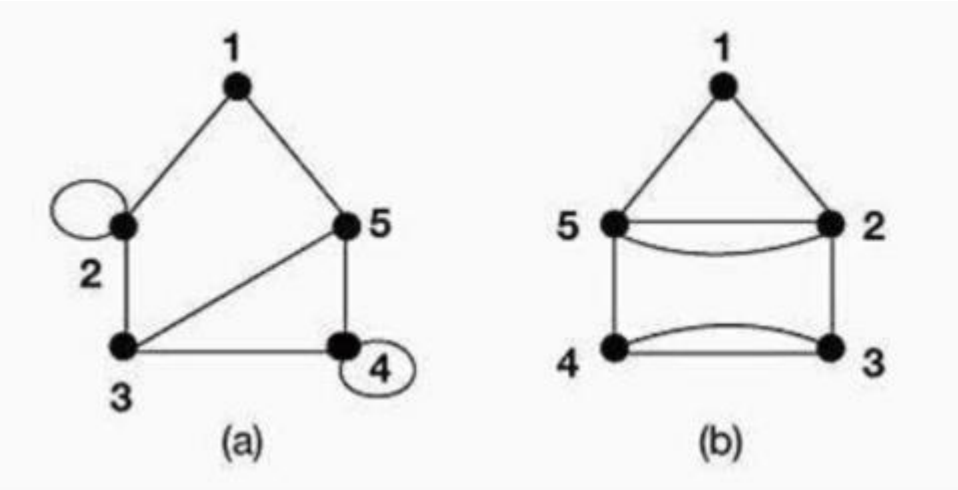
Quando dois vértices são ligados por uma arestas estes são denominados adjacentes

Representação



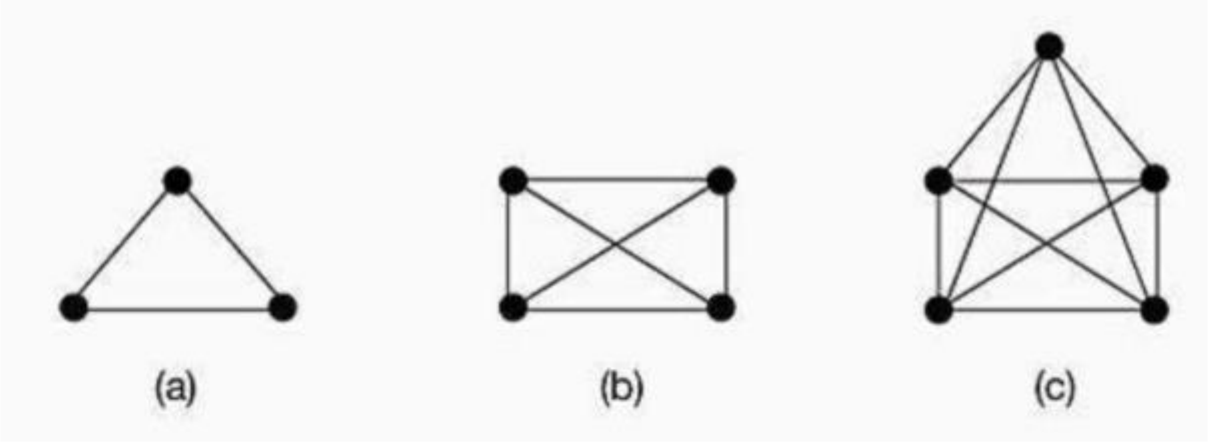
Fonte: ASCENCIO; ARAÚJO (2010)

Um laço é definido quando uma aresta é dada por e = (u,u), ou seja, quando possuem extremidades iguais. Outro elemento importante é o conceito de multigrafo, dado para grafos com arestas paralelas



Fonte: ASCENCIO; ARAÚJO (2010)

Um grafo com apenas um vértice é também chamado de grafo trivial ou simples, já um grafo que possui arestas para cada par de vértices distinto, é considerado um grafo completo



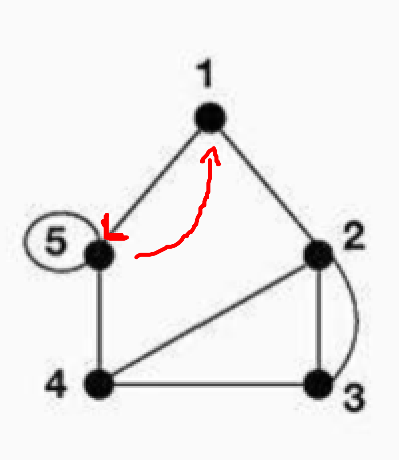
Fonte: ASCENCIO; ARAÚJO (2010)

Há outros conceitos, como dígrafo, grafo bipartido, ponderado, entre outros...

