Matemática Discreta

Permutações e Combinações

Professora: Lílian de Oliveira Carneiro

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

Maio de 2020

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
  - De quantas maneiras pode-se dispor 4 pessoas em fila indiana?

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
  - De quantas maneiras pode-se dispor 4 pessoas em fila indiana?
    - Pelo Princípio da Multiplicação, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de dispor as 4 pessoas em fila indiana

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
  - De quantas maneiras pode-se dispor 4 pessoas em fila indiana?
    - Pelo Princípio da Multiplicação, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de dispor as 4 pessoas em fila indiana
    - Ou seja, temos $4!$ formas de fazer isto

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
  - De quantas maneiras pode-se dispor 4 pessoas em fila indiana?
    - Pelo Princípio da Multiplicação, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de dispor as 4 pessoas em fila indiana
    - Ou seja, temos $4!$ formas de fazer isto
  - Seja n um número natural, denota-se o **fatorial** de n por $n!$, o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n, ou seja,

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
  - De quantas maneiras pode-se dispor 4 pessoas em fila indiana?
    - Pelo Princípio da Multiplicação, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de dispor as 4 pessoas em fila indiana
    - Ou seja, temos $4!$ formas de fazer isto
  - Seja n um número natural, denota-se o **fatorial** de n por $n!$, o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n, ou seja,

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \forall n \in \mathbb{N}$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
  - De quantas maneiras pode-se dispor 4 pessoas em fila indiana?
    - Pelo Princípio da Multiplicação, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de dispor as 4 pessoas em fila indiana
    - Ou seja, temos $4!$ formas de fazer isto
  - Seja n um número natural, denota-se o **fatorial** de n por $n!$, o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n, ou seja,

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \forall n \in \mathbb{N}$$

  - **Observação 1:** $0! = 1$, pois o produto vazio, isto é, o produto de nenhum número é 1

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
  - De quantas maneiras pode-se dispor 4 pessoas em fila indiana?
    - Pelo Princípio da Multiplicação, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de dispor as 4 pessoas em fila indiana
    - Ou seja, temos $4!$ formas de fazer isto
  - Seja n um número natural, denota-se o **fatorial** de n por $n!$, o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n, ou seja,

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \forall n \in \mathbb{N}$$

  - **Observação 1:** $0! = 1$, pois o produto vazio, isto é, o produto de nenhum número é 1
    Observação 2: $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- A ordenação de n objetos é chamada uma **permutação simples** de n objetos

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- A ordenação de n objetos é chamada uma **permutação simples** de n objetos
- O número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- A ordenação de n objetos é chamada uma **permutação simples** de n objetos
- O número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n
- Assim,

$$P_n = n!$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- A ordenação de n objetos é chamada uma **permutação simples** de n objetos
- O número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n
- Assim,

$$P_n = n!$$

- Uma **permutação simples** é um arranjo ordenado sem repetição

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- A ordenação de n objetos é chamada uma **permutação simples** de n objetos
- O número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n
- Assim,

$$P_n = n!$$

- Uma **permutação simples** é um arranjo ordenado sem repetição
- Note que a ordem importa

Permutações

- **Exemplo.** Seja $M = \{a, b, c\}$. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos formados por 3 elementos

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- **Exemplo.** Seja $M = \{a, b, c\}$. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos formados por 3 elementos
- São eles:

Permutações

- **Exemplo.** Seja $M = \{a, b, c\}$. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos formados por 3 elementos
- São eles:

$$(a, b, c), (b, a, c), (c, a, b), (a, c, b), (b, c, a), (c, b, a)$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- **Exemplo.** Seja $M = \{a, b, c\}$. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos formados por 3 elementos
- São eles:

$$(a, b, c), (b, a, c), (c, a, b), (a, c, b), (b, c, a), (c, b, a)$$

- Isto é:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- **Exemplo.** Seja $M = \{a, b, c\}$. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos formados por 3 elementos
- São eles:

$$(a, b, c), (b, a, c), (c, a, b), (a, c, b), (b, c, a), (c, b, a)$$

- Isto é:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

- Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO?

