# Algoritmos em Grafos
## Conceitos básicos

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

21 de março de 2022

## O que é um grafo?

- Qual o menor custo para cabear uma rede de telefonia fixa de forma que cada telefone seja alcançável a partir de qualquer outro?
- Como podem $n$ ocupações serem preenchidas por $n$ pessoas com o máximo total de utilidade?
- Qual o fluxo máximo por unidade de tempo da fonte ao sumidouro em uma rede de tubos?
- Em que ordem um vendedor deve visitar as cidades para minimizar o tempo de viagem?
- Podemos colorir as regiões de qualquer mapa usando quatro cores de forma que regiões vizinhas recebam cores distintas?

Essas e muitas outras questões práticas envolvem Teoria dos Grafos.

## Problema das Pontes de Königsberg

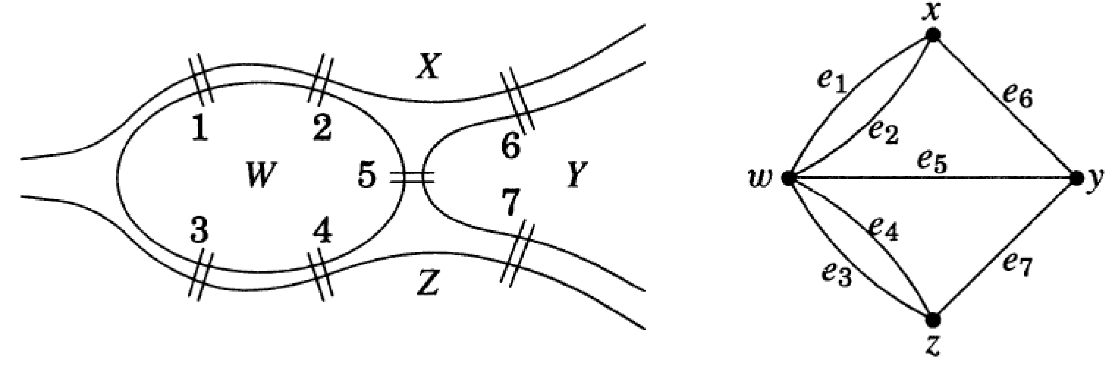


Figura: Fonte: Livro Introduction to Graph Theory - Douglas B. West

# Conceitos básicos

## Definição

- Um grafo $G$ é uma tripla consistindo de:
  - um conjunto de vértices $V(G)$
  - um conjunto de arestas $E(G)$
  - e uma relação que associa cada aresta a dois vértices (não necessariamente distintos) chamados extremidades

## Exemplo

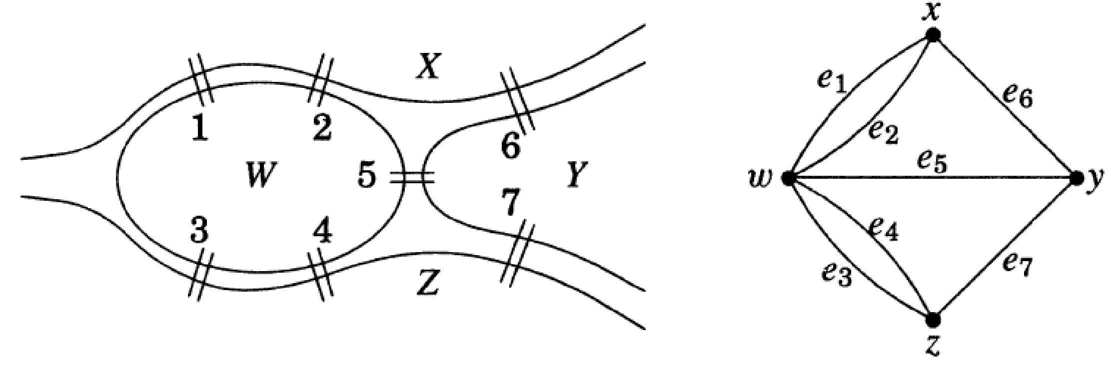


Figura: Fonte: Livro Introduction to Graph Theory - Douglas B. West

### Definição

- Um loop é uma aresta cujas extremidades são iguais
- Arestas múltiplas são arestas que possuem o mesmo par de extremidades
- Um grafo simples é um grafo que não possui *loops* nem arestas múltiplas
- Quando $u$ e $v$ são extremidades de uma arestas, eles são adjacentes e vizinhos

