

①

p	q	r	$\neg r$	$p \vee q$	$q \wedge \neg r$	$(p \vee q) \wedge (q \wedge \neg r)$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0

Essa fórmula é satisfazível, pois existe valores nesta sentença que tornam ela verdade, ou seja, para uma sentença ser satisfazível ela precisa existir no mínimo uma valoração verdadeira.

② Temos que Cade não será funcionários do IBGE se Rodrigo é um agente censitário supervisor, porém Rodrigo não é um agente censitário supervisor se Viriane não é uma agente censitária municipal, porém temos que, se Helaine é uma recensadora, ou Viriane não é uma agente censitária municipal, ou Cade é um funcionários do IBGE. Sabemos que Cade não é funcionários do IBGE. Então sabemos que se Rodrigo é um agente censitário supervisor, Cade tem que ser funcionários do IBGE, como Cade não é funcionários do IBGE, Rodrigo também não é agente censitário supervisor, então como Rodrigo não é agente censitário supervisor implica que Viriane é uma agente censitária municipal, como Helaine não pode uma recensadora se Viriane for agente censitária municipal e Cade não ser funcionários do IBGE, então, Helaine é uma recensadora.



③ Sim, ver-se abrisse que a conclusão é de fato uma consequência lógica das premissas.

Justificativa:

Para termos um melhor entendimento vamos adotar a primeira premissa com " $R \rightarrow S$ ", a segunda como " $S \rightarrow P$ ", terceira como " $\neg P \vee R$ " e a conclusão " $R \rightarrow S$ ".

Nessa forma, tendo as proposições " R ", " S " e " P ", suponha que a proposição " P " seja falsa, assim, $v(P) = 0$. De $v(\neg P) = 1$, dessa forma, R não poderia ser verdade ou falso, pois na fórmula " $\neg P \vee R$ " o " $\neg P$ " já torna a fórmula verdade por si só.

Nesse modo, como P é falso, então o único valor assumido por " S " que tornaria essa fórmula " $S \rightarrow P$ " verdadeira é $v(S) = 0$, ou seja, " S " ser falso. Por consequência, o valor de " P " nesta fórmula " $P \rightarrow S$ " é falso. Nessa forma, temos que o programador nem lê a literatura técnica nem conhece o idioma inglês.

Suponhamos agora que " P " seja verdade, ou seja, $v(P) = 1$. Nesse modo, na fórmula " $\neg P \vee R$ ", " R ", necessita ser verdade para que essa fórmula se mantenha verdadeira, ou seja, por consequência, na fórmula " $R \rightarrow S$ ", " S " também deve ser verdade, então $v(S) = 1$ a fórmula " $S \rightarrow P$ " também é verdade. Portanto o programador lê a literatura técnica e conhece o idioma inglês.

Nessa forma, concluímos que o programador lê a literatura técnica se e somente se conhece o idioma inglês.

(4) a) $p \rightarrow q \vdash p \rightarrow q \vee r$
 $p \rightarrow q, p \vdash q \vee r$ Teorema da dedução natural

1. $p \rightarrow q$ Premissa
2. p Premissa
3. q Modus ponens 1, 2.
4. $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q) \rightarrow r)$ Instância V_3 .
5. $r \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q) \rightarrow r)$ Modus ponens 4, 2.
6. $r \rightarrow (r \rightarrow (p \vee q) \rightarrow r)$ Modus ponens 5, 3.
7. r Modus ponens 6, 3, 2.
8. $q \rightarrow (q \vee r)$ Instância V_1 .
9. $q \vee r$ Modus ponens 3, 8.