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- **Exemplo.** Seja $M = \{a, b, c\}$. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos formados por 3 elementos
- São eles:

$$(a, b, c), (b, a, c), (c, a, b), (a, c, b), (b, c, a), (c, b, a)$$

- Isto é:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

- Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO?
  - Cada anagrama da palavra PRÁTICO nada mais é do que uma ordenação (ou arranjo) das letras P, R, A, T, I, C, O

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- **Exemplo.** Seja $M = \{a, b, c\}$. As permutações dos elementos de M são todos os arranjos formados por 3 elementos
- São eles:

$$(a, b, c), (b, a, c), (c, a, b), (a, c, b), (b, c, a), (c, b, a)$$

- Isto é:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

- Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO?
  - Cada anagrama da palavra PRÁTICO nada mais é do que uma ordenação (ou arranjo) das letras P, R, A, T, I, C, O
  - Assim, o número de anagramas é $P_7 = 7! = 5.040$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
- De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
- De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?
  - Note que a ordem de seleção importa

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
- De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?
    - Note que a ordem de seleção importa
    - Para escolher o 1° da fila temos 5 opções

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
- De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?
  - Note que a ordem de seleção importa
  - Para escolher o 1º da fila temos 5 opções
  - Para o segundo, 4 opções

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
- De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?
  - Note que a ordem de seleção importa
  - Para escolher o 1° da fila temos 5 opções
  - Para o segundo, 4 opções
  - Para o terceiro, temos 3 opções

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere o seguinte problema:
- De quantas maneiras podemos escolher três alunos, de um grupo de cinco estudantes, para ficarem em fila para uma foto?
  - Note que a ordem de seleção importa
  - Para escolher o 1° da fila temos 5 opções
  - Para o segundo, 4 opções
  - Para o terceiro, temos 3 opções
  - Pelo Princípio da Multiplicação, há $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneiras de escolher os três estudantes de um grupo de 5 para formarem uma fila para a foto

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r $(1 \leq r \leq n)$ elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r $(1 \leq r \leq n)$ elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r $(1 \leq r \leq n)$ elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r $(1 \leq r \leq n)$ elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n}$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r $(1 \leq r \leq n)$ elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n} \cdot \underline{n-1}$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r $(1 \leq r \leq n)$ elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n} \cdot \underline{n-1} \cdot \ldots \cdot$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r $(1 \leq r \leq n)$ elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n} \cdot \underline{n-1} \cdot \ldots \cdot \underline{n-r+1}$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r $(1 \leq r \leq n)$ elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n} \cdot \underline{n-1} \cdot \ldots \cdot \underline{n-r+1}$$

Ou seja,

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r $(1 \leq r \leq n)$ elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n} \cdot \underline{n-1} \cdot \ldots \cdot \underline{n-r+1}$$

Ou seja,

$$\prod_{i=n-r+1}^{n} i = (n-r+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n =$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r $(1 \leq r \leq n)$ elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n} \cdot \underline{n-1} \cdot \ldots \cdot \underline{n-r+1}$$

Ou seja,

$$\prod_{i=n-r+1}^{n} i = (n-r+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n =$$

$$= n \cdot (n-1) \ldots \cdot (n-r+1) \cdot \frac{(n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} =$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Considere um conjunto de n elementos. Quantas permutações existem considerando r $(1 \leq r \leq n)$ elementos desse conjunto e considerando que não há repetição dos elementos?
- Observe que a ordem dos elementos importa
- Aplicando o Princípio da Multiplicação, temos:

$$\underline{n} \cdot \underline{n-1} \cdot \ldots \cdot \underline{n-r+1}$$

Ou seja,

$$\prod_{i=n-r+1}^{n} i = (n-r+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n =$$

$$= n \cdot (n-1) \ldots \cdot (n-r+1) \cdot \frac{(n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot (n-r-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Dado um conjunto com n ($n > 1$) elementos e um valor de r ($1 \leq r \leq n$), existem