## Definição

- Em muitas aplicações importantes, loops e arestas múltiplas não surgem
- Atenção restrita a grafos simples
- Nesse caso, as arestas são determinadas por suas extremidades
- Podemos ignorar a formalidade da relação que associa as arestas as suas extremidades
- Esse curso enfatiza grafos simples

## Exemplo

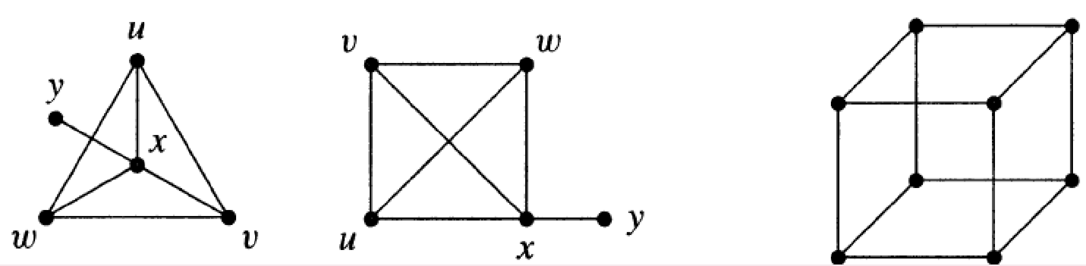


Figura: Fonte: Livro Introduction to Graph Theory - Douglas B. West

# Conceitos básicos

## Grafos finitos

- Um grafo é finito se o seu conjunto de vértices e o seu conjunto de arestas são finitos
- Convencionamos que os grafos mencionados nesse curso são finitos, a menos que seja explicitamente dito o contrário
- Um grafo nulo é um grafo cujos conjunto de vértices e conjunto de arestas são vazios
- Todas as afirmações e exercícios devem ser considerados apenas para grafos com um conjunto não vazio de vértices

# Grafos como modelos

## Aplicações

- Grafos surgem em muitas situações
- Veremos conceitos e tecnologias úteis sobre estrutura de grafos para compreender as aplicações

## Exemplo

- Todo grupo de seis pessoas contém três pessoas que mutualmente se conhecem ou três pessoas que são mutualmente estranhas?
- A relação de "não conhecimento" gera um outro grafo com o conjunto "complementar" de arestas

# Grafos como modelos

## Definição

O complemento $\overline{G}$ de um grafo simples $G$ é o grafo simples com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(\overline{G})$ definido por $uv \in E(\overline{G})$ se e somente se $uv \notin E(G)$.

## Definições relacionadas

- Uma clique em um grafo é um conjunto vértices adjacentes dois a dois
- Um conjunto independente em um grafo é um conjunto de vértices não adjacentes dois a dois

# Grafos como modelos

## Complemento de grafo

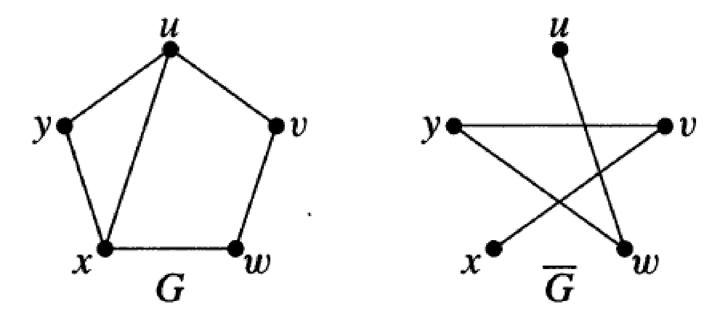


Figura: Fonte: Livro Introduction to Graph Theory - Douglas B. West

## Atribuição de trabalhos e grafos bipartidos

- Temos $m$ trabalhos e $n$ pessoas mas nem todas as pessoas são qualificadas para todos os trabalhos
- Podemos preencher os trabalhos com pessoas qualificadas?
- Modelamos usando um grafo simples $H$ com vértices para pessoas e para trabalhos: trabalho $j$ é adjacente à pessoa $p$ se $p$ está qualificada para $j$
- Cada trabalho pode ser atribuído a exatamente uma pessoa

