O link para as questões gravadas :
https://drive.google.com/folderview?id=1rZaO20M5_76uaLkWsLpmPJRiDSkHbZCQ

1) Mostre que o produto de quaisquer dois inteiros consecutivos é par.

Prova:

Suponha que existe inteiros consecutivos sendo n e $n+1$, tal que n é par, então existe um inteiro k, tal que $n = 2k$. Desse modo multiplicando $2k.(2k+1)$ temos.

$$4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$$

Desse modo temos $2(2k^2+k)$, com $(2k^2+k) \in \mathbb{Z}$, assim chegamos a conclusão que a multiplicação de dois inteiros consecutivos é um inteiro par.

S T Q Q S S D
L M M J V S D

(2) Seja r um número real positivo. Se r é irracional, então $\sqrt{r}$ é irracional.

$H \rightarrow$ Se r é irracional

$T \rightarrow$ então $\sqrt{r}$ é irracional.

$\sim T \rightarrow$ então $\sqrt{r}$ é racional.

Prova:

Suponha que r é um número irracional logo existe dois inteiros positivos p e q, com $q \neq 0$ tais que $r \neq p/q$. Dessa forma, podemos escrever $\sqrt{r} \neq p^2/q^2$, substituindo p^2 por c e q^2 por d, com c e d sendo inteiros positivos, com $d \neq 0$, logo temos:

$$\sqrt{r} \neq c/d$$

Dessa forma chegando a um absurdo, pois $\sqrt{r}$ para ser um número racional, $\sqrt{r}$ tem que ser igual a uma fração, desse modo com a manipulação algébrica acima chegamos à conclusão de que $\sqrt{r}$ é irracional.

③ Seja n um número inteiro positivo. Se $7n+4$ é par, então n é par.

H → Se $7n+4$ é par

T → então n é par

~H → Se $7n+4$ é ímpar

~T → então n é ímpar

Suponha que n é um inteiro ímpar. Então existe um inteiro k tal que $n = 2k+1$, ou seja, temos:

$$7(2k+1)+4 \Rightarrow 14k+7+4 \Rightarrow 14k+11 \Rightarrow 14k+10+1 \Rightarrow 2\underbrace{(7k+5)}_{\in \mathbb{Z}}+1$$

Logo $7n+4$ é ímpar.

Como a contra posição da original é verdadeira e elas são equivalentes, podemos concluir que "se $7n+4$ é par, então n é par".

4 a) $1+6+11+16+\dots+(5n-4) = \frac{n(5n-3)}{2}$ $n \geq 1$

Prova:

Passo base: Para $n=1$, temos: $\frac{1(5.1-3)}{2} = 1$

Passo indutivo: Suponha que $P(k)$ é verdadeiro para todo $k \in \mathbb{Z}^*_+$, ou seja, $1+6+11+16+\dots+(5k-4) = \frac{k(5k-3)}{2}$

Somando os $k+1$ elementos temos:

$$1+6+11+16+\dots+(5k-4)+(5k+1) = \frac{k(5k-3)}{2} + (5k+1) =$$

$$= \frac{k(5k-3)+(10k+2)}{2} = \frac{(5k-3k)+(10k+2)}{2} = \frac{(5k^2+7k+2)}{2} = \frac{(5k^2+5k)+(2k+2)}{2} =$$

$$= \frac{5k(k+1)+(2k+2)}{2} = \frac{5k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1).(5k+2)}{2}$$

Pelo PIM, temos que $1+6+11+16+\dots+(5n-4) = \frac{n(5n-3)}{2}$

Rascunho: $1+6+11+16+\dots+(5k-4)+(5k+1) = \frac{(k+1)(5(k+1)-3)}{2} = \frac{(k+1)(5k+2)}{2}$

S T Q Q S S D
L M M J V S D

1) u) $2^n < 2^{n+1}$ para todo $n \geq 0$

Prova:

Passo base: Para $n=0$, temos: $2^0 < 2^{0+1} = 1 < 2$.

Passo indutivo: Suponha que $P(k)$ é verdadeiro para todo $k \in \mathbb{Z}^*_+$, ou seja, $2^k < 2^{k+1}$

$$2^k \cdot 2 < 2^{k+1} \cdot 2 \Rightarrow 2^{k+1} < 2^{k+2}$$

Como $2^k < 2^{k+1}$, segue por transitividade que $2^{k+1} < 2^{k+2}$, transitividade: $2^k < 2^{k+1}$ e $2^{k+1} < 2^{k+2}$, logo $2^k < 2^{k+2}$. Logo, pelo P.I.M, temos que $2^n < 2^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*_+$.

Rascunho: $2^{k+1} < 2^{k+2}$

⑤ $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_1 = 3 \\ v_n = 3v_{n-1} - 2v_{n-2}, \text{ se } n \geq 2 \end{cases}$ $\qquad v_n = 2^n + 1$

Prova:

Para $n=0$, temos $V_0 = 2^0+1 = 2$. Logo, $P(0)$ é verdadeira.
Para $n=1$, temos $V_1 = 2^1+1 = 3$. Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Passo indutivo: $P(j) \rightarrow P(k+1)$, $0 \leq j \leq k$, com $k \geq 1$. Que seja, $v_j = 2^j+1$.
Como $k \geq 1$, temos $k+1 \geq 2$ e, pela lei de recorrência, temos que:

$$V(k+1) = 3V_{(k+1)-1} - 2V_{(k+1)-2} \Rightarrow V(k+1) = 3V_k - 2V_{k-1}$$

Mas, por hipótese, $V_k = 2^k+1$ e $V_{k-1} = 2^{k-1}+1$ assim:

$V(k+1) = 3(2^k+1) - 2(2^{k-1}+1) \Rightarrow V(k+1) = 3.2^k+3 - 2.2^{k-1} - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow V(k+1) = 3.2^k+3 - 2^k - 2 \Rightarrow V(k+1) = 3.2^k - 2^k + 1 \Rightarrow V(k+1) = 2^k(3-1)+1 \Rightarrow$

$V(k+1) = 2.2^k + 1 \Rightarrow V(k+1) = 2^{k+1}+1$

Concluimos que $k+1$, é obtido também a partir da formula $V_k = 2^k+1$.

Rascunho: $V(k+1) = 2^{k+1}+1$