Ciclos hamiltonianos

Algoritmos em grafos

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

30 de março de 2022

O que vimos na aula passada?

- Apresentação da disciplina
- Conceitos básicos
- Caminhos, ciclos e trilhas
- Circuitos eulerianos

Introdução

- Ciclos hamiltonianos foram nomeados por Sir William Hamilton, que descreveu um jogo no grafo do dodecaedro no qual cada jogador especifica um caminho de 5 vértices e o outro jogador deve estendê-lo para um ciclo gerador
- Um subgrafo gerador é um subgrafo que contém todos os vértices do grafo original
- O jogo foi comercializado como "dodecaedro do viajante"

Dodecaedro

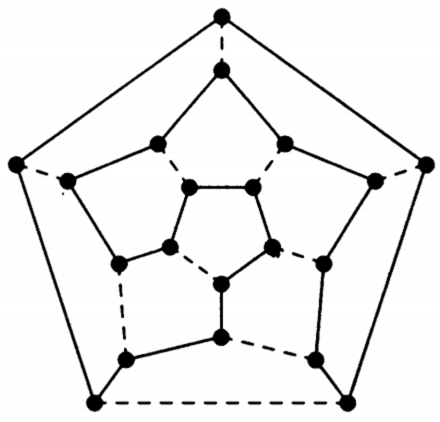

Figura: Fonte: Livro Introduction to graph theory. Upper Saddle River: Prentice hall, 2001 - WEST, Douglas Brent et al.

Ciclos hamiltonianos

Definição

Um grafo hamiltoniano é um grafo com um ciclo gerador, também chamado de ciclo hamiltoniano

História

- Até a década de 70, o interesse em ciclos hamiltonianos era centralizado na sua relação com o Problema das Quatro Cores
- Posteriormente, esse estudo foi estimulado por aplicações práticas e por questões de complexidade
- Nenhuma caracterização facilmente testável é conhecida para grafos hamiltonianos
- Estudaremos condições necessárias e suficientes
- Loops e multiplas arestas são irrelevantes: vamos restringir nossa atenção para grafos simples

Ciclos hamiltonianos

Condições necessárias

- Todo grafo hamiltoniano é 2-conectado pois a remoção de um vértice deixa o subgrafo com um caminho gerador
- Grafos bipartidos sugerem um caminho para fortalecer essa condição necessária
- Só pode existir um ciclo gerador num grafo bipartido se as suas partições tiverem o mesmo tamanho

Proposição

Se G tem um ciclo hamiltoniano, então para cada conjunto não vazio $S \subseteq V$, o grafo $G - S$ tem no máximo $|S|$ componentes

Ciclos hamiltonianos

Demonstração

- Quando deixa uma componente de $G - S$, um ciclo hamiltoniano pode ir apenas para S e a chegada em S deve usar vértices distintos de S
- Portanto S deve ter pelo menos tantos vértices quanto $G - S$ tem de componentes

Demonstração

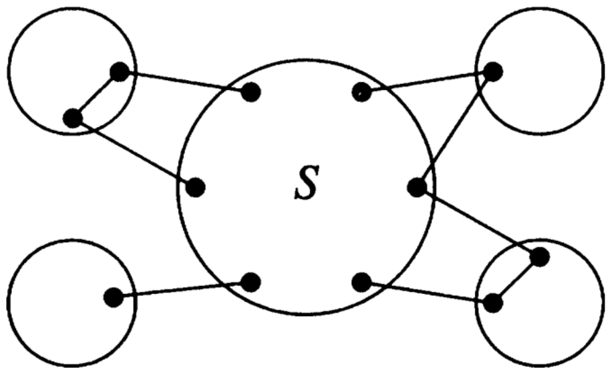

Figura: Fonte: Livro Introduction to graph theory. Upper Saddle River: Prentice hall, 2001 - WEST, Douglas Brent et al.

Ciclos hamiltonianos

Definição

- Tome $C(H)$ denotando o número de componentes conexas de um grafo H
- Então a condição necessária é que $c(G - S) \leq |S|$ para todos $\neq S \subseteq V$
- Essa condição garante que G é $2-$conectado mas não garante o ciclo hamiltoniano

Exemplos

- O grafo da esquerda é bipartido com conjuntos de mesmo tamanho. No entanto, ele falha na condição necessária apresentada na proposição anterior. Portanto não é hamiltoniano.
- O grafo da direita mostra que a condição necessária não é suficiente.

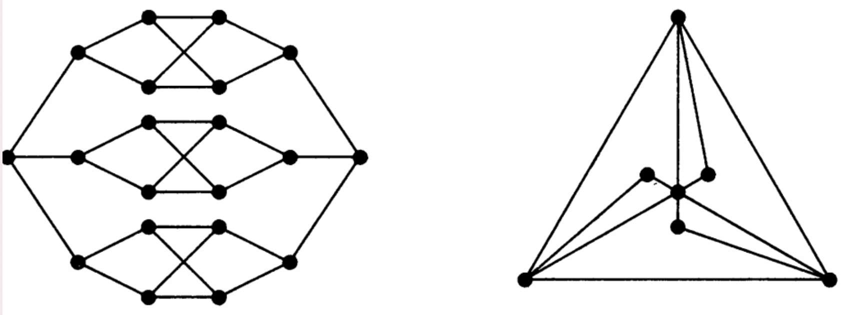

Figura: Fonte: Livro Introduction to graph theory. Upper Saddle River: Prentice hall, 2001 - WEST, Douglas Brent et al.