Permutações: O Princípio do Arranjo

Permutações

- Dado um conjunto com n $(n > 1)$ elementos e um valor de r $(1 \leq r \leq n)$, existem

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

permutações de elementos desse conjunto considerando que não há repetição

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:
  - Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:
  - Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?
  - Lembre-se que a ordem dos elementos em um conjunto não importa. Assim,

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:
  - Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?
  - Lembre-se que a ordem dos elementos em um conjunto não importa. Assim,

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:
  - Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?
  - Lembre-se que a ordem dos elementos em um conjunto não importa. Assim,
  $$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$
  - Note que qualquer escolha de três elementos corresponde a $P(5, 3) = \dfrac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:
  - Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?
  - Lembre-se que a ordem dos elementos em um conjunto não importa. Assim,
    $$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$
  - Note que qualquer escolha de três elementos corresponde a $P(5, 3) = \dfrac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
  - Observe que estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:
  - Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?
  - Lembre-se que a ordem dos elementos em um conjunto não importa. Assim,
  $$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$
  - Note que qualquer escolha de três elementos corresponde a $P(5, 3) = \dfrac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
  - Observe que estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos
  - Como em cada combinação os elementos podem ser escritos em $P_3 = 3! = 6$ ordens, cada combinação foi contanda 6 vezes

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- Considere o seguinte problema:
  - Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que possuem apenas 3 elementos?
  - Lembre-se que a ordem dos elementos em um conjunto não importa. Assim,
  $$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$
  - Note que qualquer escolha de três elementos corresponde a $P(5, 3) = \dfrac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
  - Observe que estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos
  - Como em cada combinação os elementos podem ser escritos em $P_3 = 3! = 6$ ordens, cada combinação foi contanda 6 vezes
  - Assim, o número de subconjuntos com 3 elementos é dado por:
  $$\frac{P(5, 3)}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- **Observação 1:** $C(n, n) = 1$, pois exite apenas um subconjunto contendo todos os elementos

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- **Observação 1:** $C(n, n) = 1$, pois exite apenas um subconjunto contendo todos os elementos: o conjunto inteiro

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- **Observação 1:** $C(n, n) = 1$, pois exite apenas um subconjunto contendo todos os elementos: o conjunto inteiro
- **Observação 2:** $C(n, 0) = 1$, pois o conjunto vazio é o único subconjunto com zero elementos

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- **Observação 1:** $C(n,n) = 1$, pois exite apenas um subconjunto contendo todos os elementos: o conjunto inteiro
- **Observação 2:** $C(n,0) = 1$, pois o conjunto vazio é o único subconjunto com zero elementos
  Observação 3: Em arranjos, a ordem dos elementos importa; em seleções, não!

Combinações: O Princípio da Seleção

Combinações

- O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- **Observação 1:** $C(n, n) = 1$, pois exite apenas um subconjunto contendo todos os elementos: o conjunto inteiro
- **Observação 2:** $C(n, 0) = 1$, pois o conjunto vazio é o único subconjunto com zero elementos
  Observação 3: Em arranjos, a ordem dos elementos importa; em seleções, não!
- **Corolário.** Considere n e r inteiros não negativos com $r \leq n$. Então $C(n, r) = C(n, n-r)$

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?

Permutações Circulares

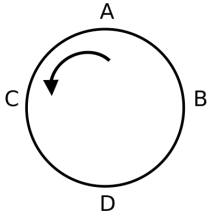
- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
  - Quando elementos são dispostos ao redor de um círculo, a cada disposição possível, chamamos de **permutação circular**

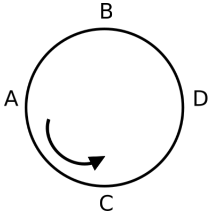
Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
  - Quando elementos são dispostos ao redor de um círculo, a cada disposição possível, chamamos de **permutação circular**
  - Duas permutações circulares são consideradas idênticas se, e somente se, quando percorremos a circunferência no sentido anti-horário a partir de um mesmo elemento das duas permutações, encontramos elementos que formam sequências iguais

