Prova 2

① a) Se $a|(b+c)$, então $a|b$ ou $a|c$. (F)

Contra exemplo: $a=2$, $b=3$ e $c=4$

$2|(3+4) \Rightarrow 2|7$ e isso é falso.

b) Existem exatamente 5 inteiros não negativos menores que 40 que quando divididos por 7 deixam um resto igual ao quociente (V)

Suponha que existe um inteiro positivo n menor do que 40 onde $7|n$, ou seja, isso pode ser reescrito como $n=7.q+r$ onde $q \in \mathbb{Z}$, já que por hipótese $q=r$, então $n=7.r+r$. Desse modo, sabemos de que os restos da divisão por 7 tem que ser $0 \leq r < 7$, desse modo temos os possíveis restos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Dessa forma se substituir o r por 5 acharemos que $n=40$, ou seja, os únicos valores que r poderá assumir são 0, 1, 2, 3 e 4. Desse modo, temos:

$n=7.0+0 \Rightarrow n=0$
$n=7.1+1 \Rightarrow n=7+1 \Rightarrow n=8$
$n=7.2+2 \Rightarrow n=14+2 \Rightarrow n=16$
$n=7.3+3 \Rightarrow n=21+3 \Rightarrow n=24$
$n=7.4+4 \Rightarrow n=28+4 \Rightarrow n=32$

Dessa forma podemos ver que existe exatamente 5 inteiros menores que 40 que quando divididos por 7 deixam restos igual ao quociente.

c) Se o resto da divisão euclidiana de um inteiro n por 6 é 4, então o resto da divisão de n por 3 é 1. (V)

	x
n	6
4	

$\Leftarrow\Rightarrow n = 6 \cdot x + 4$

Colocando o 3 em evidência nessa equação temos que.

$$n = 3(2x+1)+1 \Leftarrow\Rightarrow n = 6.x+4$$

Desse modo temos que n é dividido por 3 dando o resto 1.

d) O número 521 é um número composto. (F)

Sabemos que um número composto a partir da multiplicação de vários primos, porém o 521 só pode ser dividido por 521 e por 1. Desse modo temos que 521 é primo pois ele só é divisível por ele mesmo e por 1.

e) A soma de inteiros positivos ímpares e consecutivos é sempre um inteiro composto

Já que existe um inteiro ímpar ele pode ser escrito da forma $2K+1$ com $K \in \mathbb{Z}$. Porém para somar o próximo inteiro ímpar consecutivo, ele irá estar 2 valores a frente, ou seja, ficaria $2K+1+2$. Desse modo temos que a soma desses dois inteiros ímpar é:

$$2K+1+2K+3 = 4K+4 = 4(K+1)$$

Dessa forma temos que o número é um multiplo de 4, ou seja, essa soma gera um inteiro composto.

f) Se os inteiros 72 e 24 pertencem a uma mesma classe de congruência módulo m, então existem 10 valores possíveis para m. ( )

$\bar{x} = \{24, \dots, 72\}$

Se $m=2$, Teremos que todos os pares visto que os dois são pares.

$m=3 \cdot \bar{0} = \{24, 27, 30, 33, 36, \dots, 69, 72, \dots\}$
$m=4 \cdot \bar{0} = \{24, 28, 31, 36, 40, \dots, 68, 72, \dots\}$
$m=6 \cdot \bar{0} = \{24, 30, 36, 42, 48, 52, 58, 64, 68, 72, \dots\}$
$m=8 \cdot \bar{0} = \{24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, \dots\}$
$m=12 \cdot \bar{0} = \{24, 36, 48, 60, 72, \dots\}$
$m=16 \cdot \bar{8} = \{24, 40, 56, 72, \dots\}$
$m=24 \cdot \bar{0} = \{24, 48, 72, \dots\}$
$m=48 \cdot \overline{24} = \{24, 72, 120, \dots\}$
$m=1 \cdot \bar{0} =$ Todos os inteiros.

② O mdc de dois inteiros positivos é 10 e o maior deles é 120. Determine o outro inteiro.