# Grafos como modelos

## Trabalho x pessoas

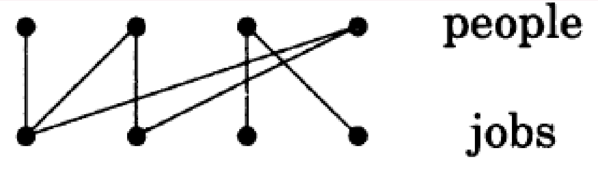


Figura: Fonte: Livro Introduction to Graph Theory - Douglas B. West

## Grafo bipartido

Um grafo $G$ é bipartido se $V(G)$ é a união de dois conjuntos independentes disjuntos chamados partições de $G$

# Grafos como modelos

## Exemplo - Escalonamento e coloração de grafos

- Suponha que queremos escalonar reuniões de grupos em períodos de tempo
- Não podemos atribuir para um mesmo período de tempo dois grupos que possuem membros em comum
- Quantos períodos de tempo precisamos?
- Um vértice para cada grupo e uma aresta entre vértices se os grupos relacionados compartilham membros
- Rotular com cores

# Grafos como modelos

## Definição

- O número cromático de um grafo $G$, denotado por $\chi(G)$, é o número mínimo de cores necessárias em uma coloração tal que vértices adjacentes recebem cores diferentes
- Coloração própria
- Um grafo é $k$-partido se V(G) pode ser expresso como a união de $k$ conjuntos independentes
- Grafos bipartidos são 2-partidos
- Vértices com a mesma cor forma conjuntos independentes
- $\chi(G)$ é o menor número de conjuntos independente necessários para particionar $V(G)$
- Um grafo é $k$-partido se e somente se seu número cromático é no máximo $k$
- O problema mais famoso envolve coloração de mapas

# Grafos como modelos

## Mapas e coloração

- A grosso modo, um mapa é uma partição de um plano em regiões conectadas
- Podemos colorir, de forma própria, as regiões de qualquer mapa utilizando no máximo quatro cores?
- Como modelar mapas para grafos?
- O grafo pode ser desenhado no plano sem cruzamento de arestas
- Tais grafos são planares

# Grafos como modelos

## Rotas em redes

- Podemos modelar uma rede de estradas utilizando grafos
- Modelamos as estradas como arestas e os vértices como interseções entre as estradas
- Podemos atribuir pesos às arestas
- Distância e/ou tempo
- Arestas representam, nesse contexto, conexões físicas
- Como podemos encontrar a menor rota de um ponto $x$ para um ponto $y$?
- Caixeiro viajante: visitar todas as cidades e cada cidade apenas uma vez

## Caminho

- Um caminho é um grafo simples cujos vértices podem ser ordenados tal que dois vértices são adjacentes se e somente se eles são consecutivos na lista
- Um ciclo é um grafo com um número igual de vértices e arestas cujos vértices podem ser posicionados sobre um círculo tal que dois vértices são adjacentes se e somente se eles surgem consecutivamente ao longo do círculo

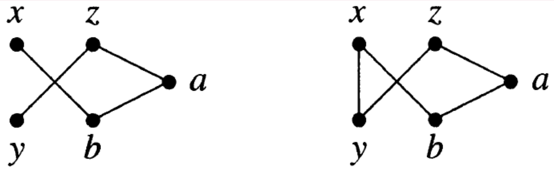


Figura: Fonte: Livro Introduction to Graph Theory - Douglas B. West

## Subgrafo

Um subgrafo de um grafo $G$ é um grafo $H$ tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$ e a associação de extremidades de arestas em $H$ é a mesma que em $G$

Escrevemos $H \subseteq G$ e dizemos que $G$ contém $H$

## Grafo conexo

Um grafo $G$ é dito conexo se cada par de vértices em $G$ pertencem a um caminho. Caso contrário, $G$ é dito desconexo.

# Próxima Aula

## O que vem por aí?

- Conceitos básicos de grafos
- Caminhos, ciclos e trilhas
- Grafos eulerianos
- Grafos hamiltonianos
- Algoritmo de busca em largura
- Algoritmo de busca em profundidade
- Ordenação topológica e conectividade
- Teste 1
- Avaliação 1

# Algoritmos em Grafos
## Conceitos básicos

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

21 de março de 2022