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
  - Quando elementos são dispostos ao redor de um círculo, a cada disposição possível, chamamos de **permutação circular**
  - Duas permutações circulares são consideradas idênticas se, e somente se, quando percorremos a circunferência no sentido anti-horário a partir de um mesmo elemento das duas permutações, encontramos elementos que formam sequências iguais
  - Por exemplo, as seguintes sequências são iguais





Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
  - À permutação circular do exemplo, correspondem as permutações:

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
  - À permutação circular do exemplo, correspondem as permutações:

$$\begin{gathered}(A, C, D, B)\\(C, D, B, A)\\(D, B, A, C)\\(B, A, C, D)\end{gathered}$$

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
    - À permutação circular do exemplo, correspondem as permutações:

$$\begin{gathered}(A, C, D, B)\\(C, D, B, A)\\(D, B, A, C)\\(B, A, C, D)\end{gathered}$$

    - Por outro lado, no conjunto das permutações, a cada quatro permutações, corresponde uma única permutação circular. Por exemplo,

$$\begin{gathered}(A, B, D, C)\\(B, D, C, A)\\(D, C, A, B)\\(C, A, B, D)\end{gathered}$$

corresponde a uma premutação circular de (A, B, D, C)

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
  - Observe que se não considerássemos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
  - Observe que se não considerássemos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições
  - Como a cada quatro permutações, corresponde uma única permutação circular

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
    - Observe que se não considerássemos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições
    - Como a cada quatro permutações, corresponde uma única permutação circular
    - Temos que o número de formas de 4 pessoas A, B, C e D se sentar em uma mesa circular é

Permutações Circulares

- De quantas formas 4 pessoas A, B, C e D podem se sentar em uma mesa circular?
  - Observe que se não considerássemos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições
  - Como a cada quatro permutações, corresponde uma única permutação circular
  - Temos que o número de formas de 4 pessoas A, B, C e D se sentar em uma mesa circular é

$$(PC)_4 = \frac{4!}{4} = 3! = 6$$

Permutações Circulares

- Podemos calcular o número de **permutações circulares** de n $(n \geq 2)$ elementos da seguinte forma:

Permutações Circulares

- Podemos calcular o número de **permutações circulares** de n $(n \geq 2)$ elementos da seguinte forma:
  - Existem $n!$ permutações dos n elementos

Permutações Circulares

- Podemos calcular o número de **permutações circulares** de n $(n \geq 2)$ elementos da seguinte forma:
  - Existem $n!$ permutações dos n elementos
  - Existem x permutações circulares onde cada uma corresponde a n permutações

Permutações Circulares

- Podemos calcular o número de **permutações circulares** de n $(n \geq 2)$ elementos da seguinte forma:
  - Existem $n!$ permutações dos n elementos
  - Existem x permutações circulares onde cada uma corresponde a n permutações
  - Logo

Permutações Circulares

- Podemos calcular o número de **permutações circulares** de n $(n \geq 2)$ elementos da seguinte forma:
  - Existem $n!$ permutações dos n elementos
  - Existem x permutações circulares onde cada uma corresponde a n permutações
  - Logo

$$n \cdot x = n!$$

Permutações Circulares

- Podemos calcular o número de **permutações circulares** de n $(n \geq 2)$ elementos da seguinte forma:
  - Existem $n!$ permutações dos n elementos
  - Existem x permutações circulares onde cada uma corresponde a n permutações
  - Logo

$$n \cdot x = n! \Rightarrow x = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot$$

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot$$

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot$$

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot$$

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot \underline{H_5} \cdot$$

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot \underline{H_5} \cdot \underline{H_4}$$

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot \underline{H_5} \cdot \underline{H_4}$$

- Isto é, existem

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot \underline{H_5} \cdot \underline{H_4}$$

- Isto é, existem

$$P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = 17.280$$

formas de colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de tal forma que as mulheres fiquem juntas

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot \underline{H_5} \cdot \underline{H_4}$$

- Isto é, existem

$$P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = 17.280$$

  formas de colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de tal forma que as mulheres fiquem juntas
- E se não pudéssemos permutar as mulheres?