Mas no geral podemos buscar uma maneira de o representar adequadamente, por meio de matrizes e listas!

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, se\ (i,j) \in E(G) \\ 0, se\ (i,j) \notin E(G) \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	1	1



Fonte: ASCENCIO; ARAÚJO (2010)

Quando um grafo é como este último, não direcionado, a matriz de adjacência é simétrica [aquela equivalente a sua transposta]

Outro detalhe é o número de 1s, que é igual a 2*|E|, pois cada aresta (vi,vj) possui dois 1s, com exceção para o grafo com laço ou aresta múltiplas

E esta mesma matriz de adjacência também pode ser formulada para um grafo direcionado (um dígrafo)

O detalhe estará que apenas a aresta (vi,vj), que parte de vi para vj possuirá a sinalização com 1, e neste caso, pode não haver uma aresta direcionada de vj para vi, então para este caso a matriz pode não ser simétrica

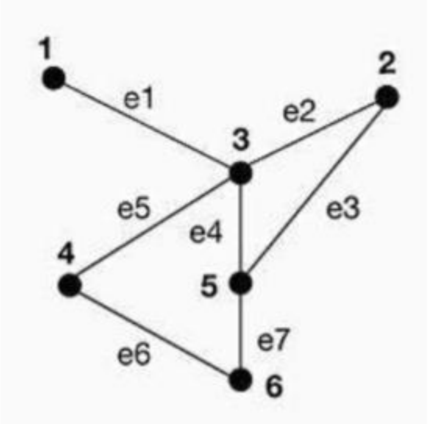
Matriz de Incidência

Outra forma de representar onde uma das dimensões são vértices e a outra dimensão são arestas

Dado um grafo de n vértices e m arestas, Mnm:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, \forall v_i, se(v_i, v_j) \in E(G) \\ 0, se\ (v_i, v_j) \notin E(G) \\ 0, se(v_i, v_i) \in E(G) \end{cases}$$

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	1	1	0	0	1
6	0	0	0	0	0	1	1

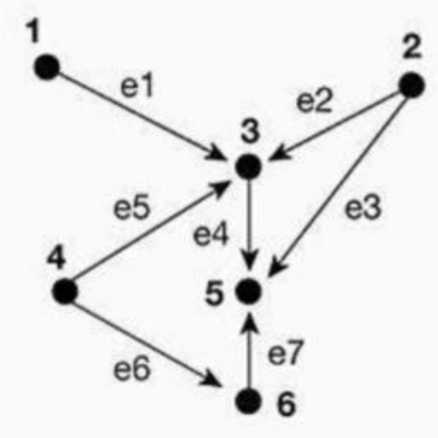


Fonte: ASCENCIO; ARAÚJO (2010)

Caso o grafo seja direcionado:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, \forall v_i, se(v_i, v_j) \in E(G) \\ -1, \forall v_j, se(v_i, v_j) \in E(G) \\ 0, se\ (v_i, v_j) \notin E(G) \\ 0, se(v_i, v_i) \in E(G) \end{cases}$$

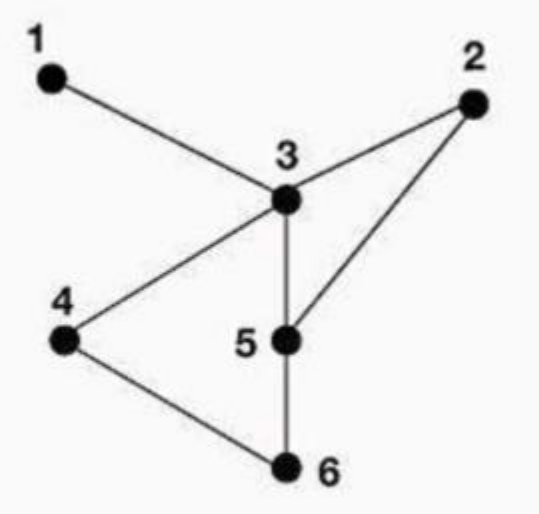
	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	−1	−1	0	1	−1	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	−1	−1	0	0	−1
6	0	0	0	0	0	−1	1

