Matemática Discreta

Binômio de Newton

Professora: Lílian de Oliveira Carneiro

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

Junho de 2020

Número Binomial

- Sejam $n > 0$ e k dois inteiros tais que $0 \leq k \leq n$. Chama-se **número binomial** de numerador n e classe k, o inteiro que se indica por $\binom{n}{k}$, e tal que

Número Binomial

- Sejam $n > 0$ e k dois inteiros tais que $0 \leq k \leq n$. Chama-se **número binomial** de numerador n e classe k, o inteiro que se indica por $\binom{n}{k}$, e tal que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Número Binomial

- Sejam $n > 0$ e k dois inteiros tais que $0 \leq k \leq n$. Chama-se **número binomial** de numerador n e classe k, o inteiro que se indica por $\binom{n}{k}$, e tal que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Em particular, para $k = 0$ ou $k = n$, temos:

Número Binomial

- Sejam $n > 0$ e k dois inteiros tais que $0 \leq k \leq n$. Chama-se **número binomial** de numerador n e classe k, o inteiro que se indica por $\binom{n}{k}$, e tal que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Em particular, para $k = 0$ ou $k = n$, temos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Número Binomial

- Sejam $n > 0$ e k dois inteiros tais que $0 \leq k \leq n$. Chama-se **número binomial** de numerador n e classe k, o inteiro que se indica por $\binom{n}{k}$, e tal que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Em particular, para $k = 0$ ou $k = n$, temos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

- **Exemplos**

Número Binomial

- Sejam $n > 0$ e k dois inteiros tais que $0 \leq k \leq n$. Chama-se **número binomial** de numerador n e classe k, o inteiro que se indica por $\binom{n}{k}$, e tal que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Em particular, para $k = 0$ ou $k = n$, temos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

- **Exemplos**

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

Número Binomial

- Sejam $n > 0$ e k dois inteiros tais que $0 \leq k \leq n$. Chama-se **número binomial** de numerador n e classe k, o inteiro que se indica por $\binom{n}{k}$, e tal que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Em particular, para $k = 0$ ou $k = n$, temos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

- **Exemplos**

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

Número Binomial

- Sejam $n > 0$ e k dois inteiros tais que $0 \leq k \leq n$. Chama-se **número binomial** de numerador n e classe k, o inteiro que se indica por $\binom{n}{k}$, e tal que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Em particular, para $k = 0$ ou $k = n$, temos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

- **Exemplos**

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

Números Binomiais Complementares

- **Números binomiais complementares** são dois números binomiais que têm o mesmo numerador e cuja soma das suas classes respectivas é igual ao numerador comum

Números Binomiais Complementares

- **Números binomiais complementares** são dois números binomiais que têm o mesmo numerador e cuja soma das suas classes respectivas é igual ao numerador comum
- **Exemplo.** $\binom{20}{7}$ e $\binom{20}{13}$ são **números binomiais complementares**, pois têm o mesmo numerador 20 e $7 + 13 = 20$

Números Binomiais Complementares

- **Números binomiais complementares** são dois números binomiais que têm o mesmo numerador e cuja soma das suas classes respectivas é igual ao numerador comum
- **Exemplo.** $\binom{20}{7}$ e $\binom{20}{13}$ são **números binomiais complementares**, pois têm o mesmo numerador 20 e $7 + 13 = 20$
- Dois números binomiais complementares são iguais

Números Binomiais Complementares

- **Números binomiais complementares** são dois números binomiais que têm o mesmo numerador e cuja soma das suas classes respectivas é igual ao numerador comum
- **Exemplo.** $\binom{20}{7}$ e $\binom{20}{13}$ são **números binomiais complementares**, pois têm o mesmo numerador 20 e $7 + 13 = 20$
- Dois números binomiais complementares são iguais
    - Exemplo,

Números Binomiais Complementares

- **Números binomiais complementares** são dois números binomiais que têm o mesmo numerador e cuja soma das suas classes respectivas é igual ao numerador comum
- **Exemplo.** $\binom{20}{7}$ e $\binom{20}{13}$ são **números binomiais complementares**, pois têm o mesmo numerador 20 e $7 + 13 = 20$
- Dois números binomiais complementares são iguais
  - Exemplo,
  $$\binom{20}{7} = \binom{20}{13}$$
  - Note que,

