UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Reduções: COB-VERT, CAM-HAM e SOMA-SUBC

Teoria da Computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

20 de junho de 2022

Problemas NP-Completos adicionais

- O fenômeno da NP-Completude está se espalhando
- Problemas NP-Completos aparecem em muitas áreas

Problemas NP-Completos adicionais

- Quando construímos uma redução de tempo polinomial a partir do 3SAT para uma linguagem, procuramos por estruturas naquela linguagem que possam simular as variáveis e cláusulas nas fórmulas booleanas
- Essas estruturas são às vezes chamadas engrenagens
- Por exemplo, na redução de 3SAT para CLIQUE, os nós individuais simulam variáveis e as triplas simulas as cláusulas
- CLIQUE é NP-Completa

O problema da cobertura de vértices

- Se G é um grafo não-direcionado, uma cobertura de vértices de G é um subconjunto dos nós onde toda aresta de G toca um dos nós
- O problema da cobertura de vértices pergunta se um grafo contém uma cobertura de vértices de um tamanho especificado:
- COB-VERT $= \{< G, k > \mid$ G é um grafo não-direcionado que tem uma cobertura de vértices de k-nós$\}$

Teorema: COB-VERT é NP-Completo

- Prova:
- A redução mapeia uma fórmula booleana ϕ para um grafo G e um valor k
- Para cada variável x em ϕ, produzimos uma aresta conectando dois nós
- Rotulamos os dois nós nessa engrenagem x e $\overline{x}$
- Fazer x VERDADEIRO corresponde a selecionar o nó esquerdo para a cobertura de vértices, enquanto que FALSO corresponde ao nó direito

Teorema: COB-VERT é NP-Completo

- As engrenagens para cláusulas são um pouco mais complexas
- Cada engrenagem de cláusulas é uma tripla de três nós que são rotulados com três literais da cláusulas
- Esses três nós são conectados um ao outro e as nós nas engrenagens de variáveis que têm os rótulos idênticos
- Por conseguinte, o número total de nós que aparecem em G é 2m+3l, onde ϕ tem m variáveis e l cláusulas
- Faça k igual a m+2l

Teorema: COB-VERT é NP-Completo

- Por exemplo, se $\phi = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_2)$, a redução produz $< G, k >$ a partir de ϕ, onde k=8 e G toma a forma mostrada na figura no quadro

Teorema: COB-VERT é NP-Completo

- Para provar que essa redução funciona, precisamos mostrar que ϕ é satisfazível se e somente se G tem uma cobertura de vértices com k nós
- Começamos com uma atribuição que satisfaz a fórmula
- Primeiro colocamos os nós das engrenagens das variáveis que correspondem aos literais verdadeiros na atribuição na cobertura de vértices
- Então selecionamos um literal verdadeiro em toda cláusula e colocamos os dois nós remanescentes de toda engrenagem de cláusulas na cobertura de vértices
- Agora temos um total de k nós

Teorema: COB-VERT é NP-Completo

- Eles cobrem todas as arestas porque toda engrenagem de cláusulas são cobertas, e todas as arestas entre as engrenagens de variáveis e de cláusulas são cobertas
- Logo, G tem uma cobertura de vértices com k nós

Teorema: COB-VERT é NP-Completo

- Segundo, se G tem uma cobertura de vértices com k nós, mostramos que ϕ é satisfazível construindo a atribuição que a satisfaz
- A cobertura de vértices tem que conter um nó em cada engrenagem de variáveis e dois em toda engrenagem de cláusulas de forma a cobrir as arestas das engrenagens de variáveis e as três arestas dentro das engrenagens de cláusulas
- Isso dá conta de todos os nós, portanto, não sobra nenhum

Teorema: COB-VERT é NP-Completo

- Tomamos os nós das engrenagens de variáveis e atribuímos verdadeiro aos literais correspondentes
- Essa atribuição satisfaz ϕ porque cada uma das três cláusulas é coberta e somente dois nós da engrenagem de cláusulas estão na cobertura de vértices
- Consequentemente, uma das arestas tem que ser coberta por um nó de uma engrenagem de variáveis e, portanto, essa atribuição satisfaz a cláusula correspondente

O problema do caminho hamiltoniano

O problema do caminho hamiltoniano pergunta se o grafo de entrada contém um caminho de s para t que passa por todo nó exatamente uma vez.

