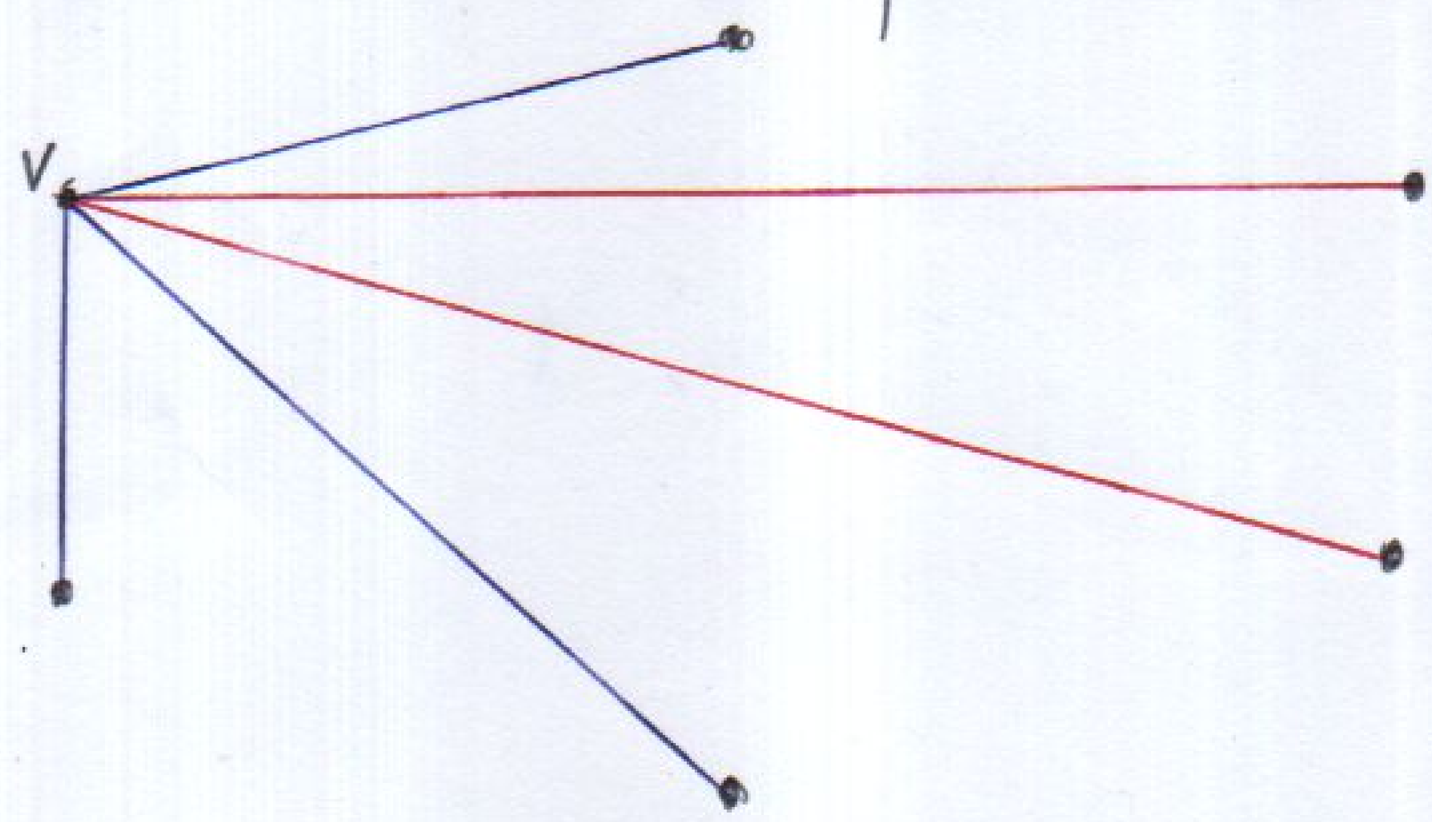
Nome: Raylander Marques Melo

Matrícula: 494563

①

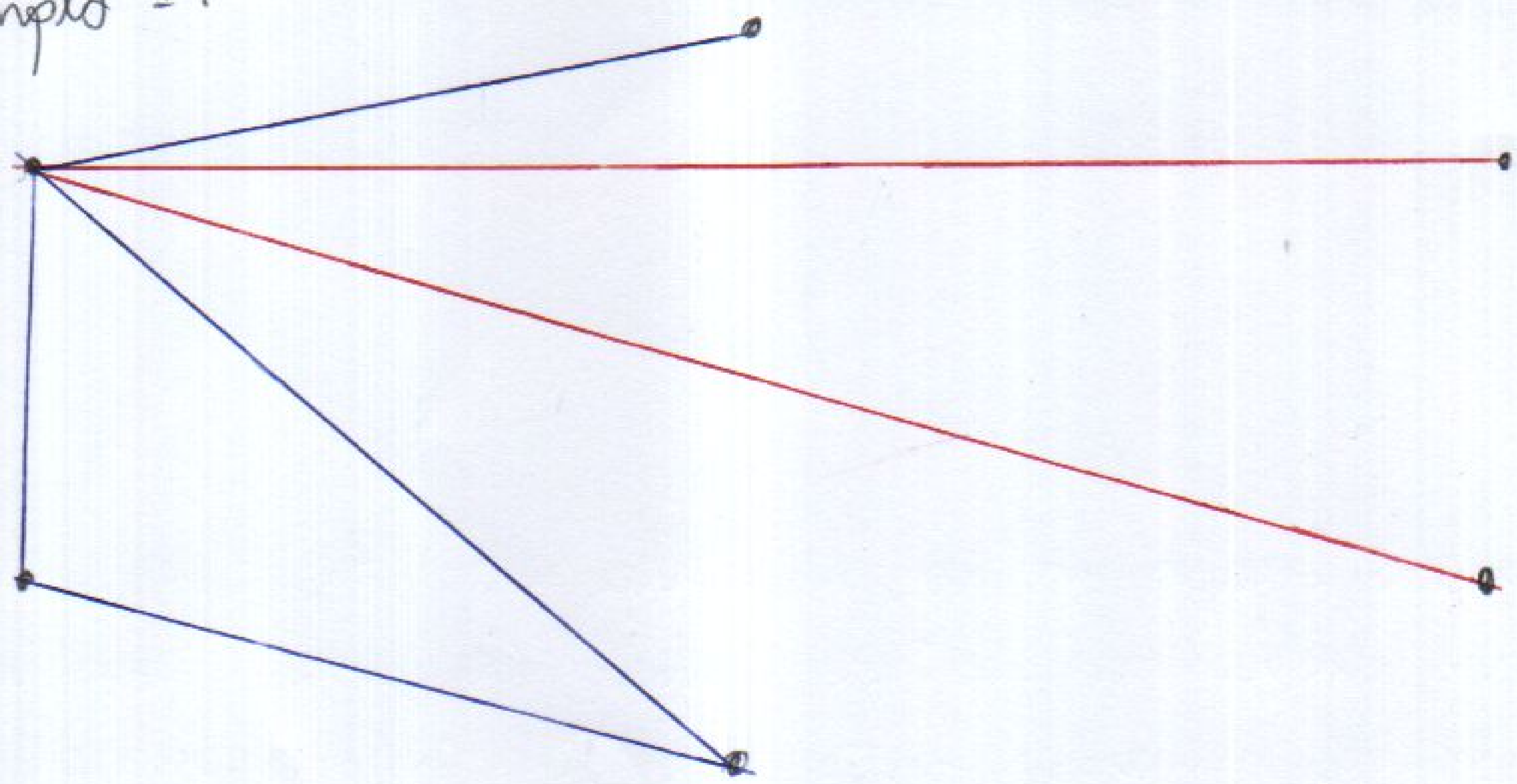
Considere 6 vértices de G representando as pessoas.

Para representação irei utilizar arestas azuis para representar as pessoas que se conhecem e arestas vermelhas para quem não se conhecem. Assim vou representar que uma pessoa conhece ou desconhece as outras 5, como representado abaixo.