Números Binomiais Complementares

- **Números binomiais complementares** são dois números binomiais que têm o mesmo numerador e cuja soma das suas classes respectivas é igual ao numerador comum
- **Exemplo.** $\binom{20}{7}$ e $\binom{20}{13}$ são **números binomiais complementares**, pois têm o mesmo numerador 20 e $7+13=20$
- Dois números binomiais complementares são iguais
  - Exemplo,
  $$\binom{20}{7}=\binom{20}{13}$$
  - Note que,
  $$\binom{20}{7}=\frac{20!}{7!(20-7)!}=\frac{20!}{7!13!}$$

Números Binomiais Complementares

- **Números binomiais complementares** são dois números binomiais que têm o mesmo numerador e cuja soma das suas classes respectivas é igual ao numerador comum
- **Exemplo.** $\binom{20}{7}$ e $\binom{20}{13}$ são **números binomiais complementares**, pois têm o mesmo numerador 20 e $7 + 13 = 20$
- Dois números binomiais complementares são iguais
  - Exemplo,
$$\binom{20}{7} = \binom{20}{13}$$
  - Note que,
$$\binom{20}{7} = \frac{20!}{7!(20-7)!} = \frac{20!}{7!13!}$$

    e

Números Binomiais Complementares

- **Números binomiais complementares** são dois números binomiais que têm o mesmo numerador e cuja soma das suas classes respectivas é igual ao numerador comum
- **Exemplo.** $\binom{20}{7}$ e $\binom{20}{13}$ são **números binomiais complementares**, pois têm o mesmo numerador 20 e $7 + 13 = 20$
- Dois números binomiais complementares são iguais
  - Exemplo,
$$\binom{20}{7} = \binom{20}{13}$$
  - Note que,
$$\binom{20}{7} = \frac{20!}{7!(20-7)!} = \frac{20!}{7!13!}$$
e
$$\binom{20}{13} = \frac{20!}{13!(20-13)!} = \frac{20!}{13!7!}$$

Números Binomiais Consecutivos

- **Números binomiais consecutivos** são dois números binomiais que têm o mesmo numerador e cujas classes respectivas são inteiros consecutivos

Números Binomiais Consecutivos

- **Números binomiais consecutivos** são dois números binomiais que têm o mesmo numerador e cujas classes respectivas são inteiros consecutivos
- **Exemplo.** $\binom{18}{9}$ e $\binom{18}{10}$ são **números binomiais consecutivos**, pois têm o mesmo numerador 18 e suas classes respectivas são os inteiros consecutivos 9 e 10

Teorema Binomial

- O binômio de Newton fornece os coeficientes da expansão de potência das expressões binomiais

Teorema Binomial

- O binômio de Newton fornece os coeficientes da expansão de potência das expressões binomiais
- Uma expressão **binomial** é simplesmente a soma de dois termos, tais como $x + y$

Teorema Binomial

- O binômio de Newton fornece os coeficientes da expansão de potência das expressões binomiais
- Uma expressão **binomial** é simplesmente a soma de dois termos, tais como $x + y$
- **Exemplo.** A expansão $(x + a)^2$ pode ser encontrada usando a razão combinatória em vez de multiplicar os dois termos

Teorema Binomial

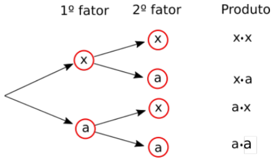
- O binômio de Newton fornece os coeficientes da expansão de potência das expressões binomiais
- Uma expressão **binomial** é simplesmente a soma de dois termos, tais como $x + y$
- **Exemplo.** A expansão $(x+a)^2$ pode ser encontrada usando a razão combinatória em vez de multiplicar os dois termos
  - Quando $(x+a)^2 = (x+a)(x+a)$ é expandido, de cada $(x+a)$ selecionamos exatamente um termo, que poderá ser x ou a, multiplicando-os em seguida

