S T Q Q S S D
L M M J V S D

①

p	q	r	¬r	p∨q	q∧¬r	(p∨q)∧(q∧¬r)
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0

Essa fórmula é satisfazível, pois existe valores nesta sentença que tornam ela verdade, ou seja, para uma sentença ser satisfazível ela precisa existir no mínimo uma valoração verdadeira.

② Temos que Cadu só será funcionário do IBGE se Rodrigo é um agente censitário supervisor, porém Rodrigo só é um agente censitário supervisor se Viviane não é uma agente censitária municipal, porém temos que, ou Helaine é uma recenseadora, ou Viviane não é uma agente censitária municipal, ou Cadu é um funcionário do IBGE. Sabemos que Cadu não é funcionário do IBGE. Então sabemos que se Rodrigo é um agente censitário supervisor, Cadu tem que ser funcionário do IBGE, como Cadu não é funcionário do IBGE, Rodrigo também não é agente censitário supervisor, então como Rodrigo não é agente censitário supervisor implica que Viviane é uma agente censitária municipal, como Helaine só pode uma recenseadora se Viviane for agente censitária municipal e Cadu não ser funcionário do IBGE, então, Helaine é uma recenseadora.

S T Q Q S S D
L M M J V S D

③ Sim, vê-se abaixo que a conclusão é de fato uma consequência lógica das premissas.

Justificativa:

Para termos um melhor entendimento vamos adotar a primeira premissa com "$R \to S$", a segunda como "$S \to P$", terceira como "$\neg P \vee R$" e a conclusão "$R \leftrightarrow S$"
Dessa forma, tendo as proposições "R", "S" e "P", suponha que a proposição "P" seja falsa, assim, $v(P)=0$. Se $v(\neg P)=1$, dessa forma, R só poderá ser verdade ou falso, pois na fórmula "$\neg P \vee R$" o "$\neg P$" já torna a fórmula verdade por si só.
Desse modo, como P é falso, então o único valor assumido por "S" que tornará essa fórmula "$S \to P$" verdadeira é $v(S)=0$, ou seja, "S" ser falso. Por consequência, o valor de "P" nesta fórmula "$P \to S$" é falso.
Dessa forma, temos que o programador nem lê a literatura técnica nem conhece o idioma inglês.
Suponhamos agora que "P" seja verdade, ou seja, $v(P)=1$. Desse modo, na fórmula "$\neg P \vee R$", "R", necessita ser verdade para que essa fórmula se mantenha verdade, ou seja, por consequência, na fórmula "$R \to S$", "S" também deve ser verdade, então $v(S)=1$ a fórmula "$S \to P$" também é verdade. Portanto o programador lê a literatura técnica e conhece o idioma inglês.
Dessa forma, concluímos que o programador lê a literatura técnica se e somente se conhece o idioma inglês.

4 a) $p \to q \vdash p \to q \vee r$

$p \to q, p \vdash q \vee r$ Teorema da dedução natural

1. $p \to q$ Premissa
2. p Premissa
3. q Modus ponens 1, 2.
4. $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q) \to r))$ Instância V_3.
5. $(r \to ((q \to r) \to (p \vee q) \to r)))$ Modus ponens 4, 2
6. $r \to (r \to (p \vee q) \to r)$ Modus ponens 5, 3.
7. r Modus ponens 6, 3, 2.
8. $q \to (q \vee r)$ Instância V_1.
9. $q \vee r$ Modus ponens 3, 8.

1 - Premissa inicialmente apresentada;
2 - Premissa obtida a partir do Teorema da dedução natural, onde $p \to q \vdash p \to q \vee r$, se e somente se, $p \to q, p \vdash q \vee r$;
3 - Modus ponens aplicado sobre a premissa $p \to q$ e a premissa p.
4 - instância do axioma V_3.
5 - Modus ponens aplicado sobre a $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q) \to r))$ e a premissa p;
6 - Modus ponens aplicado sobre a $(r \to ((q \to r) \to (p \vee q) \to r)))$ e o átomo q.
7 - Modus ponens aplicado sobre a $r \to (r \to (p \vee q) \to r)$ com o átomo que é a premissa p.
8 - instância do axioma V_1.
9 - Modus ponens aplicado sobre a $q \to (q \vee r)$ e o átomo q.