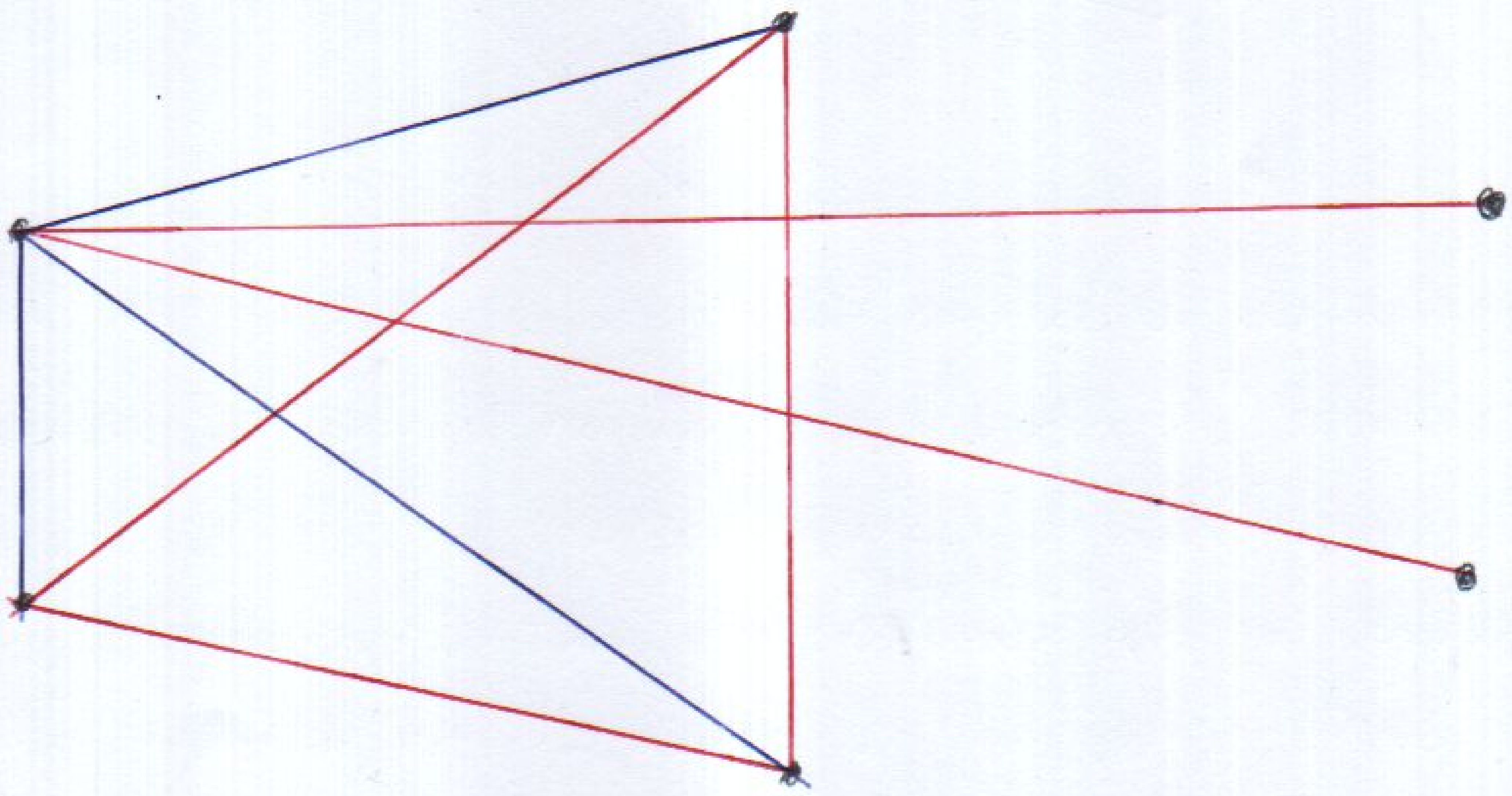


Dessa forma, como uma pessoa conhece ou desconhece 5 pessoas, 5 é ímpar, então vai haver a existencia de pelo menos 3 arestas da mesma cor, no exemplo acima foram representado pelas arestas azuis que representam as pessoas que se conhecem.
Ou seja, se dois dos vértices ligados por arestas azuis ao vértice v existirá um triangulo azul fazendo com quê 3 pessoas se conheçam multuamente. Da mesma forma se os três vértices que se ligam ao vértice v por arestas azuis estiverem ligados por arestas vermelhas faz com quê o grafo tenham três vertices que se ligam formando um triângulo que significa que 3 pessoas se desconhecem multuamente. Irei fazer dois exemplos abaixo que irá representar as duas situações acima respectivamente.

Exemplo 1:



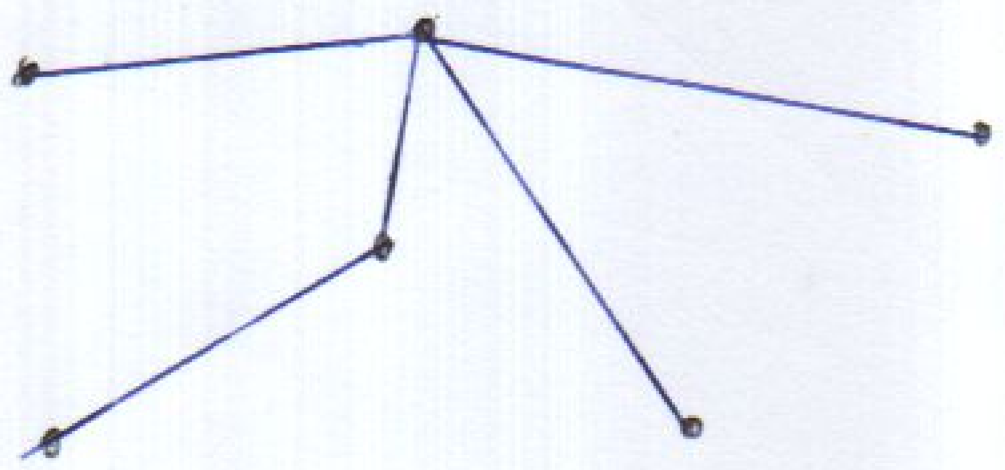
Exemplo 2:



Dessa forma, está comprovado que em um grupo de 6 pessoas, 3 se conhecem mutuamente ou 3 se desconhecem mutuamente.

② a)

Inicialmente sabemos que um grafo para ele ser uma árvore o grafo tem que existir um e apenas um caminho entre cada par de vértices, ou seja, o grafo tem que ser conexo sem ciclos, sendo assim se o grafo G é uma árvore ele irá ter uma estrutura parecida com a do grafo abaixo.

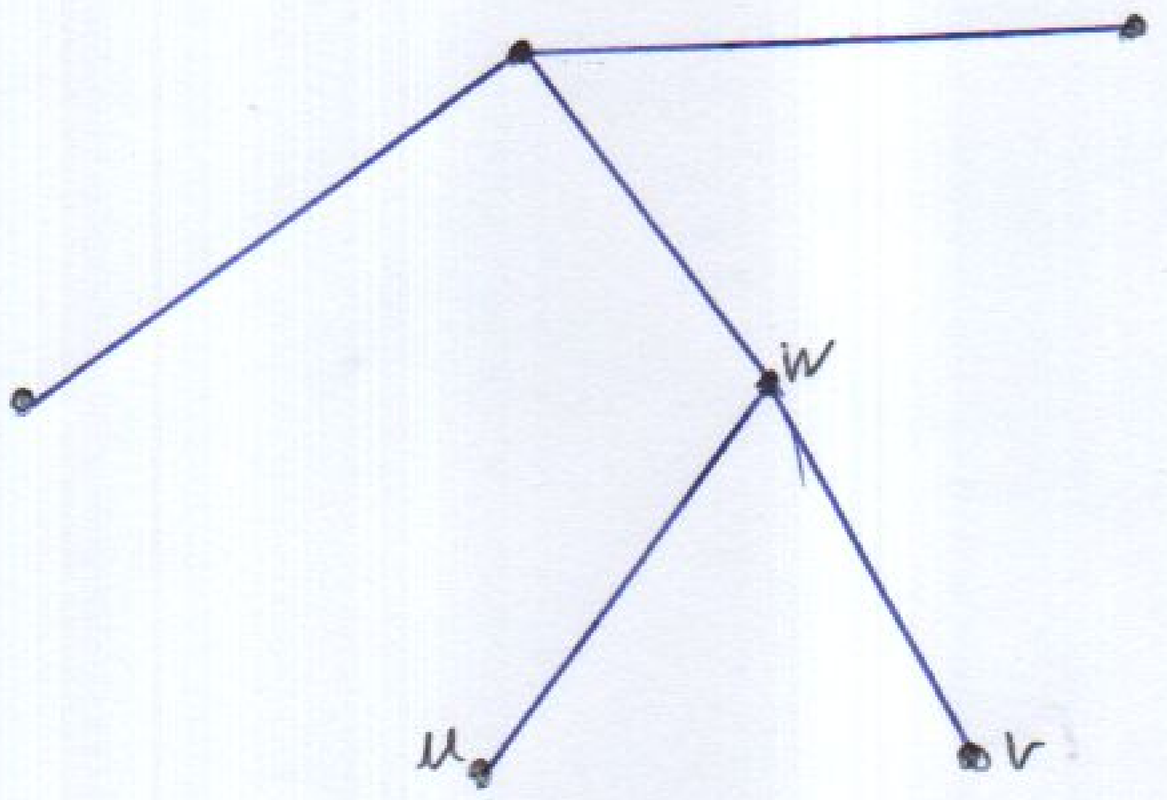


Sabemos também que para ser uma aresta de corte a aresta tem que ter a capacidade de dividir o grafo ao ser retirada, assim como a árvore só é uma árvore se, e somente se só existe um caminho entre um par de vértices, então toda aresta de uma árvore é uma aresta de corte, pois ao ser retirada ela ~~se~~ desconecta o grafo. Dessa forma é provado que um grafo G é uma árvore se G é conexo e toda aresta é uma aresta de corte.