Teorema Binomial

- O binômio de Newton fornece os coeficientes da expansão de potência das expressões binomiais
- Uma expressão **binomial** é simplesmente a soma de dois termos, tais como $x + y$
- **Exemplo.** A expansão $(x + a)^2$ pode ser encontrada usando a razão combinatória em vez de multiplicar os dois termos
    - Quando $(x + a)^2 = (x + a)(x + a)$ é expandido, de cada $(x + a)$ selecionamos exatamente um termo, que poderá ser x ou a, multiplicando-os em seguida
    - Assim, termos da forma x^2, xa, ax e a^2 aparecem

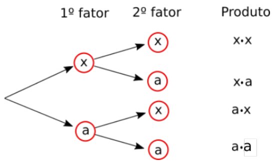
Teorema Binomial

- O binômio de Newton fornece os coeficientes da expansão de potência das expressões binomiais
- Uma expressão **binomial** é simplesmente a soma de dois termos, tais como $x + y$
- **Exemplo.** A expansão $(x + a)^2$ pode ser encontrada usando a razão combinatória em vez de multiplicar os dois termos
  - Quando $(x + a)^2 = (x + a)(x + a)$ é expandido, de cada $(x + a)$ selecionamos exatamente um termo, que poderá ser x ou a, multiplicando-os em seguida
  - Assim, termos da forma x^2, xa, ax e a^2 aparecem



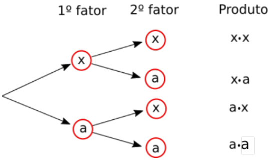
Teorema Binomial

- **Exemplo.** A expansão $(x+a)^2$ pode ser encontrada usando a razão combinatória em vez de multiplicar os dois termos
  - Quando $(x+a)^2 = (x+a)(x+a)$ é expandido, de cada $(x+a)$ selecionamos exatamente um termo, que poderá ser x ou a, multiplicando-os em seguida
  - Assim, termos da forma x^2, xa, ax e a^2 aparecem



Teorema Binomial

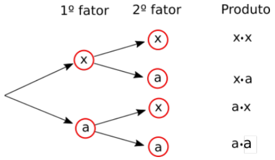
- **Exemplo.** A expansão $(x+a)^2$ pode ser encontrada usando a razão combinatória em vez de multiplicar os dois termos
  - Quando $(x+a)^2 = (x+a)(x+a)$ é expandido, de cada $(x+a)$ selecionamos exatamente um termo, que poderá ser x ou a, multiplicando-os em seguida
  - Assim, termos da forma x^2, xa, ax e a^2 aparecem



  - Logo, $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

Teorema Binomial

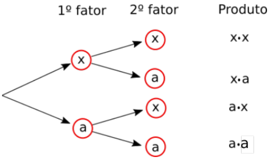
- **Exemplo.** A expansão $(x+a)^2$ pode ser encontrada usando a razão combinatória em vez de multiplicar os dois termos
  - Quando $(x+a)^2 = (x+a)(x+a)$ é expandido, de cada $(x+a)$ selecionamos exatamente um termo, que poderá ser x ou a, multiplicando-os em seguida
  - Assim, termos da forma x^2, xa, ax e a^2 aparecem



  - Logo, $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
  - Será que podemos obter os termos da expansão de $(x+a)^n$ sem recorrer ao diagrama de árvore?

Teorema Binomial

- **Exemplo.** A expansão $(x+a)^2$ pode ser encontrada usando a razão combinatória em vez de multiplicar os dois termos
  - Quando $(x+a)^2 = (x+a)(x+a)$ é expandido, de cada $(x+a)$ selecionamos exatamente um termo, que poderá ser x ou a, multiplicando-os em seguida
  - Assim, termos da forma x^2, xa, ax e a^2 aparecem



  - Logo, $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
  - Será que podemos obter os termos da expansão de $(x+a)^n$ sem recorrer ao diagrama de árvore?
  - A resposta é sim

Teorema Binomial

- Considere $(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a)$

Teorema Binomial

- Considere $(x + a)^3 = (x + a)(x + a)(x + a)$
- Se escolhermos um termo de cada fator, obteremos três termos que devem ser multiplicados entre si

Teorema Binomial

- Considere $(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a)$
- Se escolhermos um termo de cada fator, obteremos três termos que devem ser multiplicados entre si
    - Os tipos de produtos que podemos obter são: x^3, x^2a, xa^2, a^3

