Atividade

① a) $V=\mathbb{R}^3=\{(x_1, x_2, x_3); x_i \in \mathbb{R}\}$

$V=\mathbb{R}^n=\{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$

O vetor nulo irá ficar $V=\{0, 0, 0, \dots_n, 0\}$, ou seja, é nulo quando todos os valores são 0 e $-(x_1, x_2, \dots, x_n)$ significa que o vetor é multiplicado por -1 e é a mesma coisa que colocar $-V=-(x_1, x_2, \dots, x_n)$

b) $V=M(2,2)$ $\qquad m=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

O vetor nulo será exatamente $\vec{V}(m(2,2))=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e o vetor oposto vai ser $-\vec{V}(m(2,2))=\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$

② a) $W=\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y=0 \text{ e } z-t=0\}$

1- $\vec{u}=\vec{0}$ E!
2- $u, v \in W$, $u+v \in W$
3- $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in W$, $\alpha\vec{u} \in W$

1- $\vec{u}=\vec{0} \in W$ $\qquad \vec{u}=(0,0,0,0)$

$x+y=0 \Rightarrow 0+0=0$ $\qquad$ e $\qquad z-t=0 \Rightarrow 0-0=0$

2- $\vec{u}, \vec{v} \in W \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} \in W$

$\vec{u}=(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $x_1+y_1=0$ e $z_1-t_1=0$

$\vec{v}=(x_2, y_2, z_2, t_2)$, $x_2+y_2=0$ e $z_2-t_2=0$

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$, $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$
$(z_1 + z_2) - (t_1 + t_2) = 0$

$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0$
$(z_1 - t_1) + (z_2 - t_2) = 0$

$3 - \vec{u} = (x, y, z, t)$ e $\alpha \neq 0$

$\vec{u} = \alpha(x, y, z, t) \Rightarrow \vec{u} = (\underbrace{\alpha x}_{xc}, \underbrace{\alpha y}_{yc}, \underbrace{\alpha z}_{zc}, \underbrace{\alpha t}_{tc})$ $\quad xc + yc = 0$
$zc - tc = 0$

$xc + yc = \alpha x + \alpha y = \alpha(x + y) = 0$

$zc + tc = \alpha z + \alpha t = \alpha(z + t) = 0$

b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0$ e $z = 0\}$

$1 - \vec{u} = \vec{0}$ E!
$2 - \vec{u}, \vec{v} \in W$, $\vec{u} + \vec{v} \in W$
$3 - \alpha \in \mathbb{R}, \vec{u} \in W, \alpha\vec{u} \in W$

$1 - \vec{u} = (x, y, z, t)$

$2x + y - t = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$
$z = 0 \Rightarrow 0 = 0$

$2 - \vec{u} = (x_1, y_1, z_1, t_1)$, $2x_1 + y_1 - t_1 = 0$ e $z_1 = 0$

$\vec{v} = (x_2, y_2, z_2, t_2)$, $2x_2, y_2 - t_2 = 0$ e $z_2 = 0$

$$\vec{u}+\vec{v}=(\underbrace{x_1+x_2}_{x_c},\underbrace{y_1+y_2}_{y_c},\underbrace{z_1+z_2}_{z_c},\underbrace{t_1+t_2}_{t_c}) \; ; \; 2x_c+y_c-t_c=0 \text{ e } z_c=0$$

$$2x_c+y_c-t_c=2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(t_1+t_2)=$$

$$=2x_1+2x_2+y_1+y_2-t_1-t_2=(2x_1+y_1-t_1)+(2x_2+y_2-t_2)=0$$

$$z_c=z_1+z_2=0+0=0$$

3- $\vec{u}=(x,y,z,t)$ e $\alpha \neq 0$; $2x+y-t=0$ e $z=0$

$$\vec{u}=\alpha(x,y,z,t) \Rightarrow \vec{u}=(\underbrace{\alpha x}_{x_c},\underbrace{\alpha y}_{y_c},\underbrace{\alpha z}_{z_c},\underbrace{\alpha t}_{t_c}) \quad 2x_c+y_c-t_c=0 \quad z_c=0$$

$$2x_c+y_c-t_c=2\alpha x+\alpha y-\alpha t=\alpha(2x+y-t)=\alpha(0)=0$$

$$z_c=\alpha(z)=\alpha(0)=0$$

4 (a,b) e (c,d)

Sendo $u=(a,b)$ e $v=(c,d)$ vetores no plano e sabemos que u e v para eles só serem LI se, e somente se combinarmos por exemplo x e y a ele ficando $x.u+y.v=0$, ou seja, isso implica que $x=y=0$ e caso isso não aconteça eles são linearmente dependentes. Desse modo temos:

$$x(a,b)+y(c,d)=0 \Rightarrow (xa,xb)+(yc,yd)=0 \Rightarrow$$

$$(xa+yc,xb+yd)=0 \Rightarrow xa+yc=0 \text{ e } xb+yd=0$$

Dessa forma teremos o sistema:

$$\begin{cases} xa + yc = 0 \\ xb + yd = 0 \end{cases}$$

Podemos também representar tudo em forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A determinante da matriz desse vetor irá ficar:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \det = ad - bc$$

Assim, quando $ad - bc \neq 0$, teremos que u e v são LI pois teremos uma única solução tendo desse modo $x = y = 0$.
Dessa forma, quando $ad - bc = 0$, teremos que u e v são LD, pois o sistema irá ter infinitas soluções.