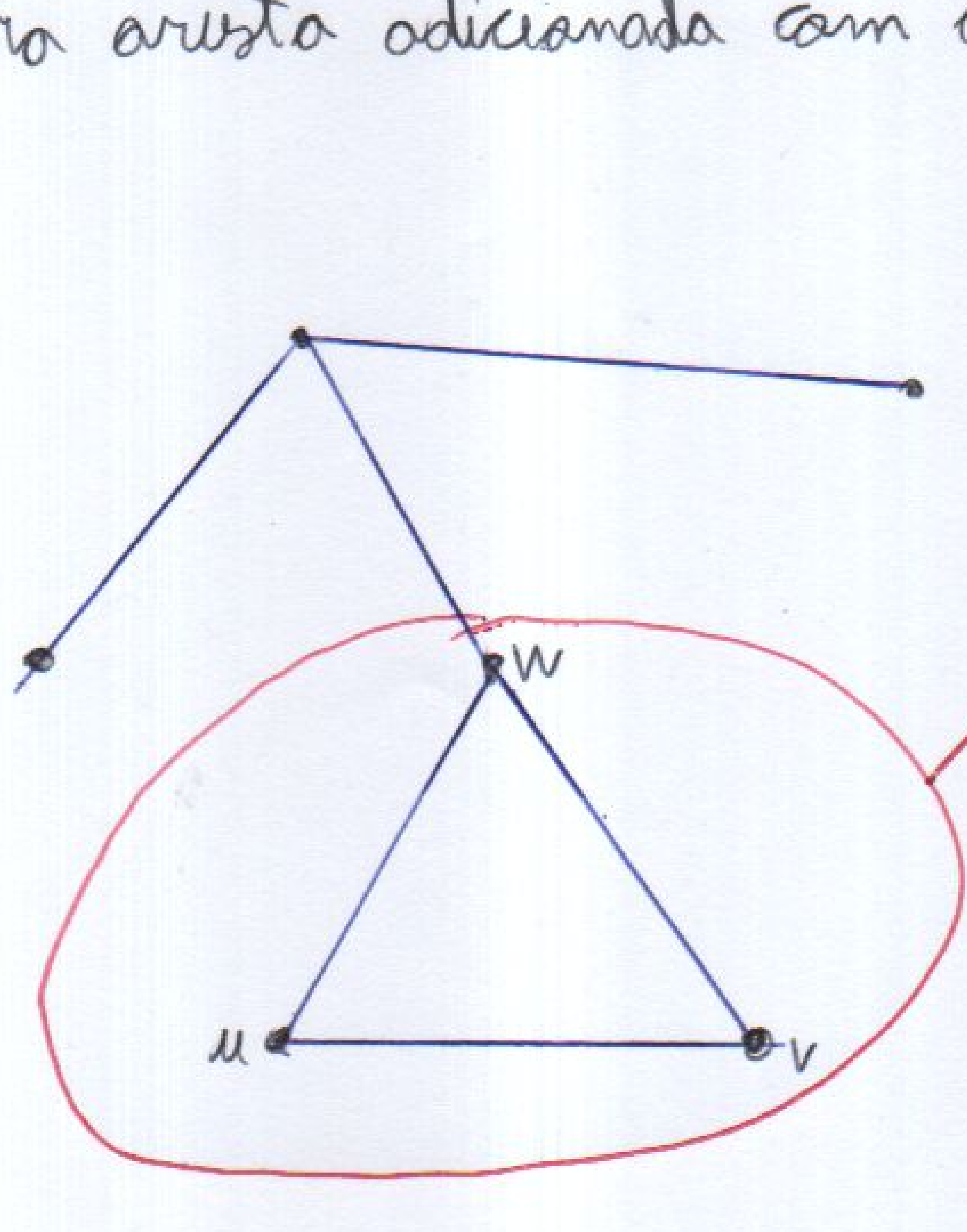
b)

Para um grafo ser uma árvore, G tem que existir somente um caminho entre dois pares de vértices, ou seja, não contém ciclos neste grafo, como G não contém ciclos, então G possui o números de vértices menor do que o de aresta, porém como existe um caminho de todo vértice para todo vértice, então ao adicionar mais uma aresta entre dois vértices ele irá criar outro caminho entre aquele par de vértices, desse modo, ao existir estes dois caminhos entre dois vértices isso gerará um ciclo, pois pode sair de um certo vértice u e ir até v passando por certo w como ele também pode ir direto de u para v, ou seja, se começar a percorrer o grafo em u e chegar em v pode ir de v direto para u, assim fechando um ciclo como no exemplo abaixo.