Teorema Binomial

- Considere $(x + a)^3 = (x + a)(x + a)(x + a)$
- Se escolhermos um termo de cada fator, obteremos três termos que devem ser multiplicados entre si
  - Os tipos de produtos que podemos obter são: x^3, x^2a, xa^2, a^3
- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:

Teorema Binomial

- Considere $(x + a)^3 = (x + a)(x + a)(x + a)$
- Se escolhermos um termo de cada fator, obteremos três termos que devem ser multiplicados entre si
    - Os tipos de produtos que podemos obter são: x^3, x^2a, xa^2, a^3
- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
    - x^3

Teorema Binomial

- Considere $(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a)$
- Se escolhermos um termo de cada fator, obteremos três termos que devem ser multiplicados entre si
  - Os tipos de produtos que podemos obter são: x^3, x^2a, xa^2, a^3
- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - x^3
    - Só existe uma maneira de obter o produto $x^3 = x \cdot x \cdot x$.

Teorema Binomial

- Considere $(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a)$
- Se escolhermos um termo de cada fator, obteremos três termos que devem ser multiplicados entre si
  - Os tipos de produtos que podemos obter são: x^3, x^2a, xa^2, a^3
- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - x^3
    - Só existe uma maneira de obter o produto $x^3 = x \cdot x \cdot x$. Escolhendo o termo x de cada fator

Teorema Binomial

- Considere $(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a)$
- Se escolhermos um termo de cada fator, obteremos três termos que devem ser multiplicados entre si
  - Os tipos de produtos que podemos obter são: x^3, x^2a, xa^2, a^3
- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - x^3
    - Só existe uma maneira de obter o produto $x^3 = x \cdot x \cdot x$. Escolhendo o termo x de cada fator
    - Logo, o coeficiente de x^3 no desenvolvimento do binômio é 1 ou $\binom{3}{0}$

Teorema Binomial

- Considere $(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a)$
- Se escolhermos um termo de cada fator, obteremos três termos que devem ser multiplicados entre si
  - Os tipos de produtos que podemos obter são: x^3, x^2a, xa^2, a^3
- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - x^3
    - Só existe uma maneira de obter o produto $x^3 = x \cdot x \cdot x$. Escolhendo o termo x de cada fator
    - Logo, o coeficiente de x^3 no desenvolvimento do binômio é 1 ou $\binom{3}{0}$
  - x^2a

Teorema Binomial

- Considere $(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a)$
- Se escolhermos um termo de cada fator, obteremos três termos que devem ser multiplicados entre si
  - Os tipos de produtos que podemos obter são: x^3, x^2a, xa^2, a^3
- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - x^3
    - Só existe uma maneira de obter o produto $x^3 = x \cdot x \cdot x$. Escolhendo o termo x de cada fator
    - Logo, o coeficiente de x^3 no desenvolvimento do binômio é 1 ou $\binom{3}{0}$
  - x^2a
    - A quantidade de produtos do tipo x^2a é igual ao número de sequências de três letras onde uma é igual a a e duas são iguais a x, ou seja,

Teorema Binomial

- Considere $(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a)$
- Se escolhermos um termo de cada fator, obteremos três termos que devem ser multiplicados entre si
  - Os tipos de produtos que podemos obter são: x^3, x^2a, xa^2, a^3
- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - x^3
    - Só existe uma maneira de obter o produto $x^3 = x \cdot x \cdot x$. Escolhendo o termo x de cada fator
    - Logo, o coeficiente de x^3 no desenvolvimento do binômio é 1 ou $\binom{3}{0}$
  - x^2a
    - A quantidade de produtos do tipo x^2a é igual ao número de sequências de três letras onde uma é igual a a e duas são iguais a x, ou seja,

$$P_3^{1,2} = \frac{3!}{1!2!} = \binom{3}{1}$$

Teorema Binomial

- Considere $(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a)$
- Se escolhermos um termo de cada fator, obteremos três termos que devem ser multiplicados entre si
  - Os tipos de produtos que podemos obter são: x^3, x^2a, xa^2, a^3
- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - x^3
    - Só existe uma maneira de obter o produto $x^3 = x \cdot x \cdot x$. Escolhendo o termo x de cada fator
    - Logo, o coeficiente de x^3 no desenvolvimento do binômio é 1 ou $\binom{3}{0}$
  - x^2a
    - A quantidade de produtos do tipo x^2a é igual ao número de sequências de três letras onde uma é igual a a e duas são iguais a x, ou seja,
      $$P_3^{1,2} = \frac{3!}{1!2!} = \binom{3}{1}$$
      Logo, o coeficiente de x^2a é $\binom{3}{1}$

