UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

# Circuitos eulerianos

## Algoritmos em grafos

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

28 de março de 2022

# O que vimos na aula passada?

- Apresentação da disciplina
- Conceitos básicos
- Caminhos, ciclos e trilhas

## Introdução

- Retornamos a nossa análise para o Problema das Pontes de Königsberg
- Objetivo: trilha fechada contendo todos as arestas do grafo
- Uma condição necessária para a existência de tal trilha é que todos os vértices tenham grau par
- Também é necessário que todas as componentes pertençam a uma mesma componente do grafo
- Leonardo Euler determinou que essas condições são também suficientes
- Em honra a sua contribuição, associamos o seu nome a tais grafos

## Problema das Pontes de Königsberg

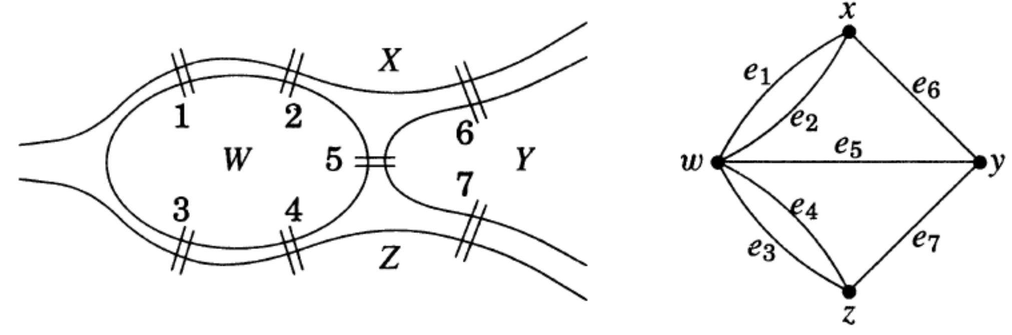


Figura: Fonte: Livro Introduction to graph theory. Upper Saddle River: Prentice hall, 2001 - WEST, Douglas Brent et al.

# Circuitos eulerianos

## Definição

Um grafo é Euleriano se ele tem uma trilha fechada contendo todas as arestas.

## mais definições

- Chamamos uma trilha fechada de circuito quando nós não especificamos o primeiro vértice mas mantemos a lista em uma ordem cíclica
- Um circuito euleriano ou uma trilha euleriana em um grafo é um circuito ou trilha contendo todas as arestas
- Um grafo par é um grafo que todos os vértices têm grau par
- Um vértice é ímpar (par) quando seu grau é ímpar (par)

# Circuitos eulerianos

## Lema

Se todo vértice de um grafo $G$ tem grau pelo menos 2, então $G$ contém um ciclo.

## Demonstração

- Seja $u$ uma extremidade de um caminho maximal $P$ em $G$
- Um caminho maximal $P$ em um grafo $G$ é um caminho $P$ que não está contido em um caminho maior em $G$
- Como $P$ não pode ser estendido, todo vizinho de $u$ deve ser um vértice de $P$
- Como $u$ tem grau pelo menos 2, ele tem um vizinho $v$ em $V(P)$ por uma aresta que não está em $P$
- Essa aresta de $u$ para $v$ completa o ciclo com a porção do caminho $P$ que começa em $u$ e termina em $v$

## Demonstração

## Demonstração

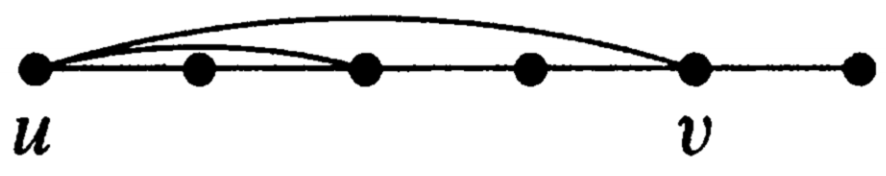


Figura: Fonte: Livro Introduction to graph theory. Upper Saddle River: Prentice hall, 2001 - WEST, Douglas Brent et al.

# Circuitos eulerianos

## Teorema

Um grafo $G$ é euleriano se e somnete se ele tem no máximo uma componente não trivial e todos os seus vértices têm grau par.

## Demonstração

- (Ida) Suponha que $G$ tem um circuito euleriano $C$
- Cada passagem de $C$ por um vértice, usa duas arestas incidentes sobre esse vértice
- A primeira aresta é pareada com a última aresta no primeiro vértice
- Portanto todo vértice tem grau par
- Duas arestas estão numa mesma trilha somente se estão numa mesma componente

# Circuitos eulerianos

## Teorema

Um grafo $G$ é euleriano se e somente se ele tem no máximo uma componente não trivial e todos os seus vértices têm grau par.

## Demonstração

- (Volta) Assuma que nó temos as condições anunciadas
- Vamos obter um circuito euleriano usando indução no número de arestas $m$
- Caso base: m=0. Temos uma trilha fechada consistindo em um vértice
- Hipótese de indução: m>0. Como graus par, cada vértice em uma componente não trivial de $G$ tem grau pelo menos 2. Pelo lema anterior, a componente não trivial tem um ciclo $C$
- Passo da indução: Seja $G'$ o grafo obtido de $G$ removendo $E(C)$.

## Teorema

Um grafo $G$ é euleriano se e somente se ele tem no máximo uma componente não trivial e todos os seus vértices têm grau par.