Árvore:



Grafo com outra aresta adicionada com a mesma quantidade de vértices:



→ Ciclo gerado, ou seja, para ser árvore se adicionar outra aresta a árvore gera um ciclo

③ a)

Suponha que G é uma floresta. Então temos que todo subgrafo induzido H do grafo G o subgrafo induzido H também é uma floresta, desse modo, sabemos que os componentes de uma floresta são árvores e árvores contém folhas que são vértices de grau 1 e se a árvore for uma árvore trivial então o vértice terá grau 0. Dessa forma, H por ser um subgrafo ele sempre terá uma folha de uma árvore ou mesmo que não pegue uma folha este subgrafo mais no subgrafo aquela parte do componente será uma folha, como também na situação de H ser trivial assim também é válido. porque o único vértice em H terá grau 0.

b)

Vamos supor por absurdo G é uma floresta e temos um subgrafo H conexo de G, se H não é induzido então temos que entre um certo par de vértices em G existe a aresta x já no subgrafo conexo não induzido H esta aresta x entre aquele par de vértices não existe. Absurdo, pois se H é conexo e não possui ciclos a aresta x faz parte do único caminho entre um par de vértices e se x não existe ~~H~~ não seria conexo.
Dessa forma, todo subgrafo conexo é um subgrafo induzido.

c)

Suponha que G é uma floresta com Y componentes, ou seja, cada componente guarda uma árvore, uma árvore é composta por n vértices e n-1 arestas, pois uma árvore só existe se existir somente um caminho entre dois vértices, ou seja, não possui ciclos, então uma aresta conecta dois vértices isso explica o n-1 para saber a quantidade de arestas.
Desse modo, para sabermos o número de componentes desta floresta vamos ter que subtrair a quantidade de vértices pela quantidade de arestas, isto funciona pois para cada par de vértices dentro de uma componente conexa existe uma aresta para cada par de vértices então o resultado da subtração da um, então ao executar este cálculo das componentes

Continuação (3) c)

na floresta irá dizer a quantidade de componentes pois, ao ter um par de vértices sem ter um caminho entre eles significa que existe vértices de uma árvore que não se conectam com outra indicando as componentes.

4) a)

Esta alternativa é falsa pois temos um contraexemplo mostrado abaixo:

Podemos vê que este grafo é desconexo pois, ele não pode ser conexo, pois para ser conexo deveria existir um caminho entre dois pares de vértices e neste contraexemplo isto não acontece, então temos que esse grafo é desconexo e não possui um vértice isolado, que é um vértice que não se liga a ninguém.

b)

Suponha por absurdo que o grafo G é desconexo, então se existe um vértice u que se ligue a qualquer outro vértice de G por um caminho então, chegamos em um absurdo, pois se um certo vértice u consegue se conectar a qualquer outro vértice de um grafo por um caminho esse grafo é conexo, pois existe um caminho que liga todo par de vértices.

c)

Uma trilha fechada é um grafo que sai de um certo vértice u todos os outros vértices sem repetir aresta e depois voltando para o vértice u, ou seja, uma trilha fechada já é um ciclo por si só porém se houver um ciclo dentro da trilha fechada também existe o ciclo dentro do conjunto de arestas da trilha, ou seja, se existir só a trilha fechada ela por si só já é um ciclo e se existir mais ciclos dentro da trilha tem-se ali um conjunto de arestas de uma trilha fechada que compõe um ciclo.

d)

Para um grafo ser uma trilha maximal não fechada, o grafo tem que ser conexo e não pode repetir arestas no seu percurso, ou seja, se possuir um grafo G que é uma trilha maximal não fechada iremos ter algo parecido com o exemplo abaixo:

Assim, sabemos que se G não é fechado e é uma trilha completa, então se a partir de um vértice inicial chegar em outro vértice considerado o vértice final, ou seja, se G sai de um vértice e a trilha foi concluída e não voltou para o vértice de início temos que esse vértice inicial terá grau 1, ou seja, ímpar pois ele se conecta somente a uma aresta, pois começa nele então a aresta só sai, melhor falando começando dele só existe uma aresta por onde ele pode sair, assim sabemos também que a aresta final também vai ter grau 1, pois só irá chegar a aresta nele e como ele não é fechado não existe aresta saindo e temos também que os vértices que estão na trilha entre o vértice inicial e o final terão grau 2 ou graus multiplos de dois, pois cada vez que chega uma aresta tem que sair outra para que aquele vértice não seja o vértice final. Dessa forma só irá existir uma trilha maximal em um grafo não fechado se suas extremidades tem grau ímpar.

