UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

Semântica da Lógica Proposicional

Lógica para Computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

14 de maio de 2021

[0] Slides baseados no livro Lógica para Ciência da Computação[1].

[1] DE SOUZA, JOÃO NUNES. Lógica para ciência da computação. Elsevier Brasil, 2008.

O que vimos na aula passada?

- Introdução
- Subfórmulas
- Complexidade de fórmulas
- Expressando situações reais em lógica proposicional

Semântica

O estudo da semântica da lógica Proposicional clássica consiste em atribuir valores verdade às fórmulas da linguagem. Na lógica clássica, há apenas dois valores verdade: verdadeiro e falso. Representaremos o verdadeiro por 1 e o falso por 0.

Atribuição de valores verdade

- Inicialmente, atribuímos valores verdade para os símbolos proposicionais por meio de uma função de valoração

Definição

Uma valoração proposicional V é uma função $V : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$ que mapeia cada símbolo proposicional em $\mathcal{P}$ em um valor verdade.

Valoração

- Essa valoração apenas diz quais são verdadeiros e quais são falsos
- Em seguida, estendemos a valoração para todas as formas da linguagem da lógica proposicional, de forma a obtermos uma valoração V: $\mathcal{L}_{\mathcal{LP}} \to \{0, 1\}$

Atribuição de valores verdade

- Essa extensão da valoração é feita por indução sobre a estrutura das fórmulas, da seguinte maneira:

$V(\neg A)$	$= 1$	se, e somente se,	$V(A)=0$
$V(A \wedge B)$	$= 1$	sse	$V(A)=1$ e $V(B)=1$
$V(A \vee B)$	$= 1$	sse	$V(A)=1$ ou $V(B)=1$
$V(A \rightarrow B)$	$= 1$	sse	$V(A)=0$ ou $V(B)=1$

Atribuição de valores verdade

- A definição anterior pode ser detalhada da seguinte maneira
- Para atribuirmos um valor verdade a uma fórmula
  - precisamos primeiro atribuir um valor verdade para suas subfórmulas
  - para depois compor o valor verdade da fórmula de acordo com as regras dadas

Atribuição de valores verdade

- Note que o fato de a definição usar "se, e somente se" (abreviado de "sse") tem o efeito de, quando a condição à direita for falsa, inverter o valor verdade
  - Dessa forma, se V(A)=1, então V($\neg$ A)=0
  - Na definição de (A $\vee$ B), o valor verdade será 1 se V(A)=1 ou se V(B)=1 ou se ambos forem 1
  - Similarmente, V(A $\rightarrow$ B) terá valor verdade 1 se V(A)=0 ou V(B)=1 ou ambos
  - E, V(A $\wedge$ B)=0 se V(A)=0 ou V(B)=0 ou ambos

Matriz de conectivos

- Podemos visualizar o valor verdade dos conectivos lógicos de forma mais clara por meio de matrizes de conectivos
- Para ler essas matrizes, procedemos da seguinte maneira
  - Na matriz relativa a $A \wedge B$, vemos que, se A é 0 e B é 0, então $A \wedge B$ também é 0
  - Nas matrizes podemos ver que a única forma de obter o valor verdade 1 para $A \wedge B$ é quando ambos A e B são valores em 1
  - Já na matriz $A \vee B$, vamos que a única forma de obter 0 é quando A e B são valorados em 0
  - Similarmente, na matriz de $A \rightarrow B$, vemos que a única forma de obtermos 0 é quando A é valorado em 1 e B é valorado em 0

Matriz de conectivos

$A \wedge B$

$A \wedge B$	$B=0$	$B=1$
$A=0$	0	0
$A=1$	0	1

$A \vee B$

$A \vee B$	$B=0$	$B=1$
$A=0$	0	1
$A=1$	1	1

Matriz de conectivos

$A \rightarrow B$

$A \rightarrow B$	B=0	B=1
A=0	1	1
A=1	0	1

$\neg$ A

$\neg$ A	
A=0	1
A=1	0

Exemplo: Valoração de fórmulas complexas

- Agora veremos um exemplo de valoração de uma fórmula complexa
- Suponha que temos uma valoração V_1 tal que $V_1(p) = 1$, $V_1(q) = 0$ e $V_1(r) = 1$ e queiramos computar $V_1(A)$, onde A= (p $\vee$ $\neg$ q) $\rightarrow$ (r $\wedge$ $\neg$ q)
- Procedemos inicialmente computando os valores verdade das subfórmulas mais internas, até chegarmos no valor verdade de A

Valoração da fórmula A

$V_1(\neg q) = 1$
$V_1(p \vee \neg q) = 1$
$V_1(r \wedge \neg q) = 1$
$V_1((p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg q)) = 1$

Exemplo: Valoração de fórmulas complexas

Por outro lado, considere agora uma valoração V_2 tal que $V_2(p) = 1$, $V_2(q) = 1$ e $V_2(r) = 1$ e vamos calcular $V_2(A)$, para A como anteriormente. Então:

Valoração da fórmula A

$V_2(\neg q) = 0$
$V_2(p \vee \neg q) = 1$
$V_2(r \wedge \neg q) = 0$
$V_2((p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg q)) = 0$

Valoração de fórmulas complexas

- Ou seja, o valor verdade de uma fórmula pode variar, em geral, de acordo com a valoração de seus átomos
- Pela definição dada, uma valoração atribui um valor verdade a cada um dos infinitos símbolos proposicionais
- No entanto, ao valorarmos uma única fórmula, só temos a necessidade de valorar o seu conjunto de átomos, que é sempre finito
- Dessa forma, se uma fórmula A possui um número N de subfórmulas atômicas e cada valoração pode atribuir 0 ou 1 a cada um desses átomos, temos que pode haver 2^N distintas valorações diferentes para a fórmula A.
- Veremos adiante que existem fórmulas cujo valor verdade não varia com as diferentes valorações

Próxima Aula

O que vem por aí?

- Satisfazibilidade
- Validade
- Tabelas verdade

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

Semântica da Lógica Proposicional

Lógica para Computação

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

14 de maio de 2021

[0]Slides baseados no livro Lógica para Ciência da Computação[2].

[1]DE SOUZA, JOÃO NUNES. Lógica para ciência da computação. Elsevier Brasil, 2008.