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot \underline{H_5} \cdot \underline{H_4}$$

- Isto é, existem

$$P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = 17.280$$

  formas de colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de tal forma que as mulheres fiquem juntas
- E se não pudéssemos permutar as mulheres?
  - Podemos aproveitar o cálculo anterior e "corrigir" o resultado

Permutações com Repetições

- De quantas formas é possível colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de modo que as mulheres fiquem juntas?
- Uma configuração possível é:

$$\underline{H_1} \cdot \underline{M_1 M_2 M_4 M_3} \cdot \underline{H_3} \cdot \underline{H_2} \cdot \underline{H_5} \cdot \underline{H_4}$$

- Isto é, existem

$$P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = 17.280$$

  formas de colocar 5 homens e 4 mulheres em fila de tal forma que as mulheres fiquem juntas
- E se não pudéssemos permutar as mulheres?
  - Podemos aproveitar o cálculo anterior e "corrigir" o resultado
  - Basta dividir 17.280 por $4!$

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
    - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
  - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

ANA
NAA
AAN

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
  - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

    ANA
    NAA
    AAN

  - Se tivéssemos usado $P_3 = 3! = 6$ chegaríamos a uma conclusão equivocada

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
  - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

ANA
NAA
AAN

  - Se tivéssemos usado $P_3 = 3! = 6$ chegaríamos a uma conclusão equivocada
  - Esta diminuição do número de permutações decorre do fato de termos letras iguais

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
  - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

    ANA
    NAA
    AAN

  - Se tivéssemos usado $P_3 = 3! = 6$ chegaríamos a uma conclusão equivocada
  - Esta diminuição do número de permutações decorre do fato de termos letras iguais
  - Ao calcularmos P_3 estamos considerando todas as letras como distintas:

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
    - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

ANA
NAA
AAN

    - Se tivéssemos usado $P_3 = 3! = 6$ chegaríamos a uma conclusão equivocada
    - Esta diminuição do número de permutações decorre do fato de termos letras iguais
    - Ao calcularmos P_3 estamos considerando todas as letras como distintas:

ANA*, AA*N, NAA*, NA*A, A*NA, A*AN

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
  - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

    ANA
    NAA
    AAN

  - Se tivéssemos usado $P_3 = 3! = 6$ chegaríamos a uma conclusão equivocada
  - Esta diminuição do número de permutações decorre do fato de termos letras iguais
  - Ao calcularmos P_3 estamos considerando todas as letras como distintas:

    ANA*, AA*N, NAA*, NA*A, A*NA, A*AN

  - Precisamos desfazer as permutações dos A's

Permutações com Repetições

- Quantos são os anagramas da palavra ANA?
  - Existem 3 anagramas possíveis da palavra ANA

ANA
NAA
AAN

  - Se tivéssemos usado $P_3 = 3! = 6$ chegaríamos a uma conclusão equivocada
  - Esta diminuição do número de permutações decorre do fato de termos letras iguais
  - Ao calcularmos P_3 estamos considerando todas as letras como distintas:

ANA*, AA*N, NAA*, NA*A, A*NA, A*AN

  - Precisamos desfazer as permutações dos A's

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$$

Permutações com Repetições

- Considere n elementos dos quais

Permutações com Repetições

- Considere n elementos dos quais

$$\begin{gathered} n_1 \text{ são iguais a } a_1 \\ n_2 \text{ são iguais a } a_2 \\ \vdots \\ n_r \text{ são iguais a } a_r \end{gathered}$$