(5)

Para existir um certo grafo G conexo sem repetições pela propriedade o grafo G tem que possuir mais vértices do que arestas pois, se temos que uma aresta conecta dois vértices como no exemplo abaixo:

Temos que neste exemplo ele é um grafo conexo sem ciclos e o número de vértices é maior do que o de arestas agora vejamos o próximo exemplo:

Agora neste grafo temos que o número de vértices é o mesmo número de arestas, ou seja, se partir do vértice u para o vértice v e depois de chegar no vértice v ele quiser voltar para u por outro caminho fechando o ciclo existe esta possibilidade.

Dessa forma podemos ver que G tem a definição de ciclo que é ser uma trilha fechada, ou seja, se existe o mesmo número de vértices e de arestas pode-se sair de um vértice e depois voltar a ele mesmo sem haver repetição de arestas.

Assim está provado que se um grafo possuir o mesmo número de arestas e de vértices ele possui um ciclo.

⑥ a)

Sabemos por definição que para um grafo ser euleriano ele tem que possuir uma trilha fechada que contenha todos os vértices do grafo.

Dessa forma, sabemos também que para um grafo ser uma trilha fechada o grau de seus vértices tem que possuir valor multiplo de 2, ou seja, a quantidade de arestas se caracteriza com a fórmula de 2k para este tipo de grafo.

Então, suponha que existe um grafo euleriano bipartido G e G possui um número ímpar de arestas, desse modo sabemos que isto não pode acontecer pois, como vimos o número de arestas de qualquer grafo euleriano bipartido tem que ser 2k caracterizando um número par, então G é um absurdo!

Dessa forma, todo grafo euleriano bipartido tem um número par de arestas.

b)

Sabemos que por definição que para um grafo ser euleriano ele tem que possuir uma trilha fechada que contenha todos os vértices do grafo.

Então se existe um certo grafo euleriano G e G possui um número par de vértices, assim para o grafo ser uma trilha fechada precisa que todo vértice tenha grau 2K, pois em cada vértice tem que entrar e sair.

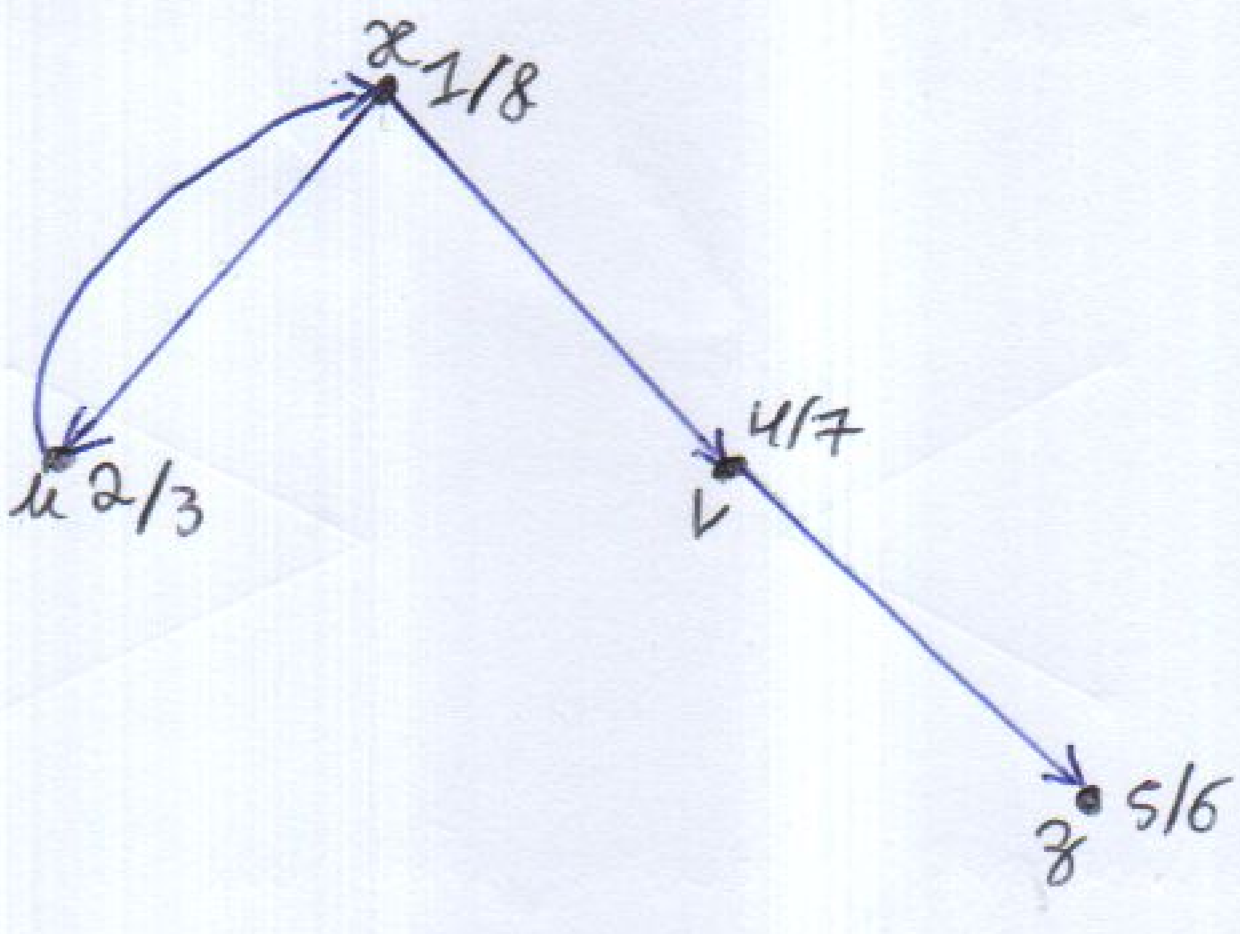
Dessa forma, G possui um número par de arestas pela definição de grafo euleriano que tem o formato da quantidade de arestas ser igual a 2K.

