S T Q Q S S D
L M M J V S D

Atividade 2

① $\sum_{i=1}^{n+1} i.2^i = n.2^{n+2}+2, \forall n \geq 0$

Prova: Como n começa em 0, temos $n=0$, então, $P(0) \Rightarrow 0+1.2^{0+1} = 0.2^{0+2}+2 \Rightarrow 1.2^1 = 0.2^2+2 \Rightarrow 2=2$. Dessa forma, P(0) é verdadeira.

Passo indutivo.

Suponha que P(k) é verdadeira, com $k \in \mathbb{Z}_+$ e $k \geq 0$, ou seja, $P(k) = \sum_{i=1}^{k+1} i.2^i = k.2^{k+2}+2$, para $n=k$.

Queremos provar que a formula anterior, também vale para P(k+1) desse modo, temos:

$$2+\dots+(k+1.2^{k+1})+((k+1)+1.2^{k+1+1}) = \underbrace{2+\dots+(k+1.2^{k+1})}_{k.1}+((k+2).k^{k+2}) =$$

$$(k.2^{k+2}+2)+((k+2).2^{k+2}) = (k.2^{k+2}+2)+(k.2^{k+2}+2.2^{k+2}) = k.2^{k+2}+k.2^{k+2}+2.2^{k+2}+2 =$$

$$= 2^{k+2}(k+k+2)+2 = 2^{k+2}(2k+2)+2 = 2^{k+2}.2(k+1)+2 = 2^{k+3}(k+1)+2$$

Logo, pelo P.I.M $\sum_{i=1}^{n+1} i.2^i = n.2^{n+2}+2$ é verdade, $\forall n \geq 0$.

Rascunho: $(k+1).2^{k+3}+2$

② $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 7 \\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \text{ se } n \geq 3 \end{cases}$ $\qquad a_n = 2^{n+1} - 1,\ n \geq 1$

Prova:

Passo base:

Para $n = 1$, temos $a_1 = 2^{1+1} - 1 \Rightarrow a_1 = 4 - 1 \Rightarrow a_1 = 3$. Logo $P(1)$ é verdadeira.
Para $n = 2$, temos $a_2 = 2^{2+1} - 1 \Rightarrow a_2 = 8 - 1 \Rightarrow a_2 = 7$, logo $P(2)$ é verdadeira.

Passo indutivo: $P(j) \to P(k+1)$, $1 \leq j \leq k$, com $k \geq 2$. Ou seja, $a_j = 2^{j+1} - 1$.
Como $k \geq 2$, temos $k+1 \geq 3$ e, pela lei de recorrência, temos que.

$$a_{(k+1)} = 3a_{(k+1)-1} - 2a_{(k+1)-2} \Rightarrow a_{(k+1)} = 3a_k - 2a_{(k-1)}$$

Mas, por hipótese, $a_k = 2^{k+1} - 1$ e $a_{(k-1)} = 2^k - 1$ assim.

$a_{(k+1)} = 3(2^{k+1} - 1) - 2(2^k - 1) \Rightarrow a_{(k+1)} = 3 \cdot 2^{k+1} - 3 - 2 \cdot 2^k + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{(k+1)} = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 2^k - 1 \Rightarrow a_{(k+1)} = 3 \cdot 2^{k+1} - 2^{k+1} - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{(k+1)} = 2^{k+1}(3 - 1) - 1 \Rightarrow a_{(k+1)} = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \Rightarrow a_{(k+1)} = 2^{k+2} - 1$

Concluímos que $k+1$, é obtido também a partir da fórmula $a_n = 2^{n+1} - 1$, ou seja, essa forma serve para todos os elementos da sequência

Rascunho: $a_{(k+1)} = 2^{k+1+1} - 2 \Rightarrow a_{(k+1)} = 2^{k+2} - 1$