5 a) Matrizes diagonais $n \times n$

Como essa é uma matriz simétrica ela pode ser escrita como $V = \{A \in M_{n \times n};\ A = A^T\}$
Dados 2 conjuntos A e B pertencentes a V, tal que, $A = A^T$ e $B = B^T$, ou seja, soma A com B temos:

$$A + B = A^T + B^T = (A+B)^T$$

Portanto A+B pertencem a V pois isso pode ser escrito por qualquer A^T para quaisquer vetores A e B.

Tendo um vetor A pertencente a V e α sendo uma variável real qualquer, temos que A.α ficará:

$$\alpha . A = \alpha . A^{+} (\alpha . A)^{+}$$

ou seja, desse modo temos que α.A pertence a V pois pode ser escrito como A^{+} para quaisquer A e α.

Desse modo, provamos que as matrizes diagonais são espaços vetoriais.

$$D1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & N \end{bmatrix} \qquad D2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & N \end{bmatrix}$$

$$D3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & N \end{bmatrix} \qquad D_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

A dimensão da matriz é dada pelo número de linhas e de coluna, ou seja, como essa matriz é N×N temos que sua dimensão é igual a N.

⑤ b) Matriz escalares $n \times n$.

Como vimos na questão anterior que matrizes simétricas são espaços vetoriais.

Temos que sua base irá ser:

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Como sabemos que todos os elementos da sua diagonal é 1 temos que sua dimensão será igual a 1.

⑤ c) $\left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Tendo $A = \begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} c & c+d \\ c & d \end{bmatrix}$ somando A com B

Temos que: $A + B = \begin{bmatrix} a+c & (a+b)+(c+d) \\ a+c & b+d \end{bmatrix}$, ou seja, essa condição é verdadeira.

Tendo $A = \begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix}$ e d um número real qualquer temos que:

$d.A = \begin{bmatrix} da & d(a+b) \\ da & db \end{bmatrix} \Rightarrow d.A = \begin{bmatrix} da & da+db \\ da & db \end{bmatrix}$

ou seja, essa condição também é verdadeira.

Desse modo temos que: $\begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix}$ é verdadeira pois ela vale para as duas condições.

Temos como base:

$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Essa dimensão irá ser igual a $2(a, b)$

⑤ d) $V = \{(a, a, \cdots, a) \in R^n : a \in R\}$

Temos que u pertence V e que o vetor W também pertence a V, ou seja, $u = (a, a, \cdots, a)$ e $W = (c, c, \cdots, c)$, somando u a W temos que $u+W = (a+c, a+c, \cdots, a+c)$ provando que essa soma existe.

Temos também que $u \in V$ e d é um real qualquer e ao multiplicarmos d por u temos que:

$$d.u = (d.a, d.a, \cdots, d.a)$$

Isso prova que essa multiplicação existe. Logo temos que $V = \{(a, a, \cdots, a) \in R^n : a \in R\}$ é um espaço vetorial.

Temos que sua base irá ser $D_2 = (1, 1, \dots, 1)$, com dimensão igual a 1. (a).

⑤e) $\{(1, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ $W = \{(1, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Temos dois vetores u e v tais que eles pertencem a W, ou seja, $u = (1, a, b)$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $v = (1, c, d)$ onde $c, d \in \mathbb{R}$, somando $u + v$ temos que:

$$u + v = (2, a + c, a + b)$$

Logo temos que essa soma não é verdadeira, pois não pertence a W, ou seja, $\{(1, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ não é um espaço vetorial.

⑤f) a reta $\{(x, x + 3) : x \in \mathbb{R}\}$

Temos que $u = (x, x + 3)$ e que $v = (y, y + 3)$ e que u e v são vetores, somando $u + v$ temos que:

$$u + v = (x + y, x + y + 6)$$

ou seja, não é um espaço vetorial a reta $(x, x + 3)$ pois sua soma com outro vetor é falsa.

