S T Q Q S S D
L M M J V S D

Prova

① Em seus estudos a respeito de sistemas lineares você deve ter aprendido antes de solucioná-los, a importância deles dentro da álgebra linear e na solução de problemas nas ciências exatas. A partir desse contexto explique o contexto de criação dos sistemas lineares, destacando a importância deles e explicando como as matrizes os ajudam na visualização e na sua solução dos problemas.

Resposta: Os sistemas lineares foram criados para que se possa resolver um conjunto de várias equações lineares, podendo ter várias incógnitas e várias equações, desse modo as matrizes ajudam os sistemas lineares de modo que organiza os elementos dispondo eles em linhas e colunas fornecendo assim novos métodos de resolução de problemas, pois como uma matriz é disposta de linhas e colunas seus elementos podem ser dispostos facilmente em uma tabela assim facilitando assim como já foi dito, na visualização e na resolução dos problemas.

③ Determine o valor de k, para que o sistema admita solução real.

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 & \cdot 5 \\ 5x - 4y = 0 & \cdot 4 \\ 2x - y = k \end{cases} \qquad \begin{cases} -20x + 15y = 10 \\ 20x - 16y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20x + 15y = 10 \\ 20x - 16y = 0 \end{cases}$$

$$0 - 1y = 10$$

$$\boxed{y = -10}$$

$$5x - 4(-10) = 0$$

$$5x + 40 = 0$$

$$5x = -40$$

$$\boxed{x = \frac{-40}{5} = -8}$$

$$2(-8) - (-10) = k$$

$$-16 + 10 = k$$

$$\boxed{k = -6}$$

(4) Considere o seguinte sistema linear na variáveis x, y e z.

$$x - y + 2z = 3$$
$$2x - y + z = k$$
$$3x + y - kz = 9$$

a) Existe algum valor de k que faça o sistema linear acima não possuir solução? Justifique.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & k \\ 3 & 1 & -k & 9 \end{bmatrix} L2 = -2L1 + L2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & k-6 \\ 3 & 1 & -k & 9 \end{bmatrix} L3 = L3 - 3L1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & k-6 \\ 0 & 4 & -k6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$L3 = -4L2 + L3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & k-6 \\ 0 & 0 & -k+6 & 24k \end{bmatrix} \qquad -k+6 = 0 \Rightarrow -k = -6\,(-1) \Rightarrow \boxed{k = 6}$$

Para que o sistema não haja solução a última linha pertencente a matriz tem que zerar os termos iniciais e o último deve possuir um valor qualquer. Desse modo, -k+6, tem que obrigatoriamente ser igual a 0, resolvendo essa equação tem-se que k é igual a 6 satisfazendo assim a condição anterior.

b) Para que valores de K o sistema acima possui solução única? Justifique.

S T Q Q S S D
L M M J V S D

Resposta (1) b)

$-k+6=1 \Rightarrow -k=-5\,(-1) \Rightarrow k=5$

K=5, pois para que o sistema tenha apenas uma única solução tem que haver na sua última linha e o penúltimo número tem que ser igual a 1 e o último valor será um número real qualquer, sendo que os demais elementos da linha devem ser zero. Além da matriz ser organizada em forma de escada.

c) É possível que (2, 3, 1) seja uma solução desse sistema para algum valor de k?

Não é possível pois 2, 3 e 1 não vale para todas as equações do sistema sendo assim, não pode ser solução para nenhum valor de k.

d) Escolha um dos valores válidos de K e calcule o determinante da matriz dos coeficientes usando os métodos de Sarrus e o teorema de Laplace.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{matrix} \quad (-9-3+4)-(-6+1-18) = -8+23 = 15$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \quad D_{12} = 18-3 \Rightarrow D_{12} = 15$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \quad D_{22} = 9-6 \Rightarrow D_{22} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad D_{32} = 1-4 \Rightarrow D_{32} = -4$$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 15 \Rightarrow A_{12} = -1 \cdot 15 \Rightarrow A_{12} = -15$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 \Rightarrow A_{22} = 1 \cdot 3 \Rightarrow A_{22} = 3$

$A_{32} = (1)^{3+2} \cdot -4 \Rightarrow A_{32} = 1 \cdot -4 \Rightarrow A_{32} = -4$

$\det = (-1 \cdot -15) + (-1 \cdot 3) + (1 \cdot -4)$

$\det = 15 - 3 - 4$

$\det = 8$

S T Q Q S S D
L M M J V S D

2) Calcule a Matriz Inversa da matriz que foi utilizada no item anterior.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a-d+2g & b-e+2h & c-f+2i \\ 2a-d+g & 2b-e+h & 2c-f+i \\ 3a+d+9g & 3b-e+9h & 3c+f+9i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a-d+2g=1$ $\quad a=d-2g+1 \Rightarrow a=4-4+1 \Rightarrow \boxed{a=1}$

$2a-d+g=0$ $\quad 2(d-2g+1)-d+g=0 \Rightarrow 2d-4g+2-d+g=0 \Rightarrow d-3g+2 \Rightarrow$

$3a+d+9g=0$ $\quad \Rightarrow d=3g-2 \Rightarrow d=3.2-2 \Rightarrow \boxed{d=4}$

$3g-2-2g+1=1 \Rightarrow g-1=1 \Rightarrow \boxed{g=2}$

$b-e+2h=0$ $\quad b=e-2h \Rightarrow b=-2+2 \Rightarrow \boxed{b=0}$

$2b-e+h=1$ $\quad 2(e-2h)-e+h=1 \Rightarrow 2e-4h-e+h=1 \Rightarrow e-3h=1$

$3b-e+9h=0$ $\quad e=3h+1 \Rightarrow e=-3+1 \Rightarrow \boxed{e=-2}$

$\cancel{3h}+1-\cancel{3h}+1+2h=0 \Rightarrow 2h+2=0 \Rightarrow \boxed{h=-1}$

$c-f+2i=0$ $\quad c=f-2i \Rightarrow \boxed{c=-\frac{6}{16}+1/4-4/16}$

$2c-f+2i=0$ $\quad 3(f-2i)+f+9i=1 \Rightarrow 3f-6i+f+9i=1 \Rightarrow 4f+3i=1 \Rightarrow$

$3c+f+9i=1$ $\quad f=\frac{-3i+1}{4} \Rightarrow \boxed{f=\frac{-\frac{6}{16}+1}{4}}$

$\frac{-3i+1}{4}-2i-\frac{3i+1}{4}+2i=0 \Rightarrow \frac{-3i+1-8i}{4}-\left(\frac{-3i+1+8i}{4}\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-11i+1}{4}-\left(\frac{5i+1}{4}\right)=0 \Rightarrow \frac{-11i+1}{4}-\frac{5i+1}{4}=0 \Rightarrow -11i+1-5i+1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -16i=-2 \Rightarrow \boxed{i=\frac{2}{16}}$