Ciclos hamiltonianos

Condições suficientes

- O número de arestas necessárias para forçar que um grafo com n vértices seja hamiltoniano é elevado
- A condição mais simples nesse sentido é um limite inferior para o grau mínimo: $\delta(G) \geq (G)/2$ é suficiente
- Vamos observar primeiro que nenhum grau mínimo menor é suficiente
- Duas cliques de ordem $n + 1/2$ compartilhando um vértice têm grau mínimo $n - 1/2$ mas não é hamiltoniano
- Para ordem ímpar, um outro grafo não hamiltoniano com esse grau mínimo é a biclique com partições de tamanho $n - 1/2$ e $n + 1/2$
- Provando que $\delta(G) \geq n(G)/2$ força um ciclo gerador mostra que $n - 1/2$ é o maior valor de grau mínimo entre os grafos não hamiltonianos com n vértices

Exemplos

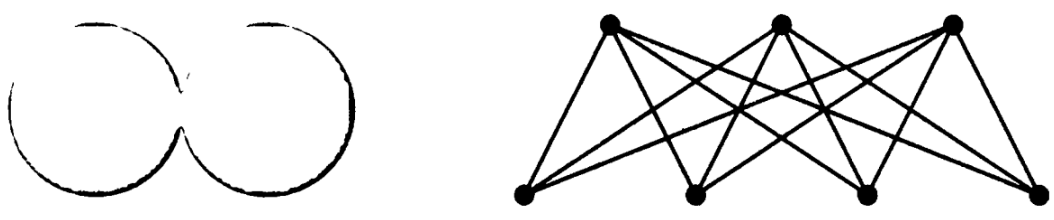

Figura: Fonte: Livro Introduction to graph theory. Upper Saddle River: Prentice hall, 2001 - WEST, Douglas Brent et al.

Ciclos hamiltonianos

Teorema

Se G é um grafo simples com pelo menos três vértices e $\delta(G) \geq n(G)/2$, então G é hamiltoniano.

Ciclos hamiltonianos

Demonstração

- A condição $n(G) \geq 3$ é includa por conta de K_2
- A prova usa contradição e extremalidade
- Se existe um grafo não hamiltoniano satisfazendo as hipóteses, então adicionar arestas não pode reduzir o grau mínimo
- Vamos restringir nossa atenção para grafos não-hamiltonianos maximais, ou seja, para os grafos cuja a inclusão de qualquer aresta entre dois vértices não adjacentes cria um ciclo gerador

Ciclos hamiltonianos

Demonstração

- Quando uv não pertence à $E(G)$, a maximalidade de G implica que G tem um caminho gerador de u para v
- Tome $u = v_1$ e $v = v_n$
- Para provar o teorema, é suficiente fazer uma pequena mudança nesse ciclo para evitar o uso da aresta uv
- Se um vizinho de u segue diretamente um vizinho de v no caminho, tal que uv_{i+1} e vv_i pertencem à $E(G)$, então $(u, v_{i+1, v_{i+2}, \ldots, v, v_i, v_{i-1}, \ldots, v_2})$ é um ciclo gerador

Demonstração

- Ore observou que esse argumento usa $\delta(G) \geq n(G)/2$ somente para mostrar que $d(u) + d(v) \geq n$
- Portanto podemos relaxar essa restrição de grau mínimo para requerer apenas que $d(u) + d(v) \geq n$ sempre que $uv \notin E(G)$
- Também não precisávamos que G fosse um grafo não hamiltoniano maximal, somente que $G + uv$ fosse hamiltoniano

Ciclos hamiltonianos

Lema

Seja G um grafo simples. Se u, v são vértices não adjacentes distintos de G com $d(u) + d(v) \geq n(G)$, então G é hamiltoniano se e somente se $G + uv$ é hamiltoniano.

Demonstração

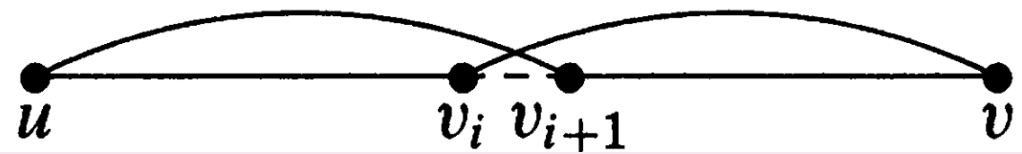

Figura: Fonte: Livro Introduction to graph theory. Upper Saddle River: Prentice hall, 2001 - WEST, Douglas Brent et al.

Demonstração

- Para provar que tais ciclos existem, mostramos que existe um índice comum nos conjuntos S e T definido por $S = i : uv_{i+1} \in E(G)$ e $T = i : vv_i \in E(G)$
- Somando as cardinalidades desses conjuntos temos:

$$|S \cup T| + |S \cap T| = |S| + |T| = d(u) + d(v) \geq n$$

- Nem S e nem T contém o índice n
- Então $|S \cup T| < n$ e portanto $|S \cap T| \geq 1$
- Estabelecemos uma contradição encontrando um ciclo gerador em G
- Portanto não existe grafo não-hamiltoniano (maximal) satisfazendo as hipóteses

Próxima Aula

O que vem por aí?

- Algoritmo de busca em largura
- Algoritmo de busca em profundidade
- Ordenação topológica e conectividade
- Teste 1
- Avaliação 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Ciclos hamiltonianos

Algoritmos em grafos

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

30 de março de 2022