CAMHAM é NP-Completo

- Anteriormente, demonstramos que CAMHAM está em NP, portanto tudo o que resta a ser feito é mostrar que 3SAT $\leq_P$ CAMHAM
- Para cada 3fnc-fórmula ϕ, mostramos como construir um grafo direcionado G com dois nós, s e t, tal que existe um caminho hamiltoniano entre s e t sse ϕ é satisfazível
- Começamos a construção com uma 3fnc-fórmula contendo k cláusulas:

$$\phi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \ldots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k)$$

  onde cada a,b e c é um literal x_i ou $\overline{x_i}$
- Sejam $x_1, \ldots, x_l$ as l variáveis de ϕ

CAMHAM é NP-Completo

- Agora mostramos como converter ϕ em um grafo G
- O grafo G que construímos tem várias partes para representar as variáveis e cláusulas que aparecem em ϕ
- Represente cada variável x_i como uma estrutura em formato de diamante que contém uma linha horizontal de nós
- Adiante, especificamos o número de nós que aparecem na linha horizontal
- Representamos cada cláusula de ϕ como um único nó, como vemos no grafo

CAMHAM é NP-Completo

- A seguir, mostramos como conectar os diamantes representando as variáveis aos nós que representam as cláusulas
- Cada estrutura de diamante contém uma linha horizontal de nós conectados por arestas correndo em ambas as direções
- A linha horizontal contém $3k+1$ nós, além dos dois nós nas extremidades pertencentes ao diamante
- Esses nós são agrupados em pares adjacentes, um para cada cláusula, com nós separadores extras em seguida aos pares, como mostrado no quadro

CAMHAM é NP-Completo

- Se a variável x_i aparece na cláusula c_j, adicionamos as duas arestas mostradas no quadro, do j-ésimo par no i-ésimo diamante ao j-ésimo nó cláusula
- Se $\overline{x_i}$ aparece na cláusula c_j, adicionamos as duas arestas como mostrado no quadro, do j-ésimo par no i-ésimo diamante ao j-ésimo nó cláusula
- Depois que adicionamos todas as arestas correspondentes a cada ocorrência de x_i ou $\overline{x_i}$ em cada cláusula, a construção de G está completa
- Para mostrar que essa construção funciona, argumentamos que, se ϕ é satisfazível, existe um caminho hamiltoniano de s para t e, reciprocamente, se tal caminho existe, ϕ é satisfazível

CAMHAM é NP-Completo

- Suponha que ϕ seja satisfazível
- Para exibir um caminho hamiltoniano de s para t, primeiro ignoramos os nós cláusulas
- O caminho começa em s, passa por cada diamante por sua vez e termina em t
- Para atingir os nós horizontais em um diamante, o caminho ou ziguezagueia da esquerda para a direita ou zaguezigueia da direita para a esquerda, a atribuição que satisfaz ϕ determina um dos caminhos
- Se for atribuído VERDADEIRO a x_i, o caminho ziguezagueia através do diamante correspondente
- Se for atribuído FALSO a x_i, o caminho zaguezigueia
- Vemos no quadro as possibilidades

CAMHAM é NP-Completo

- Até agora esse caminho cobre todos os nós em G, exceto os nós cláusula
- Podemos facilmente incluí-los adicionando desvios nos nós horizontais
- Em cada cláusula, selecionamos um dos literais a que foi atribuído VERDADEIRO
- Se selecionamos x_i na cláusula c_j, podemos desviar no j-ésimo par no i-ésimo diamante
- Isso é possível porque x_i deve ser VERDADEIRO e, portanto, o caminho ziguezagueia da esquerda para a direita pelo diamante correspondente
- Logo, as arestas para o nó c_j estão na ordem correta para permitir um desvio e retorno