① le) $\neg p \to q \vdash \neg q \to p$

$\neg p \to q, \neg q \vdash p$ Teorema da dedução natural

1.	$\neg p \to q$	Premissas
2.	$\neg q$	Premissas
3.	$((\neg p \to q) \to q) \to (((\neg p \to q) \to \neg q) \to \neg(\neg p \to q))$	Instância ¬1.
4.	$V \to (\neg q \to \neg(\neg p \to q))$	modus ponens 1,3.
5.	$V \to V \to \neg(\neg p \to q)$	modus ponens 2,4.
6.	$\neg q \to \neg p$	Negação 5.
7.	p	modus ponens 2,6.

1- Premissa inicialmente apresentada;
2- Premissa adquirida a partir do teorema da dedução natural;
3- Instância do axioma ¬1.
4- Modus ponens aplicado sobre a $((\neg p \to q) \to q) \to (((\neg p \to q) \to \neg q) \to \neg(\neg p \to q))$ e a premissa $\neg p \to q$.
5- Modus ponens aplicado sobre a $V \to (\neg q \to \neg(\neg p \to q))$ e a premissa $\neg q$.
6- Retirada da negação da negação de $\neg p \to q$;
7- Modus ponens aplicado sobre $\neg q \to \neg p$ e a premissa $\neg q$.

⑤ a) $(a \to b) \vdash ((c \to b) \to ((a \vee c) \to \neg b))$

$T(a \to b)$ ✓

$F((c \to b) \to ((a \vee c) \to \neg b))$ ✓

$T(c \to b)$ ✓

$F((a \vee c) \to \neg b)$ ✓

$F(a \vee c)$ ✓

$T \neg b$ ✓

$F b$ ✓

$F a$ ✓

$F c$ ✓

$F c$ ✓ | $T b$ ✓ ✗

$F a$ ✓ | $T b$ ✓ ✗

✗

Após a expansão do Tableaux, tivemos que o ramo destacado ficou aberto. Isso significa que existe pelo menos uma valoração que torna $(a \to b)$ verdade e torna $((c \to b) \to ((a \vee c) \to \neg b))$ falsa. A valoração identificada no ramo aberto é: $v(a) = v(c) = v(b) = 0$. Com essa valoração v temos que:

$v(a \to b) = 1$ e $v((c \to b) \to ((a \vee c) \to \neg b))$. Logo,

$(a \to b) \nvDash ((c \to b) \to ((a \vee c) \to \neg b))$

⑤ b) $((a \land b) \to c) \vdash ((a \land \neg c) \to \neg b)$

$T((a \land b) \to c)$ ✓

$F((a \land \neg c) \to \neg b)$ ✓

$T(a \land \neg c)$ ✓

$F\, \neg b$ ✓

$T\, b$ ✓

$T\, a$ ✓

$T\, \neg c$ ✓

$F\, c$ ✓

$F(a \land b)$ ✓ | $T\, c$ ✓ ×

$F\, a$ ✓ × | $F\, b$ ✓ ×

Após a expansão de Tableaux, notamos que todos os ramos foram fechados. Como cada ramo é uma possibilidade de tornar "$((a \land b) \to c)$" verdade e tornar "$((a \land \neg c) \to \neg b)$" falso, temos que todas essas possibilidades são inviáveis. Logo, toda valoração que torna "$((a \land b) \to c)$" verdadeiro necessariamente também torna "$((a \land \neg c) \to \neg b)$" verdadeiro. Dessa maneira temos:

$$((a \land b) \to c) \vDash ((a \land \neg c) \to \neg b).$$

⑥ a) $\neg a \land \neg b \vdash \neg(a \lor b)$

$$[\neg a \land \neg b][a \lor b]^1$$

$$[\neg a]^2 [a]^4 \qquad [\neg b]^3 [b]^5 \qquad (\land E_1)^2 (\land E_2)^3 (\lor E)^{4,5}$$