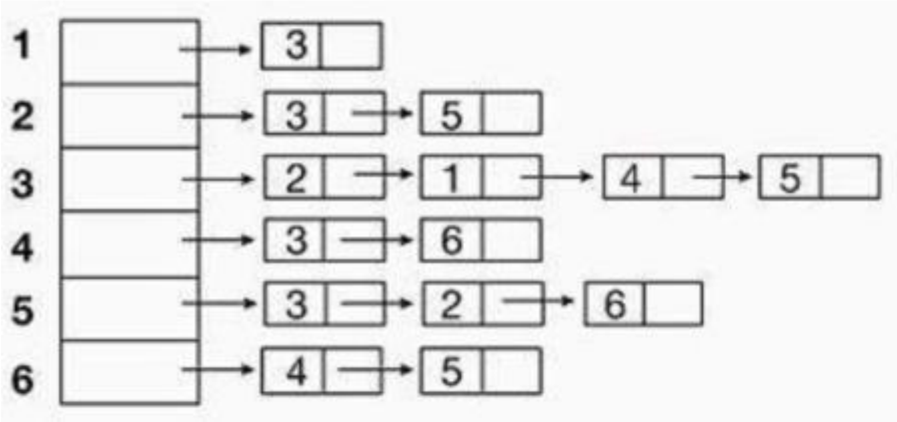


Fonte: ASCENCIO; ARAÚJO (2010)

Lista de Adjacência

As listas de adjacências correspondem a um vetor de adjacência com n=|V| entradas, uma para cada vértice do grafo. Então, cada adjacência em v possui uma lista encadeada, sem ordem definida, de vértices adjacentes a v.

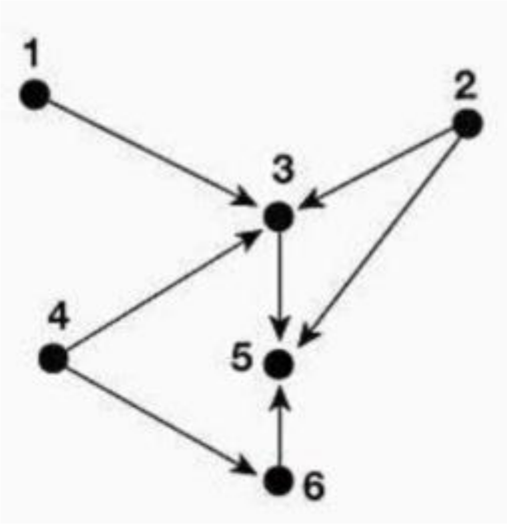


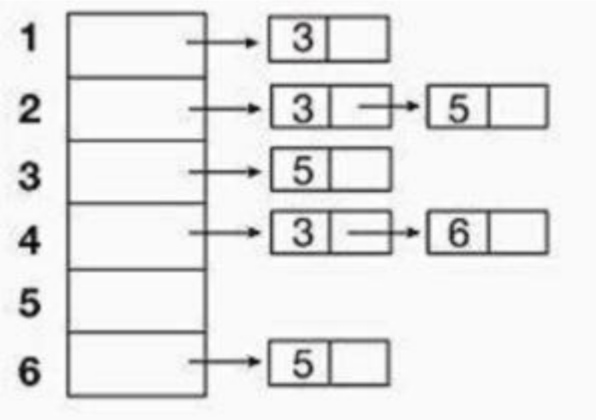


Fonte: ASCENCIO; ARAÚJO (2010)

Dessa forma, essa representação consiste de n listas contendo 2m elementos, sabendo que m é o número de arestas do grafo.