CAMHAM é NP-Completo

- Similarmente, se selecionarmos $\overline{x_i}$ na cláusula c_j, podemos desviar no j-ésimo par no i-ésimo diamante porque x_i deve ser FALSO e, portanto, o caminho zaguezigueia da direita para a esquerda pelo diamante correspondente
- Logo as arestas para o nó c_j novamente estão na ordem correta para permitir um desvio e retorno
- Por conseguinte, construímos o caminho hamiltoniano desejado

CAMHAM é NP-Completo

- Para a direção reversa, se G tem um caminho hamiltoniano de s para t, exibimos uma atribuição que satisfaz ϕ
- Se o caminho hamiltoniano é normal - passa pelos diamantes na ordem do superior para o inferior, exceto pelos desvios para os nós cláusula - podemos facilmente obter a atribuição que satisfaz ϕ
- Se o caminho ziguezagueia pelo diamante, atribuímos à variável correspondente VERDADEIRO, e ele zaguezigueia, atribuímos FALSO
- Visto que cada nó cláusula aparece no caminho, observando como o desvio para ele é tomado, podemos determinar qual dos literais na cláusula correspondente é verdadeiro

CAMHAM é NP-Completo

- Tudo o que resta para ser mostrado é que um caminho hamiltoniano deve ser normal
- Normalidade pode falhar somente se o caminho entra em uma cláusula a partir de um diamante, mas retorna para um outro, como podemos ver no quadro

CAMHAM é NP-Completo

- O caminho vai do nó a_1 para c, mas em vez de retornar para a_2 no mesmo diamante, ele retorna para b_2 em um diamante diferente
- Se isso ocorre, ou a_2 ou a_3 tem de ser um nó separador
- Se a_2 fosse um nó separador, as únicas arestas entrando em a_2 seriam de a_1 e a_3
- Se a_3 fosse um nó separador, a_1 e a_2 estariam no mesmo par de cláusulas e, portanto, as únicas arestas entrando em a_2 seriam de a_1,a_3 e c
- Em qualquer dos casos, o caminho não poderia conter o nó a_2

CAMHAM é NP-Completo

- O caminho não pode entrar em a_2 de c ou a_1, porque o caminho vai para outros lugares a partir desses nós
- O caminho não pode entrar em a_2 a partir de a_3, porque a_3 é o único nó disponível para o qual a_2 aponta, assim, o caminho deve deixar a_2 via a_3
- Logo, um caminho hamiltoniano tem de ser normal
- Essa redução obviamente opera em tempo polinomial

O problema da soma de subconjuntos

- Dada uma coleção de números $x_1, ..., x_k$ juntamente com um número alvo t, e tínhamos que determinar se a coleção contém uma subcoleção cuja soma é t
- Iremos mostrar que esse problema é NP-Completo

SOMA-SUBC é NP-Completo

- Já sabemos que SOMA-SUBC $\in$ NP, portanto, agora mostramos que 3SAT$\leq_P$ SOMA-SUBC
- Seja ϕ uma fórmula booleana com as variáveis $x_1, \ldots, x_l$ e as cláusulas $c_1, \ldots, c_k$
- A redução converte ϕ para uma instância do problema SOMA-SUBC $< S, t >$, na qual os elementos de S e o número t são as linhas na tabela a seguir, expressos na notação decimal
- As linhas acima da linha dupla são rotuladas $y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots, y_l, z_l$ e $g_1, h_1, g_2, h_2, \ldots, g_k, h_k$ e compreende os elementos de S
- A linha abaixo da linha dupla é t

	1	2	3	4	.	.	.	l	c_1	c_2	.	.	.	c_k
y_1	1	0	0	0	.	.	.	0	1	0	.	.	.	0
z_1	1	0	0	0	.	.	.	0	0	0	.	.	.	0
y_2		1	0	0	.	.	.	0	0	1	.	.	.	0
z_2		1	0	0	.	.	.	0	1	0	.	.	.	0
y_3			1	0	.	.	.	0	1	1	.	.	.	0
z_3			1	0	.	.	.	0	0	0	.	.	.	1
.					.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
y_l								1	0	0	.	.	.	0
z_l								1	0	0	.	.	.	0
g_1									1	0	.	.	.	0
h_1									1	0	.	.	.	0
g_2										1	.	.	.	0
h_2										1	.	.	.	0
.											.	.	.	.
g_k														1
h_k														1
t	1	1	1	1	.	.	.	1	3	3	.	.	.	3