- 1- Premissa inicialmente apresentada;
- 2- Premissa obtida a partir do Teorema da dedução natural, onde $p \rightarrow q \vdash p \rightarrow q \vee r$, se e somente se, $p \rightarrow q, p \vdash q \vee r$;
- 3- Modus ponens aplicado sobre a premissa $p \rightarrow q$ e a premissa p .
- 4- Instância do axioma V_3 .
- 5- Modus ponens aplicado sobre a $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q) \rightarrow r)$ e a premissa p ;
- 6- Modus ponens aplicado sobre a $(r \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q) \rightarrow r))$ e o átomo r .
- 7- Modus ponens aplicado sobre a $r \rightarrow (r \rightarrow (p \vee q) \rightarrow r)$ com o átomo que é a premissa p .
- 8- Instância do axioma V_1 .
- 9- Modus ponens aplicado sobre a $q \rightarrow (q \vee r)$ e o átomo q .



(4) $\neg p \rightarrow q, \neg q \rightarrow p$
 $\neg p \rightarrow q, \neg q \rightarrow p$

Teorema da dedução natural

1. $\neg p \rightarrow q$

Premissas

2. $\neg q$

Premissas

3. $((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow (((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q))$ Instância 1.

4. $V \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q))$

modus ponens 1, 3.

5. $V \rightarrow V \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q)$

modus ponens 2, 4.

6. $\neg q \rightarrow p$

Negação 5.

7. p

modus ponens 2, 6.

1- Premissa inicialmente apresentada;

2- Premissa adquirida a partir do teorema da dedução natural;

3- Instância da axioma 1.

4- Modus ponens aplicado sobre a $((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow (((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q))$ e a premissa $\neg p \rightarrow q$.

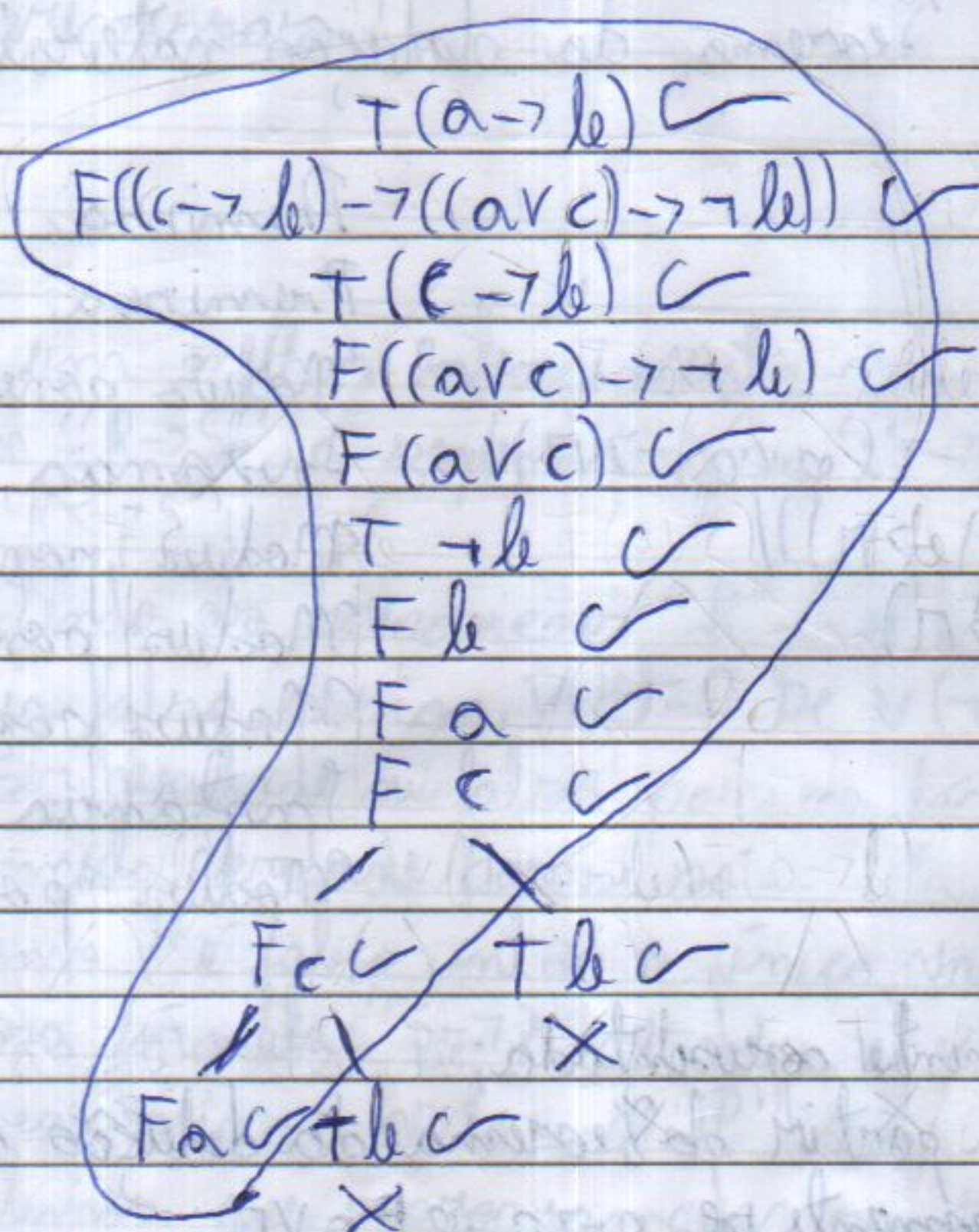
5- Modus ponens aplicado sobre a $V \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q))$ e a premissa V .