⑤g) $\{(a, 2a, 3a) : a \in \mathbb{R}\}$

Temos dois vetores u e v tal que $u = (a, 2a, 3a)$ e $v = (b, 2b, 3b)$ somando $u + v$ temos que:

$$u + v = (a + b, 2(a + b), 3(a + b))$$

ou seja, essa soma é possível.

S T Q Q S S D
L M M J V S D

Temos também que u multiplicado a um α pertencente aos reais ficará:

$$\alpha . u = (\alpha . a, \alpha . 2 . a, \alpha . 3 . a)$$

ou seja, essa multiplicação é possível, desse modo com esses dois passos verdadeiros provamos $\therefore$ $(a, 2a, 3a)$ é um espaço vetorial. Logo sua base será $(1, 2, 3)$ e sua dimensão será igual a $1 (a)$.

(17a) Para que V e W sejam iguais, os dois subespaços devem possuir os mesmos vetores. Desta forma, seus conjuntos geradores devem conseguir gerar a mesma coisa. Já que a linha reduzida à forma escada da Matriz A é representada pela matriz B, então os geradores de W podem ser escritos como combinação linear dos geradores de V. Assim, os geradores de V geram todos os vetores de W. Revertendo as operações, tem-se que os geradores de W também geram todos de V. Portanto, qualquer vetor pertencente a V ou a W pode ser gerado pelos geradores de W ou de V. Assim, conclui-se que os subespaços são iguais.

(17b) Se a matriz está em sua forma escada, então o resultado das equações $K_r^* a_{nr}$ é igual a zero!

Primeiro o vetor não nulo: $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, representando a primeira linha com $a_{11} \neq 0$, tem-se:

$$K_1^* a_{11} = 0 \rightarrow K_1 = 0$$

Sendo K_1, o coeficiente do vetor 1 na combinação linear dos vetores não nulos. Já para o vetor 2, tem-se, de forma análoga ao vetor 1:

$$K_2^* a_{2r} = 0 \rightarrow K_2 = 0$$

Progredindo dessa forma até o último vetor não nulo, conclui-se que todos os coeficientes da combinação linear são nulos. Classificando os vetores dados pelas linhas não nulas das matrizes-linha reduzidas à forma escada como LI (Linearmente Independente).

(29) $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta_1 = \{(-1,1),(1,1)\}$, $\beta_2 = \{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1)\}$ e

$\beta_3 = \{(2,0),(0,2)\}$ bases de ordem R^2.

a) i) $[I]^{\beta_1}_{\beta}$

• $(-1,1) = a(1,0) + b(0,1)$
• $(1,1) = c(1,0) + d(0,1)$

$a=-1$; $b=1$; $c=1$; $d=1$

• $(-1,1) = -1(1,0) + 1(0,1) = (-1,0) + (0,1)$
• $(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) = (1,0) + (0,1)$

$$[I]^{\beta_1}_{\beta} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) $[I]^{\beta}_{\beta_1}$

• $(1,0) = a(-1,1) + b(1,1)$
• $(0,1) = c(-1,1) + d(1,1)$

$a = -1/2$; $b = 1$; $c = 3/2$; $d = 1/2$

S T Q Q S S D
L M M J V S D

- $(1,0) = -1/2(-1,1) + 1/2(1,1) = (1/2,-1/2) + (1/2,1/2)$
- $(0,1) = 1/2(-1,1) + 1/2(1,1) = (-1/2,1/2) + (1/2,1/2)$

$$[I]^{\beta}_{\beta_2} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

iii) $[I]^{\beta}_{\beta_2}$

- $(1,0) = a(\sqrt{3},1) + b(\sqrt{3},-1)$
- $(0,1) = c(\sqrt{3},1) + d(\sqrt{3},-1)$

$a = 1/2\sqrt{3}$; $b = 1/2\sqrt{3}$; $c = 1/2$; $d = -1/2$

- $(1,0) = 1/2\sqrt{3}(\sqrt{3},1) + 1/2\sqrt{3}(\sqrt{3},-1) = (1/2, 1/2\sqrt{3}) + (1/2, -1/2\sqrt{3})$
- $(0,1) = 1/2(\sqrt{3},1) - 1/2(\sqrt{3},-1) = (\sqrt{3}/2, 1/2) + (-\sqrt{3}/2, 1/2)$

$$[I]^{\beta}_{\beta_2} \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{3} & 1/2 \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2 \end{bmatrix}$$

iv) $[I]^{\beta}_{\beta_3}$

- $(1,0) = a(2,0) + b(0,2)$
- $(0,1) = c(2,0) + d(0,2)$

$a) 1/2$; $b = 0$; $c = 0$; $d = 1/2$

- $(1,0) = 1/2(2,0) + 0(2,0) = (1,0) + (0,0)$
- $(0,1) = 0(2,0) + 1/2(0,2) = (0,0) + (0,1)$

$$[I]^{\beta}_{\beta_3} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$