SOMA-SUBC é NP-Completo

- Assim, S contém um par de números, y_i,z_i, para cada variável x_i em ϕ
- A representação decimal desses números está dada em duas partes, como indicado na tabela
- A parte da esquerda compreende um 1 seguido de l-i 0s
- A parte da direita contém um dígito para cada cláusula, onde o j-ésimo dígito de y_i é 1 se a cláusula c_j contém o literal x_i e o j-ésimo dígito de z_i é 1 se a cláusula c_j contém o literal $\overline{x_i}$
- Os dígitos não especificados como sendo 1 são 0

SOMA-SUBC é NP-Completo

- A tabela está parcialmente preenchida para ilustrar as cláusulas amostra, c_1, c_2 e c_k:

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_2 \vee \ldots) \wedge \ldots \wedge (\overline{x_3} \vee \ldots \vee \ldots)$$

- Adicionalmente, S contém um par de números, g_j, h_j, para cada cláusula c_j
- Esses dois números são iguais e consistem de um 1 seguido por $k - j$ 0s
- Finalmente, o número alvo t, na linha inferior da tabela, consiste de l 1s seguidos por k 3s

SOMA-SUBC é NP-Completo

- Agora mostramos porque essa construção funciona
- Demonstramos que ϕ é satisfazível sse algum subconjunto de S soma t
- Suponha que ϕ seja satisfazível
- Construímos um subconjunto de S da seguinte forma
- Selecionamos y_i se a x_i é atribuído VERDADEIRO na atribuição que satisfaz a fórmula ou z_i se a x_i é atribuído FALSO

SOMA-SUBC é NP-Completo

- Se somarmos o que selecionamos até então, obtemos um 1 em cada um dos primeiros l dígitos, porque selecionamos ou y_i ou z_i para cada i
- Além disso, cada um dos últimos k dígitos é um número entre 1 e 3, porque cada cláusula é satisfeita e, portanto, contém entre 1 e 3 literais verdadeiros
- Agora selecionamos ainda uma quantidade suficiente dos números g e h para trazer cada um dos últimos k dígitos para 3, portanto, atingindo o alvo

SOMA-SUBC é NP-Completo

- Suponha que um subconjunto de S tenha t como soma
- Construímos uma atribuição que satisfaz ϕ após fazer várias observações
- Primeiro, todos os dígitos de membros de S são 0 ou 1
- Além disso, cada coluna da tabela que descreve S contém no máximo cinco 1s
- Logo, nunca ocorre um "vai-um" para a próxima coluna quando um subconjunto de S é somado
- Para obter um 1 em cada uma das l primeiras colunas, o subconjunto deve ter y_i ou z_i para cada i, mas não ambos

SOMA-SUBC é NP-Completo

- Agora, construímos a atribuição que satisfaz a fórmula
- Se o subconjunto contém y_i, atribuímos verdadeiro a x_i; caso contrário, atribuímos FALSO
- Essa atribuição deve satisfazer ϕ, porque em cada uma das k colunas finais a soma é sempre 3
- Na coluna c_j, pode vir no máximo 2 de g_j e h_j; logo, pelo menos 1 nesta coluna deve vir de algum y_i ou z_i do subconjunto
- Se for y_i, então aparece x_i em c_j e é atribuído o valor VERDADEIRO, de forma que c_j é satisfeita
- Se for z_i, então $\overline{x_i}$ ocorre em c_j e é atribuído FALSO a x_i, e assim c_j é satisfeita
- Portanto, ϕ é satisfeita

Próxima Aula

O que vem por aí?

- Exercícios
- Teste 3
- Revisão
- Prova 3

Reduções: COB-VERT, CAM-HAM e SOMA-SUBC

Teoria da Computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

20 de junho de 2022