1 NEGAÇÃO DE SENTENÇAS QUANTIFICADAS

Considere o conjunto universo H dos seres humanos. As expressões:

1. $(\forall x)(x$ fala francês$)$
2. $(\exists x)(x$ foi a Lua$)$

são proposições que, em linguagem comum, podem ser enunciadas como:

1. "Toda pessoa fala francês"
2. "Alguém foi a Lua"

Estas proposições podem ser negadas da seguinte forma:

1. "Nem toda pessoa fala francês"
2. "Ninguém foi a Lua"

De modo geral, a **negação** da proposição $(\forall x \in A)(p(x))$ é equivalente a **afirmação** de que, **para ao menos um** $x \in A$, $p(x)$ é falsa ou $\sim p(x)$ é verdadeira.

Analogamente, a **negação** da proposição $(\exists x \in A)(p(x))$ é equivalente a **afirmação** de que, **para todo** $x \in A$, $p(x)$ é falsa ou $\sim p(x)$ é verdadeira.

Assim,

1. Uma sentença quantificada com quantificador universal, $(\forall x \in A)(p(x))$, é negada assim: **substitui-se o quantificador universal pelo existencial e nega-se** $p(x)$**, obtendo-se:**

$$(\exists x)(\sim p(x))$$

2. Uma sentença quantificada com quantificador existencial, $(\exists x \in A)(p(x))$, é negada assim: **substitui-se o quantificador existencial pelo universal e nega-se** $p(x)$**, obtendo-se:**

$$(\forall x)(\sim p(x))$$

Exemplos:

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(x+3=5)$

   $\sim$: $(\exists x \in \mathbb{R})(x+3 \neq 5)$

2. $(\forall x \in \mathbb{R})(x(x+1)=x^2+x)$

   $\sim$: $(\exists x \in \mathbb{R})(x(x+1) \neq x^2+x)$

3. Todo losango é um quadrado

   $\sim$: Existe um losango que não é um quadrado

4. $(\forall n \in \mathbb{N})(n+2>8)$

   $\sim$: $(\exists n \in \mathbb{N})(n+2 \leq 8)$

5. $(\exists x \in \mathbb{R})(x=x)$

   $\sim$: $(\forall x \in \mathbb{R})(x \neq x)$

6. $(\exists x \in \mathbb{R})(3x-5 \neq 0)$

   $\sim$: $(\forall x \in \mathbb{R})(3x-5=0)$

7. $(\exists x \in \mathbb{R})(|x| \geq 0)$

   $\sim$: $(\forall x \in \mathbb{R})(|x|<0)$

1.1 Contra-Exemplo

Para mostrar que uma proposição da forma $(\forall x \in A)(p(x))$ é **falsa** basta mostrar que a **negação** $(\exists x \in A)(\sim p(x))$ é **verdadeira**, isto é, que existe **pelo menos um** elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x_0)$ é uma proposição **falsa**. O elemento x_0 recebe o nome de **contra-exemplo**.

Exemplos:

1. A proposição $(\forall x \in \mathbb{N})(2^n > n^2))$ é **falsa**.

   Contra-exemplo: $n=2$. Note que $2^2=2^2$. Observe que $x=3$, $x=4$ também são contra-exemplos.

2. A proposição $(\forall x \in \mathbb{R})(|x| \neq 0)$ é **falsa**.

   Contra-exemplo: $x=0$. Note que $|0|=0$.

3. A proposição $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2=x)$ é **falsa**.

   Contra-exemplo: $x=3$. Note que $3^2 \neq 3$.

2 COMO NEGAR PROPOSIÇÕES

Negação da conjunção

A **negação** de $p \wedge q$ é a proposição $\sim p \vee \sim q$, pois

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

Exemplos:

1. $p : a \neq 0$ e $q : b \neq 0$

   $p \wedge q : a \neq 0 \wedge b \neq 0$

   $\sim (p \wedge q) : a = 0 \vee b = 0$

2. p : João é estudante e q: Maria é atriz

   $p \wedge q$: João é estudante e Maria é atriz

   $\sim (p \wedge q)$: João não é estudante ou Maria não é atriz.

Negação da disjunção

A **negação** de $p \vee q$ é a proposição $\sim p \wedge \sim q$, pois

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Exemplos:

1. p : O triângulo ABC é isósceles e q : O triângulo ABC é equilátero

   $p \vee q$: O triângulo ABC é isósceles ou é equilátero

   $\sim (p \vee q)$: O triângulo ABC não é isósceles e não é equilátero

2. p : João é estudante e q: Maria é atriz

   $p \vee q$: João é estudante ou Maria é atriz

   $\sim (p \wedge q)$: João não é estudante e Maria não é atriz.

Negação da condicional

A **negação** de $p \rightarrow q$ é a proposição $p \wedge \sim q$, pois

$$\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

Exemplos:

1. $p: 2 \in \mathbb{Z}$ e $q: 2 \in \mathbb{Q}$

   $p \to q$: Se $2 \in \mathbb{Z}$ então $2 \in \mathbb{Q}$

   $\sim (p \to q) : 2 \in \mathbb{Z} \wedge 2 \notin \mathbb{Q}$

2. p : João é estudante e q: Maria é atriz

   $p \to q$: Se João é estudante então Maria é atriz

   $\sim (p \to q)$: João é estudante e Maria não é atriz.

Negação da bicondicional

A **negação** de $p \leftrightarrow q$ é a proposição $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$, pois

$$\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

Exemplos:

1. $p: 5^2 = (-5)^2$ e $q: 5 = -5$

   $p \leftrightarrow q : 5^2 = (-5)^2$ se e somente se $q: 5 = -5$

   $\sim (p \leftrightarrow q)$: $(5^2 = (-5)^2$ e $5 \neq -5)$ ou $(5^2 \neq (-5)^2$ e $5 = -5)$

2. p : João é estudante e q: Maria é atriz

   $p \leftrightarrow q$: João é estudante se e somente se Maria é atriz

   $\sim (p \leftrightarrow q)$: João é estudante e Maria não é atriz ou João não é estudante e Maria é atriz.