Teorema Binomial

- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - xa^2

Teorema Binomial

- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
    - xa^2
        - A quantidade de produtos do tipo xa^2 é igual ao número de sequências de três letras onde duas são iguais a a e uma é igual a x, ou seja,

Teorema Binomial

- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - xa^2
    - A quantidade de produtos do tipo xa^2 é igual ao número de sequências de três letras onde duas são iguais a a e uma é igual a x, ou seja,
      $$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = \binom{3}{2}$$

Teorema Binomial

- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - xa^2
    - A quantidade de produtos do tipo xa^2 é igual ao número de sequências de três letras onde duas são iguais a a e uma é igual a x, ou seja,
    $$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = \binom{3}{2}$$
    Logo, o coeficiente de xa^2 é $\binom{3}{2}$

Teorema Binomial

- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - xa^2
    - A quantidade de produtos do tipo xa^2 é igual ao número de sequências de três letras onde duas são iguais a a e uma é igual a x, ou seja,
      $$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = \binom{3}{2}$$
      Logo, o coeficiente de xa^2 é $\binom{3}{2}$
  - a^3

Teorema Binomial

- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - xa^2
    - A quantidade de produtos do tipo xa^2 é igual ao número de sequências de três letras onde duas são iguais a a e uma é igual a x, ou seja,
      $$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = \binom{3}{2}$$
      Logo, o coeficiente de xa^2 é $\binom{3}{2}$
  - a^3
    - Só existe uma maneira de obter o produto $a^3 = a \cdot a \cdot a$.

Teorema Binomial

- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - xa^2
    - A quantidade de produtos do tipo xa^2 é igual ao número de sequências de três letras onde duas são iguais a a e uma é igual a x, ou seja,
$$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = \binom{3}{2}$$
Logo, o coeficiente de xa^2 é $\binom{3}{2}$
  - a^3
    - Só existe uma maneira de obter o produto $a^3 = a \cdot a \cdot a$. Escolhendo o termo a de cada fator

Teorema Binomial

- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - xa^2
    - A quantidade de produtos do tipo xa^2 é igual ao número de sequências de três letras onde duas são iguais a a e uma é igual a x, ou seja,
      $$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = \binom{3}{2}$$
      Logo, o coeficiente de xa^2 é $\binom{3}{2}$
  - a^3
    - Só existe uma maneira de obter o produto $a^3 = a \cdot a \cdot a$. Escolhendo o termo a de cada fator
    - Logo, o coeficiente de a^3 no desenvolvimento do binômio é 1 ou $\binom{3}{3}$

Teorema Binomial

- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - xa^2
    - A quantidade de produtos do tipo xa^2 é igual ao número de sequências de três letras onde duas são iguais a a e uma é igual a x, ou seja,
    $$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = \binom{3}{2}$$
    Logo, o coeficiente de xa^2 é $\binom{3}{2}$
  - a^3
    - Só existe uma maneira de obter o produto $a^3 = a \cdot a \cdot a$. Escolhendo o termo a de cada fator
    - Logo, o coeficiente de a^3 no desenvolvimento do binômio é 1 ou $\binom{3}{3}$
    - Em resumo:

Teorema Binomial

- Agora vejamos quantos aparecem de cada tipo:
  - xa^2
    - A quantidade de produtos do tipo xa^2 é igual ao número de sequências de três letras onde duas são iguais a a e uma é igual a x, ou seja,
    $$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = \binom{3}{2}$$
    Logo, o coeficiente de xa^2 é $\binom{3}{2}$
  - a^3
    - Só existe uma maneira de obter o produto $a^3 = a \cdot a \cdot a$. Escolhendo o termo a de cada fator
    - Logo, o coeficiente de a^3 no desenvolvimento do binômio é 1 ou $\binom{3}{3}$
    - Em resumo:
    $$(x+a)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2a + \binom{3}{2}xa^2 + \binom{3}{3}a^3$$