## Demonstração

- Passo da indução: Seja $G'$ o grafo obtido de $G$ removendo $E(C)$.
- Como $C$ tem 0 ou 2 arestas em cada vértice, cada componente de $G'$ é também um grafo par
- Como cada componente é conexa e tem menos que $m$ arestas, podemos aplicar a hipótese de indução para concluir que cada componente de $G'$ tem um circuito euleriano
- Para combinar esses circuitos circuito euleriano de $G$, atravessamos $C$
- Quando uma componente de $G'$ é alcançada pela primeira vez, desviamos por um circuito euleriano daquela componente
- O circuito termina no vértice em que começamos o desvio
- Quando completamos a travessia de $C$, teremos completado um circuito euleriano de $G$

## Demonstração

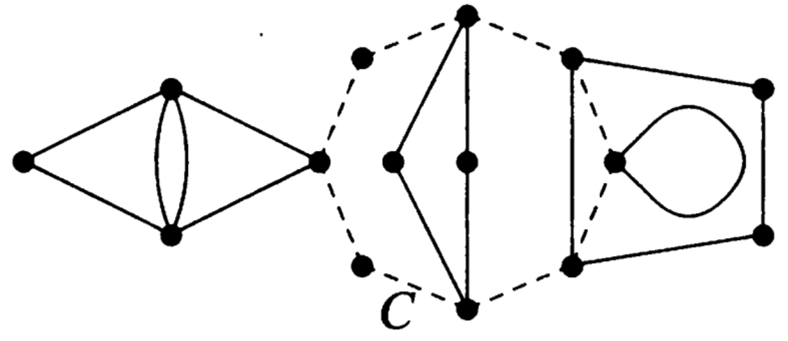


Figura: Fonte: Livro Introduction to graph theory. Upper Saddle River: Prentice hall, 2001 - WEST, Douglas Brent et al.

# Circuitos eulerianos

**Proposição**

Todo grafo par pode ser decomposto em ciclos.

- Na prova do teorema anterior, notamos que todo grafo não trivial par tem um ciclo e que a remoção desse ciclo mantém o grafo par
- Então essa proposição segue por indução no número de arestas

# Circuitos eulerianos

## Proposição

Se $G$ é um grafo simples no qual todo vértice tem grau pelo menos $k$, então $G$ contém um caminho de comprimento pelo menos $k$. Se $k \geq 2$, então $G$ também contém um ciclo de comprimento pelo menos $k+1$.

## Demonstração

- Seja $u$ uma extremidade de um caminho maximal $P$ em $G$
- Um caminho maximal $P$ em um grafo $G$ é um caminho $P$ que não está contido em um caminho maior em $G$
- Como $P$ não pode ser estendido, todo vizinho de $u$ está em $V(P)$
- Como $u$ tem pelo menos $k$ vizinhos e $G$ é simples, $P$ portanto tem pelo menos $k$ vértices além de $u$ e tem comprimento pelo menos $k$
- Se $k > 2$, então a aresta de $u$ para o seu vizinho mais distante $v$ em $P$, completa o ciclo

## Proposição

Todo grafo com uma aresta de não loop tem pelo menos dois vértices que não são de corte.

## Demonstração

- Se $u$ é uma extremidade de um caminho maximal $P$ em $G$, então os vizinhos de $u$ estão em $P$
- Como $P - u$ é conexo em $G - u$, então $u$ não é um vértice de corte
- $P$ tem duas extremidades

# Circuitos eulerianos

## Lema

Em um grafo par, toda trilha maximal é fechada

## Demonstração

- Seja $T$ uma trilha maximal em um grafo par
- Toda passagem de $T$ por um vértice $v$ usa duas arestas de $v$, nenhuma repetida
- Quando $T$ chega em um vértice $v$ que não seja o inicial, $T$ utilizou um número ímpar de arestas incidentes sobre $v$
- Como $v$ tem grau par, então existe pelo menos uma aresta pela qual $T$ pode continuar
- $T$ só pode terminar em seu vértice inicial
- Em um grafo finito, $T$ deve terminar
- Concluímos que a trilha precisa ser fechada

# Circuitos eulerianos

## Teorema

Para um grafo conexo não trivial com exatamente $2k$ vértices ímpares, o número mínimo de trilhas que o decompõe é máximo $\{1, k\}$.

## Ideia da demonstração

- Uma trilha contribui com grau par para todo vértice, exceto para as extremidades de uma trilha não fechada
- Portanto a partição das arestas em trilhas deve ter algumas trilhas não fechadas terminando em cada vértice ímpar
- Como cada trilha tem apenas duas extremidades, devemos usar pelo menos $k$ trilhas para satisfazer os $2k$ vértices ímpares
- Quando $G$ tem uma aresta, por exemplo, uma trilha é suficiente
- Quando $k = 0$, uma trilha é suficiente pois teremos um circuito euleriano

## Ideia da demonstração

- Falta provar que $k$ trilhas é suficiente quando $k > 0$
- Dado um grafo $G$ com essas condições, iremos emparelhar os vértices ímpares e formar um grafo $G'$ adicionando uma aresta para cada par de vértices ímpares que foram emparelhados
- O grafo resultante é conexo e par, então possui um circuito euleriano $C$
- Como nós percorremos $C$ em $G'$, começamos uma nova trilha em $G$ toda vez que percorremos uma aresta de $G' - E(G)$
- Isso garante $k$ decompondo $G$

## Ideia da demonstração


Figura: Fonte: Livro Introduction to graph theory. Upper Saddle River: Prentice hall, 2001 - WEST, Douglas Brent et al.

# Próxima Aula

## O que vem por aí?

- Grafos hamiltonianos
- Algoritmo de busca em largura
- Algoritmo de busca em profundidade
- Ordenação topológica e conectividade
- Teste 1
- Avaliação 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS

# Circuitos eulerianos

## Algoritmos em grafos

Professor: Rennan Dantas

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

28 de março de 2022