Consequência Lógica

Lógica para computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

21 de maio de 2021

[0]Slides baseados no livro Lógica para Ciência da Computação[1].

[1]DE SOUZA, JOÃO NUNES. Lógica para ciência da computação. Elsevier Brasil, 2008.

Introdução

Quando podemos dizer que uma fórmula é consequência de outra fórmula ou de um conjunto de fórmulas?

- Este é um dos temas mais estudados da lógica
- Diferentes respostas a essa pergunta podem gerar diferentes lógicas
- No caso da lógica proposicional clássica, a resposta é dada em termos de valoração

Consequência lógica

Definição

Dizemos que uma fórmula B é consequência lógica de uma outra fórmula A, representada por $A \vDash B$, se toda valoração que satisfaz A também satisfaz B.

Obs: Note que essa definição permite que B seja satisfeito por valorações que não satisfazem A. Nesse caso, dizemos que A implica logicamente B.

Consequência lógica

- Podemos usar as Tabelas Verdade para verificar a consequência lógica
- Por exemplo, considere a afirmação $(p \vee q) \rightarrow r \vDash p \rightarrow r$
- Para verificar se essa afirmação é verdadeira, construímos simultaneamente as Tabelas Verdade de $(p \vee q) \rightarrow r$ e $p \rightarrow r$
- Nesse caso, vemos que a fórmula $(p \vee q) \rightarrow r$ implica logicamente $p \rightarrow r$, pois toda linha da coluna $p \vee q \rightarrow r$ que contém 1 também contém 1 na coluna $p \rightarrow r$
- Além disso, para p e r falsos e q verdadeiro, temos 1 para p $\rightarrow$ r e 0 para $(p \vee q) \rightarrow r$, o que é permitido pela definição

Consequência lógica

Segundo exemplo

Vamos tentar determinar se $(p \wedge q) \rightarrow r \models p \rightarrow r$ ou não

- Novamente, construímos a tabela verdade simultânea para $(p \wedge q) \rightarrow r$ e para $p \rightarrow r$
- Concluímos que $(p \wedge q) \rightarrow r \not\models p \rightarrow r$ por causa da quinta linha, que satisfaz $(p \wedge q) \rightarrow r$ mas falsifica $p \rightarrow r$
- Além da consequência lógica entre duas fórmulas, podemos estudar quando uma fórmula A é consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ

Consequência lógica

Um conjunto de fórmulas é chamado de teoria, e essa definição nos permite dar um significa preciso para as consequências lógicas de uma teoria

Definição

Dizemos que uma fórmula A é a consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ, representado por $\Gamma \vDash A$, se toda valoração v que satisfaz a todas as fórmulas de Γ também satisfaz A

- Como exemplo da verificação desse tipo de consequência lógica, vamos verificar a validade da regra lógica conhecida por modus ponens, ou seja, $p \to q$,p $\vDash q$.
- Para tanto, construímos a Tabela Verdade
- A única linha que satisfaz simultaneamente $p \to q$ e p é a última, e nesse caso temos também q satisfeita
- Podemos concluir a validade do modus ponens

Nessa altura, surge uma pergunta natural

Qual a relação entre a consequência lógica ($\vDash$) e o conectivo booleano da implicação ($\rightarrow$)?

A resposta para essa pergunta é dada pelo Teorema da Dedução

Consequência Lógica

Teorema da Dedução

Sejam Γ um conjunto de fórmulas e A e B fórmulas. Então

$$\Gamma, A \vDash B \text{ sse } \Gamma \vDash A \rightarrow B$$

Consequência Lógica

Vamos provar as duas partes do "se e somente se" separadamente

Demonstração

- Primeiro, assuma que $\Gamma, A \vDash B$
- Então, pela definição de consequência lógica, toda valoração que satisfaz simultaneamente Γ e A também satisfaz B
- Para mostrar que $\Gamma \vDash A \to B$, considere uma valoração v que satisfaz todas as fórmulas de Γ (notação: $v(\Gamma) = 1$)
- Vamos verificar que $v(A \to B) = 1$
- Para isso, consideramos dois casos:
  - v(A)=1. Nesse caso, como temos $\Gamma, A \vDash B$, temos necessariamente que v(B)=1 e, portanto, $v(A \to B) = 1$
  - v(A)=0. Nesse caso, é imediato que $v(A \to B) = 1$

Portanto, concluímos que $\Gamma \vDash A \to B$

Demonstração

- Vamos assumir agora que $\Gamma \vDash A \to B$, ou seja, toda valoração que satisfaz Γ também satisfaz $A \to B$
- Para mostrar que $\Gamma, A \vDash B$, considere uma valoração v tal que $v(\Gamma) = v(A) = 1$
- Assuma, por contradição, que v(B)=0
- Nesse caso, temos que $v(A \to B) = 0$, o que contradiz $\Gamma \vDash A \to B$
- Logo, $v(B) = 1$ e provamos que $\Gamma, A \vDash B$, como desejado

O teorema de dedução nos diz que $A \to B$ é consequência lógica das hipóteses Γ se, e somente se, ao adicionarmos A às hipóteses, podemos inferir logicamente B. Dessa forma, a noção de implicação lógica e o conectivo implicação estão totalmente relacionados.

Consequência Lógica

Além da consequência lógica, também podemos considerar a equivalência lógica entre duas fórmulas

Definição

Duas fórmulas A e B são logicamente equivalentes, representado por $A \equiv B$, se as valorações que satisfazem A são exatamente as mesmas valorações que satisfazem B. Em outras palavras, $A \equiv B$ se $A \vDash B$ e $B \vDash A$.

Para verificarmos a equivalência lógica de duas fórmulas A e B, construímos uma Tabela Verdade simultânea para A e B e notamos se as colunas de A e B são idênticas.

Equivalência lógica

Exemplo

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$?

Equivalência lógica

Existem várias equivalências notáveis entre fórmulas, dentre as quais destacamos as seguintes

Equivalências notáveis

- $\neg\neg p \equiv p$
- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Equivalência lógica

Ao definirmos a linguagem da lógica proposicional, apresentamos três símbolos binários: $\land, \lor$ e $\rightarrow$. Na realidade, precisamos apenas da negação e de um deles para definir os outros dois. Nesse exemplo, vamos ver como definir $\lor$ e $\rightarrow$ em função de $\land$ e $\neg$

Definição de $\lor$ e $\rightarrow$ em função de $\land$ e $\neg$

- $A \lor B \equiv \neg(\neg A \land \neg B)$;
- $A \rightarrow B \equiv \neg(A \land \neg B)$

Também é possível usar como básicos o par $\lor$ e $\neg$, ou o par $\rightarrow$ e $\neg$ e definir os outros conectivos binários em função deles.

Equivalência lógica

Por fim, podemos definir o conectivo $\leftrightarrow$ da seguinte maneira

Equivalência

$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$

A fórmula $A \leftrightarrow B$ possui a seguinte tabela verdade

Próxima Aula

O que vem por aí?

- Sistemas dedutivos

Consequência Lógica

Lógica para computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

21 de maio de 2021

[0]Slides baseados no livro Lógica para Ciência da Computação[2].
[1]DE SOUZA, JOÃO NUNES. Lógica para ciência da computação. Elsevier Brasil, 2008.