Então, todo grafo euleriano simples com um número par de vértices tem um número par de arestas.

(7)

Suponha um grafo euleriano G, então G é uma trilha fechada com todos os vértices do grafo, ou seja, todos os vértices tem grau 2k como foi visto na questão anterior.
Assim se tem um vértice x de G, então se x tem grau 2 pois, sabemos que G não pode possuir grau ímpar, desse modo, se tiver grau 2 ou multiplos de 2 tem que chegar em x por um vértice e sair por outro.
Dessa forma temos que o vértice x de G existe um par de aresta e, f onde pode-se chegar em x por e e sair por f ou o contrário, então G tem um circuito euleriano no qual e, f aparecem consecutivamente.

(8)



O grafo acima representa o contra exemplo, pois temos que u.d < v.d, porém v não é descendente de u pois para ser descendente de u, v teria que possuir u.d < v.d e u.f > v.f, e neste contra exemplo u.f é menor do que o v.f.
Dessa forma temos que somente o u.d < v.d não garante que v seja descendente de u.

(10)

Uma componente fortemente conexa de um grafo é um subgrafo fortemente conexo maximal, ou seja, dentro de uma componente fortemente existe um caminho indo e voltando de cada vértice, então todos os vértices já estão com a conexão máxima naquela componente.
Dessa forma ao adicionar outra aresta a componentes fortemente conexas o número de componentes irá diminuir, pois irá ligar duas componentes em uma só; já que não tem como adicionar mais arestas a uma única componente.

(11)

Inicialmente vamos entender o algoritmo para componentes fortemente conexas, primeiro passo é feito uma busca em profundidade, segundo passo é feito a transposta do grafo e terceiro e último passo é feito outra busca em profundidade começando pelo vértice com o menor tempo de descoberta e se existir caminho entre todos os vértices nas duas buscas ele é fortemente conexo o grafo.
Já no algoritmo de Bacon não existe o segundo passo e o terceiro ele começa a busca pelo menor tempo de fechamento, ou seja, o algoritmo de Bacon também funciona pois, se no grafo qualquer G existir dois vértices u e v e G ser fortemente conexo, então no algoritmo de Bacon ao fazer a primeira busca existirá um caminho de u para v no caso começando a busca em u, já na segunda parte do algoritmo ele fará uma busca em profundidade porém agora ele começará de v e irá para u pois na segunda busca ele pega pelo menor tempo de fechamento, então se também existe o caminho de v para u G é realmente fortemente conexo, ou seja, ao invés de fazer a transposta e começar a busca pelo mesmo vértice que começou o Bacon viu que bastava começar a segunda busca pelo elemento que fechou primeiro que é o último a ser descoberto e realizar a busca a partir dele.
Assim as duas formas de busca são equivalentes.