6- Retirada da negação da negação de $\neg p \rightarrow q$;

7- Modus ponens aplicado sobre $\neg q \rightarrow p$ e a premissa $\neg q$.



⑤ a) $(a \rightarrow b) \vdash ((c \rightarrow b) \rightarrow ((a \vee c) \rightarrow \neg b))$

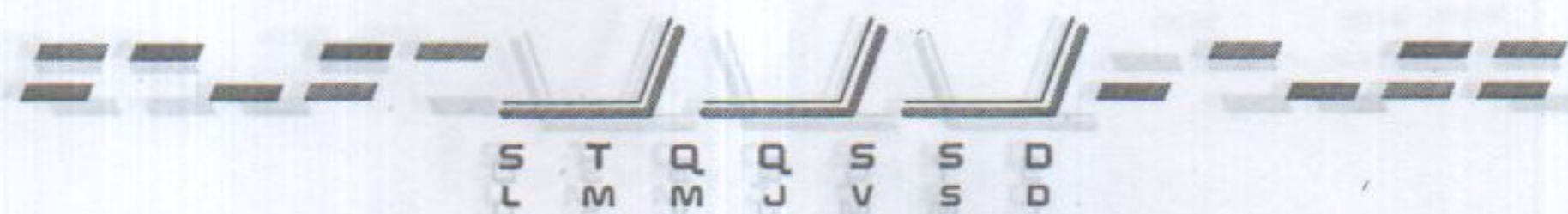


Após a expansão do Tableaux, temos que o ramo destacado ficou aberto. Isso significa que existe pelo menos uma valoração que torna $(a \rightarrow b)$ verdade e torna $((c \rightarrow b) \rightarrow ((a \vee c) \rightarrow \neg b))$ falsa. A valoração identificada no ramo aberto é: $v(a) = v(c) = v(b) = 0$. Com essa valoração v temos que:

$v(a \rightarrow b) = 1$ e $v((c \rightarrow b) \rightarrow ((a \vee c) \rightarrow \neg b)) = 0$. Logo,

$(a \rightarrow b) \not\models ((c \rightarrow b) \rightarrow ((a \vee c) \rightarrow \neg b))$





⑤ $h) ((a \wedge h) \rightarrow c) \vdash ((a \wedge \neg c) \rightarrow \neg h)$

