UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - CAMPUS CRATEÚS
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO E SISTEMAS DE INFORMAÇÃO

Aluno(a): ______________________________
CRT0390 - Algoritmos em grafos

Matrícula:______________
Período: 2022.1
Prof. Rennan Dantas

Nota:______

3^a. ETAPA

Instruções para resolução da lista:
1 – A lista deve ser respondida de forma manuscrita, incluindo os grafos.
2 – Use preferencialmente caneta esferográfica de tinta azul ou preta para escrever as respostas. Certifique-se de que as suas respostas estão legíveis.
3 – Gere um PDF único com todas as suas respostas. Envie esse arquivo gerado pelo SIGAA.
4 - Justifique todas as suas respostas.

1. Considere o algoritmo de Floyd-Warshall apresentado em aula. Modifique o pseudo-código do algoritmo para que o mesmo obtenha também o caminho mínimo (sequência de vértices) entre dois vértices i e j quaisquer. Repare que você deve criar e manter uma estrutura de dados auxiliar para obter esta informação, similar è utilizada pelo algoritmo de Dijkstra.

2. Decida se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, dê uma explicação. Se for falsa, dê um contra-exemplo. Seja $G = (V, E)$ uma rede de fluxos qualquer com vértice de origem s e destino t, e capacidades c_e inteiras e positivas associadas a cada aresta $e \in E$, e seja (A, B) um corte $s - t$ mínimo desta rede de fluxos. Suponha agora que adicionamos uma unidade às capacidades de todas as arestas da rede. Temos então que o corte (A, B) continua a ser um corte $s - t$ mínimo desta nova rede de fluxos, cujas capacidades foram aumentadas em uma unidade.

3. Estenda as propriedades e definições de fluxo ao problema de várias fontes e vários sorvedouros. Mostre que qualquer fluxo em uma rede de fluxo com várias fontes e vários sorvedouros corresponde a um fluxo de valor idêntico na rede de fonte única e sumidouro único obtida pela adição de uma superfonte e um supersumidouro, e vice-versa

4. Suponha que uma rede de fluxo $G = (V, E)$ transgrida a hipótese de que a rede contém um caminho $s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$ para todos os vértices $v \in V$. Seja u um vértice para o qual não há nenhum caminho $s \rightsquigarrow u \rightsquigarrow t$. Mostre que deve existir um fluxo máximo f em G tal que $f(u, v) = f(v, u) = 0$ para todos os vértices $v \in V$.

5. Modelo o problema de fluxo máximo como um problema de programação linear. Explique o seu modelo.

6. O professor Adam tem dois filhos que, infelizmente, não gostam um do outro. O problema é tão grave que eles não só se recusam a ir à escola juntos mas, na verdade, cada um se recusa a passar por qualquer quadra pela qual o outro tenha passado naquele dia. Porém, eles não se importam se seus caminhos se cruzarem em uma esquina. Felizmente, a casa do professor, bem como a escola, está situada em esquina mas, fora isso, ele não tem certeza de que será possível enviar os filhos à mesma escola. O professor tem um mapa da cidade. Mostre como formular o problema de determinar se os dois filhos do professor podem frequentar a mesma escola como um problema de fluxo máximo.

7. Prove que a igualdade a seguir é válida.

$$\sum_{v \in V_1} f(s,v) - \sum_{v \in V_2} f(v,s) + \sum_{v \in V_1 \cup V_2} f^{'}(s,v) - \sum_{v \in V_1 \cup V_2} f^{'}(v,s) =$$

$$\sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) + \sum_{v \in V} f^{'}(s,v) - \sum_{v \in V} f^{'}(v,s)$$

8. Mostre a execução do algoritmo Edmonds-Karp na rede de fluxo da Figura 1.

9. Execute o algoritmo de FORD-FULKERSON na rede de fluxo na Figura 2 e mostre a rede residual após cada aumento de fluxo. Numere os vértices em L de cima para baixo, de 1 a 5, e em R de cima para baixo de 6 a 9. Para cada iteração, escolha o caminho aumentador que seja lexicograficamente menor.

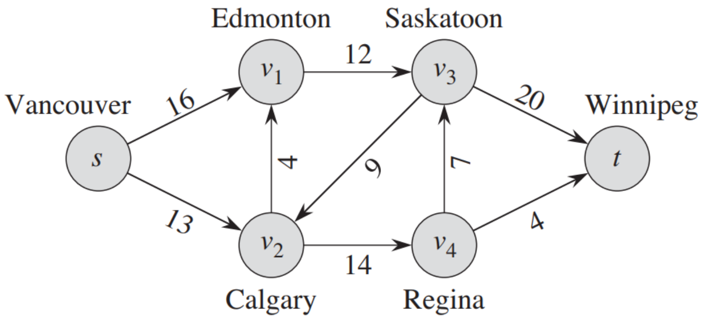

Figura 1: Fonte: Livro Algoritmos - Cormen

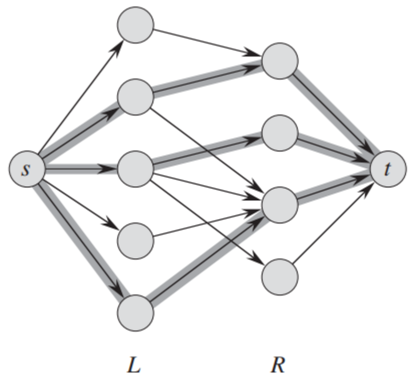

Figura 2: Fonte: Livro Algoritmos - Cormen

10. Prove o seguinte teorema: Se a função capacidade c adota somente valores inteiros, então o fluxo máximo f produzido pelo método de Ford-Fulkerson tem a seguinte propriedade: $|f|$ é um inteiro. Além disso, para todos os vértices u e v, o valor de $f(u, v)$ é um inteiro.

11. Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido com partição de vértice $V = L \cup R$ e seja $G^{'}$ sua rede de fluxo correspondente. Dê um bom limite superior para o comprimento de qualquer caminho aumentador encontrado em $G^{'}$ durante a execução de FORD-FULKERSON.

12. Certo ou errado? Se f é um fluxo máximo então não existe ciclo no qual todo arco conduz fluxo estritamente positivo.

13. Certo ou errado? Existe um fluxo máximo f tal que, para todo ciclo, f é nulo em algum arco do ciclo.

14. Considere um conjunto $P = \{p_1, ..., p_n\}$ de professores e um conjunto $D = \{d_1, ..., d_m\}$ de disciplinas e um conjunto I que representa o interesse dos professores em oferecer as disciplinas, de forma que o par ordenado $(p, d) \in I$ indica que o professor $p \in P$ tem interesse em oferecer a disciplina $d \in D$. Dados os três conjuntos, o problema é determinar o maior número de disciplinas que podem ser oferecidas simultaneamente pelo conjunto de professores, segundo seus interesses declarados. Modele o problema usando grafos e considere os seguintes casos.

    - Assuma que não há um limite superior para o número de disciplinas que um professor pode oferecer. Determine um algoritmo eficiente para o problema (dica: transforme o problema).
    - Assuma que cada professor deve oferecer no máximo uma disciplina. Determine um algoritmo eficiente para o problema (dica: transforme o problema).