$$\bot \qquad \bot$$

$$\bot \quad (\neg I)^3$$

$$\neg(a \lor b)$$

Iremos partir a partir da premissa "¬a ∧ b", através da Dedução Natural é requerido a inferência de "¬(a ∨ b)".
Inicialmente, foi suposto a hipótese "[a ∨ b]" com o intuito de a partir dela tentar realiza a inferência de um absurdo "⊥". Se esse caso for possível será possível inferir "¬(a ∨ b)".
A partir da premissa [¬a ∧ ¬b] tem-se a capacidade de supor o "[¬a]" e "[¬b]";
Dessa forma, temos com hipótese 2 a suposição de "[¬a]" no sistema.
Porém para manter a premissa "[¬a ∧ ¬b]" verdadeira tem-se que ter também o "[¬b]".
Desse modo, temos que a hipótese 3 é a suposição de "[¬b]" no sistema. Assim, torna a premissa "[¬a ∧ ¬b]" verdade, de acordo com a premissa 2.
Porém, através da suposição de "[a ∨ b]" não é capaz de concluir se tem "[a]" ou "[b]", mas tem-se pelo menos um dos dois que são necessários para chegar ao absurdo.
Desse modo, na hipótese 4 vamos supor o caso de ter-se o "[a]" isso implica em um absurdo, pois como o "[¬a] já havia sido suposto no sistema, ou seja, se tem "[¬a]" e "[a] e são válidos isso é uma contradição.

Continuação da 6 a)

Dessa forma, temos com hipótese 5 o caso onde se tem "[b]", porém como já temos "[¬b]" e as duas são válidas isso ocasiona uma contradição, chegando assim a um absurdo.
Ou seja, se supõe "a", chega a um absurdo e se supõe "b" chega a um absurdo. Dessa forma, chegamos a conclusão de que pode ser inferido um absurdo completo, pois todas as possibilidades geram absurdos.
Assim, conclui-se que tem "$\neg(a \vee b)$" quando tem a premissa "$\neg a \wedge \neg b$"

6) b) $a \to b \vdash (a \vee c) \to (b \vee c)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[a \to b]\quad [a]^2}{b}(\to E)}{b \vee c}(\vee I) \qquad \dfrac{[a \vee c]^1 \quad \dfrac{[c]^3}{b \vee c}(\vee I)}{}(\vee E)^{2,3}}{\dfrac{b \vee c}{(a \vee c) \to (b \vee c)}(\to I)^1}
$$

Iremos partir apartir da premissa "a→b", é pedido a inferência "(a∨c)→(b∨c)" através da dedução natural. Vamos começar supondo a hipótese "[a∨c]" na tentativa de a partir dela inferir "b∨c". Se caso seja possível é capaz de inferir "(a∨c)→(b∨c)".

Na suposição de "[a∨c]" é inviável concluir se o sistema irá ter "a" ou "c", porém tem que haver um dos dois.

Dessa forma, a hipótese 2 irá ser a suposição de "[a]" no sistema. Através da premissa "[a→b]", assumida como verdade, pode-se concluir que tem "b" no sistema, ou seja, também pode-se concluir a disjunção "[b∨c]", pois basta o "b" para tornar a disjunção verdadeira.

Desse modo, a hipótese 3 será a suposição de "[c]" no sistema, como "c" está no sistema podemos concluir que a disjunção "[b∨c]" é verdade, pois basta o "c" para provar sua veracidade.

Já que supomos "a", teremos "b∨c" e supomos "c", teremos "b∨c" também, como a gente tem [a∨c] tem-se que ter pelo menos um dos dois, assim pode-se garantir a inferência de "b∨c", já que todas as possibilidades satisfazem e chegam no mesmo resultado.

Portanto, se tem "(a∨c)→(b∨c)" quando tiver a premissa "a→b".