$\top ((a \wedge h) \rightarrow c) \checkmark$

$F ((a \wedge \neg c) \rightarrow \neg h) \checkmark$

$\top (a \wedge \neg c) \checkmark$

$F \neg h \checkmark$

$\top h \checkmark$

$\top a \checkmark$

$\top \neg c \checkmark$

$F c \checkmark$

$\top \neg$

$F(a \wedge h) \checkmark \quad \top c \checkmark$

$\top \neg$

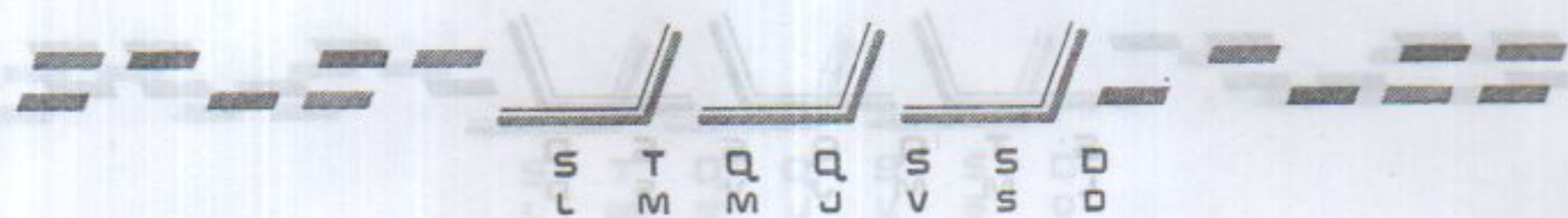
$F a \checkmark \quad F h \checkmark$

$X \quad X$

Depois a expansão de Tabela-se, notamos que todos os ramos foram fechados. Como cada ramo é uma possibilidade de tornar " $((a \wedge h) \rightarrow c)$ " verdade e tornar " $((a \wedge \neg c) \rightarrow \neg h)$ " falso, temos que todas essas possibilidades são inviáveis. Logo, toda valoração que torna " $((a \wedge h) \rightarrow c)$ " verdadeiro necessariamente também torna " $((a \wedge \neg c) \rightarrow \neg h)$ " verdadeiro. Dessa maneira temos:

$((a \wedge h) \rightarrow c) \vdash ((a \wedge \neg c) \rightarrow \neg h)$.





(6a) $\neg a \wedge \neg b \vdash \neg(a \vee b)$

$$\begin{array}{c}
 [\neg a \wedge \neg b] [\neg(a \vee b)]^2 \\
 \hline
 [\neg a]^2 [\neg b]^4 \quad [a]^3 [b]^5 \quad (\neg E_1)^2 (\neg E_2)^3 (VE)^{4,5} \\
 \hline
 \downarrow \quad \downarrow \\
 \neg(a \vee b) \quad (\neg I)^3
 \end{array}$$

Iremos partir a partir da premissa " $\neg a \wedge \neg b$ ", através da Redução Natural é requerida a inferência de " $\neg(a \vee b)$ ".

Inicialmente, foi suposta a hipótese " $[a \vee b]$ " com o intuito de a partir dela tentar realizar a inferência de um absurdo " \perp ". Se esse caso for possível será possível inferir " $\neg(a \vee b)$ ".

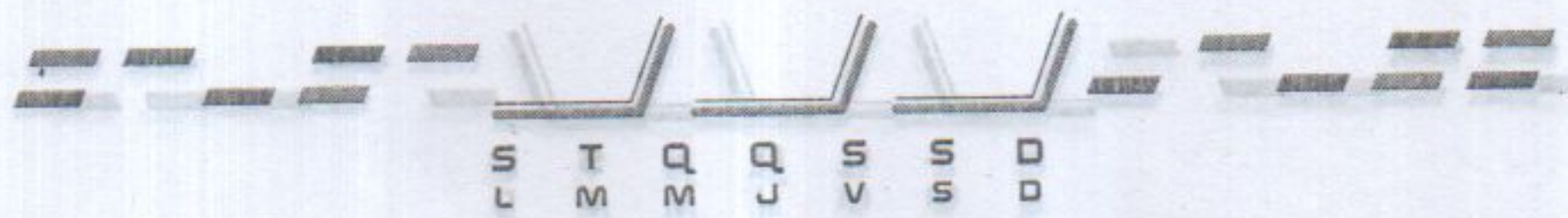
A partir da premissa " $[\neg a \wedge \neg b]$ " tem-se a capacidade de supor o " $[a]$ " e " $[\neg b]$ ".