Binômio de Newton

- O desenvolvimento de $(x+a)^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x, a \in \mathbb{R}$ é dado por

Binômio de Newton

- O desenvolvimento de $(x+a)^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x, a \in \mathbb{R}$ é dado por

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^n$$

Binômio de Newton

- O desenvolvimento de $(x+a)^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x, a \in \mathbb{R}$ é dado por

  $$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^n$$

  Ou

Binômio de Newton

- O desenvolvimento de $(x+a)^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x, a \in \mathbb{R}$ é dado por

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^n$$

Ou

$$(x+a)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}a^j$$

Identidades Úteis

- **Corolário 1.** Seja n um inteiro não negativo. Então
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$$
- **Corolário 2.** Seja n um inteiro positivo. Então
$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$$
  - O Corolário 2 implica que
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$
- **Corolário 3.** Seja n um inteiro não negativo. Então
$$\sum_{j=0}^{n} 2^j \binom{n}{j} = 3^n$$

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Identidade de Pascal ou Relação de Stifel

- Seja n e k números inteiros positivos com $n \geq k$. Então

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Identidade de Pascal ou Relação de Stifel

- Seja n e k números inteiros positivos com $n \geq k$. Então
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Identidade de Pascal ou Relação de Stifel

- Seja n e k números inteiros positivos com $n \geq k$. Então
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$
- A Identidade de Pascal, junto com as condições iniciais

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Identidade de Pascal ou Relação de Stifel

- Seja n e k números inteiros positivos com $n \geq k$. Então
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$
- A Identidade de Pascal, junto com as condições iniciais
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
pode ser usada para definir recursivamente coeficientes binomiais

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Identidade de Pascal ou Relação de Stifel

- Seja n e k números inteiros positivos com $n \geq k$. Então
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$
- A Identidade de Pascal, junto com as condições iniciais
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
pode ser usada para definir recursivamente coeficientes binomiais
- Esta definição recursiva é útil ao computar coeficientes binomiais sem recorrer à formula

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Identidade de Pascal ou Relação de Stifel

- Seja n e k números inteiros positivos com $n \geq k$. Então
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$
- A Identidade de Pascal, junto com as condições iniciais
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
pode ser usada para definir recursivamente coeficientes binomiais
- Esta definição recursiva é útil ao computar coeficientes binomiais sem recorrer à formula
- A Identidade de Pascal é base para um arranjo geométrico de coeficientes binomiais em forma de triângulo

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7}$$
$$\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{7}\ \binom{8}{8}$$
$$\cdots$$

Pela identidade de Pascal:

$$\binom{6}{4}+\binom{6}{5}=\binom{7}{5}$$

$$1$$
$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$
$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$
$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$
$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$
$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$
$$\cdots$$

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal

- O triângulo de Pascal é um triângulo infinito formado por números binomiais $\binom{n}{k}$, onde n representa o número da linha e k representa o número da coluna

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal

- O triângulo de Pascal é um triângulo infinito formado por números binomiais $\binom{n}{k}$, onde n representa o número da linha e k representa o número da coluna
- Cada entrada no triângulo, com exceção das iguais a 1, que ocorrem na fronteira do triângulo, é obtida somando duas entradas na linha acima

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal

- O triângulo de Pascal é um triângulo infinito formado por números binomiais $\binom{n}{k}$, onde n representa o número da linha e k representa o número da coluna
- Cada entrada no triângulo, com exceção das iguais a 1, que ocorrem na fronteira do triângulo, é obtida somando duas entradas na linha acima
    - A diretamente acima e a imediatamente à esquerda

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal

- O triângulo de Pascal é um triângulo infinito formado por números binomiais $\binom{n}{k}$, onde n representa o número da linha e k representa o número da coluna
- Cada entrada no triângulo, com exceção das iguais a 1, que ocorrem na fronteira do triângulo, é obtida somando duas entradas na linha acima
  - A diretamente acima e a imediatamente à esquerda
  - **Exemplo.** Na linha 7, tem-se