Pelo algoritmo de Euclides temos que:

	x	y
120	n	10
10	0	

$120 = nx + 10 \Rightarrow 110 = n.x$

$n = y.10$

Temos que $n.x = 110$ os únicos valores que multiplicados dão 110 são o 10 e o 11, porém quem é n e quem é x, Dessa forma sabemos que n tanto pode ser 10 como 110, então se $n = 10$, $x = 11$ e se $n = 110$, $x = 1$, então o outro inteiro pode ser 10 ou 110

③ Mostre que se a é um inteiro ímpar, então $a^2 \equiv 1 \pmod 8$

Suponha que $a = 2k+1$, tal que $k \in \mathbb{Z}$, como k pertence aos inteiros, ou seja, k pode ser par ou ímpar desse modo temos dois casos:

Caso 1: Suponha que $k = 2c$, tal que $c \in \mathbb{Z}$. Desse modo temos:

$2k+1 = 2(2c)+1 = 4c+1 = (4c+1)^2 = (4c+1)(4c+1) = 16c^2+8c+1 \Rightarrow$

$8(2c^2+c)+1$

Dessa forma, temos que $2c^2+c \in \mathbb{Z}$ então temos que $8(2c^2+c) \equiv 1 \pmod 8$, pois $8(2c^2+c)+1$ é um múltiplo de 8.

Caso 2: Suponha que $k = 2d+1$, tal que $d \in \mathbb{Z}$.

$2k+1 = 2(2d+1)+1 = 4d+2+1 = 4d+3 \Rightarrow (4d+3)^2 = (4d+3)(4d+3)$

$16d^2 + 24d + 9 \Rightarrow 16d^2 + 24d + 8 + 1 \Rightarrow 8(2d^2+3d+1)+1$

Dessa forma, temos que $2d^2+3d+1 \in \mathbb{Z}$, então temos que $8(2d^2+3d+1)+1 \equiv 1 \pmod 8$, pois $8(2d^2+3d+1)+1$ é um múltiplo de 8.

Desse modo como o caso 1 e o caso 2 são verdadeiros provamos que $a^2 \equiv 1 \pmod 8$.

4) Determine um sistema completo de restos módulo 7 formando só com números primos.

Sabemos que os possíveis restos de 7 são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ou seja, temos

$7.1+0 = 7$
$7.6+1 = 43$
$7.4+2 = 29$
$7.2+3 = 17$
$7.3+4 = 39$
$7.2+5 = 19$
$7.5+6 = 41$

Dessa forma o sistema completo de restos formado só com primos ficará:
$S = \{7, 43, 29, 17, 39, 19, 41\}$

⑤ Mostra que $8 \mid (3^{2n}+7)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Passo base: para $n=0$, temos que $3^{2.0}+7 = 3^0+7 = 1+7 = 8$ como $8 \mid 8$, ou seja, temos que o passo base é verdade.

Passo indutivo: Suponha que existe um inteiro k, tal que $3^{2k}+7$, com $k \geq 1$, ou seja, $3^{2k}+7 = 8.q$, com $q \in \mathbb{Z}_+$. De $3^{2(k+1)}+7$, temos:

$3^{2(k+1)}+7 = 3^{2k+2}+7 = 3^2 . 3^{2k}+7 = 9(8.q-7)+7 = 72q-63+7 =$
$= 72q-56 = 8(9q-7)$

$3^{2k}+7 = 8.q \Rightarrow 3^{2k} = 8.q-7$

Desse modo temos que o passo indutivo é verdade pois $3^{2k+2}+7$ é um multiplo de 8.

Rascunho:
$8 \mid 3^{2k}+7 \Rightarrow 8 \mid 3^{2(k+1)}+7 = 8 \mid 3^{2k+2}+7$

⑥ Suponha que $v_0, v_1, v_2, \dots$ é uma sequência definida da seguinte maneira:

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = 6 \\ v_i = 3v_{i-3}, \text{ se } i \geq 3 \end{cases}$$

Prove que v_n é par para todo $n \geq 0$

Passo base: Para $v_0 = 2$, ou seja, pela teoria de número par tem-se que $2k$, com k pertencente aos inteiros é igual $2v_0 = 2.2$, ou seja, v_0 é um multiplo de 2 então é par. Para $v_1 = 2$, então $2v_1 = 2.2$ que também é par por ser multiplo de 2. Já para $v_2 = 6$, temos $2.v_2 = 2.6$ que também da um multiplo de 2 sendo par.

Passo indutivo: Suponha que V_j é verdadeiro para todo j no intervalo de $0 \leq j \leq k$, com $k \geq 2$, ou seja, $3V_{j-3}$. Dessa forma temos:

$$3V_{k+1-3} = 3V_{k-2}$$

Ou seja, como V_{k-2} faz parte do intervalo fechado j, então $V_{k-2} = 2q$. Desse modo temos que:

$$3.2.q = 2(3q)$$

Sendo $3q$ pertencente aos inteiros temos que esse valor é multiplo de 2, ou seja, temos que V_n é sempre par, pois também é valido para V_{k+1}.

Rascunho: $V_{k+1} = 2q$, com $q \in \mathbb{Z}$