Lista de Adjacência





Fonte: ASCENCIO; ARAÚJO (2010)

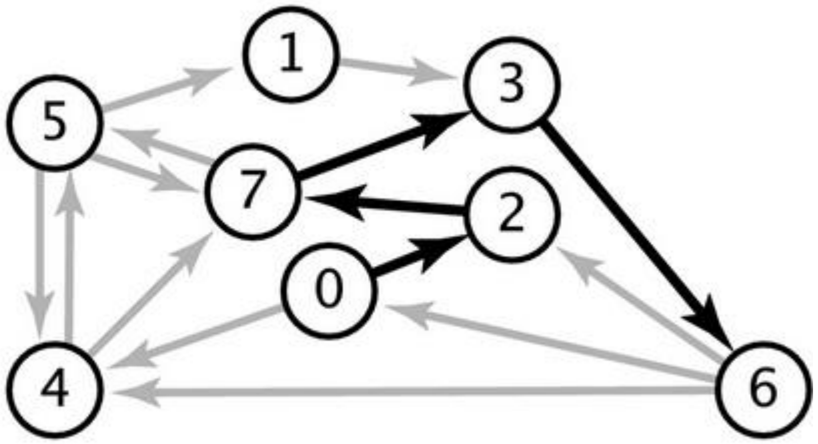
Encaminhamento

Um passeio corresponde a uma sequência de vértices com propriedades de sequenciamento: se x e y são vértices consecutivos na sequência então x-y é um arco do grafo.

Lembrando que um arco do passeio é qualquer arco x-y do grafo tal que x é o sucessor de y neste passeio.

Contudo, é importante observar que o inverso de um passeio não necessariamente é um passeio.

Um passeio pode ser classificado como fechados e tem pelo menos dois arcos e seu primeiro vértice coincide com o último.



Fonte: FEOFILOFF (2017)

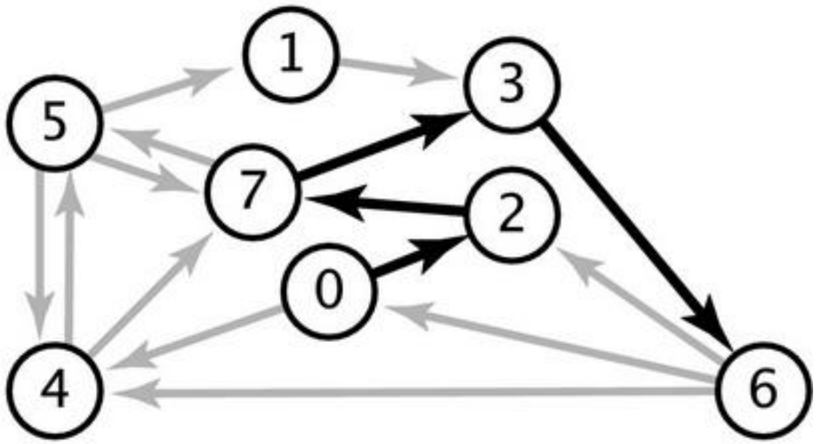
Encaminhamento

Um caminho corresponde a um passeio sem arcos repetidos, logo corresponde a um passeio em que os arcos são todos diferentes.

Caminho simples corresponde a um passeio sem vértices repetidos. 0-2-7-3-6 é um caminho simples na figura de FEOFILOFF (2017)

Visto que os arcos apontam para o mesmo caminho, por vezes são denominados caminhos dirigidos. Com início no vértice x e término no vértice y, também é possível dizer que o caminho vai de x até y.

Por fim, comprimento de um caminho é o número de arcos do caminho.
"Se um caminho tem n vértices, seu comprimento é pelo menos $n-1$; se o caminho é simples, seu comprimento é exatamente $n-1$. "



Fonte: FEOFILOFF (2017)

Fonte das Imagens e Referência

- ASCENCIO, Ana Fernanda Gomes; ARAÚJO, Graziela Santos de. Estruturas de Dados: algoritmos, análise da complexidade e implementações em JAVA e C/C++. **São Paulo: Perarson Prentice Halt**, v. 3, 2010
- Feofiloff, Paulo. Material de Aula: Algoritmos para Grafos via Sedgewick. **Caminhos e ciclos em grafos**, 2017. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/aulas/paths-and-cycles.html>. Acesso em: agosto de 2021.

Próxima e última aula

Esquenta Questionário