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal

- O triângulo de Pascal é um triângulo infinito formado por números binomiais $\binom{n}{k}$, onde n representa o número da linha e k representa o número da coluna
- Cada entrada no triângulo, com exceção das iguais a 1, que ocorrem na fronteira do triângulo, é obtida somando duas entradas na linha acima
  - A diretamente acima e a imediatamente à esquerda
  - **Exemplo.** Na linha 7, tem-se
$$\binom{7}{5} = 21 = 6 + 15 = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$$

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal

- O triângulo de Pascal é um triângulo infinito formado por números binomiais $\binom{n}{k}$, onde n representa o número da linha e k representa o número da coluna
- Cada entrada no triângulo, com exceção das iguais a 1, que ocorrem na fronteira do triângulo, é obtida somando duas entradas na linha acima
  - A diretamente acima e a imediatamente à esquerda
  - **Exemplo.** Na linha 7, tem-se
$$\binom{7}{5} = 21 = 6 + 15 = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$$
- Seja t_{mn} o número na $(m+1)$-ésima linha e na $(n+1)$-ésima coluna

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal

- O triângulo de Pascal é um triângulo infinito formado por números binomiais $\binom{n}{k}$, onde n representa o número da linha e k representa o número da coluna
- Cada entrada no triângulo, com exceção das iguais a 1, que ocorrem na fronteira do triângulo, é obtida somando duas entradas na linha acima
  - A diretamente acima e a imediatamente à esquerda
  - **Exemplo.** Na linha 7, tem-se
$$\binom{7}{5} = 21 = 6 + 15 = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$$
- Seja t_{mn} o número na $(m+1)$-ésima linha e na $(n+1)$-ésima coluna
  - Os números no triângulo podem ser obtidos recursivamente da seguinte maneira

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal

- O triângulo de Pascal é um triângulo infinito formado por números binomiais $\binom{n}{k}$, onde n representa o número da linha e k representa o número da coluna
- Cada entrada no triângulo, com exceção das iguais a 1, que ocorrem na fronteira do triângulo, é obtida somando duas entradas na linha acima
  - A diretamente acima e a imediatamente à esquerda
  - **Exemplo.** Na linha 7, tem-se
$$\binom{7}{5} = 21 = 6 + 15 = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$$
- Seja t_{mn} o número na $(m+1)$-ésima linha e na $(n+1)$-ésima coluna
  - Os números no triângulo podem ser obtidos recursivamente da seguinte maneira
$$t_{mn} = t_{m-1,n} + t_{m-1,n-1}$$

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Algumas Identidades Úteis

- **Identidade de Vandermonde** Considere m, n e r números inteiros não negativos com r não excedente a m ou n. Então

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Algumas Identidades Úteis

- **Identidade de Vandermonde** Considere m, n e r números inteiros não negativos com r não excedente a m ou n. Então

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Algumas Identidades Úteis

- **Identidade de Vandermonde** Considere m, n e r números inteiros não negativos com r não excedente a m ou n. Então

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$$

- **Corolário 4.** Se n é um número inteiro não negativo, então

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Algumas Identidades Úteis

- **Identidade de Vandermonde** Considere m, n e r números inteiros não negativos com r não excedente a m ou n. Então

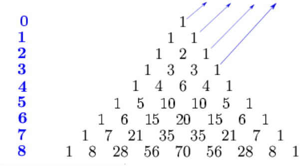
$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$$

- **Corolário 4.** Se n é um número inteiro não negativo, então

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

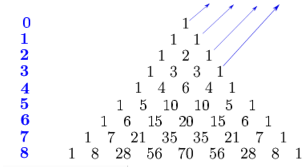
Algumas Identidades Úteis



- A relação de simetria é facilmente notada no triângulo:

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Algumas Identidades Úteis



- A relação de simetria é facilmente notada no triângulo:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Algumas Identidades Úteis

0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

- A relação de simetria é facilmente notada no triângulo:

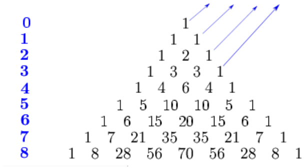
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- A identidade

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Identidade de Pascal e Triângulo de Pascal

Algumas Identidades Úteis



- A relação de simetria é facilmente notada no triângulo:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- A identidade

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

pode ser descoberta somando os números na linha do Triângulo de Pascal

Matemática Discreta

Binômio de Newton

Professora: Lílian de Oliveira Carneiro

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

Junho de 2020