Dessa forma, temos com hipótese 2 a suposição de " $[a]$ " no sistema. Porém para manter a premissa " $[\neg a \wedge \neg b]$ " verdadeira tem-se que tem também o " $[b]$ ".

Desse modo, temos que a hipótese 3 é a suposição de " $[b]$ " no sistema. Assim, torna a premissa " $[\neg a \wedge \neg b]$ " verdadeira, de acordo com a premissa 2.

Porém, através da suposição de " $[a \vee b]$ " não é capaz de concluir se tem " $[a]$ " ou " $[b]$ ", mas tem-se pelo menos um dos dois que são necessários para chegar ao absurdo.

Desse modo, na hipótese 4 vamos supor o caso de ter-se o " $[a]$ " isso implica em um absurdo, pois como o " $[a]$ " já deveria ser suposto no sistema, ou seja, se tem " $[a]$ " e " $[a]$ " e são válidos isso é uma contradição.



S T Q Q S S D
L M M J V S D

Continuação da (a)

Nessa forma, temos com hipótese S o caso onde se tem "[le]", porém como já temos "[le]" e as duas são válidas isso acarreta uma contradição, chegando assim a um absurdo.

Por seja, se supõe "a", chega a um absurdo e se supõe "le" chega a um absurdo. Dessa forma, chegamos a conclusão de que pode ser inferido um absurdo completo, pois todas as possibilidades geram absurdos.

Assim, conclui-se que ~~se~~ tem " $\neg(a \vee le)$ " quando tem a premissa " $\neg a \wedge \neg le$ ".





6) $a \rightarrow b \vdash (a \vee c) \rightarrow (b \vee c)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{[a \rightarrow b][a]^2 (-\rightarrow E)}{b} \quad \frac{[a \vee c]^2}{[c]^3 (VE)^{2,3}} \\
 \hline
 \frac{b \vee c (VI)}{b \vee c} \quad \frac{b \vee c (VI)}{b \vee c} \\
 \hline
 \frac{b \vee c}{(a \vee c) \rightarrow (b \vee c)} (-\rightarrow I)^2
 \end{array}$$

Primeiro partir a partir da premissa " $a \rightarrow b$ ", e pedir a inferência " $(a \vee c) \rightarrow (b \vee c)$ " através da dedução natural. Vamos começar supondo a hipótese " $[a \vee c]$ " na tentativa de a partir dela inferir " $b \vee c$ ". Se caso seja possível e capaz de inferir " $(a \vee c) \rightarrow (b \vee c)$ ". Na suposição de " $[a \vee c]$ " é imediato concluir se o sistema irá ter " a " ou " c ", porém tem que haver um dos dois. Nessa forma, a hipótese 2 irá ser a suposição de " $[a]$ " no sistema. Através da premissa " $[a \rightarrow b]$ ", assumida como verdade, pode-se concluir que tem " b " no sistema, ou seja, também pode-se concluir a disjunção " $[b \vee c]$ ", pois basta o " b " para tornar a disjunção verdadeira.

Nesse modo, a hipótese 3 será a suposição de " $[c]$ " no sistema, como " c " está no sistema podemos concluir que a disjunção " $[b \vee c]$ " é verdadeira, pois basta o " c " para provar sua veracidade.

Já que supomos " a " e tiramos " $b \vee c$ " e supomos " c ", tiramos " $b \vee c$ ". Também, como o gente tem " $[a \vee c]$ " tem-se que ter pelo menos um dos dois, assim pode-se garantir a inferência de " $b \vee c$ ", já que todas as possibilidades satisfazem e chegam no mesmo resultado. Portanto, se tem " $(a \vee c) \rightarrow (b \vee c)$ " quando tiver a premissa " $a \rightarrow b$ ".