Permutações com Repetições

- Considere n elementos dos quais

$$\begin{array}{c} n_1 \text{ são iguais a } a_1 \\ n_2 \text{ são iguais a } a_2 \\ \vdots \\ n_r \text{ são iguais a } a_r \end{array}$$

o número de permutação dos n elementos é

Permutações com Repetições

- Considere n elementos dos quais

$$\begin{gathered} n_1 \text{ são iguais a } a_1 \\ n_2 \text{ são iguais a } a_2 \\ \vdots \\ n_r \text{ são iguais a } a_r \end{gathered}$$

o número de permutação dos n elementos é

$$P_n^{n_1,n_2,\cdots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
  - A resposta não é $C(7,4) = 35$, pois $C(7,4)$ é o modo de escolher 4 sabores diferentes entre os 7

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
  - A resposta não é $C(7,4) = 35$, pois $C(7,4)$ é o modo de escolher 4 sabores diferentes entre os 7
  - Pode-se, por exemplo, comprar as 4 bolas do mesmo sabor

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
  - A resposta não é $C(7,4) = 35$, pois $C(7,4)$ é o modo de escolher 4 sabores diferentes entre os 7
  - Pode-se, por exemplo, comprar as 4 bolas do mesmo sabor
  - A resposta para este problema é representada por $CR(7,4)$, o número de **combinações completas** de classe 4 de 7

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
  - A resposta não é $C(7,4) = 35$, pois $C(7,4)$ é o modo de escolher 4 sabores diferentes entre os 7
  - Pode-se, por exemplo, comprar as 4 bolas do mesmo sabor
  - A resposta para este problema é representada por $CR(7,4)$, o número de **combinações completas** de classe 4 de 7
  - Portanto, $CR(7,4)$ é o número de modos de escolher 4 objetos entre 7 distintos, valendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
  - A resposta não é $C(7,4) = 35$, pois $C(7,4)$ é o modo de escolher 4 sabores diferentes entre os 7
  - Pode-se, por exemplo, comprar as 4 bolas do mesmo sabor
  - A resposta para este problema é representada por $CR(7,4)$, o número de **combinações completas** de classe 4 de 7
  - Portanto, $CR(7,4)$ é o número de modos de escolher 4 objetos entre 7 distintos, valendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez
  - Para efetuar a compra, devemos escolher valores para as variáveis $x_1, x_2, \cdots x_7$, onde cada $x_i, 1 \leq i \leq 7$, é a quantidade que vamos comprar de sorvete do sabor i

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
  - A resposta não é $C(7,4) = 35$, pois $C(7,4)$ é o modo de escolher 4 sabores diferentes entre os 7
  - Pode-se, por exemplo, comprar as 4 bolas do mesmo sabor
  - A resposta para este problema é representada por $CR(7,4)$, o número de **combinações completas** de classe 4 de 7
  - Portanto, $CR(7,4)$ é o número de modos de escolher 4 objetos entre 7 distintos, valendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez
  - Para efetuar a compra, devemos escolher valores para as variáveis $x_1, x_2, \cdots x_7$, onde cada $x_i, 1 \leq i \leq 7$, é a quantidade que vamos comprar de sorvete do sabor i
  - É claro que $x_1, x_2, \cdots x_7$ devem ser inteiros não negativos e que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$$

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
    - Assim, podemos interpretar $CR(n, p)$ de dois modos:

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
    - Assim, podemos interpretar $CR(n, p)$ de dois modos:
        1. $CR(n, p)$ é o número de modos de selecionar p objetos, **distintos ou não**, entre n objetos distintos dados

Combinações Completas

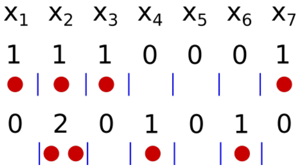
- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
  - Assim, podemos interpretar $CR(n, p)$ de dois modos:
    1. $CR(n, p)$ é o número de modos de selecionar p objetos, **distintos ou não**, entre n objetos distintos dados
    2. $CR(n, p)$ é o número de soluções inteiras, não negativas, da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
  - Assim, podemos interpretar $CR(n, p)$ de dois modos:
    1. $CR(n, p)$ é o número de modos de selecionar p objetos, **distintos ou não**, entre n objetos distintos dados
    2. $CR(n, p)$ é o número de soluções inteiras, não negativas, da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$
  - Algumas soluções possíveis são:

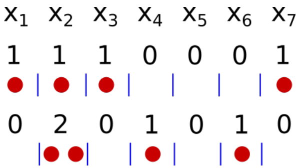
Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
  - Assim, podemos interpretar $CR(n,p)$ de dois modos:
    1. $CR(n,p)$ é o número de modos de selecionar p objetos, **distintos ou não**, entre n objetos distintos dados
    2. $CR(n,p)$ é o número de soluções inteiras, não negativas, da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$
  - Algumas soluções possíveis são:



Combinações Completas

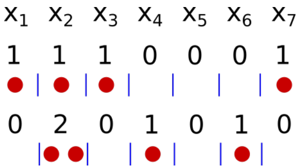
- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
    - Algumas soluções possíveis são:



    - Para formar uma representação devemos organizar em fila 4 bolas (em cada solução o total de unidades nas incógnitas 4)

Combinações Completas

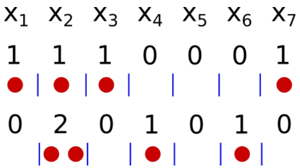
- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
  - Algumas soluções possíveis são:



  - Para formar uma representação devemos organizar em fila 4 bolas (em cada solução o total de unidades nas incógnitas 4)
  - E 6 traços (para separar 7 incógnitas, usamos 6 traços)

Combinações Completas

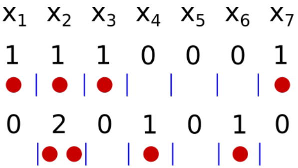
- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
  - Algumas soluções possíveis são:



  - Para formar uma representação devemos organizar em fila 4 bolas (em cada solução o total de unidades nas incógnitas 4)
  - E 6 traços (para separar 7 incógnitas, usamos 6 traços)
  - Mas, o número de modos de fazer isto é:

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
  - Algumas soluções possíveis são:



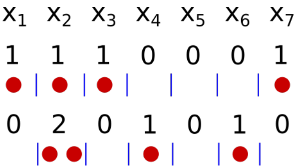
  - Para formar uma representação devemos organizar em fila 4 bolas (em cada solução o total de unidades nas incógnitas 4)
  - E 6 traços (para separar 7 incógnitas, usamos 6 traços)
  - Mas, o número de modos de fazer isto é:

$$P_{4+6}^{4,6} = \frac{10!}{4!6!}$$

Combinações

Combinações Completas

- De quantos modos é possível comprar 4 bolas de sorvete em uma sorveteria que oferece 7 sabores?
  - Algumas soluções possíveis são:



  - Para formar uma representação devemos organizar em fila 4 bolas (em cada solução o total de unidades nas incógnitas 4)
  - E 6 traços (para separar 7 incógnitas, usamos 6 traços)
  - Mas, o número de modos de fazer isto é:

$$P_{4+6}^{4,6} = \frac{10!}{4!6!} = C(10,4)$$

Combinações Completas

- Para calcular $CR(n,p)$, isto é, para determinar o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ teríamos p bolas e $n-1$ traços

Combinações Completas

- Para calcular $CR(n, p)$, isto é, para determinar o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ teríamos p bolas e $n - 1$ traços
- Logo,

Combinações Completas

- Para calcular $CR(n,p)$, isto é, para determinar o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ teríamos p bolas e $n-1$ traços
- Logo,

$$CR(n,p) = P_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C(n+p-1,p)$$

Matemática Discreta

Permutações e Combinações

Professora: Lílian de Oliveira Carneiro

Universidade Federal do Ceará
Campus de Crateús

Maio de 2020