S T Q Q S S D
L M M J V S D

Prova

(1) Em seus estudos a respeito de sistemas lineares você deve ter aprendido antes de solucioná-los, a importância deles dentro da álgebra linear e na solução de problemas nas ciências exatas. A partir desse contexto explique o contexto de criação dos sistemas lineares, destacando a importância deles e explicando como as matrizes os ajudam na visualização e na sua solução dos problemas.

Resposta: Os sistemas lineares foram criados para que se possa resolver um conjunto de várias equações lineares, podendo ter várias incógnitas e várias equações, desse modo as matrizes ajudam os sistemas lineares de modo que organiza os elementos dispondo eles em linhas e colunas fornecendo assim novos métodos de resolução de problemas, pois como uma matriz é disposta de linhas e colunas seus elementos podem ser dispostos facilmente em uma tabela assim facilitando assim como já foi dito, na visualização e na resolução dos problemas.

S T Q Q S S D

② Resolva o sistema abaixo utilizando a forma escalonada da matriz ampliada.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

1) $L_2 - 2.L_1 \rightarrow L_2$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -4 & -22 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

2) $L_3 - (\frac{1}{2})L_1 \rightarrow L_3$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -4 & -22 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

3) $L_4 - 3/2\, L_1 \rightarrow L_4$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -4 & -22 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 5/2 & -7/2 & -25/2 \end{array}\right]$$

$$4)\ L_3-(-3/2)L_2 \Rightarrow L_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & -13/2 & -65/2 \\ 0 & 5/2 & -7/2 & -25/2 \end{array}\right]$$

$$5)\ L_4-(-\tfrac{5}{2})L_2 \Rightarrow L_4 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & -13/2 & -65/2 \\ 0 & 0 & -27/2 & -135/2 \end{array}\right]$$

$$6)\ L_4-(27/13).L_3 \Rightarrow L_4 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & -13/2 & -65/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ -y - 4z = -22 \\ -\frac{13}{2}z = -65/2 \end{cases}$$

$$-\frac{13}{2}z = -\frac{65}{2} \Rightarrow -13z = -\frac{130}{2} \Rightarrow z = -\frac{130}{2}\cdot\frac{1}{-13} \Rightarrow z = \frac{-130}{-26} \Rightarrow z = 5$$

$$-y-4(5) = -22 \Rightarrow -y-20 = -22 \Rightarrow -y = -22+20 \Rightarrow -y = -2(-1) \Rightarrow y = 2$$

$$2x-2+3(5) = 11 \Rightarrow 2x-2+15 = 11 \Rightarrow 2x+13 = 11 \Rightarrow 2x = 11-13 \Rightarrow x = -2/2 \Rightarrow x = -1$$

③ Determine o valor de K, para que o sistema admita solução real.

$$-4x+3y=2$$
$$5x-4y=0$$
$$2x-y=k$$

$$\begin{cases} -4x+3y=2 \\ 5x-4y=0 \\ 2x-y=k \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right]$$

$\det[M_{AMP}]=0$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -4 & 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & -4 & 0 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & k & 2 & -1 \end{array}\right|$$

$$\det[M_{AMP}]=\sum P_i-\sum P_j$$
$$\det[M_{AMP}]=(16k+0-10)-(-16+0+15k)$$
$$\det[M_{AMP}]=(16k-10)-(15k-16)$$
$$\det[M_{AMP}]=k+6$$

$k+6=0 \Rightarrow \boxed{k=-6}$ Para $k=-6$ não temos solução, logo P/$k\neq-6$

$\det[M]=0 \Rightarrow$ S.P.I ou S.I

$\det[M]\neq0 \Rightarrow$ uma solução S.P.D

Para $k+6=0 \Rightarrow k=-6$

1) $L_2-(-\frac{5}{4})L_1 \to L_2$ $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ 2 & -1 & k \end{bmatrix}$

2) $L_3 - (-1/2)L_2 \to L_3$ $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -1/4 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & k+1 \end{bmatrix}$

3) $L_3 - (-2)L_2 \to L_3$ $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -1/4 & 5/2 \\ 0 & 0 & k+6 \end{bmatrix}$

$k+6 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -6}$

$-\frac{1}{4}y = \frac{5}{2} \Rightarrow -1y = \frac{20}{2} \Rightarrow y = \frac{-10}{1} \Rightarrow \boxed{y = -10}$

$-4x + 3(-10) = 2 \Rightarrow -4x - 30 = 2 \Rightarrow x = \frac{32}{-4} \Rightarrow \boxed{x = -8}$

4) Considere o seguinte sistema linear nas variáveis x, y e z.

$$x - y + 2z = 3$$
$$2x - y + z = k$$
$$3x + y - kz = 9$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = k \\ 3x + y - kz = 9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & k \\ 3 & 1 & -k & 9 \end{array}\right]$$

1) $L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & k-6 \\ 3 & 1 & -k & 9 \end{array}\right]$

2) $L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & k-6 \\ 0 & 4 & -k-6 & 0 \end{array}\right]$

3) $L_3 - 4L_2 \rightarrow L_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & k-6 \\ 0 & 0 & -k+6 & -4k+24 \end{array}\right]$

$k = 6 \rightarrow$ S.P.I $\rightarrow x_n = \left\{ \begin{array}{c} 3+z \\ 3z \\ z \end{array} \right\}$

$k \neq 6 \rightarrow$ S.P.D $\rightarrow x_n = \left\{ \begin{array}{c} k+1 \\ k+6 \\ 4 \end{array} \right\}$

a) Existe algum valor de K que faça o sistema linear acima não possuir solução? Justifique

Para $\boxed{K=6}$, o sistema não possui solução, pois todas as demais variáveis são dependentes de uma só, ou seja, x, y e z são interdependentes de z.

b) Para que valores de K o sistema acima possui solução única? Justifique.

Para $K \neq 6$, temos todas as variáveis independentes.

c) É possível que (2, 3, 1) seja uma solução desse sistema para algum valor de K?

$X_m = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, se compararmos com a solução dos S.P.D notamos que os valores $\boxed{\text{não satisfazem}}$ as equações, pois teríamos para tal mais de um valor para K.

d) Escolha um dos valores válidos de K e calcule o determinante da matriz dos coeficientes usando os métodos de Sarrus e o teorema de Laplace.

Para $K=0$, temos:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y - 0 = 9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

M_C

ou podemos usar a fórmula:

$$M_c^{-1} = \frac{M_{adj}}{\det[M_c]} \; ; \; M_{adj} \Rightarrow \text{matriz adjunta.}$$

A matriz adjunta é a transposta da matriz dos cofatores da matriz original.

$$M_{adj} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_c^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 5/6 & -2/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$